Vorlesung über Gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Wolf von Wahl

Wir verweisen auf die Vorkenntnisse aus Analysis II. Zur Einführung wiederholen wir kurz einige Begriffe und Sätze.

I. Problemstellung. Elementare Lösungsmethoden. Existenzsätze

I.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei G ein halboffenes Rechteck im $\mathbb{R}^2, G = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c < y < d\}$, wobei wir zulassen, daß $c = -\infty$ oder $d = +\infty$ ist. Sei $I = \{x|a \leq x \leq b\}$. Im Fall $c = -\infty, d = +\infty$ ist G der Streifen, der durch die Geraden — begrenzt ist.

Sei $f(x,y)$ eine über G erklärte reelle Funktion. Dann heißt die Gleichung $y' = f(x,y)$ eine (explizite) gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Diese Differentlialgleichung nennt man von 1. Ordnung, weil keine höhere Ableitung von y als die erste auftaucht.

Unter eine Lösung dieser Differentialgleichung versteht man eine Funktion $y = \varphi(x)$, die über I differenzierbar ist und für die gilt

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & c < \varphi(x) < d \\ 2) & \varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \end{array}\right\} \text{ für alle } x \epsilon I$$

Wir werden im folgenden die Frage untersuchen, ob eine Differentialgleichung stets eine Lösung besitzt, bzw. welches die Bedingungen für die Lösbarkeit einer Differentialgleichung sind, und ob eine lösbare Differentialgleichung vielleicht mehrere Funktionen als Lösung hat.

Eine entsprechendes uns bekanntes Problem ist das Aufsuchen der Lösungen einer Gleichung $p(x) = 0$, wobei $p(x)$ ein Polynom ist. Während ein Polynom über dem eindimensionalen reellen Zahlenraum erklärt ist, ist die Differentialgleichung $y' = f(x,y)$ über einem Teil des 2-dimensionalen reellen Zahlenraums $\mathbb{R}^2$ erklärt. Daher sind die Lösungen einer Polynomgleichung $p(x) = 0$ von der Dimension 0, also reelle Zahlen, und die Lösungen einer Differentialgleichung von der Dimension 1, also Kurven des $\mathbb{R}^2$, die Graph einer Funktion sind. So wie ein Polynom keine reelle Lösung, eine oder mehrere Lösungen haben kann, so gibt es auch Differentialgleichungen, die keine Lösung haben oder eine oder mehrere. Zunächst wenden wir uns einigen speziellen Differentialgleichungen zu.

I.2 Lineare Differentialgleichungen (1. Ordnung).

I.2.1 Definition: *$y' = f(x,y)$ heißt eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, wenn $f(x,y) = A(x)y + B(x)$ ist, wobei $A(x)$ und $B(x)$ stetige Funktionen über I sind. Ist insbesondere $B(x) \equiv 0$, so heißt $y' = f(x,y)$ eine homogene lineare Differentialgleichung, ist jedoch $B(x)$ nicht identisch 0, so heißt die Differentialgleichung inhomogen.*

Da $f(x,y)$ für $-\infty < y < +\infty$ erklärt ist, setzen wir $G = \{(x,y)|x\epsilon I, -\infty < y < +\infty\}$.

Wir betrachten zunächst homogen lineare Differentialgleichungen (1. Ordnung). Sei $A(x) \equiv 0$. Dann folgt $y' \equiv 0$. Lösungen sind genau die Funktionen $\varphi(x)$ mit $\varphi \equiv const. = C$, wobei C eine beliebige reelle Zahl ist. Die Gesamtheit der Löstungen ist also eine unendliche Menge. Man sieht leicht, daß durch jeden Punkt von G genau eine Lösung verläuft. Sei nun $A(x)$ nicht identisch 0. Jede Lösung φ der Differentialgleichung muß der Bedingung $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x), x\epsilon I$, genügen. $\varphi \equiv 0$ erfüllt diese Bedingung, ist also eine Lösung, die sogenannte triviale Lösung. Wir fragen nach Lösungen φ nicht identisch 0. Sei φ eine Lösung, sei $\varphi(x) > 0$ für $x\epsilon I$. Dann folgt aus $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x)$ die Gleichung

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = A(x), \text{ also } (\log\varphi(x))' = A(x),$$
$$\log\varphi(x) = \int A(x)dx + c,$$
$$\varphi(x) = \exp(\int A(x)dx + c) = c^* \exp(\int A(x)dx) \text{ mit } c^* = e^c > 0$$

Man zeigt, daß $\varphi(x) = c\exp(\int A(x)dx)$ mit jedem beliebigen $c\epsilon\mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ ist, indem man $\varphi(x)$ und $\varphi'(x) = cA(x)\exp(\int A(x)dx)$ in $y' = A(x)y$ einsetzt.

Um die Menge der Lösungen einer homogenen Gleichung besser beschreiben zu können, verwenden wir den Begriff des Vektrorraums über $\mathbb{R}$. Es ist leicht zu sehen, daß die Menge M der Lösungen φ der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden. Dabei benutzen wir natürlich wesentlich die Homogenität von $y' = A(x)y$. Für das zugehörige inhomogene Problem $y' = A(x)y + B(x)$ ist die Aussage falsch.

Wir wollen nun alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ bestimmen. Es ist bereits gezeigt worden, daß die Funktionen $\varphi(x) = c\cdot\exp(\int A(x)dx)$ Lösungen sind. Sind das alle Lösungen? Um diese Frage zu beantworten, setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\varphi_c(x) &= c\cdot\exp(\textstyle\int A(x)dx)\\
\varphi(x) &= \varphi_1(x) = \exp(\textstyle\int A(x)dx)\\
F(x) &= \textstyle\int A(x)dx.
\end{aligned}$$

Sei $x_0\epsilon I$. Dann setzen wir $\exp(F(x_0)) = \varphi(x_0) = \alpha$. Es ist $\alpha > 0$. Mit dieser Festsetzung folgt

$$\varphi_c(x_0) = c\varphi(x_0) = c\cdot\alpha\cdot$$

Wenn c ganz $\mathbb{R}$ durchläuft, so durchläuft auch $c\cdot\alpha = \varphi_c(x_0)$ ganz $\mathbb{R}$, d.h. durch jeden Punkt (x_0, y) des Streifens G geht genau eine Funktion $\varphi_c(x)$.

Es sei $\psi(x)$ eine Lösung von $y' = A(x)y$.

1. Fall: $\psi(x) > 0$ für alle $x\epsilon I$.
Es wurde bereits am Anfang der Behandlung von $y' = A(x)y$ gezeigt, daß dann $\psi(x) = \varphi_c(x)$ für ein geeignetes $c > 0$ gilt.

2. Fall: $\psi(x) \equiv 0$ für alle $x\epsilon I$.
Das ist die triviale Lösung, für die $\psi(x) = \varphi_c(x)$ mit $c = 0$ gilt.

3. Fall: $\psi(x) < 0$ für alle $x\epsilon I$.
M ist Vektrorraum über $\mathbb{R}$. Also ist auch $-\psi\epsilon M, -\psi(x) > 0, x\epsilon I$. Daher gibt es ein $c\epsilon\mathbb{R}$, so daß $-\psi(x) = \varphi_c(x)$ ist. Daraus folgt $\psi(x) = -\varphi_c(x) = \varphi_{-c}(x)$.

4. Fall: Es gibt ein $x_0\epsilon I$, so daß $\psi(x_0) = 0$ ist.
Da F in I stetig und I abgeschlossen ist, gibt es ein $a\epsilon\mathbb{R}$ derart, daß $F(x) = \int A(x)dx > a$ ist. Daher ist $\varphi(x) > e^a = r > 0$.

ψ ist stetig in I, also beschränkt. Also gibt es ein $\beta \neq 0$ mit $\beta\cdot\psi(x) < r$. Also ist

$$\varphi(x) - \beta\psi(x) > 0, x\epsilon I$$

Da $\varphi, -\beta\psi\epsilon M$ sind, ist $\varphi - \beta\psi$ eine Lösung, die zum ersten Fall gehört, und es gibt ein $c > 0$ derart, daß

$$\varphi(x) - \beta\psi(x) = \varphi_c(x), x\epsilon I$$

ist. Insbesondere gilt:

$$\varphi(x_0) - \beta\psi(x_0) = \varphi_c(x_0)$$

Da $\varphi(x_0) = \alpha, \psi(x_0) = 0$ und $\varphi_c(x_0) = c\cdot\alpha$ ist, folgt $\alpha = c\cdot\alpha$. Aus $\alpha > 0$ folgt $c = 1$. Daher ist $\varphi(x) - \beta\psi(x) = \varphi(x), x\epsilon I$. Aus $\beta \neq 0$ folgt, daß ψ identisch verschwindet.

Insgesamt haben wir bewiesen, daß alle Lösungen zum 1., 2. und 3. Fall gehören und wir können folgenden

Satz aussprechen:

I.2.2 Satz: *$\varphi(x)$ ist dann und nur dann Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' = A(x)y$, wenn $\varphi(x)$ Vielfaches von $\exp(\int A(x)dx)$ ist. Die Menge der Lösungen ist ein eindimensionaler Vektorraum.*

Wir betrachten jetzt allgemeine lineare, d.h. inhomogene, Differentialgleichungen erster Ordnung. Sei ψ eine Lösung der Differentialgleichung und φ eine Lösung der zugehörigen homogenen, so folgt durch Addition der Gleichungen $\psi'(x) = A(x)\psi(x) + B(x)$ und $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x)$, daß $\psi + \varphi$ ebenfalls eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Sind andererseits ψ_1, ψ_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung, so folgt aus $\psi_1'(x) = A(x)\psi_1(x) + B(x)$ und $\psi_2'(x) = A(x)\psi_2(x) + B(x)$ durch Subtraktion der beiden Gleichungen, daß $\psi_1 - \psi_2 = \varphi$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Es gilt also der

I.2.3 Satz: *ψ sei eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y + B(x)$ und $\{\varphi\}$ sei die Gesamtheit der Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Dann ist $\psi + \{\varphi\}$ die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.*

Es wird jetzt eine Methode angegeben, wie man eine (partikuläre) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung bestimmen kann. Diese Methode ist bekannt als der "Ansatz von Lagrange" oder die "Methode der Variation der Konstanten". Man geht von einer Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung aus, z.B. von $\varphi(x) = \exp(\int A(x)dx)$, und macht den Ansatz $\psi(x) = c(x) \cdot \varphi(x)$, wobei $c(x)$ eine differenzierbare Funktion sei. Wir wollen im folgenden $c(x)$ so bestimmen, daß $\psi(x)$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = A(x)y + B(x)$ ist. Aus $\psi = c\varphi$ folgt $\psi' = c'\varphi + c\varphi'$,

$$\begin{aligned} c'\varphi + c\varphi' &= Ac\varphi + B \\ c'\varphi + Ac\varphi &= Ac\varphi + B \\ c'\varphi &= B \end{aligned}$$

Wegen $\varphi > 0$ ist $c' = B/\varphi$, also

$$c(x) = \int \frac{B(x)}{\varphi(x)} dx + d$$

Sei $d = 0$, also

$$\psi(x) = \int \frac{B(x)}{\varphi(x)} dx \cdot \varphi(x)$$

und die Gesamtheit der Lösungen von $y' = A(x)y + B$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{B(x)}{\varphi(x)} dx \cdot \varphi(x) + c\varphi(x) \\ \psi(x) &= \left(\int B(x) e^{-\int A(\tilde{x}) d\tilde{x}} \quad dx + c \right), c \epsilon \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sowohl im Fall des homogenen als auch im Fall des inhomogenen Problems wurde die Bestimmung der Lösungen auf die Quadratur eines Integrals zurückgeführt. Daher spricht man auch bei der Bestimmung der Lösungen einer Differentialgleichung von der Quadratur der Differentialgleichung.

Beispiel: $y' = ay + b$ mit Konstanten a, b. Eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist $\varphi(x) = \exp(\int A(x)dx) = e^{ax}$. Die Lösungen der inhomogenen Gleichung sind

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left(\int \tfrac{b}{\varphi(x)} dx + c \right) \varphi(x) &&= \left(\int b e^{-ax} dx + c \right) e^{ax} \\ &= \left(-\tfrac{b}{a} e^{-ax} + c \right) e^{ax} &&= c e^{ax} - \tfrac{b}{a}, c \epsilon \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I.3 Bemoullische Differentialgleichung

I.3.1 Definition: *$y' = f(x,y)$ heißt eine Bernoullische Differentialgleichung, wenn $f(x,y) = A(x)y + B(x)y^\alpha$ ist, wobei $A(x)$ und $B(x)$ stetige Funktionen über I sind und α eine beliebige reelle Zahl bedeutet.*

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn $\alpha = 1$ ist. Dann ist nämlich $f(x,y) = A(x)y + B(x)y$. In diesem Fall ist die Bernoullische Differentialgleichung eine homogene lineare Differentialgleichung wie wir sie in I.2 behandelt haben.

Im weiteren werden wir also voraussetzen, daß $\alpha \neq 1$ ist. Definitionsgemäß bedeutet $y^\alpha = e^{\alpha \log y}$. Da $\log y$ nur für $y > 0$ erklärt ist, setzen wir

$$G = \{(x,y)|a \leq x \leq b, y > 0\}$$

Sei also φ eine Lösung, d.h. $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + B\varphi^\alpha(x)$. Nach Definition von G ist $\varphi(x) > 0, x\epsilon I$. Division durch $\varphi^\alpha(x)$ ergibt $\varphi'\varphi^{-\alpha} = A\varphi^{1-\alpha} + B$. Es ist $(\varphi^{1-\alpha})' = (1-\alpha)\varphi^{-\alpha}\varphi'$, also $(\varphi^{1-\alpha})' = (1-\alpha)(A\varphi^{1-\alpha} + B)$. Mit der Substitution $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ erhalten wir

$$\psi' = (1-\alpha)(A\psi + B)$$

Wir sehen: Ist φ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung $y' = A(x)y + B(x)y^\alpha$ mit $\alpha \neq 1$, so ist $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y' = (1-\alpha)A(x)y + (1-\alpha)B(x)$. Sei umgekehrt ψ eine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung und gelte $\psi(x) > 0, x\epsilon I$; dann gilt $\psi' = (A(x)\psi + B(x))(1-\alpha)$, woraus durch die Substitution $\varphi = \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$ folgt

$$\begin{aligned}
(\varphi^{1-\alpha})' &= (1-\alpha)A\varphi^{1-\alpha} + (1-\alpha)B \\
(1-\alpha)\varphi^{-\alpha}\varphi' &= (1-\alpha)A\varphi^{1-\alpha} + (1-\alpha)B \\
\varphi' &= A\varphi + B\varphi^\alpha
\end{aligned}$$

so daß φ Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung ist. Das Ergebnis formulieren wir im

I.3.1 Satz: *Die Gesamtheit der Lösungen φ der Bernoullischen Differentialgleichung $y' = A(x)y + B(x)y^\alpha$ mit $\alpha \neq 1$ erhält man, indem man die Gesamtheit der Lösungen ψ der inhomogenen Differentialgleichung $y' = (1-\alpha)A(x)y + (1-\alpha)B(x)$ bestimmt und für alle $\psi > 0$ die Funktion φ berechnet nach $\varphi = \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}$.*

Wir führten das Problem, die Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung zu berechnen, auf die Bestimmung der Lösungen einer inhomogenen Differentialgleichung zurück. Diese Reduktion geschah durch eine Variablentransformation. Es gelingt häufig, auf diese Weise eine Differentialgleichung in eine "einfachere" Form zu tranformieren. Eine ähnliche Methode in der Integralrechnung ist die Substitutionsmethode, wobei man ebenfalls durch eine Variablentransformation den Integranden auf eine "einfachere" Form zu bringen sucht. Für die Variablentransformation einer Differentialgleichung gilt

I.3.2 Satz: *Sei $y' = f(x,y)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Durch $x = g(u), y = h(v)$, wobei g und h umkehrbar differenzierbare Funktionen seien, möge eine Variablentransformation gegeben sein. $y = \varphi(x)$ ist dann und nur dann eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x,y)$, wenn es eine Lösung $v = \psi(u)$ der Differentialgleichung*

$$v' = f^*(u,v) = \frac{\frac{dg}{dn}(u)}{\frac{dh}{dv}(v)} f(g(u), h(v))$$

gibt derart, daß gilt

$$\varphi(x) = h \circ \psi \circ g^{-1}(x)$$

Beweis: Wir leiten zunächst die im Satz angegebenen Beziehungen durch formale Rechnung her. Aus $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ folgt durch Multiplikation mit dx die Gleichung $dy = f(x,y)dx$, ebenso folgen aus $g'(u) = \frac{dx}{du}$

und aus $h'(v) = \frac{dy}{dv}$ die Gleichungen

$$dx = g'(u)du, dy = h'(v)dv,$$

$$\begin{array}{ll} \text{Einsetzen} & \\ \Rightarrow & h'(v)dv = f(x,y)g'(u)du, \\ \text{in } dy = f(x,y)dx & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} h'(v) \neq 0 \text{ nach} & \\ \Rightarrow & \frac{dv}{du} = \frac{g'(u)}{h'(v)} f(g(u), h(v)), \\ \text{Annahme} & \end{array}$$

was mit der im Satz angegebenen transformierten Differentialgleichung übereinstimmt. Sei $v = \psi(u)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung, so folgt wegen $v = h^{-1}(y)$ und $u = g^{-1}(x)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \psi \circ g^{-1}(x), \text{ also} \\ y &= h \circ \psi \circ g^{-1}(x) \end{aligned}$$

wie im Satz angegeben. Wir dürfen diese Herleitung nicht als Beweis ansehen, dann wir haben die Differentiale $dy, dx, \ldots$ genau so behandelt als ob sie selbständige Größen seien, während eigentlich erst die Quotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dv}{dn}, \ldots$ definierte Größen sind. Der Beweis des Satzes I.3.2 soll nun in einer Richtung exakt durchgeführt werden. In der umgekehrten Richtung verläuft er ganz analog. Die Kettenregel der Differentialrechnung wenden wir in folgender Schreibweise an: Seien $\alpha(u)$ und $u = \beta(x)$ differenzierbare Funktionen, so gilt $(\alpha \circ \beta)'(x) = \alpha' \circ \beta(x) \cdot \beta'(x)$. Weiter ist

$$g^{-1'}(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'} \circ g^{-1}(x),$$

für Funktionen α und β von u und $u = \gamma(x)$ gilt

$$(\alpha \circ \gamma)(x) \cdot (\beta \circ \gamma(x)) = (\alpha \cdot \beta) \circ \gamma(x).$$

$v = \psi(u)$ sei Lösung von $v' = f^*(u, v)$. Also ist

$$\psi'(u) = f^*(u, \psi(u)) = \frac{g'(u)}{h' \circ \psi(u)} f(g(u), h \circ \psi(u))$$

Wir betrachten nun den Ausdruck $\varphi(x) = h \circ \psi \circ g^{-1}(x)$. Es ist

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= h' \circ \psi \circ g^{-1}(x) \cdot \psi' \circ g^{-1}(x) \cdot g^{-1'}(x) \\ &= h' \circ \psi \circ g^{-1}(x) \cdot \psi' \circ g^{-1}(x) \cdot \tfrac{1}{g'} \circ g^{-1}(x) \\ &= (h' \circ \psi \cdot \tfrac{\psi'}{g'} \circ g^{-1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= f^*(u, \psi(u)) \\ &= f(g(.), h \circ \psi(.)) \circ g^{-1}(x) \\ &= f(x, h \circ \psi \circ g^{-1}(x)) \\ &= f(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

φ löst also die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. □

Beispiele:
1. Wir behandeln noch einmal die Bernoullische Differentialgleichung $y = A(x)y + B(x)y^\alpha, \alpha \neq 1$, direkt nach dem Ansatz des Satzes I.3.2. Wir setzen $x = g(u) = u$, $y = h(v) = v^{\frac{1}{1-\alpha}}$ mit $v > 0$. Dann ist $g'(u) = 1, h'(v) = \frac{1}{1-\alpha} v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, also

$$\begin{aligned} v' &= (1-\alpha) v^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} [A(u) v^{\frac{1}{1-\alpha}} + B(u) v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}] \\ &= (1-\alpha) A(u) v + (1-\alpha) B(u) = f^*(u, v). \end{aligned}$$

Die Lösungen von $v' = f^*(u, v)$ seien $v = \psi(u)$. $\varphi(x)$ ist dann und nur dann Lösung, wenn es ein $v = \psi(u) > 0$ gibt derart, daß $\varphi(x) = h \circ \psi \circ g^{-1}(x) = h \circ \psi(u) = \psi^{\frac{1}{1-\alpha}}(u)$ gilt.

2. Methode der Trennung der Variablen

Die Differentialgleichung habe die Gestalt $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ mit $g(y) \neq 0$. Variablentransformation:

$$\begin{array}{lllll} u & = & F(x) & = & \text{eine Stammfunktion von } f = f(x); (F^{-1})' = \frac{1}{F'} \circ F^{-1} = \frac{1}{f} \circ F^{-1} \\ v & = & G(y) & = & \text{eine Stammfunktion von } g = g(y); (G^{-1})' = \frac{1}{g} \circ G^{-1} \end{array}$$

Die transformierte Differentialgleichung ist

$$v = \frac{(F^{-1})'}{(G^{-1})'} \cdot f(F^{-1}, G^{-1}) = \frac{g \circ G^{-1}}{f \circ F^{-1}} \frac{f \circ F^{-1}}{g \circ G^{-1}} = 1$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind $\psi(u) = u + c$, wobei $c\epsilon\mathbb{R}$ beliebig ist. Daher sind die Lösungen von $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ gegeben durch

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + c), c\epsilon\mathbb{R}$$

Auf diese Weise wollen wir $y' = \frac{x^2}{y}$ in $x > 0, y > 0$ lösen. Es ist

$$u = F(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ und } v = G(y) = \frac{1}{2}y^2,$$

also $G^{-1}(v) = \sqrt{2v}$. Damit erhalten wir als Lösungen

$$\varphi(x) = \sqrt{2\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + c^*},$$

wobei $c^* = 2c$ alle nichtnegativen reellen Zahlen durchläuft.

I.4 Die Riccatische Differentialgleichung

Wir erklären $G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$.

I.4.1 Definition: *$y' = f(x, y)$ heißt eine Riccatische Differentialgleichung, wenn $f(x, y) = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$ ist, wobei $A(x), B(x), C(x)$ stetig sind in $I = \{x | a \leq x \leq b\}$. Sind insbesondere $A(x) = bx^\alpha, \alpha$ reell, $b \neq 0, B(x) = 0$ und $C(x) = 1, x\epsilon I$, so spricht man von einer speziellen Riccatischen Differentialgleichung.*

Im Allgemeinen ist die Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung durch Integration nicht möglich. Dies gilt sogar für die meisten speziellen Riccatischen Differentialgleichungen. In diesen Fällen muß man die Lösung durch ein Näherungsverfahren bestimmen. Kennt man eine Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung, so kann man durch Quadratur auch die Gesamtheit der Lösungen bestimmen denn es gilt

I.4.2 Satz: *Sei $y = \psi(x)$ eine (partikuläre) Lösung der Riccatischen Differentialgleichung $y' = A(x) + B(x)y + C(x)y^2$. Sei $\varphi(x)$ in I differenzierbar und es gelte $\varphi(x) \neq \psi(x), x\epsilon I$. $\varphi(x)$ ist dann und nur dann Lösung der Riccatischen Differentialgleichung, wenn $\frac{1}{\varphi(x) - \psi(x)}$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $y' + (2C(x)\psi(x) + B(x))y + C(x) = 0$ ist.*

Beweis: $\frac{1}{\varphi(x) - \psi(x)}$ sei Lösung der angegebenen linearen Differentialgleichung. Diese Aussage ist äquivalent mit

$$\frac{\psi'(x) - \varphi'(x)}{(\varphi(x) - \psi(x))^2} + \frac{1}{\varphi(x) - \psi(x)}(2C(x)\psi(x) + B(x)) + C(x) = 0$$
$$\psi'(x) - \varphi'(x) + (\varphi(x) - \psi(x)) \cdot (2C(x)\psi(x) + B(x)) + C(x) \cdot (\varphi(x) - \psi(x))^2 = 0$$
$$[\psi'(x) - C(x)\psi^2(x) - B(x)\psi - A(x)] + [A(x) + B(x)\varphi(x) + C(x)\varphi^2(x) - \varphi'(x)] = 0$$

Da $\psi(x)$ die Riccatische Differentialgleichung löst, verschwindet die erste eckige Klammer identisch. Also ist diese Gleichung mit der Aussage äquivalent, daß $\varphi(x)$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung ist. Damit ist Satz I.4.2 in beiden Schlußrichtungen bewiesen.

Mit diesem Satz kennt man neben der Lösung $\psi(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung alle Lösungen $\varphi(x)$, für die gilt $\varphi(x) \neq \psi(x), x\epsilon I$. Das ist aber bereits die Gesamtheit aller Lösungen, denn wenn

$\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \epsilon I$ ist, so gilt damit $\varphi \equiv \psi$. Aus Analysis II wissen wir bereits, daß nicht nur bei Riccatischen Differentialgleichungen dieses Verhalten auftritt, sondern bei allen Differentialgleichungen, die einer sogenannten Lipschitzbedingung genügen (s. auch später in diesem Kapitel). Man berechnet also die Gesamtheit der Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung, indem man alle Lösungen $\Phi(x)$ der im Satz I.4.2 angeführten linearen Differentialgleichung und anschließend die Funktionen $\varphi(x) = \frac{1}{\Phi(x)} + \psi(x)$ bestimmt.

Das Problem liegt nun darin, **eine** Lösung $\psi(x)$ der Riccatischen Differentialgleichung zu berechnen. Im folgenden werden wir für einige Fälle diese Rechnung durchführen. Wir beschränken uns auf spezielle Riccatische Differentialgleichungen, die nach Definition I.4.1 von der Gestalt $y' = bx^\alpha + y^2$ mit $b \neq 0$ sind.

1. Fall: $\alpha = 0$, also $y' = b + y^2$. Wir setzen $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ mit $f(x) \equiv 1$ und $g(y) = 1/(b + y^2)$. Nehmen wir mit $b > 0$ an, so ist $G(y) = \frac{1}{\sqrt{b}} arctg \frac{y}{\sqrt{b}}$ eine Stammfunktion von $g(y)$ (wie man durch Differentiation nachweist). Es ist also $G^{-1}(v) = \sqrt{b} tg(\sqrt{b} v)$. Damit erhalten wir als Lösungen von $y' = b + y^2$ (s. Beispiel 2, Trennung der Variablen).

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + c) = \sqrt{b} tg[\sqrt{b}(x + c)]$$

wobei c alle reellen Variablen durchläuft.

Nehmen wir $b < 0$ an, so haben wir durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{b + y^2} = \frac{1}{y^2 - |b|} = \frac{1}{2\sqrt{|b|}} \left(\frac{1}{y - \sqrt{|b|}} - \frac{1}{y + \sqrt{|b|}} \right)$$

Demnach ist G eine log-Funktion; man gelangt daher zu einem ganz anderen Ergebnis als bei $b > 0$.

2. Fall: $\alpha = -2$, also $y' = \frac{b}{x^2} + y^2$, wobei wir $x > 0$ und $y > 0$ voraussetzen. Wir führen folgende Variablentransformation durch:

$$x = g(u) = u, y = h(v) = \frac{1}{v},$$

so daß die transformierte Differentialgleichung lautet:

$$v' = \frac{g'}{h'} f = -v^2 \left(\frac{b}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) = -b\frac{v^2}{u^2} - 1 = f^* \left(\frac{v}{u} \right), u > 0$$

Eine Differentialgleichung dieser Gestalt läßt sich immer durch eine Integration lösen; denn sei $\varphi(x)$ eine Lösung einer Differentialgleichung $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, so gilt $\varphi' = f\left(\frac{\varphi}{x}\right)$. Wir setzen $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. Es gilt $\psi'(x) = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{f(\psi(x)) - \psi(x)}{x}$. $\psi(x)$ genügt also der Differentialgleichung

$$y' = \frac{f(y) - y}{x} = \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{f}(y)}, \quad \widetilde{f}(y) = \frac{1}{f(y) - y}, \quad \widetilde{g}(x) = \frac{1}{x}$$

Genügt umgekehrt $\psi(x)$ dieser letzten Differentialgleichung, so ist $\varphi(x) = x \cdot \psi(x)$ eine Lösung von $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Wir haben also gezeigt: Die Gesamtheit der Lösungen von $y' = \frac{b}{x^2} + y^2$ läßt sich bestimmen aus der Gesamtheit der Lösungen einer Differentialgleichung $y' = \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{f}(y)}$, deren Lösungen durch die Methode der Variablentrennung berechnet werden.

3. Fall: $\alpha = -\frac{4n}{2n-1}, n = 1, 2, 3, \ldots$. Ohne Beweis sei angeführt, daß alle diese speziellen Riccatischen Differentialgleichungen quadriert werden können.

I.5. Allgemeine Typen von Differentialgleichungen

Wir behandeln zunächst gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung. Es sei G ein achsenparalleler Quader im $\mathbb{R}^{n+2} = \{(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)\}$, d.h.

$$G = \{(x, y_0, y_1, \ldots, y_n) | a \leq x \leq b, c_\nu < y_\nu < d_\nu, \nu = 0, 1, \ldots, n\} \text{ mit}$$
$$I = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

Sei $f(x, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ eine Funktion über G. Wir nennen dann die Differentialgleichung

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. $y = \varphi(x)$ heißt eine Lösung dieser Differentialgleichung, wenn $\varphi(x)$ mindestens n-Mal differenzierbar ist und wenn gilt:

$$\begin{aligned}&1) c_\nu < \varphi^{(\nu)}(x) < d_\nu, x \epsilon I, \nu = 0, 1, \ldots, n,\\ &2) f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, x \epsilon I.\end{aligned}$$

Ist eine Differentialgleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ aufgelöst, so spricht man von einer expliziten Differentialgleichung. In allen anderen Fällen nennt man die Differentialgleichung implizit. Wir haben oben die Differentialgleichung n-ter Ordnung in ihrer impliziten Form eingeführt. Es ist nicht immer möglich, eine Differentialgleichung nach ihrer höchsten Ableitung aufzulösen (Beispiel: $e^{y'} + \sin y' + y = 0$).

Als nächsten Punkt beschäftigen wir uns mit Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Es sei G ein achsenparalleler Quader im $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x, y_1, \ldots, y_n)\}$, etwa

$$\begin{aligned}&G = \{(x, y_1, \ldots, y_n) | a \leq x \leq b, c_\nu < y_\nu < d_\nu, \nu = 1, \ldots, n\} \text{ mit}\\ &I = \{x | a \leq x \leq b\}.\end{aligned}$$

Seien $f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ Funktionen über G. Wir nennen dann das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n),\\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n),\\ &\vdots\\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\end{aligned}$$

ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (1. Ordnung).
Das (n-tupel $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$) von differenzierbaren Funktionen heißt eine Lösung des Systems von Differentialgleichungen, wenn gilt

$$\begin{aligned}&1) c_\nu < \varphi_\nu(x) < d_\nu\\ &2) \varphi_\nu'(x) = f_\nu(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \text{ für } \nu = 1, \ldots, n \text{ und für } x \epsilon I\end{aligned}$$

Zur Abgrenzung des in dieser Vorlesung behandelten Stoffs gehen wir nun kurz auf partielle Differentialgleichungen ein. Alle bisher angeführten Differentialgleichungen waren gewöhnliche Differentialgleichungen. Bei diesen sind die Lösungen Funktionen einer Veränderlichen. Daneben gibt es eine andere Art von Differentialgleichungen, deren Lösungen Funktionen mehrerer Veränderlichen sind. An Stelle der "gewöhnlichen" Ableitungen y', y'' usw. in den gewöhnlichen Differentialgleichungen treten hier partielle Ableitungen $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots$ auf. Danach haben diese Differentialgleichungen den Namen partielle Differentialgleichungen erhalten. Ein wichtiges Beispiel ist die Laplacersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung heißen harmonische Funktionen. Sie sind über einem Teil des $\mathbb{R}^2$ erklärt. $y = h(x_1, x_2)$ ist eine harmonische Funktion, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und für sie gemäß der Laplaceschen Differentialgleichung gilt:

$$h_{x_1 x_1} + h_{x_2 x_2} = 0$$

In diesem Zusammenhang sei ein wichtiger Satz erwähnt.

1.5.1 Satz: *Sei G ein Gebiet des $\mathbb{R}^2$ mit glattem Rand. Auf dem Rand ∂G von G sei die Funktion $g(x_1, x_2)$ erklärt, die dort stetig ist. Dann gibt es genau eine Funktion $h(x_1, x_2)$, die in $\overline{G}$ stetig, in G harmonisch ist und für die gilt: $h(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$ auf dem Rand von G.*

Die Bestimmung von $h(x_1, x_2)$ zu einem vorgegebenen $g(x_1, x_2)$ ist als Dirichletsches Problem bekannt.

Bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung war in den Lösungen immer eine Konstante aufgetreten, die man in gewissen Grenzen variieren konnte, wodurch man alle Lösungen der Differentialgleichung erhielt. Bei der Laplaceschen Differentialgleichung variiert man die Funktion $g(x_1, x_2)$, wodurch man die in $\overline{G}$ stetigen, in G harmonischen Funktionen erhält. Da die Dimension des Vektorraums der auf dem Rande von G stetigen Funktionen $+\infty$ und also größer ist als die Dimension 1 des Vektorraums der reellen Zahlen, hat die Laplacesche Differentialgleichung mehr Lösungen als die gewöhnlichen Differentialgleichungen (1. Ordnung).

Wie ein System von partiellen Differentialgleichungen gestaltet sein kann, wollen wir an einem Beispiel sehen. Sei G eine offene Menge des $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$, über der (total) differenzierbare Funktionen $A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n)$ erklärt sind. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_{x_1} &= A_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_{x_n} &= A_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

ist ein System von partiellen Differentialgleichungen. Dieses System ist sehr einfach gebaut, da in jeder Gleichung nur eine partielle Ableitung steht und darüber hinaus die Gleichungen nach diesen Ableitungen aufgelöst sind. Eine Lösung dieses Systems ist eine Funktion $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, die über G differenzierbar ist und für die gilt

$$f_{x_\nu} = A_\nu(x_1, \ldots, x_n), \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Obiges Gleichungssystem hat nur unter besonderen Bedingungen Lösungen. Nehmen wir an, $f(x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Lösung, also $f_{x_\nu} = A_\nu$. Da die A_ν als differenzierbar vorausgesetzt wurden, folgt

$$\begin{gathered} A_{\nu x_\mu} = f_{x_\nu x_\mu} = f_{x_\mu x_\nu} = A_{\mu x_\nu} \\ A_{\nu x_\mu} = A_{\mu x_\nu}, 1 \leq \nu, \mu \leq n \end{gathered}$$

Die letzte Bedingung ist also notwendig für die Lösbarkeit des Systems. Sie heißt Integrabilitätsbedingung. Wie für dieses System, so gibt es auch für andere Systeme von partiellen Differentialgleichungen Integrabilitätsbedingungen, die für die Lösbarkeit des Systems notwendig sind. Es ist nun ein wichtiger Satz, daß etwa für sternförmiges G die Gültigkeit der Integrabilitätsbedingung auch hinreichend ist für die Lösbarkeit des obigen Systems.

I.6 Homogene gewöhnliche lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0 \text{ mit Konstanten } a, b$$

Wie in I.2 zeigt man auch hier, daß die Gesamtheit der Lösungen dieser Differentialgleichung ein Vektorraum ist. Wir werden in diesem Kapitel beweisen, daß bei jeder Wahl von a und b seine Dimension 2 ist. D.h., sind $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen dieser Differentialgleichung, dann ist die Gesamtheit der Lösungen die Funktionenmenge

$$\{\varphi(x) | \varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \text{ mit } c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R}\}.$$

Wir können uns i.f. also darauf beschränken, zwei linear unabhängige Lösungen zu berechnen. Dazu machen wir den Ansatz $y = e^{\lambda x}$, wobei wir λ so bestimmen werden, daß $y = e^{\lambda x}$ tatsächlich Lösung ist. Aus $y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ folgt durch Einsetzen in die Differentialgleichung $e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$. Daher ist $e^{\lambda x}$ genau dann Lösung, wenn λ der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ genügt. Wir haben 3 Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: $a^2 - 4b > 0$. Die quadratische Gleichung hat die zwei verschiedenen reellen Lösungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4b}\right) \end{aligned}$$

Damit haben wir gefunden: $y = e^{\lambda_1 x}$ und $y = e^{\lambda_2 x}$ sind zwei Lösungen der Differentialgleichung. Da man zeigen kann, daß diese Lösungen linear unabhängig sind, ist in diesem Fall die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung bestimmt.

2. Fall: $a^2 - 4b = 0$. Es gibt also nur ein λ, das die quadratische Gleichung löst. Es ist $\lambda = -\frac{a}{2}$. Also ist $y = e^{-\frac{a}{2}x}$ eine Lösung der Differentialgleichung. Eine zweite Lösung ist in diesem Fall $y = xe^{-\frac{a}{2}x}$. Das beweist man durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Die beiden angegebenen Lösungen sind linear unabhängig, denn aus $c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x} = 0$ für alle x folgt $c_1 + c_2 x = 0$ für alle x und hieraus $c_1 = c_2 = 0$.

3. Fall: $a^2 - 4b < 0$. Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind komplexe Zahlen. Wir könnten auch über sie zu reellen Lösungen der Differentialgleichung gelangen. Durch einen anderen Ansatz können wir den Umweg über das Komplexe jedoch vermeiden. Der Ansatz ist:

$$\begin{aligned}
y &= e^{\alpha x}\sin\beta x, \text{ also} \\
y' &= e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \\
y'' &= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + \alpha\beta\cos\beta x + \alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x)
\end{aligned}$$

Wir setzen y, y' und y'' in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{array}{lll}
e^{\alpha x} & [(\alpha^2-\beta^2)\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x + a\alpha\sin\beta x + a\beta\cos\beta x + b\sin\beta x] & = 0 \\
e^{\alpha x} & [(\alpha^2-\beta^2)\sin\beta x + a\alpha\sin\beta x + b\sin\beta x + (2\alpha\beta + a\beta)\cos\beta x] & = 0 \\
 & [(\alpha^2-\beta^2+a\alpha+b)\sin\beta x + (2\alpha\beta + a\beta)\cos\beta x] & = 0
\end{array}$$

Wir sehen: $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$ kann nur Lösung sein, wenn

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 0 \text{ und } \beta(2\alpha + a) = 0$$

sind. Die letzte Gleichung ist erfüllt für $\beta = 0$. Dann ist $y = e^{\alpha x}\sin\beta x = 0$. und wir erhalten nichts Neues. Sei also $\beta \neq 0$. Dann ist $\alpha = -\frac{a}{2}$. Aus der ersten Bedingung folgt $\beta^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = b - \frac{a^2}{4} > 0$. Also ist

$$\beta = \pm\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

und wir erhalten als Lösungen

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(x\sqrt{b-\tfrac{a^2}{4}}\right) \\
y &= e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(x\left(-\sqrt{b-\tfrac{a^2}{4}}\right)\right) \quad = \quad -e^{-\frac{a}{2}x}\sin\left(x\sqrt{b-\tfrac{a^2}{4}}\right)
\end{aligned}$$

Diese beiden Lösungen sind linear abhängig. Man erhält eine weitere linear unabhängige Lösung durch den Ansatz $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$. Eine der obigen analoge Rechnung liefert

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}\cos\left(x\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}\right).$$

Die in diesem Abschnitt diskutierte Differentialgleichung ist in der Physik von Bedeutung. Sie beschreibt eine gedämpfte harmonische Bewegung, wenn $a, b > 0$ sind. Folgende Skizzen veranschaulichen den Bewegungsablauf in den 3 Fällen.

Nachdem wir an verschiedenen Beispielen mit den Problemen der Theorie der Differentialgleichung vertraut worden sind, wenden wir uns jetzt der exakten Behandlung dieser Theorie zu. Dabei ziehen wir die Vorlesung " Analysis II" heran.

I.7. Existenzsätze

I.7.1 Satz (Picard-Lindelöf): *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x_1, \ldots, x_n)\}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig, lokal Lipochitzstetig bzgl. der n-Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Sei $(t_0, x_0)\epsilon G$. Seien $\varepsilon, \beta > 0$ und $Q = \{(t,x) | |t - t_0| \leq \varepsilon, |x - x_0| \leq \beta\} \subset G$. Sei*

$$M = \sup_{(t,x)\epsilon Q} |f(t,x)| \text{ und } \varepsilon M \leq \beta.$$

Dann existiert genau eine Lösung $x \epsilon C^1([t_0 - \varepsilon, t_o + \varepsilon], \mathbb{R}^n)$ mit $(t, x(t)) \epsilon G$ und

$$x'(t) = f(t, x(t)) \text{ für } |t - t_0| \leq \varepsilon,$$
$$x(t_0) = x_0$$

Erinnerung an den Beweis: Die Folge

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int^t f(\sigma, x_k(\sigma)) d\sigma, x_1 = x_0$$

konvergiert gegen die Lösung. Wegen $\varepsilon M \leq \beta$ ist $(t, x_k(t)) \varepsilon G$ für $|t - t_0| \leq \varepsilon$. □

I.7.2 Beispiel für globale Existenz:
Sei $[a, b] \times \mathbb{R}^n \subset G$. Sei f wie in Satz I.7.1 und linear beschränkt, d.h. $|f(t, x)| \leq A|x| + B, A, B$ fest. Dann existiert jede Lösung auf $[a, b]$.

Beweis:

1. A-priori Schranke: Sei $x(t)$ Lösung auf $[c, d] \subset [a, b]$, $r(t) = |x(t)|^2$. Dann ist

$$r'(t) = 2x(t)x'(t) = 2x(t) \cdot f(t, x(t)) \leq 2|x(t)|(|A|x(t)| + B) \leq (2A + 1)r(t) + B^2.$$

Also ist für $c \leq t, t_0 \leq d$

$$\begin{array}{lcl} [r(t)\exp(-(2A+1)t)]' & \leq & B^2 \exp(-2(A+1)t), \\ r(t)\exp(-(2A+1)t) & \leq & r(t_0)\exp(-(2A+1)t_0) + \frac{B^2}{2A+1}[\exp(-(2A+1)t_0) - \exp(-(2A+1)t)] \end{array}$$

$$r(t) \leq \left(r(t_0) + \frac{B^2}{2A+1} \right) \exp((2A+1)|t - t_0|) \leq K^2(a, b, r(t_0)) =: K^2.$$

2. Fortsetzen der lokalen Lösung: Setze $M_0 = AK + B$. Wähle $\varepsilon, \beta > 0$ so, daß $\varepsilon(M_0 + A\beta) \leq \beta$ ist, z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2A}, \beta = \frac{M_0}{A}$. Sei die Lösung $x(t)$ schon auf $[c, d]$ bekannt. Setze $y_0 = x(d - \frac{\varepsilon}{2}), t_0 = d - \frac{\varepsilon}{2}$ und löse $y' = f(x, y)$. Nach Satz I.7.1 existiert die Lösung auf $|t - t_0| < \varepsilon$, denn mit

$$Q = \{(t, y) | |t - t_0| \leq \varepsilon, |y - y_0| \leq \beta\}$$

folgt

$$\begin{array}{lcl} \sup\limits_{(t,y)\epsilon Q} |f(t, y)| & \leq & \sup\limits_{(t,y)\epsilon Q}(A|y| + B) \leq A\beta + B + A|y_0| \\ & \leq & A\beta + B + AK = M_0 + A\beta \end{array}$$

Man kommt immer um ein festes Stück ε weiter, bis man b erreicht, in der anderen Richtung ebenso. □

I.7.3 Folgerung: Ist ein lineares DGL-System gegeben mit

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t),$$

wobei $A(t)$ Matrix, $B(t)$ Vektor stetig auf $[a, b]$, so existiert die Lösung für $t_0 \epsilon [a, b]$ zu jedem Anfangswert $x_0 = x(t_0)$ auf $[a, b]$.

I.7.4 Satz (Satz vom maximalen Existenzintervall): *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}, G$ ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz I.7.1, $(t_0, x_0) \epsilon G$. Dann gibt es dazu ein eindeutig bestimmtes Intervall $I_{max} = (t_-, t_+)$, auf dem die Lösung x existiert im folgenden Sinn: Ist $\widetilde{I}$ abgeschlossen, $\widetilde{x} = \widetilde{x}_{\widetilde{I}} \epsilon C^1(\widetilde{I}, \mathbb{R}^n)$ mit $(t, \widetilde{x}(t)) \epsilon G, t \epsilon \widetilde{I}$, und*

$$\widetilde{x}'(t) = f(t, \widetilde{x}(t)) \text{ in } \widetilde{I},$$
$$t_0 \epsilon \widetilde{I}, \widetilde{x}(t_0) = x_0,$$

so folgt $\widetilde{I} \subset I_{max}$ und $\widetilde{x} = x|\widetilde{I}. t_- = -\infty$ oder $t_+ = +\infty$ sind zugelassen.

Beweis: Sei

$$I_{max} = \bigcup_{\widetilde{I} \text{ zulässig im obigen Sinn}} \overset{\circ}{\widetilde{I}}$$

Nach Satz I.7.1 handelt es sich um eine Vereinigung nicht-leerer offener Mengen. Für je zwei $\widetilde{I}_1, \widetilde{I}_2$ gilt $t_0 \epsilon \widetilde{I}_1 \cap \widetilde{I}_2$ und die zugehörigen Lösungen $\widetilde{x}_{\widetilde{I}_1}$ und $\widetilde{x}_{\widetilde{I}_2}$ stimmen auf $\widetilde{I}_1 \cap \widetilde{I}_2$ überein. Setzen wir also

$$x(t) = \widetilde{x}_{\widetilde{I}}(t) \text{ für } t \epsilon \overset{\circ}{\widetilde{I}},$$

so ist x eine eindeutig bestimmte C^1-(Vektor)funktion. Es ist noch zu zeigen, daß jedes (abgeschlossene) Intervall $\widetilde{I} = [a, b]$ (wie im Satz) in I_{max} liegt. Dazu setzen wir mit Satz I.7.1 die Lösung auf $\widetilde{I}' = [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$ fort, indem wir

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(b) &= \widetilde{x}(b) \end{aligned}$$

in $[b, b+\varepsilon]$ und

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(a) &= \widetilde{x}(a) \end{aligned}$$

in $[a-\varepsilon, a]$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ lösen. □

I.7.5 Satz: *In der Situation des Satzes I.7.4 gilt für endliches t_+ die folgende Alternative: Entweder ist*
a) $\lim\limits_{t \uparrow t_+} |x(t)| = +\infty$ *oder*
b) es gibt in I_{max} eine Folge (t_m) mit $t_m \to t_+$, $x(t_m) \to x^* \epsilon \mathbb{R}^n, m \to \infty$, und $(t_+, x^*) \epsilon \partial G$. Die Menge $\Omega = \{x^* | x^* \epsilon \mathbb{R}^n$, es gibt (t_m) mit $t_m \epsilon I_{max}$, $t_m \to t_+$, $x(t_m) \to x^*$, $m \to \infty\}$ heißt linksseitige Grenzpunktmenge. Ω ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.

Für endliches t_- sind die Aussagen entsprechend zu modifizieren. Ist $t_+ = +\infty$, so heißt Ω auch ω-Grenzpunktmenge (Analog: α-Grenzpunktmenge für $t_- = -\infty$).

Beweis: Gilt a) nicht, so existiert in I_{max} eine Folge (t_m) mit $t_m \to t_+$, $x(t_m) \to x^* \epsilon \mathbb{R}^n$, $m \to \infty$. Zu zeigen ist $(t_+, x^*) \epsilon \partial G$. Offenbar ist (t_+, x^*) Häufungspunkt von G, da die $(t_m, \underline{x(t_m)}) \epsilon G$ $\underline{\text{und } t_m} < t^+$ sind, $m \epsilon \mathbb{N}$. Also ist $(t_+, x^*) \epsilon \overline{G}$. Angenommen: $(t_+, x^*) \epsilon G$ $\underline{\text{(=offen)}} \Rightarrow \underline{\exists \delta > 0 \text{ mit }} \overline{B_\delta(t_+)} \times \overline{B_\delta(x^*)} =: \overline{U} \subset G$. $\gamma := max(1, \sup\limits_{(t,x)\epsilon \overline{U}} |f(t,x)|$. Wähle m so groß, daß $\overline{B_{\frac{\delta}{2\gamma}}(t_m)} \times \overline{B_{\frac{\delta}{2}}(x(t_m))} \subset \overline{U}$. Nach Satz I.7.1 gibt es genau eine Lösung auf $|t - t_m| \leq \frac{\delta}{2\gamma}$ von $y' = f(t, y)$ mit $y(t_m) = x(t_m)$. Also liegen alle t mit $|t - t_m| \leq \frac{\delta}{2\gamma}$ in $I_{max} \Rightarrow t_m + \frac{\delta}{4\gamma} < t_+$. Für $m \to \infty$ erhalten wir einen Widerspruch.

Ω ist abgeschlossen: Sei $x_m^* \to z$, $x_m^* \epsilon \Omega$. Wähle t_m mit $|x(t_m) - x_m^*| < \frac{1}{m} \Rightarrow x(t_m) \to z$, $m \to \infty \Rightarrow z \epsilon \Omega$. □

I.7.6 Beispiele:

(i) $n = 2, t_0 = 0, x_0 = (1, 0)^T, f(t, x) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}, G = \mathbb{R}^3$. Lösung: $x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-t} \\ 0 \end{pmatrix}, I_{max} = (-\infty, 1)$.

(ii) $n = 2, t_0 = 0, x_0 = (1; 0)^T . f(t, x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}, G = \mathbb{R}^3$. Lösung: $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, I_{max} = \mathbb{R}, t_- = -\infty, t_+ = +\infty, \Omega = \{\binom{0}{0}\}$.

(iii) Wie (ii), aber $f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Lösung: $x(t) = \binom{\cos t}{\sin t}, I_{max} = \mathbb{R}, t_- = -\infty, t_{max} = +\infty, \Omega = \{z | z \epsilon \mathbb{R}^2, |z| = 1\}$.

(iv) $n = 2, t_0 = 0, x_0 = (1, 0)^T, G = (-1, 1)^3, f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1-x_1^2} \\ \sqrt{1-x_2^2} \end{pmatrix}$. Lösung: $x(t) = \begin{pmatrix} \sin(\arcsin t + \pi/2 \\ t \end{pmatrix} . I_{max} = (-1, 1)$, also $t_+ = 1, x^* = \binom{0}{1}$ und $(1, 0, 1) \epsilon \partial G$.

I.7.7 Abschätzungslemma: *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie in Satz I.7.1. Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei I ein Intervall, sei $t_0 \epsilon I, x_i \epsilon C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $(t, x_i(t)) \epsilon G$ für alle $t \epsilon I, i = 1, 2$. Seien L, δ, ε_0 positive Zahlen. Sei*

$$|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))| \leq L |x_1(t) - x_2(t)|, t \epsilon I.$$

Es seien

$$|x_i'(t) - f(t, x_i(t))| \leq \delta, t \epsilon I, |x_1(t_0) - x_2(t_0)| \leq \varepsilon_0$$

Dann ist

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq (\varepsilon_0 + 2\delta |t - t_0|) e^{L|t - t_0|}, t \epsilon I.$$

Beweis: Sei

$$D(t) \quad = \quad (|x_1(t) - x_2(t)|^2 + \upsilon)^{\frac{1}{2}}, \upsilon > 0 \text{ und klein.}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |D'(t)| &\leq \tfrac{1}{D(t)} |(x_1'(t) - x_2'(t)) \cdot (x_1(t) - x_2(t))|, \\ &\leq |x_1'(t) - x_2'(t)| \leq 2\delta + L|x_1(t) - x_2(t)| \leq 2\delta + L \cdot D(t), t\epsilon I. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$(|D'(t)| - LD(t))e^{-L(t-t_0)} \leq 2\delta e^{-L(t-t_0)},$$

$\Rightarrow$

$$D(t)e^{-L(t-t_0)} - D(t_0) \leq 2\delta \int_{t_0}^t e^{-L(\sigma - t_0)} d\sigma, t \geq t_0$$

$$D(t) \leq D(t_0)e^{L(t-t_0)} - \tfrac{2\delta}{L}\left(e^{-L(t-t_0)} - 1\right) e^{L(t-t_0)}$$

$$= D(t_0)e^{L(t-t_0)} + \tfrac{2\delta}{L}\left(e^{L(t-t_0)} - 1\right).$$

MWS auf Klammer anwenden
$\Rightarrow$

$$D(t) \leq (D(t_0) + 2\delta|t - t_0|)e^{L(t-t_0)}$$

Im Fall $t < t_0$ führe man eine neue Variable r ein durch $\widetilde{D}(r) = D(-r), -t_0 \leq r \leq -t$. Dann entsteht

$$(\widetilde{D}'(r) - LD(r))e^{-L(r+t_0)} \leq 2\delta e^{-L(r+t_0)}$$

und wir erhalten durch Integration von $-t_0$ bis $-t$ das Ergebnis

$$D(t) \leq (D(t_0) + 2\delta|t - t_0|)e^{L|t-t_0|}$$

□

Mit $\upsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

"Lokal Lipschitzstetig" bezieht sich i.f. auf $x_1, \ldots, x_2$ oder $y_1, \ldots, y_2$.

I.7.8 Satz (stetige Abhängigkeit von den Daten): *Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie vorher. Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig, $(t_0, x_0)\epsilon G$. Sei I ein abgeschlossenes Intervall, $t_0 \epsilon I$, sei $x\epsilon C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lösung von $y' = f(t, y)$ mit $x(t_0) = x_0$. Sei für ein $\beta > 0$ der Streifen*

$$Q = \{(t, y) | t\epsilon I, |y - x(t)| \leq \beta\} \subset G.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei G' offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $G \supset \overline{G}', G' \supset Q$ Sei $g : G' \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig. Dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß die folgende Aussage gilt: Seien g wie oben,

$$\begin{gathered} |x_0 - \widetilde{x}_0| < \delta \text{ und} \\ |f(t, y) - g(t, y)| < \delta \text{ in } Q. \end{gathered}$$

Dann hat $y' = g(t, y)$ eine Lösung $\widetilde{x}\epsilon C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$. Es gilt $(t, \widetilde{x}(t))\epsilon Q, t\epsilon I$,

$$|x(t) - \widetilde{x}(t)| \leq \varepsilon, t\epsilon I.$$

Beweis: Sei L die Lipschitzkonstante von f auf Q. Sei $t_0 \epsilon \overset{\circ}{I}$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, daß $(\delta + 2\delta|t - t_0|)e^{L|t-t_0|} < \min\left\{\varepsilon, \frac{1}{2}\beta\right\}$ ausfällt. Wir wollen Satz I.7.7 anwenden. Wegen $|x_0 - \widetilde{x}_0| < \delta$ tritt δ an die Stelle von ε_0. Wir haben

$$|\widetilde{x}' - f(t, \widetilde{x}(t))| \leq |\widetilde{x}' - g(t, \widetilde{x}(t))| + |g(t, \widetilde{x}(t)) - f(t, \widetilde{x}(t))| < \delta$$

für die Lösung $\widetilde{x}$ von $y' = g(t,y)$, für die $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0(\epsilon \overset{\circ}{Q}$ nach Wahl von $\delta)$ ist, solange $\widetilde{x}$ in $\overset{\circ}{Q}$ existiert. Damit liefert Lemma I.7.7. die Abschätzung

$$|x(t) - \widetilde{x}(t)| < \min\left\{\epsilon, \frac{1}{2}\beta\right\},$$

so lange $\widetilde{x}$ in $\overset{\circ}{Q}$ existiert. Wäre das offene Existenzintervall $\widetilde{I}$ von $\widetilde{x}$ nun $\subsetneq \overset{\circ}{I}$ und maximal in $\overset{\circ}{Q}$, d.h. mit $\overset{\circ}{Q}$ statt G für $y' = g(t,y)$, so erhalten wir einen Widerspruch, da $\widetilde{x}$ beschränkt bleibt und $(t, \widetilde{x}(t)), t\epsilon\widetilde{I}$, in $\overset{\circ}{Q}$ liegt. Also ist $\overline{\widetilde{I}} = I$. Unsere Voraussetzung über G' erlaubt die Anwendung von Satz I.7.1 in der Nähe der Endpunkte von I und zeigt, daß $\widetilde{x}$ auf I existiert. Ist t_0 ein Randpunkt von I, so verfährt man analog. □

<u>Hinweis:</u> In Satz I.7.8 ist es ausreichend die Lipschitzstetigkeit von g in Q vorauszusetzen.

Wir vereinbaren, die Lösung von $y' = f(t,y)$ mit Anfangswert x_0 zur Zeit t_0 mit $x(t,t_0,x_0)$ zu bezeichnen.

Folgerung aus I.7.8: *Sei $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ gegeben. Sei I abgeschlossenes Intervall und $I \subset I_{max}$. Sei $t_0\epsilon \overset{\circ}{I}$. Dann gilt für $(\widetilde{t}_0, \widetilde{x}_0)\epsilon B_\eta(t_0,x_0) \subset G$, wenn $\eta > 0$ hinreichend klein ist, die Abschätzung*

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,\widetilde{t}_0,\widetilde{x}_0)| \leq C_I(|t_0 - \widetilde{t}_0| + |x_0 - \widetilde{x}_0|), t\epsilon I$$

mit einer von I und $\sup_{|t-t_0|\neq\eta} |f(t,x(t,t_0,x_0))|$ abhängigen positiven Konstante C_I.

Beweis: A. Sei $I = [t_0 - a, t_0 + b]$. Wir wählen ein $\widetilde{\delta} > 0$ mit

$$I \subset \widetilde{I_{\widetilde{\delta}}} := [\widetilde{t}_0 - a - \widetilde{\delta}, \widetilde{t}_0 + b + \widetilde{\delta}] \subset [t_0 - a - 2\widetilde{\delta}, t_0 + b + 2\widetilde{\delta}] \subset I_{max}$$

(nur die letzte Inklusion ist wirklich eine Forderung). Es ist

$$\begin{aligned} |x(\widetilde{t}_0) - \widetilde{x}_0| &\leq |x(\widetilde{t}_0) - x(t_0)| + |\underbrace{x(t_0)}_{=x_0} - \widetilde{x}_0| \\ &\leq M|\widetilde{t}_0 - t_0| + |x_0 - \widetilde{x}_0| =: \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Wir wenden Satz I.7.8 auf $x(t,t_0,x_0)$ und das Intervall $\widetilde{I_{\widetilde{\delta}}}$ an. $\widetilde{t}_0$ ist Anfangszeitpunkt und $f = g$. Damit folgt $x(t,\widetilde{t}_0,\widetilde{x}_0)$ existiert auf $\widetilde{I_{\widetilde{g}}}$, wenn η und somit ε_0 hinreichend klein ist.
B. Nach Satz I.7.7 ist

$$|x(t,t_0,x_0) - x(t,\widetilde{t}_0,\widetilde{x}_0)| \leq C_I\varepsilon_0, t\epsilon I$$

□

I.7.9 Satz (Differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten): *Sei G wie vorher, sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ partiell nach $x_1,\ldots,x_n$ differenzierbar. f und $\partial f/\partial x_i$ $1 \leq i \leq n$, seien stetig in G. $D_x f(t,x)$ bezeichne die Jacoli-Matrix $(\partial f_i(t,x)/\partial x_j)$. Dann ist auch die Lösung $x(t,t_0,y)$ partiell nach $y_1,\ldots,y_n$ differenzierbar, und für $(t_0,y_0)\epsilon G$ ist*

$$\upsilon_i(t) := \left(\frac{\partial}{\partial y_i}x\right)(t,t_0,y_0)$$

Lösung des DGL-Systems

$$\begin{aligned} &\upsilon' = ((D_x f)(t,x(t,t_0,y_0))\upsilon, \\ &\upsilon(t_0) = e_i = i - \textit{ter Einheitsvektor des } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

das auf $I_{max} \times \mathbb{R}^n$ definiert ist.
Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} &f(t,x_1) - f(t,x_2) = (D_x f)(t,x_2)(x_1 - x_2) + R, \\ &|R| \leq |x_1 - x_2|\varepsilon(|x_1 - x_2|) \text{ mit } \varepsilon(r) \to 0 \text{ für } r \to 0. \end{aligned}$$

Sei $h \neq 0$

$$\Delta(t,h) = \tfrac{1}{h}(x(t,t_0,y_0 + he_i) - x(t,t_0,y_0)), \text{ also } \Delta(t_0,h) = e_i.$$

Nach der Folgerung aus I.7.8 ist

$$|\Delta(t,h)| \leq C_I \text{ für } I \text{ abgeschlossen und } I \subset I_{max} \text{ und für } |h| \text{ klein.}$$

Weiter haben wir

(Δ_1) $\quad \left(\frac{d}{dt}\Delta\right)(t,h) = \frac{1}{h}(f(t,x(t,t_0,y_0+he_i))) - f(t,x(t,t_0,y_0)),$

(Δ_2) $\quad = D_x f(t,x(t,t_0,y_0))\Delta(t,h) + \frac{R}{h},$

$$|x(t,t_0,y_0+he_i) - x(t,t_0,y_0)| \le C_I|h|, |h| \text{ klein, also}$$
$$|R| \le C_I|h|\varepsilon(C_I|h|),$$

so daß

$$\left(\tfrac{d}{dt}\Delta\right)(t,h) = D_x f(t,x(t,t_0,y_0))\Delta(t,h) + \widetilde{R}(t,h)$$

entsteht mit dem Restglied $\widetilde{R}(t,h)$, das nach (Δ_1,Δ_2) stetig von t abhängt und für das auf I gilt: $|\widetilde{R}(t,h)| \le C_I\varepsilon(C_I|h|)$. Gleichzeitig ist das System

$$\upsilon_i' = D_x f(t,x(t,t_0,y_0))\upsilon_i, \upsilon_i(t_0) = e_i$$

zu betrachten. Aus I.7.7 folgt mit $f(t,y) = D_x f(t,x(t,t_0,y_0))y, \varepsilon_0 = 0, \delta = C_I\varepsilon(C_I|h|)$ die Schranke

$$|\Delta(t,h) - \upsilon_i(t)| \quad \le \quad \widetilde{C}_I\varepsilon(C_I|h|) \to 0 \text{ für } |h| \to 0,$$

so daß

$$\upsilon_i(t) \quad = \quad \frac{\partial x}{\partial y_i}(t,t_0,y_0)$$

ist. □

I.7.10 Beispiel(Kleine Schwingungen): Wir betrachten das Problem

$$x'' = -\sin x, x(0) = \varepsilon, x'(0) = 0.$$

Näherungsweise ist $\sin x = x$ für kleine x. Die Lösung von $x'' = -x$ mit $x(0) = \varepsilon, x'(0) = 0$ ist nach I.6 gerade $x(t) = \varepsilon\cos t$. Sie ist periodisch mit der von ε unabhängigen Periode 2π. In Wahrheit ist das Verhalten anders.

$$\Rightarrow \qquad y' = f(y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin y_1 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, y(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Lösung hängt beliebig oft diffbar von ε ab. $x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots + 0(\epsilon^n)$

$$\begin{array}{l}
x'(t,\varepsilon) = x_0'(t) + \varepsilon x_1'(t) + \ldots \qquad \text{z.B.: } \frac{\partial^2 x}{\partial t\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \quad (t) = x_1'(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial\varepsilon\partial t}|_{\varepsilon=0} \text{ usw.} \\
x_0(t=0) = 0 = x_2(t=0) = x_3(t=0) = \ldots; \quad x_1(t=0) = 1 \\
x_i'(t=0) = 0 \\
x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \ldots = -\sin(x(t,\varepsilon)) \\
\varepsilon = 0 \\
\Rightarrow \quad x_0'' = -\sin x_0, x_0(0) = 0 = x_0'(0), \text{ also } x_0 \equiv 0 \\
\varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \ldots = -\sin(x(t,\varepsilon)) \Rightarrow \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + \ldots = -(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3) + \frac{1}{6}\varepsilon^3 x_1^3 + 0(\varepsilon^4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\Rightarrow & x_1'' = -x_1, & \text{also } x_1(t) = \cos t \text{ nach I.6,} & x_2'' = -x_2, \text{ also } x_2 \equiv 0 \\
& x_1(0) = 1 & & x_2(0) = 0 \\
& x_1'(0) = 0 & & x_2'(0) = 0
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
x_3'' = -x_3 + \frac{1}{6}x_1^3 = -x_3 + \frac{1}{6}\cos^3 t \\
x_3(0) = 0 \\
x_3'(0) = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow x_3(t) = \frac{1}{192}(\cos t - \cos 3t) + \frac{t}{16}\sin t.$$

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon\cos t + \varepsilon^3 x_3 + 0(\varepsilon^4).$$

Wir stellen die Bedingung der Periodizität an x, x'. Ist T_ε die Periode, so soll also $x(T_\varepsilon,\varepsilon) = x(0,\varepsilon) = \varepsilon$, $x'(T_\varepsilon,\varepsilon) = x'(0,\varepsilon) = 0$ sein. Nach dem eingangs Gesagten ist es naheliegend, T_ε in der Form $T_\varepsilon = 2\pi + \rho(\varepsilon)$ anzusetzen. Im Unterschied zur linearen Approximation $x'' = -x$, $x(0) = \varepsilon$, $x'(0) = 0$, deren Lösung die

Periode 2π hatte, hängt hier die Periode von ε ab und muß bestimmt werden. Sei $h(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}x'(t,\varepsilon) = -\sin t + \varepsilon^2 x_3'(t) + 0(\varepsilon^3)$. Gesucht T_ε mit $h(T_\varepsilon,\varepsilon) = 0$. Es ist

$$\frac{\partial h}{\partial t}(2\pi,0) \neq 0, h(2\pi,0) = 0.$$

T_ε wird mit dem Satz über implizite Funktionen bestimmt. Danach ist T_ε beliebig oft differenzierbar. Ansatz:

$$\begin{aligned}
&T_\varepsilon = 2\pi + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + 0(\varepsilon^3); x'(t,\varepsilon) = -\varepsilon\sin t + \varepsilon^3\left(\tfrac{1}{192}\left(-\sin t + 3\sin 3t\right) + \tfrac{1}{16}\sin t + \tfrac{1}{16}t\cos t\right) + 0(\varepsilon^4),\\
&\Rightarrow \varepsilon\cdot\sin T_\varepsilon = \varepsilon^3(\ldots) + 0(\varepsilon^4), \sin T_\varepsilon = \varepsilon^2(\ldots) + 0(\varepsilon^3),\\
&\sin T_\varepsilon = \varepsilon^2(\ldots) + 0(\varepsilon^3), \sin(\varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + 0(\varepsilon^3)) = \varepsilon^2(\ldots) + 0(\varepsilon^3),\\
&\varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + 0(\varepsilon^3) = \varepsilon^2(\ldots) + 0(\varepsilon^3), \text{ also } \rho_1 = 0 \text{ und}\\
&\rho_2 = \text{ Nullter Koeffizient der Potenzreihe } \tfrac{1}{192}\left(-\sin T_\varepsilon + 3\sin 3T_\varepsilon\right) + \tfrac{1}{16}\sin T_\varepsilon + \tfrac{1}{16}T_\varepsilon\cos T_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Setzen wir rechts den Potenzreihenansatz für T_ε ein und lassen ε gegen 0 streben, so folgt

$$\rho_2 = \frac{1}{16}\cdot 2\pi, T_\varepsilon = 2\pi\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{16} + 0\left(\varepsilon^3\right)\right).$$

I.7.11 Satz (Differentiation nach Parametern: *Sei $P \subset \mathbb{R}^k$ ein Parameterbereich (z.B. eine offene Menge, ein abgeschlossener Quader). $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sei wie vorher. $f : G \times P \to \mathbb{R}^n$ sei partiell stetig differenzierbar nach $x_1,\ldots,x_n,p_1,\ldots,p_k$. Dann ist auch die Lösung $x(t) = x(t,t_0,x_0,p)$ von $x' = f(t,x,p)$ stetig nach $p_1,\ldots,p_k$ differenzierbar und*

$$z(t) := \frac{\partial x}{\partial p_j}(t,t_0,x_0,p_0)$$

löst für $p_0\epsilon P$ das DGL-System

$$\begin{aligned}
z'(t) &= D_x f(t,x(t,t_0,x_0,p_0),p_0)z(t) + \tfrac{\partial f}{\partial p_j}(t,x(t,t_0,x_0,p_0),p_0)\\
z(t_0) &= 0
\end{aligned}$$

Beweis: Setze $y = (x,p)\epsilon\mathbb{R}^{n+k}$. Definiere auf $G\times P : \widehat{f}(t,y) = (f(t,x,p),0,\ldots,0)$, so daß $\widehat{f} : G\times P \to \mathbb{R}^{n+k}$. Löse $y' = \widehat{f}(t,y)$ mit $y(t_0) = y_0 = (x_0,p_0)$. Es ist $y(t,t_0,y_0) = (x(t,t_0,x_0,p_0),p_0)$ die eindeutig bestimmte Lösung dieses Problems. Nach Satz I.7.9 ist $y(t,t_0,y_0)$ partiell stetig differenzierbar nach jeder Komponente des Anfangswerts und $\frac{\partial y}{\partial p_j}(t,t_0,y_0)^T$ löst

$$\begin{aligned}
v'(t) &= D_y\widehat{f}(t,y(t,t_0,y_0))v(t) \text{ mit dem Anfangswert}\\
v(0) &= e_{n+j}.
\end{aligned}$$

Nun ist $\frac{\partial y(t,t_0,y_0)}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x}{\partial p_j}(t,t_0,x_0,p_0),e_j\right)^T$

$$D_y\widehat{f}(t,y) = \begin{pmatrix} D_x f(t,x,p) & D_p f(t,x,p)\\ & \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{aligned}
z'(t) &= D_x f(t,x(t,t_0,x_0,p_0),p_0)z(t) + \tfrac{\partial f}{\partial p_j}(t,x(t,t_0,x_0,p_0),p_0),\\
z(t_0) &= 0.
\end{aligned}$$

□

I.7.12 Lineare Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $A\epsilon C^0(I,\mathbb{R}^{n^2})$, $b\epsilon C^0(I,\mathbb{R}^n)$, I ein Intervall. Bekanntlich gilt: $\mathcal{L} = \{x\epsilon C^1(I,\mathbb{R}^n) | x'(t) = A(t)x(t)\}$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$ der Dimension n. Die Lösungen $x(t,t_0,x_0^i)$, $1 \le i \le n$, $t_0\epsilon I$, bilden dann und nur dann eine Basis in $\mathcal{L}$, wenn die x_0^i, $1 \le i \le n$, ein Basis des $\mathbb{R}^n$ bilden. Es ist

$$x(t,t_0,x_0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x(t,t_0,x_0^i), \text{ falls } x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_0^i.$$

I.7.12.1 Definition: *Ist $\{x(t,t_0,x_0^i) | 1 \le i \le n\}$ Basis in $\mathcal{L}$ und $\phi(t)$ die Matrix, die durch spaltenweise Anordnung entsteht, so heißt $\phi(t)$ Fundamentalmatrix.*

$\phi(t)$ ist regulär in I, denn wären die Spalten von $\phi(t)$ in $\widetilde{t}\epsilon I$ linear abhängig, so wäre

$$0 = x(\widetilde{t}, t_0, x_0) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\alpha_i} x(\widetilde{t}, t_0, x_0^i)$$

für ein n-Tupel $(\widetilde{\alpha_1}, \ldots, \widetilde{\alpha_n}) \neq 0$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist $x(t, t_0, x_0) = 0$ in I, und die x_0^i sind linear abhängig. Offenbar gilt

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t).$$

Mit dieser Bezeichnung folgt $x(t, t_0, x_0) = \phi(t)\alpha$. Da $x_0 = \phi(t_0)\alpha$ ist, ist $\alpha = \phi(t_0)^{-1}x_0$, und wir erhalten

$$x(t, t_0, x_0) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}x_0.$$

Jedes $U(t, t_0) = \phi(t)\phi(t_0)^{-1}$ heißt Übergangsmatrix. Sie ist eindeutig bestimmt und hängt nicht von der Auswahl der Fundamentalmatrix ab.

I.7.12.2 Satz: *Sind $\phi(t)$ und $\psi(t)$ Fundamentalmatrizen in I, so gibt es ein reguläres C mit*

$$\phi(t) = \psi(t) \cdot C, t\epsilon I$$

Es gilt

$$\det \psi(t) = \det \psi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \text{ spur } (A(\sigma)) d\sigma \right), t, t_0 \epsilon I.$$

Beweis: Zur zweiten Behauptung seien $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ die Spalten von $\psi(t)$, d.h. $x_j'(t) = A(t)x_j(t)$ und

$$x_{ij}'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_{kj}(t).$$

Schreiben wir eine von t abhängige differenzierbare $n \times n$-Matrix als Funktion ihrer Zeilen in der Form $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, so liefert die Multilinearität der Determinante die Formel

$$\left(\det \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)' = \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i' \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \ldots x_n)$ ist, wenn jede Determinante in der Summe nach den Elementen von y_i' entwickelt wird

$$\begin{aligned} (\det \psi(t))' = \left(\det \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right)' &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} x_{ij}'(t) \det \begin{matrix} +i \\ j \end{matrix}, \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t) x_{kj}(t) \det \begin{matrix} +i \\ j \end{matrix} \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(t) \det \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{i-1} \\ y_k \\ y_{i+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \text{ spur } A(t) \det \psi(t) \end{aligned}$$

$$= 0 \text{ für } k \neq i$$

Satz I.2.2 liefert die zweite Behauptung. Zur ersten: Folgt aus $\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = \Psi(t)\Psi(t_0)^{-1}$. $\square$

I.7.12.3 Hilfssatz: *Sei $A(t)$ wie vorher, sei $S\epsilon C^1(I, \mathbb{R}^{n^2}), S(t)$ sei regulär, $t\epsilon I$. $x(t)$ löst $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ dann und nur dann, wenn $y(t) = S^{-1}(t)x(t)$ die Differentialgleichung*

$$y'(t) = S^{-1}(t)[A(t)S(t) - S'(t)]y(t) + S^{-1}(t)b(t)$$

löst.

Beweis: $x(t) = S(t)y(t) \Rightarrow x' = S'y + Sy'$, $Ax + b = S'y + Sy'$, $Sy' = ASy - S'y + b$, $y' = S^{-1}(AS - S')y + S^{-1}b$. $\square$
Nun wählen wir $S(t)$ geeignet, nämlich $A(t)S(t) = S'(t)$ und $S(t)$ regulär, d.h.$S(t) = \Phi(t)$ Fundamentalmatrix. Dann ist

$$\begin{aligned} y' &= \Phi^{-1}(t)b(t), \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(\sigma)^{-1}b(\sigma)d\sigma \\ x(t) &= \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi(\sigma)^{-1}b(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Damit schreibt sich die Lösung des inhomogenen Problems $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ als

$$x(t, t_0, x_0) = U(t, t_0)x + \textstyle\int_{t_0}^{t} U(t, \sigma)b(\sigma)d\sigma$$

Betrachten wir den Spezialfall $A(t) \equiv A$. Sei

$$\begin{aligned} \Phi_N(t) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} t^k A^k, \text{ also} \\ \Phi'_N(t) &= A\Phi_{N-1}(t) \end{aligned}$$

Da die Φ_N in $C^0(I, \mathbb{R}^{n^2})$ konvergieren, folgt für den limes Φ die Differentialgleichung

$$\Phi'(t) = A\Phi(t).$$

Sei

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k, t\epsilon\mathbb{R}.$$

Dann ist $e^{tA}e^{-tA} = E = (nxn)$-Einheitsmatrix und $\Phi(t) = e^{tA}$ eine Fundamentalmatrix mit $\Phi(t)^{-1} = \Phi(-t)$. Für konstantes $A(t) = A$ ergibt sich daher die Lösungsformel

$$x(t, t_0, x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\sigma)A}b(\sigma)d\sigma.$$

Wie berechnet man e^{tA}? Das charakteristische Polynom $\det(A - zE)$ über $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ zerfalle dort in Linearfaktoren. Dann gibt es eine reguläre Matrix S derart, daß

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix} \text{ ist mit Jordanmatrizen } J_1, \ldots, J_m.$$

Die Diagonalelemente der Jordanmatrizen $J_1, \ldots, J_m$ sind die Eigenwerte von A, doch können verschiedene Jordanmatrizen zum selben Eigenwert gehören. Die Jordanmatrizen J_μ, $1 \le \mu \le m$, haben die Gestalt $\lambda E + N$ mit $N = (n_{ij})$, $n_{ij} = 1$, falls $j = i + 1$ und $n_{ij} = 0$ sonst, d.h.

$$J_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_\mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_\mu \end{pmatrix}.$$

Damit ist $S^{-1}A^kS = J^k$ und $S^{-1}e^{tA}S = e^{tJ}$, also

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}.$$

Es ist

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & & & 0 \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m^k \end{pmatrix}, \text{ also } e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & 0 \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}.$$

Berechnen wir $J_\mu^k = (\lambda E + N)^k$. Da λE mit N vertauscht, folgt

$$J_\mu^k = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \lambda^{k-\nu} N^\nu,$$

$$(J_\mu^k)_{ij} = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \lambda^{k-\nu} \delta_{i+\nu j} = \binom{k}{j-i} \lambda^{k-j+i}, 0 \leq j-i \leq k,$$

$$(J_\mu^k)_{ij} = 0 \text{ sonst.}$$

Demnach ist

$$(e^{tJ_\mu})_{ij} = \textstyle\sum_{k=0}^\infty \frac{t^k}{k!} (J_\mu^k)_{ij} = \sum_{\substack{k=0, \\ j-i \leq k,}}^\infty \frac{t^k}{k!} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-j+i} \text{ für } j \geq i,$$
$$(e^{tJ_\mu})_{ij} = 0 \text{ für } j < i,$$
$$(e^{tJ_\mu})_{ij} = \tfrac{t^{j-i}}{(j-i)!} \textstyle\sum_{k=j-i}^\infty \frac{1}{(k-j+i)!} t^{k-j+i} \lambda^{k-j+i} = \frac{t^{j-i}}{(j-i)!} e^{t\lambda}, j \geq i,$$
$$= 0, j < i.$$

Also hat die Matrix e^{tJ_μ} folgendes Aussehen:

$$e^{tJ_\mu} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & & & \cdots & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{t\lambda} & te^{t\lambda} & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & e^{t\lambda} \end{pmatrix}$$

so daß $|e^{tA}x| \leq p(|t|)e^{-\beta t} \cdot |x|$ entsteht. p ist ein Polynom mit positiven Koeffizienten und $-\beta = \max\{Re\lambda | \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$.

I.7.12.4 Satz: *Ist $-\beta < 0$, so gilt für alle Lösungen von $x'(t) = Ax(t) + b(t)$ die Beziehung*

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, \widetilde{t_0}, \widetilde{x_0})| \to 0 \textit{ für } t \to \infty$$

Beweis: Aus $x(t, t_0, x_0) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\sigma)A}b(\sigma)d\sigma$ folgt

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, \widetilde{t_0}, \widetilde{x_0})| \leq |e^{tA}(e^{-t_0A}x_0 - e^{-\widetilde{t_0}A}\widetilde{x_0})| + |\textstyle\int_{t_0}^{\widetilde{t_0}} e^{tA}e^{-sA}b(s)ds| \leq cp(|t|)e^{-\beta t}$$

□

I.7.12.5 Klassifikation für n=2:

$$A = \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix}.$$

Im Fall $n = 2$ lassen sich die Lösungen von $x' = Ax$ darstellen als Kurven, mit Ausnahme der stationären (oder singulären) Punkte. Das sind diejenigen x_0, für die $Ax_0 = 0$ ist. Ist $\widetilde{x_0}$ ein Vektor mit $A\widetilde{x_0} \neq 0$, so läuft $x(t, t_0, \widetilde{x_0})$ nie durch einen stationären Punkt, da wegen der Eindeutigkeit der Lösung sonst $x(t, t_0, \widetilde{x_0})$ beständig gleich diesem stationären Punkt sein müßte. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $A\widetilde{x_0} \neq 0$.

Wir behandeln den Fall, daß A regulär ist.

Fall 1: Die Matrix A hat zwei reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. In diesem Fall existiert sogar ein reelles reguläres S mit

$$y = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir $x = Sy$, so folgt $(c_1 \neq 0)$

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y, \quad \begin{array}{rclrcl} y_1' & = & \lambda_1 y_1, & y_1 & = & c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2' & = & \lambda_2 y_2, & y_2 & = & c_2 e^{\lambda_2 t} \end{array}$$

$$y_2 \quad = \quad c_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\lambda_1 t} = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \overset{c_1>0}{=} \frac{c_2}{(c_1)^{\lambda_2/\lambda_1}} y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{ und } y_2 \overset{c_1<0}{=} \frac{c_2}{(|c_1|)^{\lambda_2|\lambda_1}} |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

usw. Man erhält nachstehendes Bild und sagt, der stationäre Punkt $(0,0)^T$ sei ein Sattelpunkt.

Fall 2: Die Matrix A hat zwei reelle Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$ oder $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$. Sei zunächst $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$. Es existiert ein reelles reguläres S mit

$$I = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Es ist wie oben

$$y_2 = c y_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad c_1 > 0 \text{ und } y_2 = c|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad c_1 < 0$$

usw. Wir erhalten folgendes Bild, wenn etwa $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ ist.

Man sagt, der stationäre Punkt $(0,0)^T$ sei ein Knotenpunkt.

Sind $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, so erhalten wir die umgekehrten Pfeilrichtungen.

Fall 3: Die Matrix A hat zwei konjugiert komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ mit } \beta \neq 0.$$

Ohne Beweis sei erwähnt, daß man ein reelles reguläres S finden kann derart, daß

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

ist. Hinweis: $Ax = (\alpha + i\beta)x$, $x = x_R + ix_I \Rightarrow$ man nimmt $S = (x_R x_I)$. Es entsteht

$$\begin{array}{rcl} y_1' & = & \alpha y_1 + \beta y_2 \\ y_2' & = & -\beta y_1 + \alpha y_2 \end{array}$$

Ansatz:

$$y(t) = r(t)(\cos\varphi(t) \sin\varphi(t))^T$$

$$\Rightarrow \quad r' = \alpha r, \varphi' = -\beta$$

$$\Rightarrow \quad r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \varphi(t) = -\beta t + \varphi_0$$

Damit erhält man folgendes Bild

Man sagt, der stationäre Punkt $(0,0)^T$ sei ein Strudelpunkt.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \beta < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r(t) \equiv r_0,\\ r(t) \equiv r_1,\end{array}$$

Bild wie nachstehend. Man sagt, der stationäre Punkt $(0,0)^T$ sein ein Wirbelpunkt.

I.7.12.6 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung für eine Funktion:

Wir betrachten Ausdrcke

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)}$$

mit Funktionen $a_k \epsilon C^0(I,\mathbb{R})$, $1 \le k \le n-1$, $a_n(t) \equiv 1$, über einem Intervall I. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} Ly = b\\ \text{für ein } y\epsilon C^n(I,\mathbb{R})\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x' = Ax + \widehat{b} \text{ mit}\\ x = \begin{pmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ y^{n-1}\end{pmatrix}, \widehat{b} = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ b\end{pmatrix}\\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & 1\\ -a_0 - a_1 & \dots & & -a_{n-1}\end{pmatrix}\end{array}$$

Infolgedessen gilt

$$\begin{array}{l}\mathcal{L} = \{y | y\epsilon C^n(I,\mathbb{R}), Ly = 0\} \text{ ist } n\text{-dimensionaler Vektorraum}\\ \mathcal{L}_b = \{y | y\epsilon C^n(I,\mathbb{R}), Ly = b\} = y_{part} + \mathcal{L}.\end{array}$$

Sei eine Basis $y_1, \dots, y_n$ von £ gegeben. Dann ist die Wronski-Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n\\ y_1' & \dots & y_n'\\ & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

regulär. Nach Satz I.7.12.2 ist

$$\det W(t) = \det W(t_0) \exp(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\sigma) d\sigma).$$

II. Periodische Lösungen linearer Systeme

Wir betrachten das System $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$. $A(t)$ sei periodisch mit der Periode $w > 0$, d.h. $A(t+w) = A(t)$, $t\epsilon\mathbb{R}$. Zunächst untersuchen wir wieder die homogene Gleichung: Ist $x(t)$ Lösung von $x'(t) = A(t)x(t)$, so auch $\widetilde{x}(t) := x(t+kw)$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, da $\widetilde{x}'(t) = x'(t+kw) = A(t+kw)x(t+kw) = A(t)\widetilde{x}(t)$.

Insbesondere ist mit $\Phi(t)$ auch $\Phi(t+w)$ eine Fundamentalmatrix und wir erhalten nach I.7.12.2, daß

$$\Phi(t+w) = \Phi(t) \cdot C$$

ist mit einer regulären Matrix C. C heißt **Monodromiematrix**. Ist $\Psi(t)$ ebenfalls Fundamentalmatrix, so ist

$$\begin{aligned}
\Psi(t+w) &= \Psi(t) \cdot \widetilde{C} \text{ und } \Psi(t) = \Phi(t) \cdot T \\
\Psi(t+w) &= \Phi(t+w) \cdot T = \Phi(t)CT \\
&= \Psi(t)T^{-1}CT
\end{aligned}$$

mit regulären Matrizen $\widetilde{C}, T$. Erste und dritte Zeile liefern

$$\widetilde{C} = T^{-1}CT$$

Demnach sind sich alle Monodromiematrizen ähnlich. Doch gilt hiervon auch die Umkehrung: Ist C Monodromiematrix, $\widetilde{C} \sim C$, so ist mit T aus $\widetilde{C} = T^{-1}CT$ auch $\Phi(t)T$ Fundamentalsystem und $\widetilde{C}$ Monodromiematrix zu $\Phi(t)T$.

Die Eigenwerte der Monodromiematizen sind demnach universell. Sie heißen **charakteristische Multiplikatoren.**

II.1. Satz: *$x'(t) = A(t)x(t)$ mit $A(t)$ $w-$periodisch besitzt genau dann eine nichtriviale Lösung $x(t)$ mit $x(t+w) = \lambda_0 x(t)$, wenn λ_0 charakteristischer Multiplikator ist.*

Beweis:

A. $x'(t) = A(t)x(t)$ besitze nichttriviale Lösung wie im Satz angegeben.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad x(t) &= \Phi(t)z_0, \quad 0 \neq z_0 = \Phi(0)^{-1}x_0 \text{ mit } x_0 = x(0), \\
x(t+w) &= \Phi(t+w)z_0 = \Phi(t)Cz_0 \text{ mit irgendeiner Monodromiematrix C}, \\
& \Phi(t)(Cz_0 - \lambda_0 z_0) = 0, \quad Cz_0 - \lambda_0 z_0 = 0.
\end{aligned}$$

B. Sei λ_0 charakteristischer Multiplikator, so daß ein $z_0 \neq 0$ existiert mit $Cz_0 = \lambda_0 z_0$. Dann ist $x(t) := \Phi(t)z_0$ Lösung, die nichttrivial ist. Es ist $x(t+w) = \Phi(t+w)z_0 = \Phi(t)Cz_0 = \lambda_0\Phi(t)z_0 = \lambda_0 x(t)$.

□

Korollar zu Satz II.1: *Es gibt genau dann eine nichttriviale $w-$periodische Lösung, wenn 1 charakteristischer Multiplikator ist. Dies sind genau die Lösungen $x(t,0,x_0)$, für die x_0 Eigenvektor von $U(w,0)$ ist zum Eigenwert 1.*

Beweis:
Der erste Teil ist klar. Zum zweiten: Zunächst ist $U(w,0) = \Phi(w)\Phi(0)^{-1}$ Mondromiematrix, denn es ist

$$\begin{aligned}
\Phi(t+w) &= \Phi(t)C, \\
U(t+w,t) &= \Phi(t+w)\Phi(t)^{-1}, \\
&= \Phi(t)C\Phi(t)^{-1}, \\
U(w,0) &= \Phi(0)C\Phi(0)^{-1}
\end{aligned}$$

Es ist $x(t,0,x_0) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}x_0$, $x(t+w,0,x_0) = \Phi(t+w)\Phi(0)^{-1}x_0 = \Phi(t)C\Phi(0)^{-1}x_0$ und somit

$$\begin{aligned}
x(t,0,x_0) &= x(t+w,0,x_0) \Leftrightarrow \Phi(0)^{-1}x_0 = C\Phi(0)^{-1}x_0, \\
\Leftrightarrow x_0 &= \Phi(0)C\Phi(0)^{-1}x_0, \\
&= U(w,0)x_0.
\end{aligned}$$

$\square$

II.2 Satz (Satz von Floquet): *Beim System $x'(t) = A(t)x(t)$ sei $A(t)$ $w-$periodisch. Dann kann jede Fundamentalmatrix in der Form*

$$\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$$

geschrieben werden, wobei $P(t)$ aus $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n^2})$, w-periodisch und regulär ist; R ist eine konstante Matrix. R ist nicht eindeutig, aber für die Eigenwerte μ_j von R gilt stets

$$Re\mu_j = \frac{1}{w} \ln |\lambda_j|$$

bei geeigneter Anordnung, wobei λ_j die charakteristischen Multiplikatoren durchluft.

Bemerkung zum Satz von Floquet: Die Transformation $x(t) = P(t)y(t)$ ergibt für eine Lösung $x(t)$ von $x'(t) = A(t)x(t)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&x'(t) = P'(t)y(t) + P(t)y'(t), \quad A(t)x(t) = P'(t)y(t) + P(t)y'(t) \\
&P(t)y'(t) = A(t)P(t)y(t) - P'(t)y(t)
\end{aligned}$$

Nach Satz II.2 ist außerdem $\Phi'(t) = P'(t)e^{Rt} + P(t)Re^{Rt}$ und $A(t)P(t) = A(t)\Phi(t)e^{-Rt}$, also

$$\begin{aligned}
P'(t) &= \Phi'(t)e^{-Rt} - P(t)R \\
P(t)y'(t) &= A(t)P(t)y(t) - \Phi'(t)e^{-Rt}y(t) + P(t)Ry(t), \\
&= \underbrace{\left(A(t)\Phi(t)e^{-Rt} - \Phi'(t)e^{-Rt}\right)}_{\substack{=0 \text{ wegen } \Phi(t) \\ \text{Fundamentalmatrix}}} y(t) + P(t)Ry(t), \\
P(t)y'(t) &= P(t)Ry(t), \quad y'(t) = Ry(t).
\end{aligned}$$

Die Transformation $x(t) = P(t)y(t)$ heißt **Poincaré-Transformation.**

Beweis des Satzes II.2 (Satz von Floquet): Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix
A. Setze

$$\begin{aligned}
P(t) : &= \Phi(t)e^{-Rt}, \text{ wobei } R \text{ so zu bestimmen ist, daß} \\
e^{Rw} &= C = \text{ Mondormiematrix zu } \Phi \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
P(t+w) &= \Phi(t+w)e^{-Rw}e^{-Rt} = \Phi(t)Ce^{-Rw}e^{-Rt} \\
&= \Phi(t)e^{-Rt} = P(t).
\end{aligned}$$

Daher fällt P $w-$periodisch aus.

B. Sei $C = T^{-1}JT$ mit Jordanmatrix J. Ist allgemein $J = e^{\widetilde{R}w}$ mit einer Matrix $\widetilde{R}$, so ist wegen $T^{-1}e^{\widetilde{R}w}T = e^{T^{-1}\widetilde{R}Tw}$ jedenfalls

$$C = e^{T^{-1}\widetilde{R}Tw}$$

und wir können $R = T^{-1}\widetilde{R}T$ setzen. Es reicht, einen Jordanblock $J = \lambda E + N$ zu betrachten. Ist nämlich für die Jordanblöcke J_k $1, \leq k \leq m$, gerade $J_k = e^{\widetilde{R}_k w}$, so ist $J = e^{\widetilde{R}w}$ mit $\widetilde{R} = \begin{pmatrix} \widetilde{R}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widetilde{R}_m \end{pmatrix}$. Sei $\lambda E + N$ eine $r \times r$-Matrix.

Wir wollen zeigen:

$$L(t) = E - tN = \exp\left(-\sum_{v=0}^{r-1} \frac{t^{v+1}}{v+1} N^{v+1}\right) =: \exp \widetilde{R}(t)$$

Zunächst ist $L(0) = E = \exp \widetilde{R}(0)$. Dann ist $L'(t) = -N = -N(E - tN)^{-1}L(t)$,

$$\begin{aligned}\left(\exp \widetilde{R}(t)\right)' &= \left(-\sum_{v=0}^{r-1} t^v N^v\right) N \cdot \exp \widetilde{R}(t),\\ (E - tN)\sum_{v=0}^{r-1} t^v N^v &= \sum_{v=0}^{r-1}(t^v N^v - t^{v+1}N^{v+1}),\\ &= E - t^r N^r = E,\\ \left(\exp \widetilde{R}(t)\right)' &= -N(E - tN)^{-1}\exp \widetilde{R}(t).\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung für lineare Systeme zeigt $L(t) = \exp \widetilde{R}(t)$. Also ist $L(z) = \exp \widetilde{R}(z)$ für $z\epsilon\mathbb{C}$. Mit $z = -\frac{1}{\lambda}$ folgt:

$$E + \frac{1}{\lambda}N = \exp\left(-\sum_{v=0}^{r-1}\frac{\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^{v+1}}{v+1}N^{v+1}\right)$$

$J_k = \lambda E + N = \exp(\log \lambda E - \sum \ldots)$ mit $\log \lambda = \log|\lambda| + i\varphi(\lambda)$ und mit einem geeigneten Zweig des Logarithmus. Man beachte: $\lambda \neq 0$ für die Eigenwerte von C, da C regulär ist.

Somit wählen wir

$$\widetilde{R}_k = \frac{1}{w}\left(\log \lambda E - \sum_{v=0}^{r-1}\frac{(-1)^{v+1}\frac{1}{\lambda^{v+1}}}{v+1}N^{v+1}\right)$$

und $\mu = \frac{\log \lambda}{w}$ ist der einzige Eigenwert von $\widetilde{R}_k$, da $\widetilde{R}_k$ obere Dreiecksmatrix mit $\log \lambda$ in der Diagonalen ist. Insbesondere ist $Re\mu = \frac{\log|\lambda|}{w}$. □

Wir wenden uns nun dem inhomogenen Problem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ zu , bei dem $b(t)$ $w-$periodisch und $A(t)$ ebenfalls $w-$periodisch sind.

II.3 Satz: *Sei*

$$\begin{aligned}L_w &= \{x | x\epsilon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), x'(t) = A(t)x(t),\ x \text{ ist } w\text{−periodisch}\},\\ L_w^* &= \{x | x\epsilon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), x'(t) = -A(t)^T x(t),\ x \text{ ist } w\text{−periodisch}\}.\end{aligned}$$

Dann ist $\dim L_w = \dim L_w^* = \dim \ker(U(w, 0) - I)$.

Das inhomogene Problem besitzt zu gegebenem b genau dann eine $w-$periodische Lösung, wenn

$$\int_0^w \langle b(\sigma), y(\sigma)\rangle d\sigma = 0 \text{ ist für alle } y\epsilon L_w^*.$$

Beweis:
A. $x(t)$ ist $w-$periodische Lösung des homogenen Problem d. u. n. d. wenn $x(w) = U(w, 0)x(0) = x(0)$ ist (Koroller zu Satz II.1). Dies ist äquivalend mit $x_0\epsilon \ker(U(w, 0) - I) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\dim L_w &= \dim \ker(U(w, 0) - I)\\ \dim L_w^* &= \dim \ker(\widetilde{U}(w, 0) - I) \text{ mit } \widetilde{U}(t, t_0) \text{ als Übergangsmatrix zum System } x'(t) = -A(t)^T x(t).\end{aligned}$$

Ist $X\epsilon C^1(I, \mathbb{R}^{n^2})$ und regulär, so ist

$$0 = \tfrac{d}{dt}(X(t)X(t)^{-1}) = X'(t)X(t)^{-1} + X(t)\tfrac{d}{dt}X(t)^{-1},$$

also

$$\frac{d}{dt}X(t)^{-1} = -X(t)^{-1}X'(t)X(t)^{-1}.$$

Ist $X'(t) = A(t)X(t)$, so folgt $\frac{d}{dt}X(t)^{-1} = -X(t)^{-1}A(t)$, $\frac{d}{dt}(X(t)^{-1})^T = -A(t)^T \cdot (X(t)^{-1})^T$. Also ist $(X(t)^{-1})^T$ Fundamentalmatrix zu $-A(t)^T$, $\widetilde{U}(t, t_0) = (U(t, t_0)^{-1}$ und

$$\begin{aligned}&\widetilde{U}(w, 0) - I = (U(w, 0)^{-1})^T - I = -(U(w, 0)^T)^{-1}(U(w, 0)^T - I),\\ &Rg(\widetilde{U}(w, 0) - I) = Rg(U(w, 0)^T - I) = Rg(U(w, 0) - I),\\ &\dim L_w = \dim L_w^*\end{aligned}$$

B. $x(t)$ $w-$periodische Lösung von $x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \Leftrightarrow x(w) = x(0)$, da $y(t) = x(t+w)$ ebenfalls Lösung wegen $y'(t) = A(t+w)y(t) + b(t+w) = A(t)y(t) + b(t)$, und aus $x(w) = x(0)$ folgt $y(0) = x(0)$, also $y(t) = x(t)$.

$$\begin{aligned} x(w) = x(0) \quad &\Leftrightarrow \quad x(0) = U(w,0)x(0) + \int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma, \\ &\Leftrightarrow \quad -(U(w,0) - I)x(0) = \int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

$$\textbf{Erinnerung:} \begin{cases} \mathcal{H} \text{ endlichdimensional euklidisch} \\ Ax = f \text{ lösbar } \Leftrightarrow f \perp \mathcal{N}(A^*) \ker A^* \end{cases}$$

Beweis: $\mathcal{H} = \mathcal{R}(A) \bigoplus \mathcal{N}(A^*)$, denn: $\mathcal{R}(A)$ abgeschlossen, da $\mathcal{H}$ endlichdimensional $\Rightarrow \mathcal{R}(A)^\perp ex.$
$\langle Ax, y\rangle = 0 \forall x \epsilon \mathcal{H} \Rightarrow \langle x, A^*y\rangle = 0$, $x\epsilon\mathcal{H} \Rightarrow y\epsilon\mathcal{N}(A^*)$
$y\epsilon\mathcal{N}(A^*)$, $A = A^{**}$, $\langle x, A^*y\rangle = 0 = \langle Ax, y\rangle = 0 \; \forall \; x\epsilon\mathcal{H} \Rightarrow y\epsilon\mathcal{R}(A)^\perp$

Zur Abgeschlossenheit: $\dim R(A) = m, e_1, \dots e_m$ ONS in $\mathcal{R}(A)$

$$x\epsilon R(A), x = \sum_{j=1}^m \langle x, e_j\rangle e_j$$

$$x_n \to \widetilde{x}, x_n \epsilon \mathcal{R}(A)$$

$$\begin{array}{ccc} x_n & = & \sum_{j=1}^m \langle x_n, e_j\rangle e_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{x} & = & \sum_{j=1}^m \langle \widetilde{x}, e_j\rangle e_j \epsilon \mathcal{R}(A) \end{array}$$

Stetige Diffbarkeit von $X(t)$.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t \\ X(t)x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\mathcal{L}_1(t,x) = t, \mathcal{L}_2(t,x) = \sum_{k+1}^n a_{1k}(t)x_k, \dots, \mathcal{L}_{n+1}(t,x) = \sum_{k=1}^n a_{nk}(t)x_k$$

$$J_\mathcal{L}(t,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{L}'_2 & & & \\ \vdots & & & X(t) \\ \mathcal{L}'_{n+1} & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_\mathcal{L}(t,x) = \det X(t) \neq 0.$$

$$\mathcal{L}(t,x) = \begin{pmatrix} t \\ X(t)x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} t \\ X^{-1}(t)y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^{-1}(t)y \text{ stetig nach } t \text{ diffbar für } \textbf{alle } y\epsilon\mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow \text{ alle Koeffizienten der Matrix } X^{-1}(t) \text{ stetig nach } t \text{ diffbar.}$$

Sei $z_0 := \int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma$. Somit ist die Auflösung dieser Gleichung nach $x(0)$ gleichbedeutend mit der Existenz einer $w-$periodischen Lösung. $Ax_0 = z_0$ lösbar $\Leftrightarrow z_0 \perp \ker(A^T)$. Demnach hat $-(U(w,0) - I)x(0) = z_0$ dann und nur dann eine Lösung, wenn

$$\begin{aligned} & z_0 \perp \ker((I - U(w,0))^T) = \ker(I - U(w,0)^T) \\ \Leftrightarrow \quad & z_0 \perp y_0 \text{ für alle } y_0 \epsilon \ker(\widetilde{U}(w,0) - I) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle z_0, y(0)\rangle = 0 \text{ für alle } y\epsilon L_w^*. \end{aligned}$$

Nun ist für $y \epsilon L_w^*$ gerade

$$\begin{aligned}
\int_0^w \langle b(\sigma), y(\sigma)\rangle d\sigma &= \int_0^w \langle \widetilde{U}(\sigma,0)y(0), b(\sigma)\rangle d\sigma = \int_0^w \langle y(0), U(\sigma,0)^{-1}b(\sigma)\rangle d\sigma, \\
&= \int_0^w \langle y(0), U(0,\sigma)b(\sigma)\rangle d\sigma = \int_0^w \langle y(0), U(0,w)U(w,\sigma)b(\sigma)\rangle d\sigma, \\
&= \int_0^w \langle \widetilde{U}(w,0)y(0), U(w,\sigma)b(\sigma)\rangle d\sigma, \\
&= \langle \widetilde{U}(w,0)y(0), \int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma\rangle, \\
&= \langle \widetilde{U}(w,0)y(0), z_0\rangle = \langle y(0), z_0\rangle.
\end{aligned}$$

□

II.4 Korollar zu Satz II.3: *Die inhomogene Gleichung $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$, $A(t), b(t)$ $w-$periodisch, besitzt für jedes $w-$periodische b genau dann eine $w-$periodische Lösung, falls $\lambda = 1$ kein charakteristischer Multiplikator ist.*

Beweis: Sei $\lambda = 1$ kein charakteristischer Multiplikator. $U(w,0)$ ist Monodromiematrix nach Seite 22, Beweis des Kor. zu Satzes II.1. Also ist $\ker(U(w,0)-I) = 0$, $L_w^* = \{0\}$, $\int_0^w \langle y, b\rangle d\sigma = 0$ für ale $y \epsilon L_w^*$. Sei $\lambda = 1$ charakteristischer Multiplikator. Nach dem Korollar zu Satz II.1 ist dann $L_w^* \neq \{0\}$. Sei $z \epsilon L_2^* - \{0\}$. Dann ist

$$\int_0^w |z|^2 d\sigma \neq 0 \Rightarrow \text{ Nach Satz II.3 hat das Problem } x'(t) = A(t)\cdot x(t) + z(t) \text{ keine } w-\text{periodische Lösung.}$$

□

Auf S. 24 unten hatten wir für eine $w-$periodische Lösung von $x'(t) = A(t)x(t)+b(t)$ $(A, b, w-$periodisch) die Formel

$$x(0) = U(w,0)x(0) + \int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma$$

hergeleitet, aus der im Fall $L_w^* = \{0\}$ nach II.4 die Formeln

$$\begin{aligned}
x(0) &= x_0 = (I - U(w,0))^{-1}\int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma, \\
x(t) &= U(t,0)(I-U(w,0))^{-1}\int_0^w U(w,\sigma)b(\sigma)d\sigma + \int_0^t U(t,\sigma)b(\sigma)d\sigma, \\
&\quad x = w-\text{periodische Lösung von } x'(t) = A(t)x(t) + b(t)
\end{aligned}$$

folgen. Im Fall $L_w^* = \{0\}$ läßt sich also jede beliebige Lösung schreiben als

$$\begin{aligned}
x(t) &= U(t,0)x_0 + \int_0^t U(t,\sigma)b(\sigma)d\sigma \\
&= U(t,0)(x_0 - x_{0per}) + U(t,0)x_{0per} + \int_0^t U(t,\sigma)b(\sigma)d\sigma \\
&= x_{per}(t) + U(t,0)(x_0 - x_{0per})
\end{aligned}$$

mit dem periodischen Anteil $x_{per}(t)$ und dem nichtperiodischen Anteil $U(t,0)(x_0 - x_{0per})$.

II.5 Satz: *Ist die Bedingung aus Satz II.3 für die Existenz einer periodischen Lösung nicht erfüllt, so ist jede Lösung von $x'(t) = A(t)\cdot x(t) + b(t)$ unbeschränkt über $\mathbb{R}$ (Resonanzfall).*

Beweis: Es gebe also ein $y \epsilon L_w^*$ mit

$$\int_0^w \langle y(\sigma), b(\sigma)\rangle d\sigma = \alpha \neq 0.$$

Mit $y(\sigma) = \widetilde{U}(\sigma,0)y_0 = U(0,\sigma)^T y_0$ ist

$$\alpha = \langle y_0, \int_0^w U(0,\sigma)b(\sigma)d\sigma\rangle.$$

Sei $x(t)$ eine beliebige Lösung von $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$. Dann ist

$$x(t) \quad = \quad U(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t, \sigma)b(\sigma)d\sigma.$$

Mit $t = kw$, $t_0 = (k-1)w$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, folgt

$$\begin{aligned} x(kw) &= U(kw, (k-1)w)x((k-1)w) + \int_{(k-1)w}^{kw} U(kw, \sigma)b(\sigma)d\sigma, \\ &= U(kw, (k-1)w)x((k-1)w) + \int_{0}^{w} U(kw, (k-1)w + \sigma)b(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} U(t + mw, \sigma + mw) &= \phi(t + mw)\phi(\sigma + mw)^{-1} \\ &= \phi(t)C^m C^{-m}\phi(\sigma)^{-1}, C \text{ Mondromiematrix}, \\ &= \phi(t)\phi(\sigma)^{-1} = U(t, \sigma), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x(kw) &= U(w, 0)x((k-1)w) + U(w, 0)\int_0^w U(0, \sigma)b(\sigma)d\sigma, \\ &= U(w, 0)[x((k-1)w) + \int_0^w U(0, \sigma)b(\sigma)d\sigma], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle y_0, x(kw)\rangle &= \langle U(w, 0)^T y_0, x(k-1)w + \int_0^w U(0, \sigma)b(\sigma)d\sigma\rangle, \\ y(w) = y(0) & \\ &= \langle U(w, 0)^T U(0, w)^T y_0, x((k-1)w)\rangle + \langle U(w, 0)^T U(0, w)^T y_0, \int_0^w U(0, \sigma)b(\sigma)d\sigma\rangle, \\ &= \langle y_0, x((k-1)w)\rangle + \alpha, \end{aligned}$$

Induktion über k
$\Rightarrow$

$$\langle y_0, x(kw)\rangle = \langle y_0, x_0\rangle + k\alpha.$$

$\square$

Beispiel: Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $w-$periodisch und stetig. $a, b, c, d\epsilon\mathbb{R}$ seien feste Zahlen. Sei $\frac{1}{4}(a-d)^2 + bc =: -w_0^2 < 0$, $w_0 > 0$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} p(t) + a & b \\ c & p(t) + d \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Fundamentalmatrix beziehungsweise $U(t, 0)$ zu $x' = A(t)x$. Setze

$$\begin{aligned} &D(t) = \begin{pmatrix} E(t)e^{at} & 0 \\ 0 & E(t)e^{dt} \end{pmatrix} \text{ mit } E(t) := \exp\left(\int_0^t p(\sigma)d\sigma\right), \\ &\mathbf{x(t) = D(t)z(t)} \end{aligned}$$

Dann folgt $D^{-1}(t)x(t) = z(t)$, $z' = -D^{-1}D'D^{-1}x + D^{-1}x' = -D^{-1}D'z + D^{-1}Ax = -D^{-1}D'z + D^{-1}ADz = D^{-1}(AD - D')z$. Sei $B(t) = D^{-1}(AD - D')(t)$. Wegen

$$D'(t) = \begin{pmatrix} p(t) + a & 0 \\ 0 & p(t) + d \end{pmatrix} D(t) = (A - \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix})D(t)$$

ist

$$\begin{aligned} (AD - D')(t) &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} D(t) = \begin{pmatrix} 0 & bE(t)e^{dt} \\ cE(t)e^{at} & 0 \end{pmatrix}, \\ z'(t) = B(t)z, B(t) = D(t)^{-1} &\begin{pmatrix} 0 & bE(t)e^{dt} \\ cE(t)e^{at} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(t)^{-1}e^{-at} & 0 \\ 0 & E(t)^{-1}e^{-dt} \end{pmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} 0 & bE(t)e^{dt} \\ cE(t)e^{at} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & be^{(d-a)t} \\ ce^{(a-d)t} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z_1'(t) &= be^{(d-a)t}z_2(t),\\
z_2'(t) &= ce^{(a-d)t}z_1(t),\\
z_1''(t) &= (d-a)z_1'(t)+be^{(d-a)t}z_2'(t) = (d-a)z_1'+be^{(d-a)t}ce^{(a-d)t}z_1(t),\\
z_1''(t) &+ (a-d)z_1'(t)-bcz_1(t)=0\\
\Rightarrow z_1(t) &= e^{\frac{d-a}{2}t}(\widehat{\alpha}\cos w_0t+\widehat{\beta}\sin w_0t),\\
z_2(t) &= e^{\frac{a-d}{2}t}(\widehat{\gamma}\cos w_0t+\widehat{\delta}\sin w_0t).
\end{aligned}
$$

$\Psi(t)$ sei Fundamentalmatrix zu $B(t)$. In $t=0$ stehe in der ersten Spalte $z(0)=(1,0)^T$, in der zweiten $(0,1)^T$. Für die erste Spalte von $\Psi(t)$ folgt: $\widehat{\alpha}=1$, $\widehat{\gamma}=0$. $\widehat{\gamma}$ und $\widehat{\beta}$ bestimmen sich aus

$$
\begin{aligned}
z_2'(t) &= \left(\frac{a-d}{2}\widehat{\delta}\sin w_0t+\widehat{\delta}w_0\cos w_0t\right)e^{\frac{a-d}{2}t},\\
&= ce^{(a-d)t}e^{\frac{d-a}{2}t}(\cos w_0t+\widehat{\beta}\sin w_0t)
\end{aligned}
$$

zu

$$
\widehat{\delta}=\tfrac{c}{w_0},\widehat{\beta}c=\widehat{\delta}\tfrac{a-d}{2}\Rightarrow\widehat{\beta}=\tfrac{a-d}{2w_0}
$$

Für die zweite Spalte folgt: $\widehat{\alpha}=0$, $\widehat{\gamma}=1$. $\widehat{\delta},\widehat{\beta}$ bestimmen wir analog. Dies liefert

$$
\begin{aligned}
\Psi(t) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{d-a}{2}t}\left(\cos w_0t+\frac{a-d}{2w_0}\sin w_0t\right) & \frac{b}{w_0}(\sin w_0t)e^{\frac{d-a}{2}t}\\ \frac{c}{w_0}e^{\frac{a-d}{2}t}\sin w_0t & e^{\frac{a-d}{2}t}\left(\cos w_0t+\frac{d-a}{2w_0}\sin w_0t\right)\end{pmatrix},\\
U(t,0) &= D(t)\Psi(t)\\
&= E(t)e^{\frac{d+a}{2}t}\underbrace{\begin{pmatrix}\cos w_0t+\frac{a-d}{2w_0}\sin w_0t & \frac{b}{w_0}\sin w_0t\\ \frac{c}{w_0}\sin w_0t & \cos w_0t+\frac{d-a}{2w_0}\sin w_0t\end{pmatrix}}_{=:F(t),\det F(t)=1,t\epsilon\mathbb{R}\text{ (siehe unten)}}
\end{aligned}
$$

λ charakteristischer Multiplikator

$$
\begin{aligned}
\text{Periode: } w &\Leftrightarrow \lambda \text{ Eigenwert von } U(w,0),\\
&\Leftrightarrow \frac{\lambda}{E(w)e^{\frac{a+d}{2}w}}\text{ Eigenwert von } F(w).
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\det(F(w)-\mu I) &= \left(\cos w_0w+\frac{a-d}{2w_0}\sin w_0w-\mu\right)\left(\cos w_0w+\frac{d-a}{2w_0}\sin w_0w-\mu\right)-\frac{bc}{w_0^2}\sin^2 w_0w,\\
&= (\cos w_0w-\mu)^2-\left(\frac{a-d}{2w_0}\right)^2\sin^2 w_0w-\frac{bc}{w_0^2}\sin^2 w_0w,\\
&= \mu^2-2\mu\cos w_0w+\cos^2 w_0w+\underbrace{\left(\frac{-(a-d)^2/4-bc}{w_0^2}\right)}_{=1}\sin^2 w_0w,\\
&= \mu^2-2\mu\cos w_0w+1\\
&= (\mu-e^{iw_0w})(\mu-e^{-iw_0w}).
\end{aligned}
$$

Die gesuchten Eigenwerte von $U(w,0)$ sind daher

$$
\lambda_\pm = E(w)e^{\frac{a+d}{2}w}e^{\pm iw_0w}.
$$

Kontrolle der Rechnungen: $\lambda_+\cdot\lambda_- = \det(U(w,0)) = \exp(\int_0^w spur A(\sigma)d\sigma) = E(w)^2e^{(a+d)w}$, also bestätigt dies die Rechnungen.
$\lambda=1\Leftrightarrow E(w)e^{w(a+d)/2}=1$ und $w_0w/2\pi\epsilon\mathbb{N}$.

Fall 1: $E(w)e^{w(a+d)/2}\neq 1$ oder $\frac{w_0w}{2\pi}$ nicht $\epsilon\mathbb{N}$. Dann ist $\dim L_w=\dim L_w^*=0$ (d.h. $L_w=L_w^*=\{0\}$) und $x'(t)=A(t)x(t)+b(t)$ hat für jedes $w-$periodische b eine $w-$periodische Lösung, d.h. es gibt genau einen Anfangswert derart, daß die Lösung $w-$periodisch ausfällt (siehe Beweis des Satzes II.3, II.4 Korollar zu Satz II.3).

Fall 2: $E(w)e^{w(a+d)/2} = 1$ und $\frac{w_0 w}{2\pi} \epsilon \mathbb{N}$.
Dann ist $U(w,0) = E$, also $\dim L_w = \dim L_w^* = 2$,

$$\mathcal{L} = \{x | x \epsilon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), \quad x'(t) = A(t)x(t)\} = L_w.$$

Daher besitzt nach Satz II.3 $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ eine $w-$periodische Lösung genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
\int_0^w \langle b(\sigma), y(\sigma)\rangle d\sigma &= \int_0^w \langle b(\sigma), (U(\sigma,0)^{-1})^T y_0\rangle d\sigma = 0, \quad y_0 \epsilon \mathbb{R}^2 \\
&= \langle \int_0^w U(0,\sigma) b(\sigma) d\sigma, y_0\rangle, \quad y_0 \epsilon \mathbb{R}^2 \\
&\Leftrightarrow \int_0^w U(0,\sigma) b(\sigma) d\sigma = 0, \\
&\Leftrightarrow \int_0^w \frac{F(-\sigma) b(\sigma)}{E(\sigma) e^{\sigma(d+a)/2}} d\sigma = 0.
\end{aligned}$$

Ausblick auf die Frage der periodischen Lösungen: Sei $x' = f(t,x)$ zu lösen. Sei $f(t+w,x) = f(t,x)$ für alle t, x. Gesucht: eine $w-$periodische Lösung.

Sei die Integralgleichung (IGL)

$$x(t) = C + \int_0^t [f(\sigma, x(\sigma)) - \frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho] d\sigma$$

betrachtet. Die Lösungen dazu sind w-periodisch, da $x(w) = C = x(0)$,

$$\begin{aligned}
x'(t+w) &= f(t+w, x(t+w)) - \frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho, \\
&= f(t, x(t+w)) - \frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho
\end{aligned}$$

und $x(t+w)$ Lösung in $[0,w]$ mit Anfangswert $x(0)$, also $x(t) = x(t+w)$ ist. Die Lösung der "richtigen" Differentialgleichung erhalten wir durch die spezielle "Zusatzanforderungung" $\frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho = 0$, die für periodische Lösungen von (IGL), also von $x' = f(t,x) - \frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho$ von selbst erfüllt ist. Ähnliches gilt für

$$C = x(0) + T\left(\frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho\right), \text{ T reguläre Matrix.}$$

Konsequenz: Eine Lösung von

$$x(t) = F(x(t)) = x(0) + T\left(\frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho\right) + \int_0^t [f(\sigma, x(\sigma)) - \frac{1}{w} \int_0^w f(\rho, x(\rho)) d\rho] d\rho$$

ist w-periodische Lösung der zugehörigen Differentialgleichung. Also ist $x = F(x)$ als Fixpunktproblem in den stetigen $w-$periodischen Vektorfunktionen zu betrachten.

III. Ljapunov-Stabilität

Zur Einführung betrachten wir einige **Beispiele:** i) $x'' + wx = 0$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$

$$\Rightarrow x(t) = a\cos wt + \frac{b}{w}\sin wt$$

$$\begin{aligned} a &\to a + \Delta a \\ b &\to b + \Delta b \quad \Rightarrow \quad \text{Lösung } \widetilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t) \text{ mit} \\ & \qquad\qquad \Delta x(t) = \Delta a \cos wt + \frac{\Delta b}{w}\sin wt, \\ & \qquad \Rightarrow \quad |\Delta x(t)| \le |\Delta a| + \frac{1}{w}|\Delta b|, \text{ Stabilität} \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} x' = \alpha x, \alpha > 0 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{\alpha t}, \\ &\Rightarrow \quad \Delta x(t) = \Delta x_0 e^{\alpha t}, \text{ Instabilität für } \alpha > 0. \end{aligned}$$

iii) Der Übergang $w \to w + \Delta w$ in i) zeigt ein anderes Langzeitverhalten.

Es seien $b, \Delta b, \Delta a = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} x(t) &= a\cos wt = a\cos\left(\left(w + \frac{\Delta w}{2}\right)t - \frac{\Delta w}{2}t\right), \\ x(t) + \Delta x(t) &= a\cos(w + \Delta w)t = a\cos\left(\left(w + \frac{\Delta w}{2}\right)t - \frac{\Delta w}{2}t\right), \\ \Delta x(t) &= a\left(\left(\cos\left(w + \frac{\Delta w}{2}\right)t + \frac{\Delta w}{2}t\right) - \cos\left(\left(w + \frac{\Delta w}{2}\right)t - \frac{\Delta w}{2}t\right)\right) \\ |\Delta x(t)| &= 2|a||\sin\frac{w + \Delta w}{2}t \cdot \sin\frac{\Delta w}{2}t|. \end{aligned}$$

Für $t_k = \frac{\pi + 2k\pi}{\Delta w}$ ist zum Beispiel

$$|\Delta x(t_k)| = 2|a||\cos\frac{w}{\Delta w}(\pi + 2k\pi)|, k\epsilon\mathbb{Z}$$

Es ist also vorstellbar, daß für unendlich viele t_{k_j} die Größe $|\Delta x(t_{k_j})| \ge c|a|$ ist mit einer positiven Konstante c, auch wenn Δw sehr klein ist.

III. 1a) Definition: *Wir betrachten die DGL $x' = f(t,x), f : [\tau, +\infty) \times B_r(0) \to \mathbb{R}^n$, es sei $f(t,0) \equiv 0$. $r = +\infty$ ist zugelassen $B_\infty(0) = \mathbb{R}^n$. Also ist $x \equiv 0$ Lösung. Eine solche Lösung heißt auch stationärer Punkt oder Gleichgewichtspunkt.*

Die Beschränkung auf $x \equiv 0$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Untersuchungen, wenn man sich für das Verhalten der Lösung nahe bei einer gegebenen Lösung $x_1(t)$ interessiert: Betrachte

$$\left.\begin{array}{l} g(t,y) = f(t, y + x_1(t)) - f(t, x_1(t)) \text{ und} \\ y' = g(t,y), y = x - x_1(t) \end{array}\right\} \Leftrightarrow x \text{ Lösung von } x' = f(t,x)$$

Da $g(t,0) = 0$ ist, ist 0 Gleichgewichtspunkt, auf welchen Fall wir uns in der folgenden Definition beschränken.

III 1b) Definition: *Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt stabil dann und nur dann, wenn es ein $\rho, r > \rho > 0$ und ein $t_0^* \ge \tau$ gibt derart, daß für $\varepsilon, 0 < \varepsilon \le \rho$, $t_0 \ge t_0^*$, ein $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ existiert mit*

$$|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ für } t \ge t_0, \text{ falls } |x_0| < \delta(\varepsilon, t_0).$$

Hinweis: Bleibt $|x(t, t_0, x_0)|$ auf jedem Existenzintervall $[t_0, t_0 + \eta)$ kleiner als oder gleich ρ, so existiert die Lösung nach Satz I.7.5 auf $[t_0, +\infty)$.

Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt instabil, wenn er nicht stabil ist. Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt *gleichmäßig stabil dann und nur dann, wenn $\delta(\varepsilon, t_0)$ unabhängig von t_0 gewählt werden kann.*

Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt attraktiv dann und nur dann, wenn es ein $\rho\epsilon(0, r)$, ein $t_0^* \geq \tau$ und zu $t_0 \geq t_0^*$ ein $\delta(t_0) > 0$ gibt derart, daß für $|x_0| < \delta(t_0)$ gilt: $|x(t, t_0, x_0)| \leq \rho$, so daß die Lösung für $t \geq t_0$ existiert, und $|x(t, t_0, x_0)| \to 0$ für $t \to \infty$. $E(t_0) = \{x_0 | |x(t, t_0, x_0)| \leq \rho,\ t \geq t_0,\ x(t, t_0, x_0) \to 0$ für $t \to \infty\}$ heißt Einzugsbereich des Nullpunkts.

Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt gleichmäßig attraktiv dann und nur dann, wenn es ein $t_0^* \geq \tau$ und ein $\delta > 0$ gibt derart, daß gilt:
1.) $|x(t, t_0, x_0)| \leq \rho < r$, $|x_0| < \delta$, $t_0 \geq t_0^*$, so daß die Lösung insbesondere auf $[t_0^*, +\infty)$ existiert.
2.) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $T_\varepsilon \geq 0$ mit $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, $|x_0| < \delta$, $t \geq t_0 + T_\varepsilon \geq t_0^* + T_\varepsilon$.

Der Gleichgewichtspunkt 0 heißt asymptotisch stabil genau dann, wenn er stabil und attraktiv ist. Er heißt gleichmäßig asymptotisch stabil dann und nur dann, wenn er gleichmäßig stabil und gleichmäßig attraktiv ist.

Die Forderungen $|x(t, t_0, x_0)| \leq \rho < r$ an verschiedenen Stellen garantieren die Existenz der Lösung für $t \geq t_0$ und können gegebenenfalls durch die Forderung der Existenz für $t \geq t_0$ ersetzt werden. Die Attraktivität impliziert nicht die Stabilität, da bei der Stabilität die Lösung ab einem universellen t_0^* gleichmäßig mit dem Anfangswert klein gemacht werden kann, während sie bei Attraktivität nur gegen Null konvergieren muß, wenn $t \to \infty$ strebt.

III.2 Satz: *Sei f $w-$periodisch in t (oder unabhängig von t, d.h. die Differentialgleichung ist autonom). Dann ist $\tau = 0$. Sei $t_0^* = 0$.*

1) *Gleichgewichtspunkt 0 stabil $\Leftrightarrow$ 0 gleichmäßig stabil,*
2) *Gleichgewichtspunkt 0 asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ 0 gleichmäßig asymptotisch stabil.*

Beweis: *Sei* $\widehat{\delta}(\varepsilon, t_0) = \sup\{\delta = \delta(\varepsilon, t_0) | |x_0| \leq \delta \Rightarrow |x(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon$ für $t \geq t_0\}$. Dann ist $\widehat{\delta}(\varepsilon, t_0) > 0$. Sei $\widehat{\delta}(\epsilon) = \inf_{t_0 \epsilon [0,w]} \widehat{\delta}(\varepsilon, t_0)$. Wir behaupten $\widehat{\delta}(\varepsilon) > 0$. Angenommen, es sei $\widehat{\delta}(\varepsilon) = 0$, d.h. $\widehat{\delta}(\varepsilon, t_k) \to 0$ für eine Folge (t_k) aus $[0, w]$. Ohne Einschränkung gelte $t_k \to t^* \epsilon [0, w]$ für $k \to \infty$. Dann ist $\widehat{\delta}(\varepsilon, t_k) < \frac{1}{2}\widehat{\delta}(\varepsilon, t^*)$, $k \geq k_0$. Nach Definition gibt es x_k mit $0 < |x_k| < \frac{1}{2}\widehat{\delta}(\varepsilon, t^*)$ und $t^{(k)}$ mit

$$|x(t^{(k)}, t_k, x_k)| > \varepsilon, t^{(k)} \geq t_k$$

Da die x_k in $B_{\frac{1}{2}\widehat{\delta}(\varepsilon, t^*)}(0)$ liegen, ist es keine Einschränkung, anzunehmen, daß $x_k \to x^*$, $k \to \infty$. Sei $z_k = x(t^*, t_k, x_k)$. Wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten und Anfangszeiten folgt

$$z_k \to x(t^*, t^*, x^*) = x^*, k \to \infty$$

(Satz I.7.8 und Folgerung). Also ist

$$\begin{array}{ll} & |z_k| < \widehat{\delta}(\varepsilon, t^*), k \geq k_1, \\ \Rightarrow & |x(t, t^*, z_k)| \leq \varepsilon \text{ für } t \geq t^*, k \geq k_1, \\ \Rightarrow & x(t, t^*, z_k) = x(t, t^*, x(t^*, t_k, x_k)) = x(t, t_k, x_k), k \geq k_1 \\ \Rightarrow & t^{(k)} < t^*, t^{(k)} \epsilon [t_k, t^*], \qquad\qquad k \geq k_1 \\ \Rightarrow & t^{(k)} \to t^*, k \to \infty \\ \Rightarrow & |x^*| = \lim\limits_{k \to \infty} |x(t^{(k)}, t_k, x_k)| \geq \varepsilon \end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch zu $|x^*| \leq \frac{1}{2}\widehat{\delta}(\varepsilon, t^*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist $\widehat{\delta}(\varepsilon) > 0$. Ist $|x_0| < \widehat{\delta}(\varepsilon)$, so ist $|x(t, t_0 + kw, x_0)| \leq \varepsilon$ für $t \geq t_0 + kw$, wenn $k \epsilon \mathbb{Z}$ so gewählt ist, daß $t_0 + kw \epsilon [0, w]$ ist. Also ist

$$|x(s + kw, t_0 + kw, x_0)| \leq \varepsilon \text{ für } s \geq t_0.$$

Mit der $w-$Periodizität von f folgt, daß die Lösung $\widetilde{x}(s)$ von $x' = f(s,x)$, die in t_0 den Anfangswert x_0 annimmt, gerade $x(s+kw, t_0+kw, x_0)$ ist. Damit folgt

$$|\widetilde{x}(s,t_0,x_0)| \leq \varepsilon, s \geq t_0, |x_0| < \widehat{\delta}(\varepsilon),$$

also die gleichmäßige Stabilität.

Zu 2): Sei der Gleichgewichtspunkt 0 asymptotisch stabil, d.h. stabil und attraktiv. Nach 1) ist er dann gleichmäßig stabil. Sei also $\widehat{\delta}(\varepsilon)$ nach 1) bestimmt für $\varepsilon\epsilon(0,\rho)$. Sei

$$\delta(t_0) = \sup\{\delta\epsilon(0,\widehat{\delta}(\varepsilon))||x_0| \leq \delta \Rightarrow x(t,t_0,x_0) \to 0\},$$
$$\widetilde{\delta} = \inf_{t_0\epsilon[0,w]} \delta(t_0).$$

Wir behaupten: $\widetilde{\delta} > 0$. Der Beweis verläuft analog zum entsprechenden Teil unter 1). Ist $|x_0| < \widetilde{\delta}$, so erhalten wir $x(t,t_0,x_0) \to 0$. Der Beweis verläuft analog zum entsprechenden Teil unter 1). Es ist noch die Gleichmäßigkeit zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Für $|x_0| < \frac{\widetilde{\delta}}{2}, t_0\epsilon[0,w]$ sei

$$T(\varepsilon,x_0,t_0) = \inf\{T \geq 0||x(t,t_0,x_0)| \leq \varepsilon \text{ für } t \geq t_0+T\},$$

$$T_\varepsilon \quad = \quad \sup_{\substack{|x_0|<\frac{\widetilde{\delta}}{2} \\ t_0\epsilon[0,w]}}\{T(\varepsilon,x_0,t_0)\}.$$

Wir zeigen: $T_\varepsilon < +\infty$. Angenommen, es gilt eine Folge (T_k), $T_k = T(\varepsilon,x_k,t_k) > 0$, mit $T_k \uparrow +\infty$, $k \to \infty$. Ohne Einschränkung sei $x_k \to x^*$, $t_k \to t^*$. Es ist $|x(t_k+T_k,t_k,x_k)| = \varepsilon$. Auf $[t_k,t_k+T_k]$ gilt $|x(t,t_k,x_k)| > \widehat{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, da sonst wegen der gleichmäßigen Stabilität $|x(t_k+T_k,t_k,x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ wäre, im Widerspruch zu $|x(t_k+T_k,t_k,x_k)| = \varepsilon$. Wir betrachten das Intervall $[t^*+\eta,T]$, für das $[t^*+\eta,T] \subset [t_k,t_k+T_k]$, $k \geq k_2$, gilt. Dann ist

$$|x(t,t_k,x_k)| > \widehat{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ auf } [t^*+\eta,T],$$

$\overset{k\to\infty}{\Rightarrow}$

$$|x(t,t^*,x^*)| \geq \widehat{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ auf } [t^*+\eta,T],$$

$\underset{T\to\infty}{\overset{\eta\to 0}{\Rightarrow}}$

$$|x(t,t^*,x^*)| \geq \widehat{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ auf } [t^*,+\infty).$$

Dies ist ein Widerspruch, da wegen $|x^*| \leq \widetilde{\delta}/2$ jedenfalls $x(t,t^*,x^*) \to 0$ ist für $t \to +\infty$. □

III.3 Satz: *Sei speziell das System $x' = f(t,x)$ mit $f(t,x) = A(t)x, A(t)\epsilon C^0([\tau,\infty),\mathbb{R}^{n^2}), t_0^* = \tau$ betrachtet. Dann ist $r = +\infty$, $x(t,t_0,x_0) = U(t,t_0)x_0$ und die verschiedenen Stabilitätsbegriffe drücken sich durch $U(t,t_0)$ wie folgt aus:*

i) Der Gleichgewichtspunkt 0 ist stabil $\Leftrightarrow ||U(t,t_0)|| \leq \alpha(t_0)$ für $t \geq t_0$.

ii) Der Gleichgewichtspunkt 0 ist attraktiv $\Leftrightarrow ||U(t,t_0)|| \to 0$ für $t \to \infty$ und jedes t_0.

iii) Der Gleichgewichtspunkt 0 ist gleichmäßig stabil $\Leftrightarrow \alpha(t_0) \leq \alpha$ für alle t_0

iv) Der Gleichgewichtspunkt 0 ist gleichmäßig asymptotisch stabil $\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta > 0$ mit $||U(t,t_0)|| \leq 4\alpha e^{-\beta(t-t_0)}$.

Hier gilt weiter: Aus der Attraktivität folgt die Stabilität. Im Fall der Attraktivität ist $E(t_0) = \{x_0|x(t,t_0,x_0) \to 0\} = \mathbb{R}^n$

Beweis: i)"$\Rightarrow$ ": Sei $\varepsilon\epsilon(0,r) \Rightarrow |x(t,t_0,x_0)| \leq \varepsilon$ für $|x_0| \leq \delta(\varepsilon,t_0), t \geq t_0$,

$$\Rightarrow |U(t,t_0)x_0| \leq \varepsilon \text{ für } |x_0| \leq \delta(\varepsilon,t_0), t \geq t_0.$$

Setze $x_0 = \frac{x}{2|x|}\delta(\varepsilon, t_0)$ mit $x \neq 0 \Rightarrow |x_0| \leq \widetilde{\delta}(\varepsilon, t_0) \Rightarrow |\frac{U(t,t_0)x}{2|x|}\delta(\varepsilon, t_0)| \leq \varepsilon \Rightarrow ||U(t, t_0)|| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta(\varepsilon, t_0)}$.

$$\begin{array}{lll} & " \Leftarrow ": & |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon \text{ für } |x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\alpha(t_0)}, t \geq t_0. \\ \text{ii)} & " \Rightarrow ": & U(t, t_0)x_0 \to 0 \text{ für } t \to \infty, |x_0| < \delta(t_0), \\ & \Rightarrow & U(t, t_0)e_i \to 0 \text{ für } t \to \infty, \\ & \Rightarrow & U_{ij}(t, t_0) \to 0 \text{ für } t \to \infty, \\ & \Rightarrow & ||U(t, t_0)|| \to 0 \text{ für } t \to \infty. \end{array}$$

Sei $\widetilde{t}_0 \geq \tau$ beliebig. Mit $U(t, \widetilde{t}_0) = U(t, t_0)U(t_0, \widetilde{t}_0)$ folgt $||U(t, \widetilde{t}_0)|| \to 0$ für $t \to \infty$.

"$\Leftarrow$ ": Trivial

iii) Analog zum Fall i).

iv) "$\Rightarrow$": Sei der Gleichgewichtspunkt 0 gleichmäßig asymptotisch stabil. Da 0 gleichmäßig attraktiv ist, folgt: $|U(t, t_0)x_0| < \varepsilon$ für $t \geq t_0 + T_\varepsilon, t_0 \geq \tau, |x_0| \leq \delta$. Mit $x_0 = \frac{\delta x}{|x|}$, $x \neq 0$ erhalten wir $||U(t, t_0)|| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$ für $t \geq t_0 + T_\varepsilon, t_0 \geq \tau$. Wähle $\varepsilon = \frac{\delta}{2} \Rightarrow ||U(t, t_0)|| \leq \frac{1}{2}$ für $t \geq t_0 + T_{\delta/2}$. Sei $T_0 = T_{\delta/2.}$ Es ist

$$\begin{aligned} U(t, t_0) \quad &= \quad U(t, t - T_0)U(t - T_0, t - 2T_0) \ldots U(t - kT_0, t_0) \\ & \qquad \text{für } k\epsilon\mathbb{N} \text{ derart, daß } t_0 \leq t - kT_0 \leq t_0 + T_0, \text{ also} \\ & \qquad t_0 + kT_0 \leq t \leq t_0 + (k+1)T_0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} ||U(t, t_0)|| \quad &\leq \quad ||U(t, t - T_0)|| \cdot ||U(t - T_0, t - 2T_0)|| \cdot \ldots \cdot ||U(t - kT_0, t_0)||, \\ &\leq \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} ||U(t - kT_0, t_0)|| = 4e^{-(ln2)(k+1)}||U(t - kT_0, t_0)||, t \geq t_0 + T_0. \end{aligned}$$

0 ist gleichmäßig stabil $\Rightarrow ||U(t - kT_0, t_0)|| \leq \alpha$. Weiter ist $(t - t_0)|T_0 \leq k + 1$ nach Konstruktion $\Rightarrow$

$$||U(t, t_0)|| \leq 4\alpha e^{-\frac{ln^2}{T_0}(t-t_0)} = 4\alpha e^{-\beta(t-t_0)} \text{ mit } \beta = \frac{ln^2}{T_0} \text{ und für } t \geq t_0 + T_0.$$

Ist $T_0 \geq t - t_0 \geq 0$, so ist

$$||U(t, t_0)|| \leq \alpha \leq \alpha e^{\beta T_0} e^{-\beta(t-t_0)} = 2\alpha e^{-\beta(t-t_0)}.$$

Für $t - t_0 \leq 0$, $t, t_0 \geq \tau$, ist $||U(t, t_0)|| \leq \alpha \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}$.

"$\Leftarrow$": Trivial
Die beiden letzten Aussagen sind offensichtlich. □

Produkteigenschaft Erdutionsoperator:

Sei $= \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Dann ist

$$U(b, a) = \prod_{j=n}^{1} U(t_j, t_{j-1}),$$

also

$$||U(b, a)|| \leq \prod_{j=n}^{1} ||U(t_j, t_{(j-1)})||$$

III.4 Satz: *Sei A eine konstante $n \times n$-Matrix. Dann gilt mit $r = +\infty$, $t_0^* = \tau = 0$:*
i) Der Gleichgewichtspunkt 0 ist stabil $\Leftrightarrow$ 0 ist gleichmäßig stabil

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & Re\lambda \leq 0 \textit{ für alle } \lambda\epsilon\sigma(A) = \text{ Spektrum } A, \\ & \textit{und falls } Re\lambda = 0, \textit{ so ist } \lambda \\ & \textit{halbeinfach, d.h. } \dim E(\lambda) = \dim \textit{ (Eigenraum zu } \lambda) \\ & = \textit{ algebraische Vielfachheit von } \lambda \end{aligned}$$

ii) Der Gleichgewichtspunkt 0
ist gleichmäßig asymptotisch stabil

$$\Leftrightarrow \quad Re\lambda < 0 \text{ für } \lambda\epsilon\sigma(A) = \text{ Spektrum } A$$

Beweis: Es ist $U(t,t_0) = e^{(t-t_0)A}$ und $||U(t,t_0)|| \leq C||e^{(t-t_0)I}|| \leq Cp(|t|)e^{-\beta(t-t_0)}$ mit $-\beta = \max\limits_{\lambda\epsilon\sigma(A)}\{Re\lambda\}$. Also ist

$$||U(t,t_0)|| \leq \widetilde{C}e^{-\widetilde{\beta}(t-t_0)}, \widetilde{\beta} < \beta.$$

Hieraus folgt die Richtung "$\Leftarrow$" in ii). Ist 0 gleichmäßig asymptotisch stabil, hat A einen Eigenwert λ mit $Re\lambda \geq 0$, so ist für einen Eigenvektor x_0 zu λ jedenfalls $Ax_0 = \lambda x_0$ und $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ die komplexe Lösung $x(t,0,x_0)$ von $x' = Ax$. Es ist $|x(t)| \geq |x_0|$ wegen $Re\lambda \geq 0$. $Rex(t,0,x_0) = x(t,0,Rex_0)$, $Imx(t,0,x_0) = x(t,0,Imx_0)$ sind, da A reell ist, ebenfalls Lösungen von $x' = Ax$. Wenigstens eine von ihnen konvergiert für $t \to \infty$ nicht gegen Null, wie klein auch $|x_0|$ gewählt wird. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, also ist $Re\lambda < 0$ für $\lambda\epsilon\sigma(A)$. Ist 0 stabil, woraus nach Satz III.2 die gleichmäßige Stabilität folgt, hat A einen Eigenwert λ mit $Re\lambda > 0$, so führt dies für $x(t) = e^{\lambda t}x_0$ wie oben auf $|x(t)| \geq e^{Re\lambda t}|x_0|$ und damit einen Widerspruch. Die weiteren Behauptungen werden in den Übungen bewiesen. □

Erinnerung: Betrachte $y' = A(t)y$ mit $w-$periodischem A. Fundamentalmatrix: $\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$. $M = e^{Rw}$ ist Mondromiematrix, $P(t)$ ist $w-$periodisch.

$$\left.\begin{array}{l} P(t)z = y \\ y \text{ Lösung} \end{array}\right\} \Leftrightarrow z' = Rz \text{ (Poincaré-Transformation). } \sigma(M) = \{\lambda_i\} = \{\text{charakt. Multiplikatoren}\},$$

$$\sigma(R) = \{\mu_i\} =: \{\text{charakt. Exponenten}\}.$$

Siehe hierzu Satz II.2 (Satz von Floquet).

$x' = Ax$ mit **reeller** $(n \times n)$-Matrix A
λ Eigenwert, $x_0 \neq 0$ Eigenvektor, also $Ax_0 = \lambda x_0$
$x = e^{\lambda t}x_0$ ist Lösung, aber komplex
$\overset{A \text{ reell}}{\Rightarrow} Re(e^{\lambda t}x_0), Im(e^{\lambda t}x_0)$ sind auch Lösungen

$$\overset{\text{Eindeutigkeitssatz}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} Re(e^{\lambda t}x_0) = x(t,0,Rex_0) \\ Im(e^{\lambda t}x_0) = x(t,0,Imx_0) \end{array}$$

Explizites Ausrechnen zeigt

$$\begin{aligned} x(t,0,Rex_0) &= e^{Re\lambda\cdot t}(\cos[(Im\lambda)t]\cdot(Rex_0) - \sin[(Im\lambda)t]\cdot(Imx_0)), \\ x(t,0,Imx_0) &= e^{Re\lambda t}(\cos[(Im\lambda)t]\cdot(Imx_0) + \sin[(Im\lambda)t]\cdot(Rex_0)). \end{aligned}$$

Ber.

$$\begin{aligned} Rex(t,0,x_0) &= x(t,0,Rex_0), \\ Imx(t,0,x_0) &= x(t,0,Imx_0). \end{aligned}$$

III.5 Satz: *$A(.)\epsilon C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n^2})$ sei w-periodisch, M sei eine Mondromiematrix. Dann gilt:*

i)

$$\begin{array}{rcl} \sigma(M) \subset B_1(0) \text{ in } \mathbb{C} & \Rightarrow & \text{Der Gleichgewichtspunkt 0 ist asymptotisch stabil.} \\ & (\Leftrightarrow & \text{gleichmäßig asymptotisch stabil)} \end{array}$$

ii) $\sigma(M) \subset \overline{B_1(0)}$ in $\mathbb{C}$ und für alle $\lambda\epsilon\sigma(M) \cap S^1$ gelte: Geometrische Vielfachheit (λ) = algebraische Vielfachheit $(\lambda) \Rightarrow 0$ stabil.

Beweis: Nach Satz II.2 sind im Fall i) die Realteile der Eigenwerte von R negativ und $\Phi(t)$ fällt exponentiell ab. Nach Satz II.2 müssen wir im Fall ii) nur e^{Rt} betrachten. Die Eigenwerte μ_i von R haben die Eigenschaft $Re\mu_i \leq 0$. Mit Satz III.4 folgt die Behauptung. □

Bemerkung: In ii) gilt: Für alle $\mu\epsilon\sigma(R) \cap i\mathbb{R}$ ist auch: Geom. Vielfachheit (μ)= algebraische Vielfachheit (μ). Beweis: Übungen.

Die Betrachtung von $\sigma(A(t))$ hilft, wenn $A(t)$ periodisch ist, bei Stabilitätsfragen i.a. wenig.

III.6 Beispiel: Sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 - 2\cos 4t & 2 + 2\sin 4t \\ -2 + 2\sin 4t & -1 + 2\cos 4t \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\sigma(A(t)) = \{-1, 1\}$. Die Lösung zum Anfangswert $x_0 = (0, \varepsilon)^T$ in 0 ist $x(t) = \varepsilon e^t (\sin 2t, \cos 2t)^T (t \geq 0, \varepsilon \geq 0)$. Daher ist der Gleichgewichtspunkt 0 nicht stabil. Insbesondere ist die Bedingung Satz III.5 ii) verletzt.

Bei nichtlinearen Problemen $x' = f(t,x), f(t,0) = 0$, ist es i.a. schwierig, Aussagen über die Stabilität von Nulllösungen zu gewinnen. Methoden, die dies ohne explizite Kenntnis der Lösung erlauben, heißen "direkte Methoden" (2. Methode von Ljapunov).

III.7 Beispiel: $x' = f(x), f(0) = 0$. Es gelte

$$\langle x, f(x)\rangle \leq -\alpha |x|^2.$$

Dann ist 0 gleichmäßig stabil, falls $\alpha \geq 0$ ist, und gleichmäßig asymptotisch stabil, falls $\alpha > 0$ ist. Skalarmultiplaktion von $x' = f(x)$ mit x liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|x(t)|^2 &= \langle x(t), f(x(t))\rangle \leq -\alpha|x(t)|^2, \\ \Rightarrow |x(t)|^2 &\leq |x(t_0)|^2 e^{-2\alpha(t-t_0)} \end{aligned}$$

$|x(t)|^2$ heißt Ljapunov-Funktion.

III.8 Definition: *Sei $r > 0$, $W\epsilon C^0(B_r(0), \mathbb{R})$. $r = +\infty$ ist zugelassen, $B_{+\infty}(0) := \mathbb{R}^n$. Dann heißt W positiv definit genau dann, wenn*

$$W(x) > 0 \text{ für alle } x \neq 0.$$

Sei $V\epsilon C^0([\tau,\infty) \times B_r(0), \mathbb{R})$, $V(.,0) \equiv 0$. V heißt positiv definit (auf $I' \times B_r(0), I' \subseteq I = [\tau, \infty)$) genau dann, wenn es ein positiv definites W wie oben gibt derart, daß $W(x) \leq V(t,x)$ auf $[\tau,\infty) \times B_r(0)$ (auf $I' \times B_\rho(0)$ für ein $\rho, 0 < \rho < r$). V heißt positiv semidefinit genau dann, wenn $0 \leq V(t,x)$ auf $[\tau,\infty) \times B_r(0)$ ist. Analog werden negativ definit und negativ semidefinit erklärt.

Beispiele:
$V(t,x) = |x|^2$ ist positiv definit,
$V(t,x) = x_1^2$ ist positiv semidefinit
$V(t,x) = e^{-t}|x|^2$ ist positiv semidefinit auf $[\tau, +\infty) \times B_r(0)$, positiv definit auf $[\tau, \widetilde{\tau}] \times B_r(0)$.

III.9 Lemma: *Sei $V\epsilon C^0([\tau,\infty) \times \overline{B_r(0)}, \mathbb{R}), V(.,0) \equiv 0$. Es gebe ein $W\epsilon C^0(\overline{B_r(0)}, \mathbb{R})$ mit $W(x) > 0$ für $x \neq 0$ derart, daß $V(t,x) \geq W(x)$ auf $[\tau,\infty) \times \overline{B_\tau(0)}$. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit: Es gibt $a : [0,r] \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend, $a(0) = 0$ mit*

$$V(t,x) \geq a(|x|) \text{ auf } [\tau,\infty) \times \overline{B_r(0)}$$

a heißt α-Funktion.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei W wie oben. Sei

$$a^*(\rho) = \min_{\rho \leq |x| \leq r} W(x), \rho \geq 0.$$

Dann ist a^* schwach monoton wachsend, stetig und $a^*(\rho) = 0$ ist gleichbedeutend mit $\rho = 0$ (Es ist $W(0) = 0$, weil $V(.,0) \equiv 0$). Nach Konstruktion ist

$$a^*(|x|) \leq W(x).$$

a^* muß noch streng monoton wachsend gemacht werden. Sei $n\epsilon\mathbb{N}$, $\rho_n = \sup\{\rho | 0 \leq \rho \leq r, a^*(\rho) = \frac{a^*(r)}{n}\}$. Dann ist $a^*(\rho_n) = \frac{a^*(r)}{n}$. Aus $a^*(\rho_{n+1}) < a^*(\rho_n)$ folgt $\rho_{n+1} < \rho_n$, denn wäre $\rho_{n+1} \geq \rho_n$, so wäre

$a^*(\rho_{n+1}) \geq a^*(\rho_n)$. Aus $a^*(r) > 0$, $a^*(\rho_{n+1}) < a^*(\rho_n)$ folgt die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n$. Wegen $a^*(\rho_n) = \frac{a^*(r)}{n}$ ist $\rho_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$, also $a^*(\rho_\infty) = 0$. Verbinde $(\rho_{n+1}, a^*(\rho_{n+2})), (\rho_n, a^*(\rho_{\tau_{n+1}}))$ linear. Damit erhalten wir a auf $(0, r]$. a wächst streng monoton. Sei $a(0) = 0$. Dann wächst a streng monoton auf $[0, r]$ und ist stetig. In $[\rho_{n+1}, \rho_n]$ ist $a(\rho) \leq a^*(\rho_{n+1}) \leq a^*(\rho)$. Insgesamt erfüllt a alle Bedingungen des Lemmas. Die Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial. □

Seien $f, V \epsilon C^1([\tau, \infty) \times B_r(0), \mathbb{R})$, $x \epsilon C^1(\widetilde{I}, B_r(0))$ Lösung von $x' = f(t, x)$ über $\widetilde{I} \subset [\tau, \infty)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_t V(t, x(t)) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \langle \nabla_x V(t, x(t)), \dot{x}(t) \rangle, \\ &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x(t)) + \langle \nabla_x V(t, x(t)), f(t, x(t)) \rangle. \end{aligned}$$

Sei

$$\dot{V}(t, x) := \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla_x V(t, x), f(t, x) \rangle.$$

$\dot{V}$ *heißt die Ableitung von* V *längs der Lösung von* $x' = f(t, x)$.

III.10 Definition: *Seien* f, V *wie oben. Seien* $f(., 0), V(., 0) \equiv 0$. V *heißt Ljapunovfunktion für* $x' = f(t, x)$ *genau dann, wenn ein* $\rho \epsilon (0, r]$ *existiert derart, daß*

> V *positiv definit auf* $[\tau, \infty) \times B_\rho(0)$
> $\dot{V}$ *negativ semidefinit auf* $[\tau, \infty) \times B_\rho(0)$ *ist, d.h.*
> $\dot{V}(t, x) \leq 0$ *auf* $[\tau, \infty) \times B_\rho(0)$

III.11 Satz: *Wenn eine Ljapunovfunktion für* $\dot{x} = f(t, x)$ *existiert, ist der Gleichgewichtspunkt* 0 *stabil.*

Der Beweis dieses Satzes wird später erbracht.

Wichtiger Hinweis:
Es ist keine Einschränkung anzunehmen, daß die Voraussetzungen des Lemmas III.9 gelten. Wegen $\rho \epsilon (0, r)$ haben wir $V \epsilon C^0([\tau, \infty) \times \overline{B_\rho(0)}, \mathbb{R})$. Indem wir ρ gegebenenfalls etwas verkleinern, können wir auch $W \epsilon C^0(\overline{B_\rho(0)}, \mathbb{R})$, $V(t, x) \geq W(x)$ auf $[\tau, \infty) \times \overline{B_\rho(0)}$ annehmen.

III.12 Lemma: *Sei* $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet,* $\overline{\Gamma} \subset B_r(0)$, $(t_0, x_0) \epsilon [\tau, \infty) \times \Gamma$, $V \epsilon C^1([\tau, \infty) \times B_r(0), \mathbb{R})$. *Für ein* $a \epsilon \mathbb{R}$ *sei*

> *i)* $V(t_0, x_0) < a$,
> *ii)* $V(t, x) \geq a$ *auf* $[\tau, \infty) \times \partial\Gamma$,
> *iii)* $\dot{V} \leq 0$ *auf* $[\tau, \infty) \times \Gamma$

Dann gilt: Die Lösung $x(t, t_0, x_0)$ *von* $x' = f(t, x)$ *bleibt in* $[t_0, t_+)$ *im Gebiet* Γ, $t_0 \geq \tau$. $[t_0, t_+)$ *ist das maximale Existenzintervall nach Satz I.7.4. Es ist* $t_+ = \infty$, *wenn* $r < +\infty$ *ist.*

Beweis: Bleibt die Lösung nicht in Γ, so existiert ein $\widetilde{t} \epsilon [t_0, t_+)$ mit $x(\widetilde{t}, t_0, x_0) \epsilon \partial\Gamma$. Sei

$$t^* = \inf\{\widetilde{t} | x(\widetilde{t}, t_0, x_0) \epsilon \partial\Gamma\}.$$

Da $\partial\Gamma$ abgeschlossen ist, folgt $x(t^*, t_0, x_0) \epsilon \partial\Gamma$. Es ist $x(t, t_0, x_0) \epsilon \Gamma$ auf $[t_0, t^*)$. Nun betrachten wir $h(t) = V(t, x(t))$. Es ist $h(t_0) = V(t_0, x_0) < a$. Nach Annahme iii) des Satzes ist $h'(t) \leq 0$ auf $[t_0, t^*)$, so daß $h(t^*) < a$ ausfällt. Nun ist $h(t^*) = V(t^*, \underbrace{x(t^*, t_0, x_0)}_{\epsilon \partial\Gamma}) \geq a$ nach Annahme ii) des Satzes. Dies ist ein Widerspruch. Sei $r < +\infty$. $t_+ = \infty$ folgt aus Satz I.7.5. □

Bemerkung: Γ mit $x(., t_0, x_0) \epsilon \Gamma$ in $[t_0, t_+)$, wenn nur $x_0 \epsilon \Gamma$, heißt (positiv) invariant.

Beweis des Satzes III.11: Sei a eine α-Funktion auf $\overline{B_\rho(0)}$, d.h. $V(t, x) \geq a(|x|)$. Sei $0 < \varepsilon < \rho$. Dann existiert ein $\delta(\varepsilon, t_0)$ derart, daß $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$, $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$, da $V(t_0, 0) = 0$ und V stetig ist.

Wir wollen Lemma III.12 anwenden. Sei $\Gamma = B_\varepsilon(0)$. Es ist $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$, $\inf V(t,x) \geq a(\varepsilon)$.

Es ist $\dot{V} \leq 0$, da V Ljapunovfunktion ist. Lemma III.12 liefert also $|x(., t_0, x_0)| < \varepsilon$ auf $[t_0, t_+)$. 0 ist stabil. □

III.13 Korollar zu Satz III.11: *Gilt insbesondere $V(t,x) \to 0$ für $x \to 0$ gleichmäßig in $t \epsilon [\tau, \infty)$, dann ist der Gleichgewichtspunkt 0 gleichmäßig stabil.*

Beweis: Im Beweis des Satzes III.11 wird $V(t_0, x_0) < a(\varepsilon)$ für $|x_0| < \delta(\varepsilon)$ für alle $t_0 \geq \tau$.

III.14 Beispiel: Pendelgleichung: $y'' + \sin y = 0$. Man vergleiche hierzu Beispiel I.7.10, in dem periodische Lösungen derselben Gleichung gesucht wurden. Die Gleichung ist äquivalent mit dem System

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin x_1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ gesetzt ist.}$$

$V(x) := \frac{1}{2}x_2^2 + 1 - \cos x_1 \geq 0$, $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \binom{2k\pi}{0}$, $k \epsilon \mathbb{Z}$. Dann ist $\dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) = (\sin x_1)x_2 + x_2(-\sin x_1) \equiv 0$. V ist Ljapunovfunktion im Sinn von Definition III.10, wenn $r = 2\pi$ gesetzt wird. Also ist 0 nach III.13 gleichmäßig stabil. 0 ist aber nicht attraktiv, da $V(x(t)) \equiv V(x_0)$, $t \geq t_0$.

$$\begin{array}{rrcl} V \equiv 2 & \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}x_2^2 & = & \cos x_1 + 1 \\ & & = & \cos^2 \frac{x_1}{2} - \sin^2 \frac{x_1}{2} + 1 \\ & & = & 2\cos^2 \frac{x_1}{2} \\ & \Leftrightarrow \ x_2 & = & \pm 2 \cos \frac{x_1}{2} \end{array}$$

III.15 Lemma: *Betrachte $x' = f(t,x)$ in $[\tau, \infty) \times B_r(0)$. Sei $V \epsilon C^1([\tau, \infty) \times B_r(0))$, sei*

i) $\dot{V}(t,x) \leq 0$
ii) $V(t,x) \geq -M$ auf $[\tau, \infty) \times B_\rho(0)$ für ein $\rho \epsilon (0, r)$.
iii) Sei $|f(t,x)| \leq G$.

Ist nun $x(t, t_0, x_0)$ Lösung von $x' = f(t,x)$, die für alle $t \geq t_0$ in $B_\rho(0)$ liegt, dann gilt für jeden ω-Grenzpunkt x^*: Für jedes in $B_r(0)$ stetige W mit $0 \leq W(x) \leq -\sup_{t \geq \tau} \dot{V}(t,x)$ ist $W(x^*) = 0$.

Bemerkung: Eine solche Lösung existiert nach Lemma III.12, falls z.B. mit $a = \inf\{V(t,x) | t \geq \tau, |x| = \rho\}$ gilt

$$V(x_0, t_0) < \inf\{V(t,x) | t \geq \tau, |x| = \rho\}$$

für ein $t_0 \geq \tau$, x_0 mit $|x_0| < \rho$.

Beweis des Lemmas III.15: Angenommen, es sei $W(x^*) = \gamma > 0$ für einen ω-Grenzpunkt x^* mit $x(t_\upsilon) \to x^*$. Dann ist $W(x) \geq \frac{\gamma}{2}$ auf $|x - x^*| < \delta$. Ist dann $|x(t_\upsilon) - x^*| < \frac{\delta}{2}$, $\upsilon \geq \upsilon_0$, so ist wegen

$$|x(t) - x^*| \leq \frac{\delta}{2} + |x(t_\upsilon) - x(t)| \leq \frac{\delta}{2} + \int_{t_\upsilon}^{t} f(\sigma, x(\sigma))|d\sigma$$

jedenfalls

$$|x(t) - x^*| < \delta \text{ in } [t_\upsilon, t_\upsilon + \frac{\delta}{4G}], \upsilon \geq \upsilon_0.$$

Also ist $W(x(t)) \geq \frac{\gamma}{2}$ auf $[t_v, t_v + \frac{\delta}{4G}]$. Sei $\widetilde{t}_v = t_v + \frac{\delta}{4G}$. Es ist nach Annahme

$$\begin{aligned}
& \dot{V}(t, x(t)) \leq -\frac{\gamma}{2} \text{ in } [t_v + \frac{\delta}{4G}] \\
\Rightarrow \quad & V(\widetilde{t}_v, x(\widetilde{t}_v)) - V(t_v, x(t_v)) \leq -\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\delta}{4G} \\
& V(t_{v+i}, x(t_{v+i})) \leq V(t_v, x(t_v)) - \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\delta}{4G} \text{ für } t_{v+i} \geq \widetilde{t}_v \\
& V(t_{v_j}, x(t_{v_j})) \leq V(t_{v_0}, x(t_{v_0})) - j\frac{\gamma\delta}{8G}
\end{aligned}$$

für eine Indexfolge v_j, $j \to \infty$, im Widerspruch zur Annahme ii). □

Folgerung aus Lemma III.15: Verschärft man ii) zu "V Ljapunov-Funktion", so kann man die Bemerkung oben erfüllen, d.h. alle Lösungen, die in x_0 zur Zeit t_0 starten mit $V(t_0, x_0)$ geeignet klein, bleiben in $B_\rho(0)$ und für alle ihre $\omega-$Grenzpunkte gilt $W(x^*) = 0$, W aus Lemma III.15. Verschärft man i) zu "$\dot{V}$ negativ definit" (d.h. für W aus Lemma III.15 gilt $W(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = 0$), so ist 0 der einzige ω-Grenzpunkt, d.h. $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

III.16 Satz: *Sei V Ljapunovfunktion gemäß Definition III.10, $V(t, x) \to 0$ für $x \to 0$ gleichmäßig in t, $\dot{V}(t, x)$ negativ definit. Dann ist der Gleichgewichtspunkt 0 gleichmäßig asymptotisch stabil.*

Beweis: Nach III.13 ist 0 gleichmäßig stabil. Zu zeigen ist: $\exists \delta > 0$, $\forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon \geq 0$: $|x(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon$, $t \geq t_0 + T_\varepsilon$, $|x_0| \leq \delta$, $t_0 \geq \tau$. t_0^* aus Definition III.1b) ist τ nach Lemma III.12, Beweis des Satzes III.11. Angenommen $\exists \widehat{\varepsilon} > 0$ mit $|x(t^*, t_0, x_0)| \geq \widehat{\varepsilon}$ für ein $t^*(\widehat{\varepsilon}) = t^* \geq t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}$, wie groß $T_{\widehat{\varepsilon}}$ bzw. klein $|x_0|$ auch sind. Dann ist $V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) \geq a(\widehat{\varepsilon}) > 0$, also $V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq a(\widehat{\varepsilon})$, in $[t_0, t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}]$, da V längs der Lösung monoton fällt. Also ist

$$|x(t, t_0, x_0)| \geq \mu_{\widehat{\varepsilon}} > 0 \text{ auf } [t_0, t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}]$$

mit einem von $T_{\widehat{\varepsilon}}$ unabhängigen $\mu_{\widehat{\varepsilon}}$, da V gleichmäßig in $t\epsilon[\tau, \infty)$ gegen Null konvergiert, wenn $x \to 0$. Für die Funktion W zu $\dot{V}$ gilt

$$W(x(t, t_0, x_0)) \leq \gamma_{\widehat{\varepsilon}} > 0 \text{ auf } [t_0, t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}],$$

da W positiv definit ist. Also folgt

$$\begin{aligned}
& V(t, x(t, t_0, x_0)) - V(t_0, x_0) \leq -\gamma_{\widehat{\varepsilon}}(t - t_0), t\epsilon[t_0, t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}], \\
& a(\widehat{\varepsilon}) \leq V(t_0, x_0) - \gamma_{\widehat{\varepsilon}} T_{\widehat{\varepsilon}} (t = t_0 + T_{\widehat{\varepsilon}}),
\end{aligned}$$

und dies führt für großes $T_{\widehat{\varepsilon}}$ zu einem Widerspruch. □

III.17 Beispiel: Wir betrachten die gedämpfte Pendelgleichung $y'' + \beta y' + \alpha \sin y = 0$ mit Konstanten $\alpha, \beta > 0$. Umschreibung auf ein System: $x' = f(x) = (x_2, -\beta x_2 - \alpha \sin x_1)^T$ mit $x = (x_1, x_2)^T$. Sei $V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha(1 - \cos x_1) \Rightarrow V(x) \geq 0$, $\dot{V}(x) = \nabla V \cdot f = \alpha \sin x_1 \cdot x_2 + x_2(-\beta x_2 - \alpha \sin x_1) = -\beta x_2^2$. III.15 $\Rightarrow x_2^* = 0$ für $x^* = \omega-$Limes-Punkt einer beschränkten Lösung. Ansatz für definite $V, \dot{V}$:

$$\begin{aligned}
& V(x) = \frac{a}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + \frac{c}{2}x_2^2 + \alpha(1 - \cos x_1) \\
\Rightarrow \quad & \dot{V}(x) = x_2^2(b - \beta c) + (a - \beta b)x_1x_2 + \alpha(1 - c)x_2 \sin x_1 - \alpha b x_1 \sin x_1 \\
\Rightarrow \quad & \dot{V}(x) = -\frac{\beta}{2}x_2^2 - \frac{\alpha\beta}{2}x_1 \sin x_1 \leq -\varepsilon|x|^2, \varepsilon > 0 \text{ geeignet, } |x| \text{ klein}
\end{aligned}$$

$c = 1, b = \frac{\beta}{2}$

$\alpha = \frac{\beta^2}{2}$

$$V(x) = \frac{\beta^2}{4}x_1^2 + \frac{\beta}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha(1 - \cos x_1) \geq \varepsilon'|x|^2, \varepsilon' > 0 \text{ geeignet, } |x| \text{ klein}$$

III.18 Hilfssatz *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz, $x' = f(x)$ ein autonomes System. Sei*

$x(t)$ eine beschränkte Lösung über $\mathbb{R}^+ = \{t | t \geq 0\}$. Dann ist die ω- Grenzpunktmenge Ω nicht leer, kompakt, zusammenhängend, und $\lim\limits_{t\to\infty} dist(x(t,),\Omega) = 0$. Ferner ist Ω invariant, d.h. ist $x^*\epsilon\Omega$, $x(t^*) = x^*$ für ein t^*, so ist $x(t,t^*,x^*)\epsilon\Omega$ für alle t.

Beweis: Nach Bolzano-Weienstraß ist Ω nicht leer. Ω ist beschränkt, da $\{x(t)|t\epsilon\mathbb{R}\}$ beschränkt ist, insbesondere ist $\Omega \subset B_M(0)$, falls $|x(t)| \leq M$, $t\epsilon\mathbb{R}$, ist. Wir zeigen jetzt, daß Ω abgeschlossen ist: Seien $x_n^*\epsilon\Omega$, $x_n^* \to x^*$, $n\epsilon\mathbb{N}$ bzw. $n \to \infty$. Zu x_n^* gibt es ein t_n mit $|x(t_n) - x_n^*| < 1/n$. Es ist keine Einschränkung, anzunehmen, daß die t_n monoton wachsend gegen ∞ konvergieren, falls $n \to \infty$. Wir erhalten $x(t_n) \to x^*$, $n \to \infty$, d.h. $x^*\epsilon\Omega$. Ω ist also kompakt. Angenommen, $dist(x(t_n),\Omega) \geq d > 0$ für eine Folge (t_n) mit $t_n \to \infty, n \to \infty$. Dann haben wir $x(t_{n_j}) \to x^*$, $j \to \infty$, für eine geeignete Teilfolge (t_{n_j}) von (t_n), und $dist(x^*,\Omega) \geq d > 0$. Dies ist ein Widerspruch. Nun zeigen wir, daß Ω zusammenhängend ist. Angenommen, es ist $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ mit Ω_1, Ω_2 abgeschlossen, $\neq \emptyset$ ("+" bedeutet disjunkte Vereinigung). Seien $x_i^*\epsilon\Omega_i$, $x(t_n^{(i)}) \to x_i^*$ für geeignete Folgen $(t_n^{(i)})$, die für $n \to \infty$ gegen ∞ konvergieren. Ohne Einschränkung sei $t_n^{(2)} > t_n^{(1)}$. Sei $d_i(t) = dist(x(t),\Omega_i)$, $i = 1,2$. d_i ist stetig, und wir haben mit $d(t) := d_2(t) - d_1(t)$ gerade

$$\begin{aligned} d(t_n^{(1)}) &\to dist(x_1^*,\Omega_2) > 0, \\ d(t_n^{(2)}) &\to -dist(x_2^*,\Omega_1) < 0. \end{aligned}$$

Für $n \geq n_0$ ist $d(t_n^{(1)}) > 0$, $d(t_n^{(2)}) < 0$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $t_n^{(3)}$ mit $d(t_n^{(3)}) = 0$ für ein $t_n^{(3)}\epsilon(t_n^{(1)}, t_n^{(2)})$. Wir wählen eine Teilfolge $(t_{n_j}^{(3)})$ von $(t_n^{(3)})$ aus mit $x(t_{n_j}^{(3)}) \to x_3^*\epsilon\Omega$. Da $d(t_n^{(3)}) = 0$ ist, ist $dist(x_3^*,\Omega_1) = dist(x_3^*,\Omega_2)$. Ist eine der Größen $dist(x_3^*,\Omega_i)$, $i = 1,2$, positiv, so ist dies ein Widerspruch zu $x_3^*\epsilon\Omega_1 + \Omega_2$. Ist eine der Größen $dist(x_3^*,\Omega_i) = 0$, so ist $x_3^*\epsilon\Omega_1 \cap \Omega_2$, und dies ist ebenfalls ein Widerspruch. Zur Invarianz von Ω: Sei $t^* = 0$. Sei (t_n) eine Folge mit $t_n \to \infty$, $x(t_n) \to x^*$, $n \to \infty$. Sei $x_n(t) := x(t_n + t)$. x_n ist Lösung auf $\mathbb{R}$, da das System autonom ist, $x_n(0) \to x^*$. Sei I irgendein abgeschlossenes Intervall. Sei $0\epsilon \overset{\circ}{I}$. Dann ergibt sich aus der Folgerung aus I.7.8:

$$\begin{array}{c} x_n(t,0,x_n(0)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t,0,x^*), t\epsilon I \\ \text{"} \\ x(t_n+t) \\ \downarrow n \to \infty \\ \text{Element aus } \Omega \end{array}$$

so daß $x(t)\epsilon\Omega$ für alle t. □

Einige Bemerkungen zum typologischen Zusammenhang

III.18 A Definition 1: *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, A kompakt. A heißt nicht zusammenhängend dann und nur dann, wenn*

$$\begin{aligned} &A = A_1 + A_2 \text{ mit} \\ &A_1, A_2 \text{ abgeschlossen} \\ &A_1, A_2 \neq \emptyset \end{aligned}$$

ist.

"Zusammenhängend" soll das logische Gegenteil von "nicht zusammenhängend" sein. Andererseits ist zusammenhängend folgendermaßen erklärt: A ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn es keine disjunkte Zerlegung $A = A_1 + A_2$ in (relativ) offene Mengen gibt, die beide $\neq \emptyset$ sind.

III.18 B Satz: *Die beiden eingeführten Begriffe "zusammenhängend" stimmen überein.*

Beweis: Es gebe also eine disjunkte Zerlegung

$$A = A_1 + A_2$$

in relativ offene Mengen mit $A_i \neq \emptyset$, $i = 1,2$. Sei

$$dist(A_1, A_2) = 0.$$

Also gibt es Folgen $(p_m^{(1)}), (p_m^{(2)})$ mit

$$\begin{aligned} &dist(p_m^{(1)}, p_m^{(2)}) \to 0, m \to \infty, \\ &p_m^{(1)}\epsilon A_1, p_m^{(2)}\epsilon A_2, m\epsilon\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann folgt $p_m^{(1)} \to p$, $p_m^{(2)} \to p$, $m \to \infty$

$$p \epsilon \overline{A_1} \cap \overline{A_2}.$$

Es ist $p\epsilon A$. Sei etwa $p\epsilon A_1$. Es ist

$$\begin{aligned} & A_1 \cap A_2 = \emptyset, \partial_A A_i \cap A_i \underset{\neq \emptyset}{\overset{A_i \text{offen}}{=}} \emptyset, i = 1, 2 \\ & p\epsilon A_1 \cap \partial_A A_2 \end{aligned}$$

$A \cap U_\rho(p)$ enthält also einen Punkt $q''\epsilon A_2 = A - A_1$ und einem Punkt $q'\epsilon A - A_2 = A_1$, $\rho > 0$. Also ist $p\epsilon\partial_A A_1$. Dies ist ein Widerspruch. Insbesondere ist $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 = \oslash$ und $A = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$. Die zweite Lösung ist trivial. $\square$

III.19 Satz: *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig. Wir betrachten das autonome System $x' = f(x)$. Sei $V\epsilon C^1(G, \mathbb{R})$. Sei G_0 ein Gebiet mit $0\epsilon G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G$, auf G_0 sei $\dot{V} \leq 0$, auf G_0 sei V positiv definit im Sinn von Definition III.8. V ist also Ljapunovfunktion (in G_0) zu $x' = f(x)$. Gibt es außer $x \equiv 0$ keine weitere Lösung von $x' = f(x)$, die in $\{x|x\epsilon G_0, \dot{V}(x) = 0\}$ liegt, ist der Gleichgewichtspunkt 0 asymptotisch stabil.*

Beweis: Nach III.13 ist der Gleichgewichtspunkt 0 gleichmäßig stabil, da er wegen der Existenz einer Ljapunovfunktion nach III.11 stabil ist und die Ljapunovfunktion nicht von t abhängt. Für $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta(\varepsilon) > 0$ mit $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ für $t \geq t_0$, $|x_0| < \delta(\varepsilon)$. Ohne Einschränkung sei $B_\varepsilon(0) \subset G_0$. Ω sei die $\omega-$Grenzpunktmenge von $x(t, t_0, x_0)$. Nach III.15 gilt: $\Omega \subset \{x|x\epsilon G_0, \dot{V}(x) = 0\}$, da V nicht von t abhängt. Sei $x^*\epsilon\Omega$, $x^* \neq 0$. Dann ist nach III.18 $x(t, t_0^*, x^*)\epsilon\Omega$, $t \geq t_0^* \geq t_0$. Also ist $x(t, t_0^*, x^*)\epsilon\{x|x\epsilon G_0, \dot{V}(x) = 0\}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $x^* = 0$ $\square$

III.20 Beispiel: Gedämpftes Pendel. Sei $V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha(1 - \cos x_1)$, $\dot{V}(x) = -\beta x_2^2$, $G_0 = B_\varepsilon(0)$, siehe III.17 Beispiel erster Teil. Ist $x(t)$ Lösung in $\{x|x\epsilon B_\varepsilon(0), \dot{V}(x) = 0\}$, so folgt $x_2(t) \equiv 0$, $x_2'(t) \equiv 0$. Es ist $x_2'(t) = -\beta x_2(t) - \alpha \sin x_1(t)$, $\sin x_1(t) \equiv 0$. Sei $\varepsilon < \pi$. Dann folgt $x_1(t) \equiv 0$ und 0 ist nach III.19 asymptotisch stabil. Weiterhin ziehen wir die folgende Konsequenz: Jede beschränkte Lösung konvergiert gegen einen Punkt $(k\pi, 0)$ mit $k\epsilon\mathbb{Z}$: Da wir in Lemma III.15 für W die Funktion $-\dot{V}$ selbst wählen können und jede beschränkte Lösung in einer Kugel $B_\rho(0) \subset B_\infty(0) = \mathbb{R}^n$ liegt, gilt für alle Grenzpunkte $x^* = (x_1^*, x_2^*) : x_2^* = 0$. Daraus folgt, da wir beschränkte Lösungen betrachten, $x_2(t) \to 0$, $t \to \infty$, für jede solche Lösung, also wegen $x_1' = x_2$ auch $x_1'(t) \to 0$, $t \to \infty$. Differenzieren wir die zweite Zeile des Systems $x_2' = -\beta x_2 - \alpha \sin x_1$, so folgt

$$x_2'' + \beta x_2' = \alpha(\cos x_1) \cdot x_1'$$

$|x_2'|$ bleibt beschränkt für $t \to \infty$, $\alpha(\cos x_1)x_1' \cdot x_2'$ konvergiert sogar gegen Null. Es folgt

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\beta t} x_2'^2\right) = e^{2\beta t} 2\alpha \cos x_1 \cdot x_1' x_2'$$

Ist $2|\alpha \cos x_1 \cdot x_1' \cdot x_2'| \leq \varepsilon$ für $t \geq T(\varepsilon)$, so erhalten wir

$$\begin{gathered} e^{2\beta t} x_2'^2(t) - e^{2\beta T} x_2'^2(T) \leq \varepsilon \frac{e^{2\beta t} - e^{2\beta T}}{2\beta}, t \geq T(\varepsilon), \\ x_2'(t) \to 0, t \to \infty, \\ \sin x_1(t) \to 0, t \to \infty \\ x_1^* \subset \{k\pi | k\epsilon\mathbb{Z}\} \end{gathered}$$

für alle Grenzpunkte x^* einer beschränkten Lösung. Da nach III.18 die Menge der ω-Grenzpunkte zusammenhängend ist, besteht sie aus genau einem Punkt der Form $(k\pi, 0)$. Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die jeweils betrachtete Lösung der gedämpften Pendelgleichung beschränkt ist. Diese Annahme ist in Wahrheit überflüssig, da jede Lösung beschränkt ist. Sei also $x(t, t_0, x_0)$ eine Lösung. Wegen $|f(x)| \leq C|x|$ existiert sie global in t (siehe I.7.2). Da $\dot{V} \leq 0$ ist, ist $V(x(t))$ monoton fallend. $V \geq 0 \Rightarrow V(x(t))$ bleibt beschränkt $\Rightarrow x_2(t)$ bleibt beschränkt. Sei $\upsilon(x_2, t) = \frac{1}{2}x_2^2 + \alpha(1 - \cos x_1(t))$ mit gegebener Funktion $x_1(t)$, der ersten Komponente der Lösung. Längs $x_2(t)$, der Lösung der Gleichung für die zweite Komponente: $x_2' = -\beta x_2 - \alpha \sin x_1$ gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\upsilon(x_2(t), t) &= x_2(t)x_2'(t) + \alpha(\sin x_1(t)) \cdot x_1'(t), \\ &= -\beta x_2^2(t) - \alpha(\sin x_1(t)) \cdot x_2(t) + \alpha(\sin x_1(t)) \cdot x_2(t), \\ &= -\beta x_2^2(t). \end{aligned}$$

In III.15 können wir daher $W(x_2) = \beta x_2^2$ wählen und erhalten, daß der einzige Grenzpunkt von x_2 gerade Null ist, also $x_2(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Wie oben folgt $\sin x_1(t) \to 0$, $t \to \infty$. Dann bleibt $x_1(t)$ beschränkt für $t \to \infty$.

III.21 Satz (Tschetajew): *Sei $n = 2, f : [\tau, \infty) \times B_T(0) \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig bezüglich der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$, $f(t, 0) \equiv 0$. Sei $V \epsilon C^1([\tau, \infty) \times B_r(0)), \Gamma \subset B_r(0)$. $\partial\Gamma$ sei glatte Jordankurve. Für ein $\varepsilon \epsilon (0, r)$ gelte*

i) $0 < V(t, x) \leq k$ *auf* $[\tau, \infty) \times (\Gamma \cap B_\varepsilon(0))$,

ii) $\dot{V}(t, x) \geq a(V(t, x))$ *auf* $[\tau, \infty) \times (\Gamma \cap B_\varepsilon(0))$ *mit einer α-Funktion a gemäß III.9*

iii) $V(t, x) \equiv 0$ *auf* $[\tau, \infty) \times (\partial\Gamma \cap B_\varepsilon(0))$

iv) $0 \epsilon \partial\Gamma$.

Dann ist der Gleichgewichtspunkt 0 *instabil.*

Beweis: Wähle $x_0 \epsilon \Gamma \cap B_\varepsilon(0)$ mit $|x_0| < \delta$ (dies ist wegen iv) für jedes $\delta > 0$ möglich). Dann ist nach i) $V(t_0, x_0) > 0$ für jedes beliebige $t_0 \epsilon [\tau, +\infty)$. Angenommen, es sei $x(t, t_0, x_0) \epsilon \Gamma \cap B_\varepsilon(0)$ für alle $t \epsilon [t_0, \infty)$. Aus i), ii) folgt

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq V(t_0, x_0) > 0.$$

Andererseits ist nach i) auch $V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq k$, also

$$\begin{array}{rcl} k & \geq & V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(\sigma, x(\sigma, t_0, x_0)) d\sigma \geq \\ & \geq & V(t_0, x_0) + \int_{t_0}^t a(V(\sigma, x(\sigma, t_0, x_0))) d\sigma \\ & \geq & V(t_0, x_0) + (t - t_0) \underbrace{a(V(t_0, x_0))}_{>0} \to \infty, \end{array}$$

$t \to \infty$. Dies ist ein Widerspruch. Also existiert ein $t^* \geq t_0$ mit $x(t^*, t_0, x_0) \epsilon \partial(\Gamma \cap B_\varepsilon(0))$. Angenommen, es sei $x(t^*, t_0, x_0) \epsilon \partial\Gamma \cap B_\varepsilon(0)$. Dann ist $0 = V(t^*, x(t^*, t_0, x_0))$ nach iii), und aus ii) folgt

$$V(t^*, x(t^*, t_0, x_0)) \geq V(t_0, x_0) > 0,$$

also ein Widerspruch. Wir erhalten eine Folge (t_n^*), $t_n^* \geq t_0$, $t_n^* \to \infty$, mit $x(t_n^*, t_0, x_0) = \varepsilon > 0$. ε ist die Größe aus dem Satz. □

Zu Satz III.21 gibt es einige Varianten, nämlich

III.22, Variante I: a, b seien α-Funktionen. Ersetze in Satz III.21 i) durch die Aussage i)': $0 < V(t, x) \leq a(|x|)$, ii) durch die Aussage ii)': $\dot{V}(t, x) \geq b(|x|)$.

Die Reduktion auf III.21 geschieht durch

$$\begin{array}{rrcl} & a(|x|) & \leq & a(r) =: k \\ & |x| & \geq & a^{-1}(V(t, x)) \\ \overset{i)', ii)'}{\Rightarrow} & \dot{V}(t, x) & \geq & b \circ a^{-1}(V(t, x)) \end{array}$$

mit $b \circ a^{-1}$ als neuem a in ii).

III.23 Variante II (autonomer Fall): V hängt nur von x ab,

i) $V > 0$ auf Γ,

ii) $\dot{V} > 0$ auf Γ,

iii) $V = 0$ auf $\partial\Gamma \cap B_\varepsilon(0)$,

iv) $0 \epsilon \partial\Gamma$.

Zur Reduktion auf III.21: Aus i) folgt die Beschränktheit von V auf $\Gamma \cap B_\varepsilon(0)$. Zu ii): Sei $\delta > 0$. Die Menge $S_\delta = \{x | V(x) \geq \delta, x \epsilon \overline{\Gamma \cap B_\varepsilon(0)}\}$ ist kompakt. Also ist $\inf_{x \epsilon S_\delta} \dot{V}(x) =: a_\delta > 0$. Wäre nämlich $a_\delta = 0$, so existierte ein $x_0 \epsilon S_\delta$ mit $\dot{V}(x_0) = 0$. Also ist nach ii) der Punkt x_0 aus $\partial\Gamma$. Dies ist ein Widerspruch zu iii). Wir wählen eine α-Funktion mit $a(\delta) \leq a_\delta$. Dann ist $\dot{V}(x) \geq a(V(x))$ für x mit $V(x) \geq \delta$, also erst recht auf $\Gamma \cap B_\varepsilon(0)$.

III.24 Beispiel: Wir betrachten die DGL 2. Ordnung

$$y'' + h(t)y' - y = 0.$$

Umschreibung auf ein System:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -h(t)x_2 + x_1, \\ V: &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

$r = \infty$, d.h. $B_r = \mathbb{R}^2$.

$\Gamma =$ offener 1. Quadrant. Es ist (r, φ Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= x_2^2 + x_1^2 - h(t)x_1x_2 = r^2(1 - \frac{1}{2}h(t)\sin 2\varphi), \\ &= \underbrace{\frac{r^2}{2}\sin 2\varphi}_{V(x)} \frac{2 - h(t)\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}. \end{aligned}$$

Dann sind i), iii), iv) in III.21 erfüllt (Zu iii): $2\varphi = 0$ oder $= \pi$ auf $\partial\Gamma$). ii) in III.21 ist erfüllt für $2 - h(t)\sin 2\varphi \geq \eta \sin 2\varphi$, $t\epsilon\mathbb{R}$, mit einer positiven Konstante η; insbesondere gilt ii), wenn $h(t) \leq 2 - \eta$ ist. Nach III.21 liegt dann also Instabilität des Nullpunkts vor.

Weiter betrachten wir die gedämpfte Pendelgleichung $y'' + \beta y' + \alpha \sin y = 0$ mit $\alpha, \beta > 0$ oder als System

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -\beta x_2 - \alpha \sin x_1. \end{aligned}$$

Ersetzten wir x_1 durch $x_1 + (2k+1)\pi =: \widetilde{x}_1$ und setzen $x_2 =: \widetilde{x}_2$, so entsteht

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_1' &= \widetilde{x}_2', \\ \widetilde{x}_2' &= -\beta\widetilde{x}_2 + \alpha \sin \widetilde{x}_1, \end{aligned}$$

und der Nullpunkt bei diesem System entspricht dem Punkt $((2k+1)\pi, 0)$ im ursprünglichen System. Sei wieder x_1, x_2 statt $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ geschrieben, sei

$$V(x) = x_1 \cdot x_2, \Gamma = \text{ offener erster Quadrant.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &\dot{V}(x) = x_2^2 + x_1 \alpha \sin x_1 - \beta x_1 x_2. \\ &\dot{V} > 0 \text{ gilt für } x_1 \text{ klein, } x_2^2 + (\alpha - \varepsilon)x_1^2 - \beta x_1 x_2 > 0, \\ &\text{d.h. für } x_1 \text{ klein, } \beta < 2\sqrt{\alpha}. \end{aligned}$$

Nach III.23 folgt Instabilität des Nullpunktes, d.h. des Punktes $((2k+1)\pi, 0)$ für das ursprüngliche System, wenn $\beta < 2\sqrt{\alpha}$ ist.

IV. Das Prinzip der linearisierten Stabilität

Uns interessiert die klassische Fragestellung inwieweit bei nichtlinearen Systemen $x' = g(t,x)$ mit $g(t,0) \equiv 0$ das Verhalten der Lösung durch den linearen Anteil von $g(t,.)$ in der Taylorentwicklung um $(t,0)$ bestimmt ist. Zunächst gilt:

IV.1 Satz: *Wir betrachten $x'(t) = A(t)x(t) + f(t,x)$ mit lokal Lipschitzstetigem $f : \mathbb{R} \times B_r(0) \to \mathbb{R}^n$. Sei $f(t,0) \equiv 0$, zu $\varepsilon > 0$ gebe es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß*

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon |x| \text{ für } |x| \leq \delta(\varepsilon), t \epsilon \mathbb{R}$$

ist. Ist der Gleichgewichtspunkt 0 des linearisierten Systems $y'(t) = A(t)y(t)$ gleichmäßig asymptotisch stabil, so ist er es auch bezüglich des nichtlinearen Systems.

Beweis: Wir benötigen Satz III.3. Mit ihm folgt aus der Voraussetzung des zu beweisenden Satzes

$$||U(t,t_0)|| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)},$$

wobei α, β geeignete positive Konstanten sind. Sei jetzt $x(t,t_0,x_0)$ Lösung des nichtlinearen Systems in (t_-,t_+). Dann ist

$$x(t) = U(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t,\sigma) f(\sigma, x(\sigma)) d\sigma, t \epsilon (t_-,t_+),$$

$$|x(t)| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} |x_0| + \alpha \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\sigma)} \cdot |f(\sigma,x(\sigma))| d\sigma.$$

Wähle $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \beta$. Dazu existiert ein $\delta(\varepsilon)$, $\min(r, \frac{r}{\alpha}) > \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß $|f(t,x)| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}|x|$ für $|x| \leq \delta(\varepsilon)$ ist. Sei $|x_0| < \delta(\varepsilon)/\alpha$. Angenommen, für $t^* \epsilon (t_0,t_+)$ gelte zum ersten Mal $|x(t^*)| = \delta(\varepsilon)$. Auf $[t_0,t^*]$ gilt dann

$$|x(t)| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)}|x_0| + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{-\beta(t-\sigma)} |x(\sigma)| d\sigma.$$

$$\Rightarrow e^{\beta t}|x(t)| \leq \alpha e^{\beta t_0}|x_0| + \varepsilon \int_{t_0}^t e^{\beta\sigma}|x(\sigma)| d\sigma$$

Mit der Ungleichung von Gronwall, die gleich bewiesen wird, folgt

$$e^{\beta t}|x(t)| \leq \alpha |x_0| e^{\beta t_0} e^{\varepsilon(t-t_0)}$$
$$\Rightarrow |x(t)| \leq \alpha |x_0| e^{(\varepsilon-\beta)(t-t_0)} < \delta(\varepsilon).$$

Daher bleibt stets $|x(t)| < \delta(\varepsilon)$, und das Existenzintervall ist (t_-,∞). Wegen $\varepsilon < \beta$ in der Abschätzung für $|x(t)|$ ist der Nullpunkt gleichmäßig asymptotisch stabil. □

Nun das angekündigte
IV.2 Lemma (Ungleichung von Gronwall): *Seien auf einem Intervall I zwei stetige Funktionen $\delta(t), \varepsilon(t) \geq 0$ gegeben. Sei für ein $t_0 \epsilon I$*

$$0 \leq y(t) \leq \delta(t) + |\int_{t_0}^t \varepsilon(\sigma) y(\sigma) d\sigma|, t \epsilon I.$$

Dann folgt

$$y(t) \leq \delta(t) + |\int_{t_0}^t \delta(\sigma)\varepsilon(\sigma) \exp |\int_\sigma^t \varepsilon(\rho) d\rho| d\sigma|$$

Beweis: Setze $w(t) = \int_{t_0}^t \varepsilon(\sigma) y(\sigma) d\sigma$. Dann ist $w(t_0) = 0$ und $w'(t) = \varepsilon(t)y(t) \leq \varepsilon(t)\delta(t) + \varepsilon(t)w(t)sign(t-t_0)$, also

$$w'(t) - \varepsilon(t) sign(t-t_0) w(t) \leq \varepsilon(t)\delta(t).$$

Diese Ungleichung multiplizieren wir mit $\exp(|\int_{t_0}^t \varepsilon(\rho) d\rho|) =: \gamma(t)$. Dann steht links die Ableitung von $w(t)\gamma(t)$, so daß wir erhalten:

$$w(t)\gamma(t) \leq \int_{t_0}^t \varepsilon(\sigma)\delta(\sigma)\gamma(\sigma) d\sigma,$$

$$w(t) \leq \int_{t_0}^t \varepsilon(\sigma)\delta(\sigma) \frac{\gamma(\sigma)}{\gamma(t)} d\sigma,$$

und dies ist auf Grund der Definition von γ die Behauptung. $\square$

Spezialfall: $\delta \equiv \delta_0 > 0$, $\varepsilon \equiv \varepsilon_0 > 0$, $t > t_0$. Dann besagt die Voraussetzung des Lemmas IV.2:

$$0 \leq y(t) \leq \delta_0 + \varepsilon_0 \left| \int_{t_0}^{t} y(\sigma) d\sigma \right|,$$

und aus Lemma IV.2 folgt

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \delta_0 + \varepsilon_0 \delta_0 \int_{t_0}^{t} \exp(\varepsilon_0 (t-\sigma)) d\sigma, \\ &= \delta_0 \exp(\varepsilon_0 (t - t_0)). \end{aligned}$$

IV.3 Satz: *Wir betrachten das System $x' = Ax + f(t,x)$, wobei bezüglich f die Voraussetzungen des Satzes IV.1 gelten mögen und der lineare Teil der rechten Seite also konstant ist und durch die Matrix A gegeben ist. Der Nullpunkt ist gleichmäßig asymptotisch stabil, falls für $\lambda \epsilon \sigma(A)$ gilt: $Re\lambda \leq -\beta$ mit $\beta > 0$. In diesem Fall haben wir: Es gibt ein $\delta > 0$ derart, daß*

$$|x(t,t_0,x_0)| \leq c(\beta')|x_0| e^{-\beta'(t-t_0)}, 0 < \beta' < \beta,$$

wenn $|x_0| < \delta$ ist. Der Nullpunkt ist instabil, falls für mindestens ein $\lambda \epsilon \sigma(A)$ gilt: $Re\lambda > 0$.

Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt aus Satz IV.1 und seinem Beweis. Statt III.3 iv) muß man die Abschätzung für $||U(t,t_0)||$ im Beweis des Satzes III.4 benutzen. Nun zum zweiten Teil, der Instabilität des Nullpunktes. Sei

$$T^{-1}AT = J \ (= \text{Jordanmatrix})$$

(man vergleiche I.7.12). Es ist $J =$ Diagonalmatrix $D + N$. Zwischenbehauptung: Es gibt zu $\gamma \epsilon \mathbb{R}$ ein T_γ, T_γ regulär, mit $T_\gamma A T_\gamma^{-1} = D + \gamma N$. Beweis der Zwischenbehauptung: Ist $\lambda I + N$ ein Jordanblock $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ \lambda & \ddots & \\ 0 & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\widehat{k} \times \widehat{k}$ Elementen, so setzen wir

$$S_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \gamma & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma^{\widehat{k}-1} \end{pmatrix}.$$

Dann folgt $S_\gamma^{-1}(\lambda I + N) S_\gamma = \lambda I + \gamma N$. Setze die S_γ zusammen zu $\widetilde{S}_\gamma$, bilde dann $T_\gamma = \widetilde{S}_\gamma^{-1} T^{-1}$. T_γ leistet das Gewünschte. $\square$ Seien jetzt die $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die Eigenwerte mit positivem Realteil und $Re\lambda_i \geq \alpha > 0$, $i = 1, \ldots, k$, während $Re\lambda \leq 0$ sonst, λ Eigenwert. Sei

$$P = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die Projektion auf die ersten k Koordinaten. Dann ist mit $J_\gamma = D + \gamma N$

$$Re(Pz, PJ_\gamma z) \geq (\alpha - \gamma)|Pz|^2, z \epsilon \mathbb{C}^n,$$

weil

$$\begin{aligned} Re(Pz, PJ_\gamma z) &= Re(PJ_\gamma z, Pz) \\ &= Re \sum_{j=1}^{k} \overline{z_j}(\lambda_j z_j + \gamma \delta_j z_{j+1}) \text{ mit } \delta_j = 0 \text{ oder } = 1, \delta_k = 0, \\ &\geq \alpha |Pz|^2 - \gamma |z_k||z_{k+1}| - \gamma \sum_{j=1}^{k-1} |z_j||z_{j+1}|, \\ &\geq (\alpha - 2\gamma)|Pz|^2 - \gamma |Qz|^2. \end{aligned}$$

ist. Analog folgt für $Q = I - P$:

$$Re(Qz, QJ_\gamma z) \leq \gamma |Qz|^2$$

Wir wählen jetzt $\gamma = \frac{\alpha}{8}$, dann $\varepsilon > 0$ mit $16||T_\gamma||||T_\gamma^{-1}||\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$. Dann

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon|x| \text{ für } |x| \leq \delta(\varepsilon), t\epsilon\mathbb{R}.$$

Angenommen, 0 wäre stabil. Zu obigem $\delta(\varepsilon)$ gibt es ein $\delta_0 = \delta_0(\delta(\varepsilon), t_0) > 0$ mit

$$|x_0| \leq \delta_0 \text{ impliziert } |x(t,t_0,x_0)| \leq \delta(\varepsilon), t \geq t_0 \geq t_0^*$$

(Vgl. III.1). Wir wählen $x_0 \epsilon T_\gamma^{-1}P(\mathbb{C}^n) \cap \mathbb{R}^n$ mit $0 < |x_0| < \delta_0$. Sei $\varphi(t) = |PT_\gamma x(t)|^2 - |QT_\gamma x(t)|^2$, $x(t) = x(t,t_0,x_0)$. Es ist

$$\varphi(t_0) = |PT_\gamma x_0|^2 > 0.$$

Angenommen, es gibt $t_1 < +\infty$ mit $\varphi(t_1) = 0$. Ohne Einschränkung sei t_1 minimal mit dieser Eigenschaft. Nun ist

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2Re(PT_\gamma x(t), PT_\gamma x'(t)) - 2Re(QT_\gamma x(t), QT_\gamma x'(t)),\\
&= 2Re[(PT_\gamma x(t), PT_\gamma(Ax(t) + f(t,x(t))) - (QT_\gamma x(t), QT_\gamma(Ax(t) + f(t,x(t)))],\\
&= 2Re[(PT_\gamma x, PT_\gamma AT_\gamma^{-1}T_\gamma x) - (QT_\gamma x, QT_\gamma AT_\gamma^{-1}T_\gamma x)] + 2Re[(PT_\gamma x, PT_\gamma f) - (QT_\gamma x, QT_\gamma f)],\\
&\geq 2(\alpha - 2\gamma)|PT_\gamma x|^2 - 4\gamma|QT_\gamma x|^2 - 4|T_\gamma x|\varepsilon|x|||T_\gamma||.
\end{aligned}$$

Auf $[t_0, t_1]$ ist $\varphi(t) \geq 0$, d.h. $|PT_\gamma x| \geq |QT_\gamma x|$, also insbesondere $|T_\gamma x| \leq 2|PT_\gamma x|$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &\geq 2(\alpha - 4\gamma)|PT_\gamma x|^2 - 8|PT_\gamma x|\varepsilon|T_\gamma x|||T_\gamma^{-1}||||T_\gamma||,\\
&\geq 2(\alpha - 4\gamma)|PT_\gamma x|^2 - 16\varepsilon|PT_\gamma x|^2||T_\gamma^{-1}||||T_\gamma||,\\
&\geq 2(\alpha - 4\gamma - \frac{\alpha}{4})|PT_\gamma x|^2 \geq \frac{\alpha}{2}|PT_\gamma x|^2 \geq \frac{\alpha}{2}\varphi(t),
\end{aligned}$$

also $\varphi(t) \geq \varphi(t_0)e^{(\alpha/2)(t-t_0)}$. Also ist $\varphi(t) > 0$ in $[t_0, +\infty)$. Da $|\varphi(t)| \leq c|x(t)|$ ist, folgt $|x(t)| \to \infty$, und die Annahme $|x(t)| \leq \delta(\varepsilon)$ ist falsch. Anders formuliert: Ist der Startwert x_0 wie oben angegeben, verläßt die Lösung die Kugel $B_{\delta(\varepsilon)}(0)$. ε und damit $\delta(\varepsilon)$ hängen von α ab. Wir gehen zum Abschluß noch auf die Wahl des Anfangswerts ein: Es ist $U = T_\gamma^{-1}P(\mathbb{C}^n) \cap \mathbb{R}^n \neq \{0\}$, denn: Ist $Aw = \lambda w$, $Re\lambda \geq \alpha$, dann ist

$T_\gamma AT_\gamma^{-1}T_\gamma w = \lambda T_\gamma w = J_\gamma T_\gamma w$
$T_\gamma w$ Eigenvektor zu J_γ mit Eigenwert λ.
$h = T_\gamma w \Rightarrow h_{k+1}, \ldots, h_n = 0 \Rightarrow T_\gamma w = Pv$
für ein $v\epsilon\mathbb{C}^n - \{0\}, w = T_\gamma^{-1}Pv$. Ist
$w\epsilon\mathbb{R}^n$, so ist man fertig. Sonst: Sei $Rew \neq 0, A\overline{w} = \overline{\lambda}\overline{w}$
$\frac{w + \overline{w}}{2}\epsilon T_\gamma^{-1}P(\mathbb{C}^n)$ und $\epsilon\mathbb{R}^n - \{0\}$. Sei $Rew = 0$
Dann betrachte man $\frac{1}{i}w$.

IV.4 Satz: *Wir betrachten $x' = f(x)$ mit $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^n$ 3 Mal stetig differenzierbar. Sei x_0 stationärer Punkt, d.h. $f(x_0) = 0$. Sei*

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

x_0 ist gleichmäßig asymptotisch stabil, falls $Re\lambda \leq -\beta < 0$ für $\lambda\epsilon\sigma(Df(x_0))$. Er ist instabil, falls $\sigma(Df(x_0)) \cap \{z|Rez\} \neq \emptyset$ (Zu diesen Begriffen vgl. III.1 und nachfolgenden Beweis.)

Beweis: Setzen wir das Restglied in Integralform an, so folgt

$$\boxed{f(x) = Df(x_0)(x - x_0) + \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + \widetilde{t}(x - x_0))(1 - \widetilde{t})d\widetilde{t} \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)}$$

$$=: Ay + g(y) \text{ mit } y = x - x_0,$$

also

$$y' = Ay + g(y)$$

Nun wenden wir Satz IV.3 an. □

Beispiele: 1.) $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\beta x_2 - \alpha \sin x_1 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta > 0$ (ged. Pendel), $Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha \cos x_1 & -\beta \end{pmatrix}$
$f(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0,\ x_1 = k\pi,\ k\epsilon\mathbb{Z}$. Spektrum von $Df(x) : \lambda(\lambda + \beta) + \alpha \cos x_1 = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha \cos x_1}$$

Einsetzen von $(k\pi, 0)$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, liefert:

$$\lambda_{1,2}^{(k)} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \alpha(-1)^k},$$

$$k \text{ ungerade, } k = 2l+1, \lambda_1^{(k)} > 0 \Rightarrow (k\pi, 0) \text{ instabil,}$$
$$k \text{ gerade, } k = 2l, Re\lambda_{1,2}^{(k)} \leq -\frac{\beta}{2} \Rightarrow (k\pi, 0) \text{ gleichmäßig asymptotisch stabil.}$$

In der Nähe der stabilen Gleichgewichtspunkte haben wir für $\beta < 2\sqrt{\alpha}$.

2. Räuber-Beute-Modell: Man sucht Lösungen $x_1, x_2 \geq 0$ von

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(\alpha - \beta x_2 - \lambda x_1) = x_1 L(x) \ (x_1 = \text{Beute}) \\ x_2' &= x_2(-\gamma + \delta x_1 - \mu x_2) = x_2 R(x) \ (x_2 = \text{Räuber}) \end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda > 0$.

I. $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}$. Stationäre Punkte?

a) $x = 0$, b) $x_1 = 0, R(x) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung in $(\mathbb{R}^+)^2$, c) $x_2 = 0, L(x) = 0 \Rightarrow x = (\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$,
b) $L(x) = 0$, $R(x) = 0$ für $\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}$ nicht möglich in $(\mathbb{R}^+)^2$.

Genaue Erläuterungen zu den obigen Beispielen

1a.) Lösung gedämpftes Pendel. Zusammenfassung richtig, weil jede Lösung beschränkt ist. Es fehlte die genauere Diskussion der geraden bzw. ungeraden Vielfachen von π.

1b.) $D_x f(x_k)$, $x_k = (k\pi, 0)$
Eigenwerte: $\lambda_{1,2}^{(k)} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta}{4}^2 - \alpha(-1)^k}$

k **gerade:** Stabilität $\lambda_{1,2}^{(k)} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta}{4}^2 - \alpha}$
$\frac{\beta^2}{4} < \alpha \Leftrightarrow \beta < 2\sqrt{\alpha}\ Re\lambda_{1,2}^{(k)} < 0,\ Im\lambda_{1,2}^{(k)} \neq 0.$

Lösung verhält sich ungefähr wie Lösung der linearen Gleichung gemäß I.7.12.5 Strudelpunkt

$\frac{\beta^2}{4} \geq \alpha \Leftrightarrow \beta \geq 2\sqrt{\alpha}\ \lambda_{1,2}^{(k)} < 0$ (und reell)

k **ungerade:** Instabilität

Ungefähres Bild für alle Fälle! Die Krümmung der Kurven braucht nicht zu stimmen!

$\lambda_{1,2}^{(k)} = -\frac{\beta}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \alpha} \Rightarrow \lambda_1^{(k)} > 0, \lambda_2^{(k)} < 0$. Sattelpunkt nach I.7.12.5.

a)

$$\begin{array}{lll} x_2(0) > 0, & x_1' = x_2 & x_1 \text{ wächst an} \\ x_1(0) = 3\pi & x_2' = -\beta x_2 - \alpha \sin x_1 & x_2 \text{ fällt} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} x_2(0) > 0 & \\ x_1(0) = 3\pi + \varepsilon & \text{ebenso} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lll} x_2(0) = 0 & & x_1' > 0 \\ x_1(0) = 3\pi + \varepsilon & x_2' = -\beta x_2 - \alpha \sin x_1 & x_2 \text{ wächst} > 0 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ll} x_2(0) < 0 & \text{Spiegelverkehrt}(3\pi - \varepsilon \text{ statt } 3\pi + \varepsilon) \\ \vdots & \end{array}$$

Nur $(k\pi, 0)$, k ungerade, läuft nach $(k\pi, 0)$

Frage: Wie zeichne ich ein ungefähres Phasenbild in der Nähe einer Gleichgewichtslösung eines ebenen autonomen Systems?

Idee: Vor einer instabilen Gleichgewichtslösung laufen die Lösungen der DGL weg, zu einer stabilen hin, wenn sie in der Nähe der Gleichgewichtslösung starten, oder bleiben in der Nähe (periodische Lösungen)

1. Analysis:
Eigenwerte linearer Anteil $D_x f(x_0)$. Stab., Instab. Linearer Anteil nach I.7.12.5. klassifizieren, sofern möglich.

2. Zeichnung:
Werte das System für Anfangswerte in der Nähe der Gleichgewichtslösung aus.

3. Wenn 1. nicht möglich:
Funktionale V. Nicht möglich heißt etwa: Eigenwerte beide Null, z.B. $D_x f(x_0) = 0$, ein Eigenwert < 0, einer Null. Beide rein imaginär. Tschetajew gilt auch für $n \geq 3$.

II. $\frac{\alpha}{\lambda} > \frac{\gamma}{\delta}$. Stationäre Punkte: a) $x = 0$, c) $x = \left(\frac{\alpha}{\lambda}, 0\right)$, d) $x = \left(\frac{\alpha\mu+\beta\gamma}{\lambda\mu+\beta\delta}, \frac{\alpha\delta-\gamma\lambda}{\lambda\mu+\beta\delta}\right)$
Fall b) mit $x_1 = 0$, $R(x) = 0$ ist in $(\mathbb{R}^+)^2$ nicht möglich.

Es ist $Df(x) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta x_2 - 2\lambda x_1 & -\beta x_1 \\ \delta x_2 & \delta x_1 - \gamma - 2\mu x_2 \end{pmatrix}$, also ist $Df(0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$. Daher ist $\sigma(Df(0)) = \{\alpha, -\gamma\}$ und der Gleichgewichtspunkt 0 ist instabil. Weiter ist $Df(\frac{\alpha}{\lambda}, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\beta\alpha}{\lambda} \\ 0 & -\gamma + \frac{\delta\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}$, $\sigma(Df(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)) = \{-\alpha, -\gamma + \frac{\delta\alpha}{\lambda}\}$, so daß im Fall I der Gleichgewichtspunkt $(\frac{\alpha}{\lambda}, 0)$ gleichmäßig asymptotisch stabil ist, während er im Fall II instabil ist. Endlich haben wir

$$Df\left(\underbrace{\frac{\alpha\mu + \beta\gamma}{\lambda\mu + \beta\delta}}_{=:\widehat{x}_1}, \underbrace{\frac{\alpha\delta - \gamma\lambda}{\lambda\mu + \beta\delta}}_{=:\widehat{x}_2}\right) = \begin{pmatrix} -\lambda\widehat{x}_1 & -\beta\widehat{x}_1 \\ \delta\widehat{x}_2 & -\mu\widehat{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma(Df(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)) = \left\{ -\tfrac{\lambda\widehat{x}_1 + \mu\widehat{x}_2}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(\lambda\widehat{x}_1 + \mu\widehat{x}_2)^2}{4} - \underbrace{(\beta\delta + \lambda\mu)\widehat{x}_1\widehat{x}_2}_{>0}} \right\}$$

Der Gleichgewichtspunkt $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2)$ ist somit gleichmäßig asymptotisch stabil.

3. Sei $f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1^3 \\ x_1 + x_2^3 \end{pmatrix}$. $x = 0$ ist der einzige Gleichgewichtspunkt, da aus $x_2 = x_1^3$, $x_1 + x_2^3 = 0$ folgt: $x_1 + x_1^9 = 0$, also $1 + x_1^8 = 0$ für $x_1 \neq 0$, Wid., also $x_1 = x_2 = 0$. Es ist

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 & -1 \\ 1 & 3x_2^2 \end{pmatrix}, Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma(Df(0)) = \{\pm i\}.$$

Demnach ist eine Entscheidung gemäß Satz IV.4 nicht möglich. Sei $r^2 = x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow rr' = x_1x_1' + x_2x_2' = x_1^4 + x_2^4 > 0$ auf der Lösung außerhalb $(0,0) \Rightarrow r' > 0 \Rightarrow r$ wächst. Es liegt Instabilität vor:

Nun betrachten wir $\widetilde{f}(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_1^3 \\ x_1 - x_2^3 \end{pmatrix}$. Dann ist wieder 0 der einzige stationäre Punkt, $\sigma(D\widetilde{f}(0)) = \{\pm i\}$ und $rr' = -(x_1^4 + x_2^4)$,, d.h. r fällt. Vermutung: $r \to 0$, Stabilität.

Da wir die Eigenwerte als Nullstellen von Polynomen gewinnen, ist das folgende Kriterium nützlich, das wir hier nicht beweisen.

IV.5 Satz (Kriterium von Routh-Hurwitz): *Sei*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ein Polynom mit $a_k \epsilon \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, und $a_n = 1$. Dann und nur dann haben die Nullstellen von p einen *negative Realteil, wenn alle $a_k > 0$ und die Hauptunterdeterminanten von*

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \\ 1 & a_{n-2} & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & \\ \vdots & 1 & \\ & 0 & \\ & \vdots & \end{pmatrix} = (h_{ij})_{1\le i,j\le n} = (a_{n-2j+i}) \text{ mit } a_l = 0, \text{ falls } l < 0 \text{ oder } > n$$

positiv sind.

Beispiel: $n = 3$. Das Kriterium lautet $a_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$, die Hauptunterdeterminante von $\begin{pmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ sind a_2, $a_2 a_1 - a_0$, $a_0(a_2 a_1 - a_0)$.
Die Bedingungen lauten also $a_2 > 0$, $a_2 a_1 > a_0 > 0$.

V. Der Einzugsbereich eines asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkts

Wir betrachten das System $x' = f(x)$, $f : B_\rho(0) \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitzstetig. Sei $f(0) = 0$ und 0 der Gleichgewichtszustand, den wir betrachten. Zur folgenden Definition vergleiche auch Definition III 1b).

V.1 Definition: *Der Einzugsbereich der* 0 *ist die Menge* $E = \{x_0 | x(t, 0, x_0)$ *existiert für* $t \geq 0$ *und es gilt* $x(t, 0, x_0) \to 0$ *für* $t \to \infty\}$.

V.2 Satz: *Sei* $t_0^* = 0$, *sei der Gleichgewichtspunkt* 0 *asymptotisch stabil. Dann ist* E *offen, zusammenhängend und invariant, d.h.* $x(t, 0, x_0) \epsilon E$ *für* $t \geq 0$, *wenn* $x_0 \epsilon E$ *ist. Letzteres gilt sogar für* $t \epsilon (t_-, \infty)$.

Beweis: Sei $t_1 \epsilon (t_-, \infty)$, $x_0 \epsilon E$. Dann existiert $x(t + t_1, -t_1, x_0)$ für $t \geq 0$ und konvergiert für $t \to \infty$ gegen Null. Nun ist $x(t + t_1, -t_1, x_0) = x(t, 0, x(t_1, 0, x_0))$. Also ist $x(t_1, 0, x_0) \epsilon E$.

Da 0 asymptotisch stabil nach Voraussetzung ist, ist $B_\varepsilon(0) \subset E$ für ein $\varepsilon > 0$. Sei $x_0 \epsilon E$. Nach Voraussetzung ist $|x(T, 0, x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $T \geq t_0$, $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$. Wir betrachten $[0, T]$. Es gibt ein $\widehat{\delta} > 0$ derart, daß $|x(t, 0, x_1) - x(t, 0, x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist für $|x_1 - x_0| < \widehat{\delta}$ und $t \epsilon [0, T]$ (Stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten). $\widehat{\delta}$ hängt von ε, T ab, $\widehat{\delta} = \widehat{\delta}(\varepsilon, T)$. Also ist $|x(T, 0, x_1)| < \varepsilon$ und somit $x(T, 0, x_1) \epsilon E$. Also existiert $x(t, 0, x(T, 0, x_1))$ für alle $t \geq 0$ und konvergiert gegen 0 für $t \to \infty$. Wegen $x(t, 0, x(T, 0, x_1)) = x(t + T, 0, x_1)$ ist $x_1 \epsilon E$ und somit $B_{\widehat{\delta}}(x_0) \subset E$. Seien $x_1, x_0 \epsilon E$. Also $x(t, 0, x_1) \to 0$, $x(t, 0, x_0) \to 0$ für $t \to \infty$. Ist $T \geq t_0$, so sind $x(T, 0, x_1)$, $x(T, 0, x_0) \epsilon B_\varepsilon(0) \subset E$. Wegen der Invarianz von E sind $x(t, 0, x_1)$, $x(t, 0, x_0) \epsilon E$ für $t \geq 0$ und wir haben folgendes Bild:

Also ist E zusammenhängend. $\square$

Nach Satz III.2 folgt für Systeme $x' = f(x)$ aus der (asymptotischen) Stabilität die gleichmäßige (asymptotische) Stabilität.

V.3 Satz (Zubov): *Wir betrachten das System* $x' = f(x)$ *wie eben. Sei* $E \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet mit* $0 \epsilon E \subset \overline{E} \subset B_\rho(0)$. *Es gebe* $V \epsilon C^1(E, \mathbb{R}), h \epsilon C^0(E, \mathbb{R})$ *mit*

a) $0 < V < 1, 0 < h$ *in* $E - \{0\}, V(0) = h(0) = 0$,

b) $\dot{V} = -h(1 - V)$ *auf* E *(Erinnerung:* $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$, *siehe Seite 36),*

c) $V(x) \to 1$ *für* $x \epsilon E \to y \epsilon \partial E$ *(bzw.* $|x| \to \infty$, *falls* E *unbeschränkt).*

Der Gleichgewichtspunkt 0 *sei asymptotisch stabil mit* $t_0^* = 0$. *Dann ist* E *der Einzugsbereich von* 0.

Beweis: Sei $x_0 \epsilon E \Rightarrow V(x_0) < 1$, also $V(x_0) + \delta < 1$ für $\delta > 0$ geeignet. Sei $\Gamma := \{x | x \epsilon E, V(x) \subset V(x_0) + \delta\}$. Dann ist Γ offen und wegen c) auch beschränkt. Wegen c) ist $\partial \Gamma = \{x | x \epsilon E, V(x) = V(x_0) + \delta\}$. Nach Lemma III.12 ist

$$x(t, 0, x_0) \epsilon \Gamma \text{ für } t \geq 0,$$

insbesondere bleibt $x(t, 0, x_0)$ für $t \geq 0$ beschränkt. Angenommen, x_0 ist nicht im Einzugsbereich enthalten, d.h. $|x(t, 0, x_0)| \nrightarrow 0$ für $t \to \infty$. Dann ist $\overline{\lim_{t \to \infty}} |x(t, 0, x_0)| = \delta_1 > 0$. Außerdem ist auch $\underline{\lim_{t \to \infty}} |x(t, 0, x_0)| = \delta_2 > 0$. Wäre dies nämlich nicht so, so wäre $|x(t_n, 0, x_0)| \to 0$ für eine geeignete Folge (t_n) mit $t_n \to \infty$, $n \to \infty$. Also ist $|x(t + t_n), 0, x_0| = |x(t, 0, x(t_n, 0, x_0))| \leq \delta_1 / 2$ für $t \geq 0$, falls $n \geq n(\delta_1)$, da 0 stabil ist. Nun wählen wir eine Folge $(\widetilde{t}_n)$ mit $|x(\widetilde{t}_n, 0, x_0)| > \frac{1}{2}\delta_1$ und erhalten einen Widerspruch. Also ist $|x(t, 0, x_0)| \geq \delta > 0$, $t \geq 0$, $h(x(t, 0, x_0)) \geq \alpha > 0$. Aus $\dot{V} = -h(1 - V)$ folgt $\frac{\dot{V}}{1 - V}(x(t, 0, x_0)) = -h(x(t, 0, x_0))$,

$$\begin{aligned} ln \frac{1 - V(x(t, 0, x_0))}{1 - V(x(0, 0, x_0)} &= \int_0^t h(x(\sigma, 0, x_0)) d\sigma, \\ 1 \geq 1 - V(x(t, 0, x_0)) &= (1 - V(x_0)) \exp \int_0^t h(x(\sigma, 0, x_0)) d\sigma, \\ &\geq (1 - V(x_0)) e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Indem wir $t \to \infty$ streben lassen, sehen wir, daß dies nur möglich ist, wenn $V(x_0) = 1$ ist. Dies ist ein Widerspruch zu $x_0 \epsilon E$. Damit ist gezeigt: $E \subseteq$ Einzugsbereich. Sei jetzt x_0 aus dem Einzugsbereich. Zu zeigen ist $x_0 \epsilon E$. Es gilt $x(t,0,x_0) \to 0$ für $t \to \infty$. Es ist aber $x(t,0,x_0) \epsilon E$, wenn t groß genug ist, da $0 \epsilon E$ und E offen sind. Insbesondere existiert ein t^* mit $x(t^*,0,x_0) \epsilon \partial E$, $x(t,0,x_0) \epsilon E$ für $t > t^*$. Für $t > t^*$ folgt dann wie eben

$$1 - V(x(t,0,x_0)) = \underbrace{(1 - V(x(t^*,0,x_0)))}_{=0 \text{ nach Voraussetzung c), da } x(t,0,x_0) \to x(t^*,0,x_0), t \downarrow t^*} \exp \int_{t^*}^{t} h(x(\sigma,0,x_0)) d\sigma$$

also

$$V(x(t,0,x_0)) = 1, t > t^*,$$

und dies ist ein Widerspruch zu $V < 1$ in E. □

Einige Bemerkungen zur Eindeutigkeit und Existenz von h, V. Zunächst gibt es zu gegebenem h höchstens ein V mit den Eigenschaften a) bis c), das den Einzugsbereich der 0 zu $x' = f(x)$ gegeben, charakterisiert. Wir setzten $W = -ln(1-V)$. Dann entsprechen V_1, V_2 die Funktionen W_1, W_2 in E. Sei $\dot{W}(x(t)) = \frac{d}{dt} W(x(t))$. Es ist $\dot{W}(x(t,0,x_0)) = -h$, also $\dot{W}_1(x(t,0,x_0)) = \dot{W}_2(x(t,0,x_0))$,

$$W_1(x(t,0,x_0)) - W_2(x(t,0,x_0)) = W_1(x_0) - W_2(x_0), t \geq 0.$$

Lassen wir $t \to \infty$ streben, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= W_1(0) - W_2(0) = W_1(x_0) - W_2(x_0), x_0 \epsilon E, \\ V_1 &= 1 - e^{-W_1} = 1 - e^{-W_2} = V_2. \end{aligned}$$

Gibt es V zu gegebenem h? Es muß $\dot{W} = -h$ sein. Sei x_0 im Einzugsbereich. Dann ist

$$W(x(t,0,x_0)) - W(x_0) = -\int_0^t h \underbrace{(x(\sigma,0,x_0))}_{\epsilon \text{ Einzugsbereich nach V.2}} d\sigma,$$

da 0 asymptotisch stabil ist,

$$W(x_0) - W(0) = \int_0^\infty h(x(\sigma,0,x_0)) d\sigma$$

und das Integral rechts existiert, da $h \geq 0$ ist. Also setzen wir an

$$W(x_0) = \int_0^\infty h(x(\sigma,0,x_0)) d\sigma.$$

Da der Einzugsbereich der 0 invariant ist nach Satz V.2, gilt

$$\begin{aligned} W(x(t,0,x_0)) &= \int_0^\infty h(x(\sigma,0,x(t,0,x_0))) d\sigma = \int_0^\infty h(x(\sigma+t,0,x_0)) d\sigma, \\ &= \int_t^\infty h(x(\sigma,0,x_0)) d\sigma, \\ \dot{W} &= -h. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist noch: $W \epsilon C^1$. Dies hängt von h ab.

Beispiel: $f(x) = \begin{pmatrix} -x_1+2x_1^2x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}$. Null gleichmäßig asymptotisch stabil nach Satz IV.3. $h := -2x_1^2(1 - x_1x_2)$.

Dann muß $\dot{W} = -2x_1^2(1-x_1x_2)$ sein. Sei $W = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^2}{2(1-x_1x_2)} = \frac{x_1^2}{2}(1 + \frac{1}{1-x_1x_2})$. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} W &= x_1 \left(1 + \frac{1}{1-x_1x_2}\right) + \frac{x_1^2}{2} \frac{x_2}{(1-x_1x_2)^2} = x_1 \frac{2-x_1x_2}{1-x_1x_2} + \frac{x_1^2}{2} \frac{x_2}{(1-x_1x_2)^2} | \cdot (-x_1 + 2x_1^2x_2), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} W &= \frac{x_1^2}{2} \frac{x_1}{(1-x_1x_2)^2} \cdot (-x_2), \\ \dot{W} &= -x_1^2 \frac{2-x_1x_2}{1-x_1x_2}(1-2x_1x_2) - \frac{x_1^3x_2}{2} \left(\frac{1-2x_1x_2}{(1-x_1x_2)^2} + \frac{1}{(1-x_1x_2)^2} \right), \\ &= -\frac{x_1^2(2-x_1x_2)(1-2x_1x_2)}{1-x_1x_2} - x_1^3x_2 \frac{1}{1-x_1x_2}, \\ &= -\frac{1}{1-x_1x_2}(x_1^2(2-x_1x_2)(1-2x_1x_2) + x_1^3x_2) = -2x_1^2(1-x_1x_2). \end{aligned}$$

Also ist $V = 1 - e^{-W}$, $E =$ Einzugsbereich $= \{x | x_1 x_2 < 1\}$.

VI. Stabilität periodischer Lösungen

Wir betrachten Systeme $x' = f(t,x)$, $f : \mathbb{R} \times B_\rho(0) \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig, mit $w-$periodischem f (bezüglich t). Sei $x^*(t)$ eine $w-$periodische Lösung, sei $x(t)$ irgendeine Lösung, sei $z(t) = x(t) - x^*(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z'(t) &= x'(t) - x'^*(t) = f(t,x(t)) - f(t,x^*(t)),\\
&= f(t,z(t)+x^*(t)) - f(t,x^*(t)),\\
&= \underbrace{D_x f(t,x^*(t))}_{=A(t)} \cdot z(t) + r(t,z(t)),
\end{aligned}$$

wenn wir ausreichende Differenzierbarkeitseigenschaften von f voraussetzen. $A(t)$ ist $w-$periodisch in $t, r(t,z)$ ist $w-$periodisch in t, $|r(t,z)| \le \varepsilon |z|$ für $|x| \le \delta(\varepsilon)$, $t\epsilon\mathbb{R}$, da r periodisch in t ist. Sei $\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$ die Fundamentalmatrix zu $A(t)$ gemäß Satz II.2 (Satz von Floquet, S. 23). Sei $z(t) = P(t)y(t)$. Nach der Bemerkung zum Satz von Floquet ist

$$y' = Ry + P^{-1}(t)r(t,P(t)y).$$

Mit Satz IV.3, Seite 44 folgt nach geeigneter Übertragung der Begriffe (vgl. III.1 b)) die Aussage

VI.1 Satz: *$x^*(t)$ ist gleichmäßig asymptotisch stabil, falls $\sigma(R) \subset \{z | Re z < 0\}$, d.h. alle charakteristischen Multiplikatoren sind dem Betrage nach < 1 (Analog: Instabil).*

Sei $x' = f(x)$ autonomes System mit $w-$periodischer Lösung $x^*(t)$. Dann ist $x^{*\prime\prime} = D_x f(x^*(t)) \cdot x^{*\prime}$, so daß $y'(t) = D_x f(x^*(t))y(t)$ eine w-periodische Lösung hat, nämlich $x^{*\prime}$. Ist x^* nicht konstant, so ist nach dem Korollar zu Satz II.1 auf Seite 22 die Zahl 1 charakteristischer Multiplikator, so daß Satz VI.1 nicht anwendbar ist. Die Erklärung hierfür lautet wie folgt: $x_\varepsilon(t) = x^*(t+\varepsilon)$. Für ε klein wird auch $|x_\varepsilon(0) - x^*(0)|$ klein, aber $x^*(t+\varepsilon) - x^*(t)$ wird wegen der Periodizität von x^* nicht gegen Null konvergieren, falls $t \to \infty$ strebt.

VI.2 Definition: *Sei $x^*(t)$ eine $w-$periodische Lösung von $x' = f(x)$. Dann heißt $\gamma = \{x^*(t) | t\epsilon[0,w]\}$ der orbit von x^*. x^* heißt orbital stabil dann und nur dann, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt mit*

$$dist(x(t,0,x_0),\gamma) < \varepsilon, t > 0,$$

falls

$$dist(x_0,\gamma) < \delta(\varepsilon).$$

x^* heißt orbital asymptotisch stabil genau dann, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$dist(x(t,0,x_0),\gamma) \to 0, t \to \infty,$$

falls

$$dist(x_0,\gamma) < \delta.$$

γ heißt dann Grenzzyklus (limit cycle). x^* heißt orbital asymptotisch stabil mit exponentieller asymptotischer Phase, wenn es $c\epsilon\mathbb{R}$, $\widehat{C}, \beta > 0$ gibt mit

$$|x(t,0,x_0) - x^*(t+c)| \le \widehat{C}e^{-\beta t}, t \ge 0$$

falls

$$dist(x_0,\gamma) < \delta.$$

VI.3 Satz: *Sei f zwei Mal stetig differenzierbar, $x^*(t)$ nicht-konstante w-periodische Lösung von $x' = f(x)$. Sind $n-1$ charakteristische Multiplikatoren zur Matrix $D_x(f(x^*(t)))$ betragsmäßig < 1, so ist $x^*(t)$ orbital asymptotisch stabil mit exponentieller asymptotischer Phase.*

Beweis: I.) Es ist keine Einschränkung, anzunehmen, daß $x^*(0) = 0$, $x'^*(0) = e_1$ ist: Ist x^* nicht konstant, so existiert nämlich ein invertierbares S mit $Sx^{*\prime}(0) = e_1$. Sei $y = S(x - x^*(0))$,

$$\begin{aligned}
y^*(t) &= S(x^*(t) - x^*(0)), \text{ also}\\
y^{*\prime}(t) &= Sx^{*\prime}(t), y^*(0) = 0, y^{*\prime}(0) = e_1.
\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Differentialgleichung haben wir

$$y' = Sx' = Sf(x) = Sf(S^{-1}y + x^*(0)) =: g(y),$$

$$D_y g(y) = SD_x f(S^{-1}y + x^*(0))S^{-1},$$
$$D_y g(y^*(t)) = SD_x f(x^*(t))S^{-1}.$$

Also haben $D_y g(y^*(t))$ und $D_x f(x^*(t))$ dieselben charakteristischen Multiplikatoren. Ist $\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$ eine Fundamentalmatrix zu $x' = D_x f(x^*(t))x$, so ist $S\Phi(t) = SP(t)e^{Rt}$ eine Fundamentalmatrix zu $y' = D_y g(y^*(t))y$, da $S\Phi'(t) = SD_x f(x^*(t))S^{-1}S\Phi(t) = D_y g(y^*(t))S\Phi(t)$.

II. 1 ist charakteristischer Multiplikator, da x^* nicht konstant ist (s. Seite 53) und nach Voraussetzung einfacher Eigenwert der Mondromiematrix C. Setzen wir für diese die Jordansche Normalform an, die man nach Seite 23 stets annehmen kann, so hat C die Form

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & \widetilde{C} \end{pmatrix},$$

da zu 1 nur ein Jordanblock gehört, der aus der Matrix (1) besteht. Vgl. hierzu Seite 18. Sei $\Phi(t)$ die zugehörige Fundamentalmatrix, d.h.

$$\Phi(t+w) = \Phi(t)C, \Phi(t) = (\varphi_{kl}(t))_{1\leq k,l\leq n}$$

Siehe hierzu Seite 23. Dann ist $\varphi_{k1}(t+w) = \varphi_{k1}(t)\delta_{11} + \varphi_{k2}(t)\delta_{21} + \ldots + \varphi_{kn}(t)\delta_{n1} = \varphi_{k1}(t)$ und die erste Spalte $\varphi_1(t)$ von $\Phi(t)$ $w-$periodisch. **Sei $\boldsymbol{\varphi_1(0) = e_1}$.** Es ist $\Phi(t) = P(t)e^{Rt}$. Auch R, e^{Rt} haben nach S. 23, 24 Beweis des Satzes II.2, dann mit C eine besondere Form, nämlich

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}, \quad e^{Rt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & e^{R_1 t} \end{pmatrix}$$

Es ist $\sigma(R_1) \subset \{z|Rez < 0\}$ nach Satz II.2. Sei $-\beta \geq Re\lambda$, $\lambda\epsilon\sigma(R_1)$ mit einem $\beta > 0$. Sei

$$\widehat{P} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ die Projektion auf die letzten Komponenten,}$$

$$\text{also } \widehat{Q} = I - \widehat{P} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,s) &= \Phi(t)\widehat{P}\Phi^{-1}(s), \\ \Phi_2(t,s) &= \Phi(t)\widehat{Q}\Phi^{-1}(s), \end{aligned}$$

also $\Phi_1(t,s) + \Phi_2(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$. Dann ist

$$\begin{aligned} ||\Phi_1(t,s)|| &= ||P(t)e^{Rt}\widehat{P}e^{-Rs}P^{-1}(s)|| = ||P(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{R_1(t-s)} \end{pmatrix} P^{-1}(s)|| \\ &\leq Ke^{-\beta(t-s)}, t \geq s, \\ ||\Phi_2(t,x)|| &= ||P(t)e^{Rt}\widehat{Q}e^{-Rs}P^{-1}(s)|| \leq K, \quad t, s\epsilon R. \end{aligned}$$

III. Sei $z(t) = x(t) - x^*(t)$ mit irgendeiner Lösung von $x' = f(x)$. Also haben wir

$$z'(t) = A(t)z(t) + r(t, z(t))$$

nach Seite 53. Nach S. 45 existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|r(t,z_1) - r(t,z_2)| \leq \varepsilon|z_1 - z_2| \text{ ist für } |z_i| \leq \delta(\varepsilon), i = 1, 2, t\epsilon\mathbb{R}.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt:

$$8K\varepsilon < \beta.$$

Sei

$$\mathcal{A} = \{w | w \epsilon C^0([0,\infty),\mathbb{R}^n), ||w|| = \sup_{t \geq 0} e^{\frac{1}{2}\beta t}|w(t)| \leq \delta(\varepsilon)\}$$

$\mathcal{A}$ ist ein vollständiger metrischer Raum. Für $w_0 = \widehat{P}w_0$ mit $|w_0| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2K||\Phi(0)||}$ sei

$$F(w)(t) = \Phi(t)w_0 + \int_0^t \Phi_1(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma))d\sigma - \int_t^\infty \Phi_2(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma))d\sigma.$$

Wir wollen zeigen, daß F den Raum $\mathcal{A}$ in sich abbildet. Zunächst ist $|r(\sigma,w(\sigma))| \leq \varepsilon|w(\sigma)|$ für $|w(\sigma)| \leq \delta(\varepsilon)$ wie aus unserer Lipschitzbedingung mit $r(\sigma,0) \equiv 0$ folgt. Dann ist $|\Phi(t)w_0| = |P(t)e^{Rt}\widehat{P}w_0| \leq ||\Phi(0)||.\ ||P(t)e^{Rt}\widehat{P}\Phi^{-1}(0)|||w_0| \leq ||\Phi(0)||Ke^{-\beta t}|w_0|$, also

$$\begin{aligned}
|F(w)(t)| &\leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}e^{-\beta t} + \int_0^t Ke^{-\beta(t-\sigma)}\varepsilon|w(\sigma)|d\sigma + \int_t^\infty K\varepsilon|w(\sigma)|d\sigma, \\
&\leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}e^{-\beta t} + \frac{\beta}{8}\left(\int_0^t \delta(\varepsilon)e^{-\frac{\beta}{2}\sigma}e^{-\beta(t-\sigma)}d\sigma + \int_t^\infty \delta(\varepsilon)e^{-\frac{\beta}{2}\sigma}d\sigma\right), \\
&\leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2}e^{-\beta t} + \frac{\beta}{8}\delta(\varepsilon)\left(\frac{2}{\beta}e^{-\frac{\beta}{2}t} + \frac{2}{\beta}e^{-\frac{\beta}{2}t}\right) \leq \delta(\varepsilon)e^{-\frac{\beta}{2}t}, \\
||F(w)|| &\leq \delta(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Analog zu der eben durchgeführten Rechnung zeigt man mit der Lipschitzstetigkeit von r bei kleiner Lipschitzkonstante, daß gilt:

$$||F(w_2) - F(w_1)|| \leq \frac{1}{2}||w_2 - w_1||.$$

Demnach hat F in $\mathcal{A}$ genau einen Fixpunkt $w(t,w_0)$ in $\mathcal{A}$. Sei $z(t) = w(t,w_0)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
z'(t) = F(w(.,w_0))'(t) &= \Phi'(t)w_0 + \int_0^t \Phi_1'(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma - \int_t^\infty \Phi_2'(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma + r(t,w(t,w_0)), \\
&= A(t)\Phi(t)w_0 + \int_0^t A(t)\Phi_1(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma - \int_t^\infty A(t)\Phi_2(t,\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma + r(t,w(t,w_0)), \\
&= A(t)w(t,w_0) + r(t,w(t,w_0)).
\end{aligned}$$

Die Zuordnung $w_0 \to w(t,w_0)$ ist stetig, denn:

$$\begin{aligned}
||w(.,w_0) - w(.,w_1)|| &= ||\Phi(t)(w_0 - w_1) + \int_0^t \Phi_1(t,\sigma)(r(\sigma,w(\sigma,w_0)) - r(\sigma,w(\sigma,w_1)))d\sigma - \\
&\quad - \int_t^\infty \Phi_2(t,\sigma)(r(\sigma,w(\sigma,w_0)) - r(\sigma,w(\sigma,w_1)))d\sigma||, \\
&\leq ||\Phi(0)||K|w_0 - w_1| + \frac{1}{2}||w(.,w_0) - w(.,w_1)||.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
||w(.,w_0) - w(.,w_1)|| &\leq 2K||\Phi(0)|||w_0 - w_1|, \\
||w(.,w_0)|| &\leq 2K||\Phi(0)|||w_0|.
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir den Anfangswert von $z(t) = w(t,w_0)$. Es ist

$$\begin{aligned}
z_0 = z(0) &= w(0,w_0) = \Phi(0)w_0 - \int_0^\infty \Phi_2(0,\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma, \\
\Phi_2(0,\sigma) &= \Phi(0)\widehat{Q}\Phi^{-1}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi^{-1}(\sigma) = Q\Phi^{-1}(\sigma) \\
\Rightarrow z_0 &= \Phi(0)w_0 - Q\int_0^\infty \Phi^{-1}(\sigma)r(\sigma,w(\sigma,w_0))d\sigma =: \Phi(0)w_0 + H(w_0),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|H(w_0)| &\leq K\varepsilon \int_0^\infty |w(\sigma, w_0)| d\sigma, \\
&\leq K\varepsilon ||w(., w_0)|| \cdot \frac{2}{\beta} \leq \frac{4K^2\varepsilon}{\beta} |w_0|, \\
\frac{|H(w)|}{|w|} &\to 0 \text{ für } w = \widehat{P}w, w \to 0.
\end{aligned}
$$

Es ist $Pw(0, w_0) = P\Phi(0)w_0$, da wie eben gezeigt $\Phi_2(0, \sigma) = Q\Phi^{-1}(\sigma)$ ist. Sei $\Phi(0) =: \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}$.
Wegen $\det \Phi(0) = \det \Psi$ existiert Ψ^{-1}. Es ist

$$
P\Phi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}, P\Phi(0)w_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\circ}{w}_2 \\ \vdots \\ \overset{\circ}{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\circ}{w}_2 \\ \vdots \\ \overset{\circ}{w}_n \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \text{ Mit } \widehat{\Psi} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Psi^{-1} \end{pmatrix} \text{ ist } w_0 = \widehat{\Psi} P w(0, w_0),
$$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \Phi(0)\widehat{\Psi}Pw(0, w_0) + H(\widehat{\Psi}Pw(0, w_0)), \\
&= \Phi(0)\widehat{\Psi}Pz_0 + H(\widehat{\Psi}Pz_0).
\end{aligned} \tag{VI.1}
$$

Ist umgekehrt $z_0 \epsilon \mathbb{R}^n$, genügt (VI.1) und ist klein genug, so setzen wir $w_0 = \widehat{\Psi}Pz_0$. Dann ist $z(t) = w(t, w_0)$ der einzige Fixpunkt von F in $\mathcal{A}$ und somit z_0 Anfangswert der Lösung $z(t)$ von $z'(t) = A(t)z(t) + r(t, z(t))$ mit $|x(t) - x^*(t)| = |z(t)| \leq \delta(\varepsilon)e^{-(\beta/2)t}$. Wegen $x^*(0)$ ist dies z_0 zugleich Anfangswert einer Lösung $x(t)$ von $x' = f(x)$. (VI.1) ist gleichbedeutend mit

$$
z_1 = -\sum_{i=2}^{n} b_i z_i \quad + \quad G(z_2, \dots, z_n), \text{ wobei } z_0 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ und}
$$

$$
(-b_1, -b_2, \dots, -b_n) \text{ die erste Zeile von } \Phi(0)\widehat{\Psi} \text{ ist.}
$$

Was G anbetrifft, so ist $H = (G, 0, \dots, 0)^T$, also mit $\widetilde{z} = (z_2, \dots, z_n)^T$ gerade $|G(\widetilde{z})|/|\widetilde{z}| \to 0$ für $|\widetilde{z}| \to 0$. Außerdem ist

$$
\Phi(0)\widehat{\Psi} = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Phi^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b_2 & \dots & -b_n \\ & 1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix},
$$

so daß die Zeilen 2 bis n in (VI.1) einfach $z_2 = z_2, \dots, z_n = z_n$ lauten. Sei

$$
S = \{z | z_1 = -\sum_{i=2}^{n} b_i z_i + G(z_2, \dots, z_n), |z| \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{2K} + \frac{2K\varepsilon}{\beta ||\Phi(0)||}\}
$$

Dies ist ein etwas verbogenes Hyperebenenstück mit der Normalen $(1, b_2, \dots, b_n)/|(1, b_2, \dots, b_n)|$ im Nullpunkt.

IV. $x^*(t)$ durchsetzt S im Nullpunkt. Jeder hinreichend kleine δ-Schlauch um x^* muß S durchsetzen und daher auch jede Kurve in diesem Schlauch. Man beachte hierzu, daß $x^*(t)$ nicht konstant ist, also für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ von Punkten $\notin S$ im Nullpunkt durch S nach Punkten $\notin S$ läuft und somit auch jede Kurve im δ-Schlauch dasselbe tun muß. Sei nun

$$dist(x_0, \gamma) < \rho, \text{ d.h. } |x^*(t_0) - x_0| < \rho \text{ für } t_0 \epsilon [0, w].$$

Sei ρ so klein, daß

$$|x(t, 0, x_0) - x^*(t + t_0)| < \delta, t \epsilon [0, w].$$

Dann ist $x(\tau, 0, x_0) \epsilon S$ für ein geeignetes $\tau \epsilon [0, w]$, also

$$\begin{aligned}
& & |x(t + \tau, 0, x(\tau, 0, x_0)) - x^*(t)| \leq \delta(\varepsilon) e^{-(\beta/2)t}, t \geq 0 \\
\Rightarrow & & |x(t, 0, x_0) - x^*(t + c)| \leq \delta(\varepsilon) e^{-(\beta/2)t}, t \geq w, \text{ für } c = -\tau, \\
\Rightarrow & \exists \widehat{C} > 0 & \text{mit } |x(t, 0, x_0) - x^*(t + c)| \leq \widehat{C} e^{-(\beta/2)t}, t \geq 0
\end{aligned}$$

V. Wir müssen zeigen, daß die Annahme $\varphi_1(0) = e_1$ keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Sie wurde erstmals auf Seite 55 benutzt. Nach Satz II.3 ist $\dim L_w = 1$, also $\varphi_1 = \eta x^{*\prime}$, $\varphi_1(0) = \eta e_1$. Der Faktor η macht nichts aus. $\square$ ***VI.4 Satz:*** *Es seien die Voraussetzungen des Satzes IV.3 erfüllt. Sei*

$$\Delta = \int_0^w spur\ D_x f(x^*(\sigma)) d\sigma = \int_0^w div\ f(x^*(\sigma)) d\sigma.$$

Ist $\Delta > 0$, so ist der Orbit instabil. Ist $n = 2, \Delta < 0$, so ist der Orbeit orbital asymptotisch stabil mit exponentieller asymptotischer Phase. **Beweis:** Wir haben

$$\begin{aligned}
e^{\Delta} = \exp(\int_0^w spur A(\sigma) d\sigma) &= \det(\Phi(t + w)\Phi^{-1}(t)) = \det C = \\
D_x f(x^*(\sigma)) &= \prod_{i=1}^n \lambda_i, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \text{ charakt. Multipl.}
\end{aligned}$$

Ist $\Delta > 0$, so ist $|\lambda_c| > 1$ für ein $i \Rightarrow$ Instabilität.

Ist $\Delta < 0$, $n = 2$, so ist $|\lambda_1 \lambda_2| < 1$. Da $x^{*\prime}$ nicht-triviale periodische Lösung ist von $y' = D_x f(x^*(t)) y$, muß ein charakteristischer Multiplikator $\lambda_i = 1$ sein, etwa λ_1. Dann ist $|\lambda_2| < 1$. Mit Satz VI.3 folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel: $f(x) = \begin{pmatrix} (1 - x_1^2 - x_2^2)x_1 - x_2 \\ (1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 + x_1 \end{pmatrix}$. Dann ist $x^*(t) = (\cos t, \sin t)$ eine 2π-periodische Lösung.

Es ist

$$\begin{aligned}
& div f(x_1, x_2) = 1 - 3x_1^2 - x_2^2 + 1 - x_1^2 - 3x_2^2 = 2 - 4(x_1^2 + x_2^2), \\
& \int_0^{2\pi} div f(x^*(\sigma)) d\sigma = -4\pi,
\end{aligned}$$

also x^* orbital asymptotisch stabil mit exponentieller asymptotischer Phase.

VII. Ebene autonome Systeme

Wir betrachten autonome Systeme $x' = f(x)$ mit $f : B_\rho(0) \to \mathbb{R}^n$ unter geeigneten Regularitätsbedingungen an f; für $\rho = +\infty$ sei wieder $B_\infty(0) := \mathbb{R}^n$. Zunächst ist n beliebig, dann durchgängig $= 2$ bis auf eine Ausnahme (Satz VII.12 und Korollar zum Beweis).

VII.1 Definition: *Sei $x_0 \epsilon \mathbb{R}^n$, H eine Hyperebene durch 0. Dann heißt eine offene Umgebung $V = V(x_0)$ von x_0 in $x_0 + H$ ein lokaler transversaler Schnitt, falls $f(x)$ nicht ϵH für $x \epsilon V$.*

Beispiel:

$$n = 2, H = \{x_2 = 0\}, V = \{x_0 + \tau \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \tau \epsilon (-\delta_1, \delta_2)\}$$
$$f(x) \neq \gamma \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$$

VII.2 Lemma: *Sei $x(t, 0, y_0)$ Lösung von $x' = f(x)$ mit $x(t_0, 0, y_0) = x_0$. Sei $V = V(x_0)$ wie in Definition VII.1. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ und eine Funktion $\tau \epsilon C^1(B_\varepsilon(y_0), \mathbb{R})$ mit $\tau(y_0) = t_0$ und $x(\tau(y), 0, y) \epsilon V$ für alle $y \epsilon B_\varepsilon(y_0)$.*

Eine spezielle Situation dieses Lemmas ist

$$y_0 = x_0, t_0 = 0.$$

Beweis des Lemmas VII.2: Sei $H = \{z | < z, h >= 0\}$. Es ist $< f(x_0), h > \neq 0$. Sei $g(t, y) = \,=< x(t, 0, y) - x_0, h >$. Dann ist $g(t_0, y_0) = 0$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t_0, y_0) =< x'(t_0, 0, y_0), h >=< f(x(t_0, 0, y_0)), h >=< f(x_0), h > \neq 0,$$

so daß es nach dem Satz über implizite Funktionen eine auf $B_\varepsilon(x_0), \varepsilon > 0$ und hinreichend klein, erklärte stetig differenzierbare Funktion τ mit reellen Werten derart gilt, daß $\tau(y_0) = t_0$ und

$$g(\tau(y), y) = 0, y \epsilon B_\varepsilon(x_0),$$

sind, d.h. $x(\tau(y), 0, y) \epsilon x_0 + H, y \epsilon B_\varepsilon(x_0)$. □

In der dargestellten speziellen Situation ist $\{y \epsilon U | \tau(y) \neq 0\} = U \cap$ lokaler transversaler Schnitt $S - \{x_0\}$, wenn U eine hinreichend kleine Umgebung von x_0 ist. Im Beispiel spricht man auch von einem transversalen Segment.

Sei von jetzt an $n = 2$.

VII.3 Lemma: *Sei $V = V(x_0)$ ein transversales Segment. Sei $x(t, 0, \widehat{x}_0)$ eine Lösung von $x' = f(x), t \geq 0$. Seien $y_k = x(t_k, 0, \widehat{x}_0)$ Punkte mit $t_k \uparrow \infty$, $k \to \infty$. Seien $y_k \epsilon V, k \epsilon \mathbb{N}$. Sei $H = \{\lambda x_1 | \lambda \epsilon \mathbb{R}\}$ für ein $x_1 \neq 0$. Dann gilt*

$$y_k = x_0 + \tau_k x_1$$

mit einer monoton wachsenden bzw. fallenden Folge (τ_k). Kurz gesagt: Sind die $y_k, y_k \epsilon V$, monoton wachsend, so wachsen bzw. fallen sie auch monoton auf dem Segment.

Beweis: Wir betrachten 3 Punkte y_k, y_{k+1}, y_{k+2} mit $t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$. Ohne Einschränkung sei y_{k+1} der erste Rückkehrpunkt auf V nach y_k. Einen solchen muß es geben, da V transversales Segment ist. Sei γ die durch die Lösung $x(t, 0, \widehat{x}_0)$ gegebene Kurve, $\gamma = (\mathbb{R}^+, x(., 0, \widehat{x}_0), x(\mathbb{R}^+, 0, \widehat{x}))$. Nach dem Jordanschen Kurvensatz wird vom Teil von γ zwischen y_k und y_{k+1} und der Strecke zwischen y_k und y_{k+1} auf V eindeutig ein Innengebiet D und ein Außengebiet festgelegt. Die Kurve γ verlasse $\overline{D}$ in y_{k+1}. Sei $T \subset V$ die Strecke zwischen y_k und y_{k+1}. Sei $T_+ = \{\widetilde{x} \epsilon T |$ Trajektorie (=Lösungskurve) von $x' = f(x)$ durch $\widetilde{x}$ geht nach $\mathbb{R}^2 - \overline{D}\}$, $T_- = \{\widetilde{x} \epsilon T |$ Trajektonie von $x' = f(x)$ durch $\widetilde{x}$ geht nach $D\}$. Es ist $T_+ \neq \emptyset$, da $y_{k+1} \epsilon T_+$. T_+ ist offen in T, $T = T_+ + T_-$. T_- ist ebenfalls offen in T ($T_\pm$ offen, da $T \subset V =$ transversales Segment). T ist zusammenhängend. Also ist $T = T_+$ ein abgeschlossenes τ-Intervall. Es ist $y_{k+2} \epsilon \mathbb{R}^2 - \overline{D}$. Denn wäre $y_{k+2} \epsilon \overline{D}$, so müßte $y_{k+2} \epsilon \overline{D} \cap V$ sein. Dies ist wegen $t_k < t_{k+1} < t_{k+2}$ nicht möglich. Insbesondere ist $y_{k+2} \epsilon V - T$. $V - T$ besteht aus zwei disjunkten τ-Intervallen, von denen eins in D liegt, da γ die Menge $x_0 + H$ nach y_k wegen $T = T_+$ mit "entgegengesetzter" Tangentenrichtung trifft. Also liegt y_{k+2} im anderen. □

VII.4 Lemma: *Sei $\Omega(x_0)$ die Grenzpunktmenge der Trajektorie $\{x(t,0,x_0)\}$, die für $t \geq 0$ existieren möge und beschränkt sei. Dann hat ein transversales Segment $V = V(x_0)$ höchstens einen Punkt mit $\Omega(x_0)$ gemeinsam.*

Beweis: Angenommen, es gilt $y_1, y_2 \epsilon V \cap \Omega(x_0)$ mit $y_1 \neq y_2$. Seien $(t_n^{(i)})$, $i = 1,2$. Folgen mit $t_n^{(i)} \to \infty$, $n \to \infty$, $i = 1,2$, $x(t_n^{(i)}, 0, \widehat{x}_0) \to y_i$, $n \to \infty$, $i = 1,2$. Nach Lemma VII.2 existieren $\tau_i \epsilon C^1(B_\varepsilon(y_i), \mathbb{R})$ mit

$$x(\tau_i(y), 0, y) \epsilon V, \tau_i(y_i) = 0.$$

Sei ohne Einschränkung $\varepsilon > 0$ so klein, daß

$$x(\tau_i(y), 0, y) \epsilon I_i, I_i \text{ abgeschlossenes Intervall auf } V, i = 1,2,$$

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} s_{2k} &= t_k^{(1)}, s_{2k+1} = t_k^{(2)} \\ a_k &= x(\tau_1(x(s_{2k}, 0, x_0)), 0, x(s_{2k}, 0, x_0)) = x(s_{2k} + \tau_1(x(s_{2k}, 0, x_0)), 0, x_0), \\ b_k &= x(\tau_2(x(s_{2k+1}, 0, x_0)), 0, x(s_{2k+1}, 0, x_0)) = x(s_{2k+1} + \tau_2((x(s_{2k+1}, 0, x_0)), 0, x_0). \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung seinen $s_{2k+1} - s_{2k} > 1$, $s_{2k+2} - s_{2k+1} > 1$ und ε, also $|\tau_i(y)|$, hinreichend klein. Dann sind die $a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ monoton wachsend auf γ. Mit Lemma VII.3 folgt, daß sie auch auf V monoton sein müssen. Dies ist ein Widerspruch, da die $a_k, b_k, a_{k+1}, b_{k+1}$ zwischen I_1 und I_2 hin und her springen. □

VII.5 Lemma: *Ist $\Omega(x_0) \cap \{x(t,0,x_0) | 0 < t \leq t^+\} \neq \emptyset$ für ein $t^+ > 0$, wobei wieder die Trajektorie $\{x(t,0,x_0)\}$ für $t \geq 0$ existieren möge und beschränkt sei. Dann ist $x(t,0,x_0)$ periodisch.*

Beweis: Sei $y \epsilon \Omega(x_0) \cap \widehat{\gamma}^+(x_0) := \{x(t,0,x_0) | 0 < t \leq t^+\}$. Ohne Einschränkung sei $f(y) \neq 0$ (Wäre $f(y) = 0 \Rightarrow y$ wäre kritischer Punkt $\Rightarrow x(t,0,x_0) \equiv y$). Wir legen ein transversales Segment $V = V(y)$ durch y. Wegen $f(y) \neq 0$ existiert ein solches. Sei $\gamma^+(y) = \{x(t,0,y) | t \geq 0\}$. Dann gilt $\gamma^+(y) \cap V \supseteq \{y\}$. Es ist $\gamma^+(y) \subset \Omega(x_0)$, da $\gamma^+(y)$ invariant ist nach Hilfssatz III.18. Also hat nach Lemma VII.4 $\gamma(y) \cap V \subset \gamma(y) \cap \Omega(x_0)$ mit V höchstens einen Punkt gemeinsam, und wir haben

$$\gamma^+(y) \cap V = \{y\}.$$

Da $y \epsilon \gamma^+(x_0)$ ist, ist $y = x(t_1, 0, x_0)$ für ein geeignetes t_1. Da $y \epsilon \Omega(x_0)$ ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $s_1 > t_1 + 1$ mit $x(s_1, 0, x_0) \epsilon B_\varepsilon(y)$. Aus Lemma VII.2 folgt bei geeigneter Wahl von ε die Relation

$$x(\tau(x(s_1,0,x_0)), 0, x(s_1,0,x_0)) \epsilon V \text{ mit } \tau(y) = 0$$

$$\widetilde{t} = s_1 - t_1 + \tau(x(s_1,0,x_0)) > 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} x(\widetilde{t}, 0, y) &= x(\widetilde{t}, 0, x(t_1, 0, x_0)) = x(s_1 - t_1 + \tau(x(s_1,0,x_0)), 0, x(t_1,0,x_0)) \\ &= x(\tau(x(s_1,0,x_0), 0, x(s_1,0,x_0)) \epsilon V \cap \gamma^+(y) = y \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} & x(\widetilde{t}, 0, y) = y = x(t_1, 0, x_0) \\ & \quad \shortparallel \\ & x(\widetilde{t} + t_1, 0, x_0) \\ \text{und} \quad & x(t,0,x_0) \text{ periodisch mit der Periode } \widetilde{t}. \end{aligned}$$

□

VII.6 Satz: *Sei wieder $x(t,0,x_0)$ Lösung von $x' = f(x)$ für alle $t \geq 0$ und die Trajektorie $\gamma^+(x_0) = \{x(t,0,x_0) | t \geq 0\}$ beschränkt. $\Omega(x_0)$ enthalte einen periodischen Orbit γ, der nicht kritisch sei, d.h. auf diesem Orbit liege kein Punkt x mit $f(x) = 0$. Dann ist $\Omega(x_0) = \gamma$.*

Beweis: Sei $\Omega(x_0) - \gamma \neq \emptyset$. $\Omega(x_0)$ ist zusammenhängend nach Hilfssatz III.18. Es gibt ein $z \epsilon \gamma$ mit: z ist Häufungspunkt von $\Omega(x_0) - \gamma$, ... Dann ist $f(z) \neq 0$. Durch z legen wir ein transversales Segment $S = S(z)$. Nach Lemma VII.2 haben wir

$$x(\tau(p), 0, p) \epsilon S \text{ für } p \epsilon B_\varepsilon(z)$$

Wir wählen ein $p_0 \epsilon B_\varepsilon(z) \cap (\Omega(x_0) - \gamma)$. Da die Punkte aus $\Omega(x_0)$ invariant sind, ist $x(\tau(p_0), 0, p_0) \epsilon S \cap \Omega(x_0)$. Auch z liegt in $S \cap \Omega(x_0)$. Nun ist $z \neq x(\tau(p_0), 0, p_0)$, da $z \epsilon \gamma$ und p_0 nicht $\epsilon \gamma$ sind. Nach Lemma VII.4 ist z der einzige Punkt aus $S \cap \Omega(x_0)$, also $z = x(\tau(p_0), 0, p_0)$. Dies ist ein Widerspruch. □

VII.7 Satz (Poincaré-Bendixson): *Die Lösung $x(t, 0, x_0)$ von $x' = f(x)$ möge wieder für $t \geq 0$ existieren und die Trajektorie $\gamma^+(x_0) = \{x(t, 0, x_0) | t \geq 0\}$ sei beschränkt. Enthält $\Omega(x_0)$ keinen kritischen Punkt, so ist $\Omega(x_0)$ ein periodischer Orbit.*

VII.8 Korollar zu Satz VII.7: *Sei $K \subset B_\rho(0)$ kompakt und positiv oder negativ invariant, d.h. für $x_0 \epsilon K$ existiere die Lösung von $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ für $t \geq 0$ und es sei $\gamma^+(x_0) = \{x(t, 0, x_0) | t \geq 0\} \subset K$ bzw. es existiere die Lösung von $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ für $t \leq 0$ und es sei $\gamma^-(x_0) = \{x(t, 0, x_0) | t \leq 0\} \subset K$. Dann enthält K einen kritischen Punkt oder einen periodischen Orbit (oder beides, d.h. "oder" ist im mathematischen Sinn zu verstehen).*

Beweis des Korollars: Sei K positiv invariant. Enthält K keinen kritischen Punkt, so auch $\Omega(x_0) \subset K$ nicht. Nach Satz VII.7 ist $\Omega(x_0)$ periodischer Orbit. Sei K negativ invariant. Sei $\widetilde{t} = -t$, $\widetilde{f} = -f$. Dann ist $(d\widetilde{x}/d\widetilde{t})(\widetilde{t}) = \widetilde{f}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))$ mit $\widetilde{x}(\widetilde{t}) = x(-\widetilde{t})$, $\widetilde{t} \geq 0$, und $\widetilde{x}(0) = x_0$. K ist dann positiv invariant bez. $\widetilde{x}' = \widetilde{f}(\widetilde{x})$, y ist kritisch bez. $\widetilde{x}' = \widetilde{f}(\widetilde{x})$ dann, und nur dann, wenn y kritisch ist bez. $x' = f(x)$. □

Beweis des Satzes VII.7: Nach Hilfssatz III.18 ist $\Omega(x_0)$ kompakt und invariant. Sei also $y \epsilon \Omega(x_0)$. Dann ist $\gamma^+(y) \subset \Omega(x_0)$. Also ist $\Omega(y) \neq \emptyset$ und $\subset \Omega(x_0)$. Sei $z \epsilon \Omega(y)$. z ist kein kritischer Punkt. Sei $S = S(z)$ ein transversales Segment durch z. Für jedes (kleine) $\varepsilon > 0$ existiert ein (großes) $t^* = t^*(\varepsilon)$ mit $x(t^*, 0, y) \epsilon B_\varepsilon(z)$. Betrachten wir in Lemma VII.2 die Lösung $x(t, 0, z)$, so daß also $x(0, 0, z) = z$ ist, so folgt aus Lemma VII.2

$$x(\tau(x(t^*, 0, y)), 0, x(t^*, 0, y)) \epsilon S$$

also wegen $x(\tau(x(t^*, 0, y)), 0, x(t^*, 0, y)) = x(t^* + \tau(x(t^*, 0, y)), 0, y)$, daß

$$a := x(\tau(x(t^*, 0, y)), 0, x(t^*, 0, y)) \epsilon \gamma^*(y),$$

$$a \epsilon \gamma^+(y) \cap S \subseteq \Omega(x_0) \cap S.$$

Auch z ist in $\Omega(x_0) \cap S$. Nach Lemma VII.4 ist $a = z \epsilon \gamma^+(y) \cap \Omega(y)$. Nach Lemma VII.5 ist $x(t, 0, y)$ periodisch. Da $\gamma^+(y) \subset \Omega(x_0)$ ist, folgt mit Satz VII.6, daß $\Omega(x_0) = \gamma^+(y)$ periodischer Orbit ist. □

VII.9 Definition: *Ein nicht kritischer periodischer Orbit γ der DGL $x' = f(x)$ heißt Grenzzyklus (limit cycle) dann und nur dann, wenn es ein x_0 nicht $\epsilon \gamma$ gibt derart, daß $x(t, 0, x_0)$ für $t \geq 0$ existiert, $\gamma^+(x_0)$ beschränkt und $\gamma \subset \Omega(x_0)$ ist. Nach Satz VII.6 ist dann $\gamma = \Omega(x_0)$.*

VII.10 Satz: *Sei $K \subset B_\rho(0)$ kompakt, positiv invariant, und sei $x_0 \epsilon K$ mit $K - \{x_0\} \neq \emptyset$ einziger kritischer Punkt in K. Sei $Re\sigma(Df(x_0)) > 0$. Dann gibt es mindestens einen periodischen Orbit in K. Entsprechendes gilt, wenn K negativ invariant ist.*

Beweis: Ohne Einschränkung sei $x_0 = 0$. Also ist $y \epsilon K - \{x_0\}$ nicht Null. Dann ist $\gamma^+(y) \subset K - \{0\}$, $\Omega(y) \subset K$ und $x_0 = 0$ nicht $\epsilon \Omega(y)$. Letzteres sieht man folgendermaßen: Ist $|x(t, 0, y)| < \varepsilon$, so ist nach Voraussetzung (Vgl. Seite 45) $(|x(t, 0, y)|^2)' \geq \alpha |x(t, 0, y|^2$ mit einem $\alpha > 0$. Sei $0 \epsilon \Omega(y)$, t_1, t_2 so gewählt, daß

$$t_1 < t_2, |x(t_i, 0, y)| < \varepsilon, |x(t_1, 0, y)| > |x(t_2, 0, y)|.$$

$|x(t, 0, y)|^2$ hat über $[t_1, t_2]$ ein globales Maximum in (t_1, t_2). Gibt es über $[t_1, t_2]$ auch ein globales Minimun in (t_1, t_2), so ist dort $(|x(t, 0, y)|^2)' = 0$. Dies ist ein Widerspruch. Das Maximum werde in $t_{max} \epsilon (t_1, t_2)$ angenommen. Dann ist $|x(t, 0, y)|^2 \geq |x(t_2, 0, y)|^2$, $t_{max} \leq t < t_2$, da sonst ein lokales Minimum vorhanden wäre. Also ist $(|x(t, 0, y)|^2)'$ in $t_2 \leq 0$, was nicht möglich ist. Nach Satz VII.7 ist $\Omega(y)$ periodischer Orbit. □

Ist es möglich, im Beweis des Satzes VII.10 den Punkt y so zu wählen, daß y nicht $\epsilon \Omega(y)$ ist, so ist $\Omega(y)$ sogar **Grenzzyklus**. Dies ist jedoch u. U. leicht, denn ist $y \epsilon K$, $0 < |y| < \varepsilon$ mit dem oben gefundenen ε, so wächst $|x(t, 0, y)|$ zunächst streng monoton auf $|y| + \delta < \varepsilon$ zur Zeit t_1 und kann dann zu einer Zeit $t_2 > t_1$ nicht auf einen Wert $< |y| + \delta$ abfallen wie die Rechnungen im Beweis des Satzes VII.10 zeigen. Also ist $y \notin \Omega(y)$.

Wir stellen uns die Frage, wann K positiv invariant ist. Hierzu gilt

VII.11 Lemma: *Sei $K \subset B_\rho(0)$ kompakt. K ist positiv invariant genau dann, wenn für alle $x_0 \epsilon \partial K$ gilt: Es gibt ein $\varepsilon_{x_0} > 0$ mit $x(t,0,x_0)\epsilon K$ für $0 \le t \le \varepsilon_{x_0}$.*

Beweis: Die Richtung "$\Rightarrow$" ist klar. Zur Richtung "$\Leftarrow$": Angenommen, K sei nicht positiv invariant. Dann gibt es ein $y \epsilon K$ mit $x(t,0,y) \notin K$ für ein $t > 0$. Es gibt ein $\delta > 0$ und ein $s\epsilon[0,t)$ mit $x(s,0,y)\epsilon K$ und $x(\widetilde{s},0,y) \notin K$ für $s < \widetilde{s} < s+\delta$. Wir können annehmen, daß $s > 0$ ist. Andernfalls ist $y\epsilon\partial K$ und wir wenden die Voraussetzung an. Also ist $x(s,0,y)\epsilon\partial K$ und $x(\tau,0,x(s,0,y))\epsilon K$ für $\tau \le \varepsilon_{x(s,0,y)}$, d. h. $x(s+\tau,0,y)\epsilon K$. Dies ist ein Widerspruch. □

VII.12 Satz: *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $V\epsilon C^1(G)$, $\nabla V \neq 0$ auf $V^{-1}(0)$. Sei $K = V^{-1}((-\infty,0]) \subset B_\rho(0)$ und beschränkt für $\rho = \infty$. Dann ist $K = V^{-1}((-\infty,0])$ positiv invariant genau dann, wenn $\dot{V} \le 0$ auf ∂K ist.*

Beweis: Sei also $K = V^{-1}((-\infty,0])$, $\dot{V} \le 0$ auf ∂K. K ist abgeschlossen, also kompakt. Es ist $dist(K,\partial G) > 0$ und es gibt eine beschränkte offene Menge U mit

$$K \subset U \subset \overline{U} \subset G, dist(K, G-\overline{U}) > 0.$$

Wir approximieren V durch $g_\varepsilon \epsilon C^2(G)$ in $C^1(\overline{U})$, d.h.

$$|\nabla V - \nabla g_\varepsilon| \le \varepsilon \text{ in } \overline{U}.$$

Sei $x_0\epsilon\partial K$. Dann ist $|\nabla V(y)| \ge \delta$ auf $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. Sei $g = g_{\delta/2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} <\nabla V, \nabla g> &= <\nabla V, \nabla g - \nabla V + \nabla V> \ge |\nabla V|^2 - |\nabla V||\nabla g - \nabla V|, \\ &\ge |\nabla V|(|\nabla V| - \frac{1}{2}\delta) \ge \frac{\delta^2}{2} \text{ auf } B_\varepsilon(x_0). \end{aligned}$$

Für $y\epsilon\partial K \cap B_\varepsilon(x_0)$, $\lambda \ge 0$ gilt:

$$<\nabla V, f - \lambda\nabla g> = \dot{V} - \lambda <\nabla V, \nabla g> \le -\lambda\frac{\delta^2}{2}.$$

Also gibt es eine offene Umgebung $V_\lambda = B_{\varepsilon_\lambda}(y)$ mit $\varepsilon_\lambda > 0$ derart, daß $<\nabla V, f - \lambda\nabla g> \le 0$ ist in V_λ. Sei $x_\lambda(t,0,y)$ die Lösung der DGL $z' = f(z) - \lambda\nabla g(z)$ mit dem Anfangswert $z(0) = y$. Dann ist $x_\lambda(t,0,y)\epsilon V_\lambda$ für t, $0 \le t \le t_{\lambda,y}$ mit einem $t_{\lambda,y} > 0$. Es gilt $V(y) = 0$, da $y\epsilon\partial K$ ist, und somit

$$\begin{aligned} V(x_\lambda(t,0,y)) &= V(x_\lambda(t,0,y)) - V(y) = \int_0^t <\nabla V, x'_\lambda>(\widetilde{t})d\widetilde{t} \\ &= \int_0^t <\nabla V, f(x_\lambda) - \lambda\nabla g(x_\lambda)>(\widetilde{t})d\widetilde{t} \le 0, 0 \le t \le t_{\lambda,y}, \end{aligned}$$

$$x_\lambda(t,0,y)\epsilon K, 0 \le t \le t_{\lambda,y}.$$

Nun betrachten wir $x_\lambda(t,0,x_0)$. Wegen der stetigen Abhängigkeit von Parametern wissen wir, daß $x_\lambda(t,0,x_0)\epsilon$ $B_\varepsilon(x_0)$ ist für ein (λ,t), $0 \le \lambda \le \lambda_1$, $0 \le t \le t_1$ mit $\lambda_1, t_1 > 0$. Angenommen, es ist $x_\lambda(t,0,x_0) \notin K$ für ein $t_2, 0 < t_2 < t_1$. Dann gibt es (s. Rechnung oben für x_0 statt y) ein t^*, $0 < t^* < t_2$, mit $y = x_\lambda(t^*,0,x_0)\epsilon\partial K$, $x_\lambda(t,0,x_0) \notin K$ für t, $t^* < t < t^* + \alpha$ für ein $\alpha > 0$. Da $y\epsilon\partial K \cap B_\varepsilon(x_0)$ ist, ist dies nach obiger Rechnung nicht möglich. Also ist $x_\lambda(t,0,x_0)\epsilon K$ für $t \le t_1$. Lassen wir λ gegen Null streben, so folgt mit der Abgeschlossenheit von K, daß $x(t,0,x_0)\epsilon K$ ist, $0 \le t \le t_1$. Lemma VII.11 liefert die Behauptung. Sei nun $K = V^{-1}((-\infty,0])$ positiv invariant. Angenommen, es sei $\dot{V}(x_0) > 0$ für ein $x_0\epsilon\partial K$. Dann ist $\dot{V} > 0$ auf $B_\varepsilon(x_0)$. Da $x(t,0,x_0)\epsilon B_\varepsilon(x_0)$ für t klein, folgt

$$V(x(t,0,x_0)) - V(x_0) = \int_0^t \dot{V}(x(s,0,x_0))ds > 0,$$

$$V(x(t,0,x_0)) \notin K \text{ für diese } t,$$

im Widerspruch zur Annahme. □

Korollar zum Beweis von Satz VII.12: *Sei $\rho = \infty$, $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $V\epsilon C^2(G)$, $\nabla V \neq 0$ auf $V^{-1}(0)$. Dann ist $K = V^{-1}((-\infty,0])$ positiv invariant genau dann, wenn $\dot{V} \le 0$ auf ∂K ist.*

Beweis: Im Beweis des Satzes VII.12 ersetzt man g durch V und betrachtet $z' = f(z) - \lambda\nabla V(z)$.

$\square$

Satz VII.12 und das Korollar zum Beweis von Satz VII.12 gelten für all n und nicht nur für $n = 2$. Statt mit $B_\rho(0)$ in Satz VII.12 kann man mit einer offenen Menge $\widetilde{G}$ mit $\overline{G} \subset \widetilde{G}$ operieren. G braucht nur offen und mit seinem Abschluß $\overline{G}$ in $\widetilde{G}$ zu liegen wie eben angegeben.

Hinweis: Die Bedingung $\nabla V \neq 0$ auf $V^{-1}(0)$ wird im Beweis wirklich benötigt.

VII.13 Beispiel: Die Liënard-Gleichung $y'' + g(y, y')y' + y = 0$ mit $g(0, 0) < 0$, $g(x_1, x_2) > 0$ für $|x| \geq R$ für ein $R > 0$. Als das System 1. Ordnung erhalten wir die Gleichungen

$$x' = f(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -g(x_1, x_2)x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Sei $R > 0$, $V_1(x) = \frac{1}{2}(|x|^2 - R^2)$. Dann ist mit $K = \overline{B_R(0)}$ gerade $V_1^{-1}(0) = \{x||x| = R\}, \nabla V_1 \neq 0$ auf $V^{-1}(0)$ und $\dot{V}_1 = \langle \nabla V, f \rangle = x_1 \cdot x_2 + x_2(-g(x_1, x_2)x_2 - x_1) = -g(x_1, x_2)x_2^2 \leq 0$ auf $\{x||x| = R\} = \partial K$.

Nach Satz VII.12 ist K positiv invariant.

Sei $0 < r < R$, $V_2(x) = \frac{1}{2}(r^2 - |x|^2)$. Sei $K = \{x||x| \geq r\}$. Dann ist $V_2^{-1}(0) = \{x||x| = r\}$, $\nabla V_2 \neq 0$ auf $V_2^{-1}(0) = \partial K$ und

$$\dot{V}_2 = \langle \nabla V, f \rangle = -x_1x_2 - x_2(-g(x_1, x_2)x_2 - x_1) = g(x_1, x_2)x_2^2 \leq 0$$

auf $\{x||x| = r\} = \partial K$, falls r so klein ist, daß $g(x_1, x_2) < 0$ ist auf $|x| = r$.

Also ist $\mathbb{R}^2 - B_r(0)$ positiv invariant, also $\overline{B_R(0)} \cap (\mathbb{R}^2 - B_r(0))$. Dort liegt ein periodischer Orbit, denn der einzige kritische Punkt ist der Nullpunkt. Es ist

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -g(0, 0) \end{pmatrix}, \lambda(\lambda + g(0, 0)) + 1 = 0,$$

$$\lambda = -\frac{g(0, 0)}{2} \pm \sqrt{\frac{g(0, 0)^2}{4} - 1} \Rightarrow \sigma(Df(0)) < \{z|Re z > 0\}.$$

Satz VII.10 und die auf Seite 60/61 unten gezogene Folgerung aus dem Beweis dieses Satzes gelten für $K = \overline{B_R(0)}$, da K genau einen kritischen Punkt enthält. In K gibt es also einen Grenzzyklus.

Wir fragen nach der Anzahl der periodischen Orbits. Hierzu gilt

VII.14 Satz: *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach (bzw. zweifach) zusammenhängendes Gebiet, sei $div f \neq 0$ auf G. Dann existiert kein (bzw. höchstens ein) periodischer Orbit in G. G "zweifach" zusammenhängend bedeutet: Das Komplement $\mathbb{R}^2 - G$ hat genau eine beschränkte Zusammenhangskomponente.*

Beweis: Angenommen, γ sei ein periodischer Orbit und G sei einfach zusammenhängend γ berandet ein Gebiet D mit $\overline{D} \subset G$. Nach dem Satz von Ganß ist (w=Periode)

$$\int_D div f dx = \int_\gamma (f_1dx_2 - f_2dx_1) = \int_0^w (f_1x_2' - f_2x_1')dt = 0$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, denn $div f$ hat nur ein Vorzeichen in G. Sei nun G zweifach zusammenhängend. γ umlaufe nicht die Ausnahmemenge wie in der Figur eingezeichnet. Dies führt wie eben zu einem Widerspruch. Also muß γ die Ausnahmemenge umlaufen wie in der Figur eingezeichnet. Haben wir zwei verschiedene periodische Orbits γ_1, γ_2, die die Ausnahmemenge umlaufen, so schneiden sie sich nirgends und beranden wieder ein Gebiet D in G. Wie oben erhalten wir einen Widerspruch. $\square$

VII.15 Beispiel: Sei $\rho = +\infty$. x sei Lösung von $x' = f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_1 + x_1(x_1^2 + 2x_2^2) \\ x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + 2x_2^2) \end{pmatrix}, \text{ also } Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \sigma(Df(0)) \subset \{\xi|Re\xi < 0\},$$

über (t_-, t_+), wobei die folgenden Rechnungen zeigen, wann möglicherweise t_- bzw. t_+ gleich $-\infty$ bzw. $+\infty$ sind.

Sei x ein kritischer Punkt. Dann ist $x_2 f_1 - x_1 f_2 = -(x_1^2 + x_2^2) = 0$. Also ist 0 der einzige kritische Punkt. Nun gehen wir über zu $z(t) = x(-t)$, $t \geq 0$, d.h.

$$z' = -f(z) \text{ mit } f \text{ wie oben, also } \sigma(D_{-f}(0)) \subset \{\xi | Re\xi > 0\}.$$

Sei $V_1(z) = |z|^2 - R^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1(z) &= 2z_1(z_1 + z_2 - z_1(z_1^2 + 2z_2^2) + 2z_2(z_2 - z_1 - z_2(z_1^2 + 2z_2^2)), \\
&= 2(z_1^2 + z_2^2 - (z_1^2 + z_2^2)(z_1^2 + 2z_2^2)), \\
&= 2(z_1^2 + z_2^2)(1 - (z_1^2 + 2z_2^2)) \leq 0 \text{ für } |z| = R \geq 1.
\end{aligned}$$

Für $R \geq 1$ ist $\overline{B_R(0)}$ positiv invariant bezüglich z. Analog erhält man mit $V_2(z) = r^2 - |z|^2$, daß

$$\dot{V}_2(z) = 2(z_1^2 + z_2^2)((z_1^2 + 2z_2^2) - 1) \leq 0 \text{ für } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$K = \mathbb{R}^2 - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \text{ positiv invariant bezüglich } z \text{ sind.}$$

Also ist $\overline{B_R(0)} - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$ positiv invariant bezüglich z, insbesondere $\overline{B_1(0)} - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$. Dort existiert ein periodischer Orbit γ, nämlich $x(t) = z(-t)$.

Weiter ist

$$\begin{aligned}
div f &= -1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1^2 + (-1) + x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2^2 \\
&= -2 + 4x_1^2 + 8x_2^2 = 4|x|^2 - 2 + 4x_2^2.
\end{aligned}$$

$div f$ verschwindet also in $\overline{B_1(0)} - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$ nur in den Punkten $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = 0$ und ist sonst positiv. In diesem Fall zeigt der Beweis des Satzes VII.14, daß γ der einzige periodische Orbit in $\overline{B_1(0)} - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$ ist. Wir betrachten jetzt

$$V(x) = |x|^2 - \frac{1}{2}.$$

Dann ist $\dot{V}(x) = 2(x_1^2 + 2x_2^2 - 1)(x_1^2 + x_2^2) \leq 0$ in $\overline{B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)}$. Also ist $\overline{B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)}$ positiv invariant. $x(t, 0, x_0)$ beginne in x_0 mit $|x_0| = 1/\sqrt{2}$. Sei $x_0 \neq (0, \pm 1/\sqrt{2})$. Dann ist $\dot{V}(x_0)$ negativ, also fällt $|x(t, 0, x_0)|$ und mit $x(t) = x(t, 0, x_0)$ ist

$$-\langle f(x(t)), x(t)\rangle = -\frac{1}{2}\dot{V}(x(t)) \geq \gamma |x(t)|^2 \text{ mit einem } \gamma > 0,$$

$$\frac{1}{2}\partial_t |x(t)|^2 + \gamma |x(t)|^2 \leq 0, t \geq 0,$$

so daß $|x(t)|$ exponentiell schnell gegen Null konvergiert. Ist $x_0 = (0, \pm 1/\sqrt{2})$, so ist $x'(0) \neq 0$ und ist tangential an $B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$, so daß wir dasselbe Ergebnis haben. Sei D das zum periodischen Orbit γ gehörige Innengebiet. Beginnt $x(t, 0, x_0)$ in $x_0 \epsilon D - \overline{B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)}$ und trifft $\partial B_{\frac{1}{2}}(0)$ nicht, so enthält nach Satz VII.7 die Menge $\Omega(x_0)$ einen periodischen Orbit. Dieser muß γ sein (offenbar kann $x(t) = x(t, 0, x_0)$ den periodischen Orbit γ nicht durchsetzen). Betrachten wir $V(x) = 1 - |x|^2$, so sieht man leicht, daß $\{|x| \geq 1\}$ positiv invariant ist. Sei $|x_0| \geq 1$. Bleibt $|x(t, 0, x_0)|$ beschränkt für $t \geq 0$, so ist $\Omega(x_0)$ periodischer Orbit, der vom bereits gewonnenen periodischen Orbit γ verschieden ist. Dies kann nicht sein, da

$$\gamma \text{ in } \bigcup_{R, R \geq 1} \overline{B_R(0)} - B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(0)$$

der einzige periodische Orbit ist. Also muß $|x(t, 0, x_0)|$ für $t \uparrow t_+$ unbeschränkt wachsen. Es ist nun von Interesse, die Frage zu studieren, wie sich $x(t, 0, x_0)$ in der Nähe eines periodischen Orbits verhält. Im Beispiel VII.15 bedeutet dies die Untersuchung der Frage nach dem Verhalten der Lösung, wenn x_0 im rot schraffierten Bereich der nachfolgenden Figur liegt.

Hierzu gilt:
VII.16 Satz: *Sei $x^*(t)$ eine periodische Lösung von $x' = f(x)$ mit der Periode $T_0 > 0$. Sei γ ihr Orbit. Sei*

$$\underset{< 0}{\int_0^{T_0} spur Df(x^*(\sigma))d\sigma = \int_0^{T_0} div f(x^*(\sigma))d\sigma,}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $y \epsilon U = U(\varepsilon)$, U eine geeignete Umgebung von γ, gilt

$$|x(t, 0, y) - x^*(t)| < \varepsilon.$$

Ist $\int_0^{T_0} spur Df(x^*(\sigma))d\sigma = \int_0^{T_0} div f(x^*(\sigma))d\sigma > 0$, so gibt es eine Umgebung U von γ derart, daß für alle $y\epsilon U$, die Lösung $x(t, 0, y)$ von einem individuellen t^* an U verläßt.

Beispiel: In Beispiel VII.15 ist $div f > 0$ auf $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also ist auf γ jedenfalls

$$\int_0^{T_0} spur Df(x^*(\sigma))d\sigma > 0$$

Nach Satz VII.16 verlassen also die in einer geeigneten Umgebung von γ beginnenden Lösungen diese Umgebung. Man sagt auch, der Orbit γ sei abstoßend. Diese Situation haben wir bereits in der vorletzten Figur eingetragen.

Zum Beweis des Satzes VII.16: Wir können den Satz hier nicht vollständig beweisen und zeigen statt dessen: *Sei γ ein nicht-kritischer periodischer Orbit, d.h.*

$$x(T_0, 0, x_0) = x_0,$$

und die Periode sei T_0. γ liege in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet, auf dem f erklärt und $div f \neq 0$ sei . Sei $S = \{x_0 + \theta(y - x_0)|\theta\epsilon[0, 1]\}$ transversales Segment durch x_0, seien $x_1, x_2 \epsilon S$. Dann ist

$$\begin{aligned} & sign \int_0^{T_0} spur Df(x(\sigma, 0, x_0))d\sigma = \\ & = sign \int_0^1 \det(f(x_1 + \sigma(x_2 - x_1)), x_2 - x_1)d\sigma \\ & = sign \det(f(x_0), x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Ist $z\epsilon B_\delta(x_0)$, $\varepsilon > 0$, so folgt $|x(t, 0, z) - x(t, 0, x_0)| < \varepsilon$ für $t\epsilon[0, T_0]$, wenn nur $0 < \delta \leq \delta(\varepsilon)$ ist. Nach Lemma VII.2 gibt es ein $\tau\epsilon C^1(B_\delta(x_0), \mathbb{R})$ mit

$$x(T_0 + \tau(z), 0, z)\epsilon S, \tau(x_0) = 0.$$

Sei $x^\theta := x_0 + \theta(y - x_0)$, $I = \{(s, \theta)|0 \leq \theta \leq \theta_1, 0 \leq s \leq T_0 + \tau(x^\theta)\}$. Sei $x_1 = x^{\theta_1}$, $x_2 = x(T_0 + \tau(x^{\theta_1}), 0, x^{\theta_1})$. Wir führen eine neue Menge K ein:

Siehe auch die letzte Figur auf Seite .... . K werde berandet von γ, dem geraden Segment zwischen x_1 und x_2 und der Trajektorie $x(t, 0, x_1^\theta)$ für $0 \leq t \leq T_0 + \tau(x^{\theta_1})$. Ohne Einschränkung nehmen wir die Lage von x_1, x_2 in der letzten Figur an. Wir definieren eine Abbildung

$$A : I \to K$$

durch

$$A(s, \theta) = x(s, 0, x^\theta).$$

Dann ist A injektiv, denn ist $x(s', 0, x^{\theta'}) = x(\widehat{s}, 0, x^{\widehat{\theta}})$, so folgt, daß die Lösungen übereinstimmen, also $x^{\theta'} = x^{\widehat{\theta}}$, $\theta' = \widehat{\theta}$. Damit haben wir

$$x(s', 0, x^{\widehat{\theta}}) = x(\widehat{s}, 0, x^{\widehat{\theta}}).$$

$x^{\widehat{\theta}}$ liegt nicht auf γ. Sei etwa $s' > \widehat{s}$. Dann erhalten wir außer γ einen weiteren periodischen Orbit mit der Periode $s' - \widehat{s}$, was nicht möglich ist (in der letzten Figur mit Bild o.ä. gekennzeichnet, s. Satz VIII.1

im folgenden Kapitel VIII). Anschaulich ist klar: A ist auch surjektiv, A ist auch C^1 invertierbar: Es ist

$$J_A(s,\theta) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1'(s,0,x^\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}x_1(s,0,x^\theta) \\ x_2'(s,0,x^\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}x_2(s,0,x^\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } .' = \text{ Differentation nach } s$$

$$J_A'(s,\theta) \quad = \quad \begin{pmatrix} x_1''(s,0,x^\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}x_1'(s,0,x^\theta) \\ x_2''(s,0,x^\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}x_2'(s,0,x^\theta) \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(x(s,0,x^\theta)), \\ x_2' &= f_2(x(s,0,x^\theta)), \\ x_1'' &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}x_2', \\ x_2'' &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}x_2', \\ \frac{\partial}{\partial\theta}x_1' &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\theta} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}x_2' &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\theta} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\theta}, \end{aligned}$$

also

$$J_A'(s,\theta) = Df(x(s,0,x^\theta))J_A(s,\theta).$$

Für festes θ ist also $J_A(s,\theta)$ Lösung der Matrixgleichung $X' = Df(x(s,0,x^\theta))X$, also

$$\det J_A(s,\theta) = \det J_A(0,\theta)\exp(\int_0^s spur Df(x(\sigma,0,x^\theta))d\sigma.$$

Man vergleiche hierzu I.7.12.2, S. 17
Nun ist

$$J_A(0,\theta) = \begin{pmatrix} f_1(x^\theta) & (y-x_0)_1 \\ f_2(x^\theta) & (y-x_0)_2 \end{pmatrix}$$

(Beachte: $x' = f(x)$, $x(0) = w \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial w_i}(0) = e_i$ nach Satz I.7.9, Seite 14). Da S ein transversales Segment ist, sind $f(x^\theta)$ und $y - x_0$ linear unabhängig. Also ist $\det J_A(s,\theta) \neq 0$ in I. Sei

$$H = spur Df.$$

Dann ist

$$\int_K H(u,v)dudv = \int_I H(x(s,0,x^\theta)) \cdot |\det J_A(s,\theta)|dsd\theta$$

$$= \int_0^{\theta_1} |\det J_A(0,\theta)| \int_0^{T_0+\tau(x^\theta)} H(x(s,0,x^\theta)) \cdot \exp(\int_0^S spur Df(x(\sigma,0,x^\theta))d\sigma)dsd\theta.$$

Ist nun $\int_0^{T_0} spur Df(x(\sigma,0,x^0 = x_0))d\sigma > 0$ (bzw. < 0), so ist für θ_1 klein der Ausdruck $\int_0^{T_0+\tau(x^\theta)} spur Df(x(\sigma,0,x^\theta))d\sigma > 0$ (bzw. < 0). Einsetzen der Definition von H liefert

$$\int_K H(u,v)dudv = \int_0^{\theta_1} |\det J_A(0,\theta)|$$

$$(\int_0^{T_0+\tau(x^\theta)} spur Df(x(s,0,x^\theta)) \cdot \exp(\int_0^s spur Df(x(\sigma,0,x^\theta))d\sigma)ds)d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_1} |\det J_A(0,\theta)| \cdot [\exp(\int_0^{T_0+\tau(x^\theta)} spur Df(x(\sigma,0,x^\theta))d\sigma) - 1]d\theta.$$

Demnach ist

$$sign \int_K spur Df dudv = sign \int_0^{T_0} spur Df(x(\sigma,0,x_0))d\sigma$$

und

$$\begin{aligned}
\int_k spur Df dudv &= \int_K div f dudv, \\
&= \int_{\partial K} (f_1 d\widetilde{x}_2 - f_2 d\widetilde{x}_1), \\
&= \int_{\widetilde{\gamma}} (f_1 d\widetilde{x}_2 - f_2 d\widetilde{x}_1) \text{ mit } \widetilde{\gamma} = x_1 + t(x_2 - x_1), t\epsilon[0,1], \\
&= \int_0^1 (f_1(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_{22} - x_{12}) - f_2(x_1 + t(x_2 - x_1))(x_{21} - x_{11}))dt, \\
&= \int_0^1 \det(f(x_1 + t(x_2 - x_1)), x_2 - x_1)dt, \\
sign \int_k spur Df dudv &= sign \int_0^1 \det(f(x_1 + t(x_2 - x_1)), x_2 - x_1)dt.
\end{aligned}$$

Da nach Definition VII.1 auf einem transversalen Segment S der Vektor $f(z), z\epsilon S$, und der aufspannende Vektor $x_2 - x_1$ linear unabhängig sind, ist

$$sign \int_K spur Df dudv = sign \det(f(x_0), x_2 - x_1).$$

Mit der Gleichung oben für das Vorzeichen des Spurintegrals, folgt

$$sign \int_0^{T_0} spur Df(x(\sigma, 0, x_0))d\sigma = sign \det(f(x_0), x_2 - x_1)$$

wie behauptet. $\square$

Die im Beweis des Satzes VII.16 gezeigte Aussage gibt uns also ein Kriterium an die Hand, das es erlaubt zu entscheiden, wann ein periodischer Orbit γ anziehend oder abstoßend ist. Da $x_2 - x_1$ das transversale Segment S aufspannt, ist $\det(f(x_0), x_2 - x_1) \neq 0$.

Zur Fortsetzung von für $t \geq 0$ erklärten Lösungen von $x' = f(x)$ nach $t \leq 0$.

A. Hamiltonsche Systeme: $G \subset \mathbb{R}^n$

$$E : G \times B_\rho(0) \to \mathbb{R}, \boxed{\begin{array}{rcl} E(.,p_k) &=& E(.,-p_k) \\ \Rightarrow E_{p_k}(.,p_k) &=& -E_{p_k}(.,-p_k) \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \dot{q}_k = E_{p_k}, \dot{p}_k = -E_{q_k} \text{ für } t \geq 0, \\
&\widetilde{q}_k(t) = q_k(-t), \widetilde{p}_k(t) = -p_k(-t), t < 0, \text{ kurz} \\
&(2) \quad q_k \to q_k, p_k \to -p_k, t \to -t, \\
&\dot{\widetilde{q}}_k = -E_{p_k}(\widetilde{q}_k, -\widetilde{p}_k) = E_{p_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k) = E_{\widetilde{p}_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k), \\
&\dot{\widetilde{p}}_k = -E_{q_k}(\widetilde{q}_k, -\widetilde{p}_k), \\
&= -E_{\widetilde{q}_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k).
\end{aligned}$$

Es wird also eine Symmetrieeigenschaft benötigt, damit das System $\dot{q}_k = E_{p_k}$, $\dot{p}_k = -E_{q_k}$ unter $q_k \to q_k$, $p_k \to -p_k$, $t \to -t$ in sich übergeht. Auf der Lösung ist

$$p_k = m_k \dot{q}_k, t \geq 0,$$

also

$$\begin{aligned}
\widetilde{p}_k(t) &= -p_k(-t) = -m_k \partial_{(-t)} q_k(-t) \\
&= m_k \dot{\widetilde{q}}_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t \downarrow 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{q}_k(t) = E_{p_k}(q_k(t), p_k(t)) \to E_{p_k}(q_k^{(0)}, p_k^{(0)}) \\
t \uparrow 0 \quad &\Rightarrow \quad \dot{\widetilde{q}}_k(t) = -E_{p_k}(\widetilde{q}_k(t), -\widetilde{p}_k(t)) \\
&\qquad \to -E_{p_k}(q_k^{(0)}, p_k^{(0)})
\end{aligned}$$

Dadurch ist keine analytische Fortsetzung der Lösung nach $t \le 0$ gewonnen, da p_k in $t = 0$ springt. Man muß also erst das gegebene System auf den Fall $p_k^{(0)} = 0$ reduzieren. Dazu setzen wir für $t \ge 0$

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_k(t) &= q_k(t)\\ \widetilde{p}_k(t) &= p_k(t) - p_k^{(0)}\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{q}}_k(t) &= E_{p_k}(q_k, p_k - p_k^{(0)} + p_k^{(0)})\\ &= E_{p_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k + p_k^{(0)}) = E_{\widetilde{p}_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k + p_k^{(0)})\\ \dot{\widetilde{p}}_k(t) &= -E_{\widetilde{q}_k}(\widetilde{q}_k, \widetilde{p}_k + p_k^{(0)})\end{aligned}$$

In Wahrheit nimmt man die neue Hamiltonfunktion $\widetilde{E}(\widetilde{q}, \widetilde{p}) = E(\widetilde{q}, \widetilde{p} + p^{(0)})$. Diese Hamiltonfunktionen besitzen aber nicht die vorher benutzten Symmetrieeigenschaften. Daher muß man (1) zuerst für $q(0) = q^{(0)}$, $p(0) = p^{(0)}$ lösen, dann für $q(0) = q^{(0)}$, $p(0) = -p^{(0)}$, in dieser Lösung die Ersetzung (2) vornehmen und dann die Lösungen zusammensetzen. Insbesondere fallen $-t_- = -T_{max}^-$ und $t_+ = T_{max}$ i. allg. unterschiedlich aus.

B. Das System $\mathbf{x}' = (-\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1} + \mathbf{x_1}(\mathbf{x_1^2} + 2\mathbf{x_2^2}), \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2} + \mathbf{x_2}(\mathbf{x_1^2} + 2\mathbf{x_2^2}))^{\mathbf{T}}$

Hier entscheiden erst die Rechnungen, wann t_- bzw. t_+ gleich $-\infty$ bzw. $+\infty$ sind.

VII.17.1 Beispiel: Die van der Pol-Gleichung $y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0$. Es handelt sich um einen Schwingkreis, falls das Ohmsche Gesetz nichtlinear ist. Da $\varepsilon > 0$ vorausgesetzt wird, handelt es sich um eine spezielle Liënardsche Gleichung (Beispiel VII.13). Umschreibung auf dein System erster Ordnung:

$$\begin{aligned}&x_1 := y, x_2 := y' + \varepsilon(y^3/3 - y), \text{ also}\\ &x_1' = y' = x_2 - \varepsilon(\frac{x_1^3}{3} - x_1),\\ &x_2' = y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' = -x_1,\\ &x' = \begin{pmatrix} x_2 - F(x_1)\\ -x_1\end{pmatrix} \text{ mit } F(t) = \varepsilon(\frac{t^3}{3} - t)\end{aligned}$$

Offenbar ist $x_0 = 0$ der einzige stationäre Punkt. Berechnung von $D_f(0)$ liefert

$$\begin{pmatrix} -F'(0) & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

und für das Spektrum gilt $\lambda(\lambda - \varepsilon) + 1 = 0$, d.h. $\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 = 0$,

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}.$$

Mit I.7.12 ergibt sich für $\varepsilon < 2$ für das zugehörige lineare System ein Strudel und für $\varepsilon \ge 2$ ein Knotenpunkt, genauer zeigen die Richtungen der Tangenten in der $x_1 - x_2$-Ebene von 0 weg (Quelle).

Wir überlegen als Nächstes, daß eine Lösung stets für alle Zeiten existiert. Sei $V = \frac{1}{2}|x|^2$. Dann ist

$$\begin{aligned}&\dot{V} = x_1x_2 - x_1F(x_1) - x_2x_1 = -\varepsilon\frac{x_1^4}{3} + \varepsilon x_1^2 \le \varepsilon|x|^2,\\ &|x(t)|^2 \le |x(0)|^2 \cdot e^{2\varepsilon t}.\end{aligned}$$

Nach Satz I.7.5 existiert die Lösung für alle Zeiten.

Wir behaupten: Es gibt genau eine periodische Lösung $x(t, 0, x_0)$ und ihr Orbit ist global attraktiv, d.h. ist $\widetilde{x} \neq 0$, so gilt $dist(x(t,0,\widetilde{x}),\gamma) \to 0$ für $t \to \infty$. Beweis der Behauptung:

Wir beginnen eine Trajektorie in $(0,p), p > 0$. Dann wächst x_1 zunächst streng monoton und x_2 fällt streng monoton. Dies Verhalten setzt sich fort bis die Kurve $x_2 = F(x_1)$ erreicht ist, etwa in (x_{1p}, x_{2p}). Danach fällt x_1 streng monoton, ebenso x_2. Die Trajektorie trifft die x_2-Achse in $\alpha(p) < 0$. Da mit (x_1, x_2) auch $(-x_1, -x_2)$ Lösung ist, trifft die Kurve die Achse wieder in $\sigma(p) = -\alpha(-\alpha(p))$. Die Lösung ist offenbar periodisch, wenn $\sigma(p) = p$ ist. $\sigma(p)$ ist streng monoton wachsend, denn $p > \widetilde{p}$ impliziert $\alpha(\widetilde{p}) < \alpha(p)$, da die Lösung zu $\widetilde{p}$ ganz innerhalb der zu p gehörigen verlaufen muß, also $-\alpha(p) > -\alpha(\widetilde{p}) \Rightarrow \alpha(-\alpha(\widetilde{p})) > \alpha(-\alpha(p)) \Rightarrow \sigma(p) > \sigma(\widetilde{p})$. Sei

$$I(p) = \frac{1}{2}(\alpha(p)^2 - p^2).$$

Wir behaupten: Die Lösung ist dann und nur dann periodisch, wenn $I(p) = 0$ ist. Beweis: Sei die Lösung periodisch. Wäre $-\alpha(p) < p$, so wäre $\alpha(-\alpha(p)) > \alpha(p)$, also $-\alpha(-\alpha(p)) < -\alpha(p)$, $\sigma(p) < -\alpha(p)$, $\sigma(p) < p$ im Widerspruch zur Periodizität. Wäre $-\alpha(p) > p$, so wäre $\alpha(-\alpha(p)) < \alpha(p)$, $-\alpha(-\alpha(p)) > -\alpha(p)$, $\sigma(p) > -\alpha(p) > p$ im Widerspruch zur Periodizität. Umgekehrt folgt aus $I(p) = 0$ sofort die Periodizität. Wir zeigen also: $I(p) > 0$ für $0 < p \leq p_0$, $I(p) \to -\infty$ für $p \to \infty$ und streng monoton für $p \geq p_0$. Dann folgt: Es gibt genau ein $p_1 > p_0$ mit $I(p_1) = 0$. Hierbei ist p_0 dadurch definiert, daß $x(t,0,(0,p_0)) = (\sqrt{3},0)$ für ein $t > 0$ ist.

p_0 finden wir so: Wir starten bei $(\sqrt{3},0)$ und laufen in negativer Richtung. Irgendwann wird die x_2-Achse getroffen. Sei $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$. Dann ist

$$\begin{aligned} I(p) &= V(x(t_3,0,p)) - V(x(0,0,p)) \\ &= \int_0^{t_3} \dot{V}(x(\sigma,0,p))d\sigma, \text{ wobei } t_3 \text{ so gewählt ist, daß} \\ & \quad\; x(t_3,0,p)) = (0,\alpha(p)) \text{ ist, vgl. Figur vorher.} \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_0^{t_3} \dot{V}(x(\sigma,0,p))d\sigma &= \int_0^{t_2} (-\varepsilon \frac{x_1^4(\sigma)}{3} + \varepsilon x_1^2(\sigma))d\sigma, \\ &= \int_0^{t_3} -\frac{\varepsilon}{3} x_1^2(\sigma)(x_1^2(\sigma) - 3)d\sigma, x(\sigma,0,p) = (x_1(\sigma), x_2(\sigma))^T, \\ &> 0 \text{ für } 0 < p \leq p_0 \text{ weil dann } x_1(\sigma) \leq \sqrt{3} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Für $p > p_0$ zerlegt sich $I(p)$ entsprechend in 3 Teile, nämlich

$$I(p) = \int_0^{t_1} \dot{V}(x(\sigma,0,p))d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(x(\sigma,0,p))d\sigma + \int_{t_2}^{t_3} \dot{V}(x(\sigma,0,p))d\sigma$$

(s. Figur vorher) Entsprechend setzen wir

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p) + I_3(p)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \int_0^{t_1} -\frac{\varepsilon}{3} x_1^2(\sigma)(x_1^2(\sigma) - 3)d\sigma = \int_0^{t_1} \frac{-\frac{\varepsilon}{3} x_1^2(\sigma)(x_1^2(\sigma) - 3)}{x_1'(\sigma)} x_1'(\sigma)d\sigma, \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} -\frac{\varepsilon}{3} \frac{x_1^2(x_1^2 - 3)}{x_2(x_1) - F(x_1)} dx_1. \end{aligned}$$

Da $x_2(x_1)$ wächst, falls p wächst, und der Zähler positiv ist, fällt $I_1(p)$ für wachsendes p. Die gleiche Überlegung gilt für das dritte Integral $I_3(p)$, da sich bei der Substitution $\sigma \to x_1$ der Durchlaufungssinn umkehrt. Auf dem mittleren Teil ist x_1 eine Funktion von x_2 und $x_2'(\sigma) = -x_1(x_2(\sigma))$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} I_2(p) &= \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\varepsilon}{3} x_1^2(\sigma)(x_1^2(\sigma) - 3)d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{\varepsilon}{3} \frac{x_1^2(\sigma)(x_1^2(\sigma) - 3)}{x_2'(\sigma)} x_2'(\sigma)d\sigma, \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \frac{\varepsilon}{3} x_1(x_1^2 - 3)dx_2 = -\int_{y_2}^{y_1} \frac{\varepsilon}{3} x_1(x_1^2 - 3)dx_2 < 0. \end{aligned}$$

$I_2(p)$ fällt monoton für $p \to \infty$, da sowohl $x_1(x_2) > 0$ als auch $y_1 - y_2$ monoton wachsen. Weiter haben wir die Abschätzung

$$I_2(p) = \int_{y_2}^{y_1} \underbrace{\frac{\varepsilon}{3} x_1(3 - x_1^2)}_{-F(x_1)} dx_2, \quad |I_2(p)| = \int_{y_2}^{y_1} F(x_1) dx_2 \geq \frac{1}{2}(y_1 - y_2)(b - \sqrt{3}).$$

Ohne Beweis merken wir an, daß b mit $p \to +\infty$ monoton gegen unendlich wächst. Also gibt es genau einen periodischen Orbit γ. Sei D das beschränkte Innengebiet von γ. Aus dem Beweisteil vorher folgt: $0 \epsilon D$. Sei $\widetilde{x} \epsilon D - \{0\}$. Dann ist $\{\widetilde{x}(t, 0, \widetilde{x}) | t \geq 0\}$ beschränkt und in $\overline{D}$ enthalten. In der Nähe des Nullpunkts ist $\dot{V}(x) \geq \frac{1}{2} x_1^2$. Also enthält $\Omega(\widetilde{x})$ keinen kritischen Punkt. Nach VII.7 (Satz von Poincaré-Bendixson) ist $\Omega(\widetilde{x}) = \gamma$. Sei $\widetilde{x} \epsilon \mathbb{R}^2 - \overline{D}$. $x(t, 0, \widetilde{x})$ durchläuft ohne Einschränkung $(0, \widetilde{p})$ mit $\widetilde{p} > p_1$. Dann ist $\sigma(\widetilde{p}) > \sigma(p_1)$ und mit $I(\widetilde{p}) < 0$ folgt $\widetilde{p} > |\alpha(\widetilde{p})| = -\alpha(\widetilde{p}), -\alpha(\widetilde{p}) > -\alpha(-\alpha(\widetilde{p})), \widetilde{p} > \sigma(\widetilde{p})$. Insbesondere ist die Folge $(\sigma^n(\widetilde{p}))$ monoton fallend und $\sigma^n(\widetilde{p}) \downarrow p_1^*$ für $n \to \infty$. Also ist $\sigma(p_1^*) = p_1^*$ und $p_1^* = p_1$. $\square$

VII.17.2 Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell.

$$x' = Lx, L = \alpha - \beta y - \lambda x \text{ mit } \alpha, \beta, \lambda > 0,$$
$$y' = Ry, R = \delta x - \gamma - \mu y \text{ mit } \delta, \gamma, \mu > 0$$

und

$$\frac{\alpha}{\lambda} < \frac{\gamma}{\delta}.$$

Man vergleiche hierzu Beispiel 2 nach IV.4 auf Seite 46.

Wir haben folgendes Bild

$$\left.\begin{array}{ll} I: & R > 0, L < 0, \text{ d.h. } y' > 0, x' < 0, \\ II: & R < 0, L < 0, \text{ d.h. } y' < 0, x' < 0, \\ III: & R < 0, L > 0, \text{ d.h. } y' < 0, x' > 0 \end{array}\right\} \text{als Teile des ersten Quadranten}$$

II $\cup$ III ist positiv invariant: Dazu reicht es, $V = R$ zu nehmen. Dann ist

$$\dot{V} = \delta L x - \mu R y, \text{ also } \dot{V} = \delta L x \text{ auf } V^{-1}(0),$$
$$\text{also } \dot{V} \leq 0 \text{ auf } V^{-1}(0)$$

Wir wenden hier das Corollar zum Beweis des Satzes VII.12 an, indem wir $\rho = +\infty$ setzen und als Gebiet G den offenen ersten Quadranten nehmen.

III ist positiv invariant: G sei wieder der offene erste Quadrant, $V = -L$. Dann ist

$$\dot{V} = \lambda L x + \beta R y, \text{ also } \dot{V} = \beta R y \text{ auf } V^{-1}(0),$$
$$\text{also } \dot{V} < 0 \text{ auf } V^{-1}(0).$$

Wie oben wenden wir das Corollar zum Beweis des Satzes VII.12 an.

Bei einer Lösung des Räuber-Beute-Modells wie eben eingeführt kann nicht

$$x(t) \geq \frac{\gamma}{\delta}, t \geq 0$$

sein, denn wäre $x' = x(\alpha - \beta y - \lambda x) \leq x(\alpha - \lambda\frac{\gamma}{\delta}) = \lambda x\left(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{\gamma}{\delta}\right) \leq -\varepsilon_1 x$ und $x(t)$ würde für $t \to \infty$ gegen Null konvergieren im Widerspruch zur Annahme. Sei also $x(t) < \frac{\gamma}{\delta}$ und $x'(t) < 0$, $t_1 \leq t \leq t_1 + \rho$. Dann ist

$$\begin{aligned} y' &= (\delta x - \gamma - \mu y)y < y(\delta x - \gamma), \\ &< -\varepsilon_2 y, t_1 \geq t \geq t_1 + \rho. \end{aligned}$$

Also fällt y exponentiell. Wir haben zwei Möglichkeiten: Die Lösung bleibt in II oder geht nach III. Aus dem Beispiel 2 auf S. 46 entnehmen wir die Vermutung: $x(t) \to \frac{\alpha}{\lambda}$, $t \to \infty$. Dies zeigt man so: Wäre $x(t) \geq \frac{\alpha}{\lambda} + \varepsilon_3$, so folgte mit $x' = (\alpha - \lambda x)x - \beta y$, $y \to 0$ für $t \to \infty$ daß $x' < -\frac{\varepsilon_3}{2}x$, also $x \to 0$ exponentiell. Also gilt in jedem Fall: $x(t) \to \frac{\alpha}{\lambda}$, $t \to \infty$. Bleibt die Lösung in II, so konvergiert $x(t)$ von oben gegen $\frac{\alpha}{\lambda}$. Überschreitet die Lösung $L = 0$, so bleibt sie in III, da III invariant ist, und $x(t)$ konvergiert von unten gegen $\frac{\alpha}{\lambda}$. Siehe auch Figur.

Hinweis: $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ invariant. Denn: $\{y \geq 0\}$ invariant. $V_2 = -y$, $\nabla V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\dot{V}_2 = -Ry(= 0$ auf $y = 0\}$. $\{x \geq 0\}$ invariant. $V_1 = -x$, $\nabla V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{V}_1 = -Lx(= 0$ auf $x = 0)$.

VIII. Periodische Lösungen nichtlinearer Gleichungen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sei $f : \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei f bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ stetig differenzierbar, d.h. $\frac{\partial}{\partial x_i} f \epsilon C^0(\mathbb{R} \times G, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \ldots, n$. Bezüglich t sei f w-periodisch. Sei (t_-, t_+) das maximale Existenzintervall von $x(t, 0, x_0)$ $(t_- = t_-(x_0), t_+ = t_+(x_0))$. Sei

$$G_1 = \{x_0 | x_0 \epsilon G, w < t_+(x_0)\}$$

Aus der stetigen Abhängigkeit von den Daten (Satz I.7.8) folgt, daß G_1 offen ist. Sei die Poincaré-Abbildung P_w gegeben durch

$$P_w(x_0) = x(w, 0, x_0) \text{ für } x_0 \epsilon G_1.$$

VIII.1 Satz: *$x' = f(t, x)$ besitzt eine $w-$periodische Lösung genau dann, wenn P_w einen Fixpunkt in G_1 besitzt (P_w ist eine im allgemeinen nichtlineare Abbildung).*

Beweis: $x' = f(t, x)$ besitze eine $w-$periodische Lösung. Für ein geeignetes x_1 ist dann $x(t, 0, x_1) = x(t + w, 0, x_1) \underset{t=0}{\Rightarrow} x_1 = x(w, 0, x_1) = P_w(x_1)$. P_w besitze einen Fixpunkt, etwa $x_0 = P_w x_0$ also insbesondere $G_1 \neq \emptyset$. Sei $x(t) = x(t + w, 0, x_0)$ auf $t_-(x_0) - w < t < t_+(x_0) - w$. Dann ist

$$\begin{aligned} x(0) &= x(w, 0, x_0) = x_0, x'(t) = f(t + w, x(t)) = f(t, x(t)), \text{ also} \\ x(t) &= x(t, 0, x_0) \text{ in } \max\{t_-(x_0), -w\} < t < t_+(x_0) - w. \end{aligned}$$

$x(t, 0, x_0)$ kann also auf umfassendere Bereiche fortgesetzt werden, ist dann periodisch und wir haben $t_-(x_0) = -\infty$, $t_+(x_0) = +\infty$. □

Ist $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, so verweisen wir auf II. Speziell für $b \equiv 0$ ist $P_w = U(w, 0)$, d.h. P ist linear.

Eine Fragestellung, die uns interessiert, ist die Charakterisierung der Stabilität einer Lösung mittels P_w. Wegen $x(t + w, 0, x_0) = x(t, 0, P_w(x_0))$ folgt

$$x(2w, 0, x_0) = P_w^2(x_0).$$

Induktiv folgt

$$\begin{aligned} &x(kw, 0, x_0) = P_w^k(x_0), \text{ also} \\ &x(s + kw, 0, x_0) = x(s, 0, P_w^k x_0) \end{aligned}$$

Sei $x_{1,0}(t) = x(t, 0, x_{1,0})$. Dann ist, wenn x_0, x_1 auf $\mathbb{R}^+$ existieren,

$$\begin{aligned} \sup_t |x_1(t) - x_0(t)| &= \sup_t |x(t, 0, x_1) - x(t, 0, x_0)|, \\ &= \sup_{\substack{0 \leq s \leq w, \\ k \epsilon \mathbb{N}}} |x_1(s + kw) - x_0(s + kw)|, \\ &= \sup_{\substack{0 \leq s \leq w, \\ k \epsilon \mathbb{N}}} |x(s, 0, P_w^k x_1) - x(s, 0, P_w x_0)|. \end{aligned}$$

Aus dem Satz über die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten folgt, daß Stabilität insbesondere dann gegeben ist, wenn die Abbildungen P_w^k gleichmäig bezüglich k stetig sind. Ist P_w linear, so reicht also $||P_w^k|| \leq C$ mit eienr von k unabhängigen Konstante aus.

Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = -w^2(t)x \end{aligned}\right. \Rightarrow x' = A(t)x, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w^2(t) & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow spur A(t) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} &\det U(t, 0) &&= \det(U(0, 0)) \exp(\textstyle\int_0^t spur A(\sigma) d\sigma) = 1 \\ &\Rightarrow \det P_w = 1 \end{aligned}$$

VIII.2 Lemma: *Sei $n = 2$. Wir betrachten $x'(t) = A(t)x(t)$. Sei $\det P_w = 1$. Sei $|spur P_w| < 2$. Dann ist $||P_w^k|| \leq C$.*

Beweis: Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von $P_w \Rightarrow \det(P_w - \lambda E) = \lambda^2 - spur P_w \lambda + \det P_w = 0$. ($\det P_w = \lambda_1\lambda_2, spur P_w = \lambda_1 + \lambda_2$). Hier ist $\det P_w = 1$ nach Voraussetzung. Damit folgt

$$\lambda_{1,2} = \frac{spur P_w}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{spur P_w}{w}\right)^2}_{<1} - 1},$$

$$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

Also ist $P_w = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$, $P_w^k = S \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} S^{-1}$, $||P_w^k|| \leq ||S||||S^{-1}||$. □

VIII.3 Folgerung und Hinweis: Ist $|spur P_w| < 2$, so ist der Nullpunkt von $x' = A(t)x$ stabil, $A(t)$ wie oben. Ist in Lemma VIII.2 die Größe $|spur P_w| > 2$, so wachsen die Ausdrücke $||P_w^k||$ unbeschränkt.

Beispiel:
$x'' + \frac{g}{l}\sin x = 0$ von unterer Ruhelage an ($\uparrow$),
$x'' - \frac{g}{l}\sin x = 0$ von oberer Ruhelage an ($\downarrow$).

Wir betrachten nur x in der Nähe von π bzw. kleine x und ersetzen $\sin x$ durch $\pi - x$ bzw. x und schreiben im ersten Fall x statt $\pi - x$. Dann haben wir
$x'' - \frac{g}{l}x = 0$ von unterer Ruhelage an ($\uparrow$),
$x'' - gx = 0$ von oberer Ruhelage an ($\downarrow$).

$\pm c, c = \frac{8a}{\tau^2}$ ist die konstante Beschleunigung des Auflagepunktes während der Zeit τ. Es sei $c >> g$.

Wir betrachten die Probleme

$$\begin{aligned} 0 &= x'' - \frac{g+c}{l}x \text{ auf } [0, \tau], \\ 0 &= x'' - \frac{g-c}{l}x \text{ auf } [\tau, 2\tau], \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x'' - k^2 x &= 0 \text{ auf } [0, \tau], k^2 = \frac{g+c}{l}, \\ x'' - \kappa^2 x &= 0 \text{ auf } [\tau, 2\tau], \kappa^2 = \frac{c-g}{l}. \end{aligned}$$

$P_{2\tau}$ stellt sich also dar als Hintereinanderausführung $P_2 P_1$ mit $P_1 = U_1(\tau, 0)$, $P_2 = U_2(\tau, 0)$. Nach I.7.12 haben wir

$$U_1(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos hkt & \frac{1}{k}\sin hkt \\ k \sin hkt & \cos hkt \end{pmatrix}, U_2(t, 0) = \begin{pmatrix} \cos \kappa t & \frac{1}{\kappa}\sin \kappa t \\ -\kappa \sin \kappa t & \cos \kappa t \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det P_{2\tau} = 1$. Unsere Gleichungen haben die Gestalt $x'' = f(t)x$ mit $f(t) = \begin{cases} k^2 \text{ auf } [0, \tau] \\ -\kappa^2 \text{ auf } [\tau, 2\tau] \end{cases}$ oder als System

$$x' = A(t)x, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Obwohl $A(t)$ unstetig ist, übernehmen wir die Resultate aus Lemma VIII.2. Daher haben wir zu kontrollieren, ob $|spur P_{2\tau}| < 2$ ist. Es ist

$$spur P_{2\tau} = 2\cos \kappa\tau \cos hk\tau + \left(\frac{k}{\kappa} - \frac{\kappa}{k}\right) \sin \kappa\tau \sin hk\tau.$$

Es ist mit $\mu^2 = g/c << 1$, $\varepsilon^2 = a/l << 1$,

$$\begin{aligned}
k\tau &= \tau\sqrt{\frac{g+c}{l}} = \tau\sqrt{\frac{c}{l}}\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{\frac{8a}{c}\frac{c}{l}}\sqrt{1+\mu^2} = \sqrt{8}\varepsilon\sqrt{1+\mu^2},\\
\kappa\tau &= \tau\sqrt{\frac{c-g}{l}} = \sqrt{8}\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}\\
\frac{k}{\kappa}-\frac{\kappa}{k} &= \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}} - \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}} = \frac{2\mu^2}{\sqrt{1-\mu^4}} = 2\mu^2 + 0(\mu^6),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos hk\tau = 1 + \frac{(k\tau)^2}{2!} + \frac{(k\tau)^4}{4!} + \ldots = 1 + 4\varepsilon^2(1+\mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4(1+\mu^2)^2 + \ldots,\\
&\cos\kappa\tau = 1 - 4\varepsilon^2(1-\mu^2) + \frac{8}{3}\varepsilon^4(1-\mu^2)^2 - \ldots,\\
&\sin hk\tau \sin\kappa\tau = k\tau\kappa\tau + \ldots = 8\varepsilon^2(1-\mu^2) + \ldots,
\end{aligned}$$

$$spur P_{2\tau} = 2(1 + 8\varepsilon^2\mu^2 - 16\varepsilon^4 + \frac{16}{3}\varepsilon^4 + \ldots) + 16\varepsilon^2\mu^2(1-\mu^2) + \ldots = 2 + 32\varepsilon^2\mu^2 - \frac{64}{3}\varepsilon^4 + \ldots.$$

Soll $|spur P_{2\tau}| < 2$ sein, so benötigen wir $32\varepsilon^2\mu^2 < \frac{64}{3}\varepsilon^4 \Leftrightarrow 2\varepsilon^2 > 3\mu^2$, d. h.

$$\frac{g}{c} < \frac{2}{3}\frac{a}{l} \Leftrightarrow \frac{3gl}{2a} < c = \frac{8a}{\tau^2} \Leftrightarrow \tau^2 < \frac{16}{3}\frac{a^2}{gl} \Leftrightarrow \tau < \frac{4a}{\sqrt{3gl}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\tau} > \frac{\sqrt{3gl}}{8a}.$$

Für $l = 20$ cm, $a = 1$cm folgt also $\frac{1}{2\tau} > 10\frac{\sqrt{6}}{8} = \frac{5\sqrt{6}}{4}$, so daß man für eine Frequenz etwa ab 31 Hz Stabilität erhält.

Wir betrachten jetzt das System $x' = A(t)x + b(t,x)$ mit $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und beweisen

VIII.4 Satz: *Seien $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$, $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig. b sei lokal Lipschitzstetig bezüglich $x_1, \ldots, x_n$. Bezüglich t seien A und $b(.,x)$ $w-$periodisch. b sei asymptotisch linear, d.h.*

$$|b(t,x)| \le \varepsilon|x| + C_\varepsilon, \varepsilon > 0, t\epsilon\mathbb{R}, x\epsilon\mathbb{R}^n.$$

Dann besitzt das Problem $x' = A(t)x + b(t,x)$ eine $w-$periodische Lösung, falls 1 kein Eigenwert von $U(w,0)$ ist.

Beweis: Es ist (Die Lösung existiert immer auf $\mathbb{R}$ nach I.7.2)

$$x(t,0,x_0) = U(t,0)x_0 + \int_0^t U(t,\sigma)b(\sigma, x(\sigma,0,x_0))d\sigma.$$

Sei

$$\alpha = \max_{0\le\sigma,t\le w} ||U(t,\sigma)||,$$

also

$$\begin{aligned}
|x(t,0,x_0)| \le \alpha||x_0|| &+ \int_0^t \alpha(\varepsilon|x(\sigma,0,x_0)| + C_\varepsilon)d\sigma,\\
|x(t,0,x_0)| \le \gamma|x_0| &+ K \text{ auf } [0,w] \text{ mit } \gamma = \alpha e^{\alpha\varepsilon w},\\
|x(t,0,x_0) - U(t,0)x_0| &\le \int_0^t \alpha(\varepsilon|x(\sigma,0,x_0)| + C_\varepsilon)d\sigma,\\
&\le \alpha w(\varepsilon(\gamma|x_0| + K) + C_\varepsilon),\\
&\le \alpha w\varepsilon\gamma|x_0| + \widetilde{K}.
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$F(x) = (I - U(w,0))^{-1}(P_w(x) - U(w,0)x)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq C|P_w(x) - U(w,0)x| \leq C\alpha w\gamma\varepsilon|x| + \overset{\approx}{K}, \\ &\leq \frac{1}{2}|x| + R \text{ für } \varepsilon = \frac{1}{2C\alpha w\gamma}, \end{aligned}$$

$$F : \overline{B_{2R}(0)} \to \overline{B_{2R}(0)} \text{ stetig.}$$

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gibt es ein $x_0 \epsilon \overline{B_{2R}()}$ mit $F(x_0) = x_0$. Dies ist äquivalent damit, daß

$$P_w(x_0) - U(w,0)x_0 = x_0 - U(w,0)x_0,$$
$$P_w(x_0) = x_0$$

ist. x_0 ist nach Satz VIII.1 Startwert einer periodischen Lösung. □

VIII.5 Satz: *Sei A konstant, $\sigma(A) \cap \{\frac{2\pi i}{\omega}k | k \in \mathbb{Z}\} = \Phi$. Dann hat das Problem $x' = Ax + b(t,x)$ aus Satz VIII.4 eine periodische Lösung.*

Beweis: Es ist $U(\omega, 0) = e^{\omega A}$, also

$$\sigma(U(\omega,0)) = \sigma(e^{wA}) = e^{w\sigma(A)} \neq 1.$$

□

In Satz VIII.4 haben wir gesehen, wie ein Fixpunktsatz erfolgreich zur Lösung eines Anfangswertproblems für gewöhnliche Differentialgleichungen eingesetzt werden konnte. Wir wollen uns jetzt näher mit diesem Methodenkreis beschäftigen und zwar mit dem Abbildungsgrad, zu dem wir i.f. einige Überlegungen anstellen. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $p \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Existiert $x \in G$ mit $f(x) = p$. Gesucht ist eine Größe $d(f, G, p) \in \mathbb{Z}$ mit

1. $d(f, G, p) \neq 0 \Rightarrow p \in f(G)$,
2. d ist invariant unter "kleinen Störungen",
3. Ist $\Omega_1 + \Omega_2 \subset G$ und $p \notin f(G - (\Omega_1 + \Omega_2))$ dann folgt $d(f, G, p) = d(f, \Omega_1 p) + d(f, \Omega_2, p)$,
4. Homotopieinvarianz,
5. $d(id, G, p) = 1$ für $p \in G$.

Für $n = 1$, $p = 0$ könnte man $d(.,.,0)$ als die Anzahl der Nullstellen von f erklären. Dann ist z.B. 2. verletzt. Eine andere Möglichkeit ist,

$$d(f, I, 0) = \sum_{x, f(x)=0} sign f'(x)$$

zu setzen. Diese Idee verallgemeinern wir im folgenden Abschnitt

IX. Der Abbildungsgrad

Nach unseren Vorüberlegungen am Ende von VIII. beginnnen wir gleich mit

IX.1 Definition: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$ und äußere Normale ν. Sei $f \epsilon C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, sei $0 \notin f(\partial\Omega)$ (also $|f(x)| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf $\partial\Omega$). Wir wählen ein $\varphi \epsilon C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ mit supp$\varphi \subset (0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(|x|)dx = 1$. Dann führen wir den Abbildungsgrad durch*

$$deg(f, \Omega, 0) = \int_\Omega \varphi(|f(x)|) \det Df(x)dx$$

ein. Beachte: Kein Betrag bei der Determinante. Für $p \notin f(\partial\Omega)$ sei

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f - p, \Omega, 0).$$

IX.2 Lemma: *Die Definition IX.1 hängt nicht von φ ab.*

Beweisskizze: Sei $h(x) = A(x)g(f(x))$, wobei $A(x)$ die Adjungierte zur Matrix der Minoren von $Df(x)$ und $g\epsilon C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n - \{0\}, \mathbb{R}^n)$, $|\nabla g| \leq G$ ist. Dann folgt $divh(x) = \det Df(x)(divg)(f(x))$. Weiter setzen wir $g(y) = y \cdot \psi(|y|)$ mit $\psi(r) = \frac{1}{r^n} \int_0^r \varphi(\rho)\rho^{(n-1)}d\rho$. Dann ist $(divg)(f(x)) = \varphi(|f(x)|)$, und mit dem Satz von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, 0) &= \int_\Omega divh(x)dx, \\ &= \int_{\partial\Omega} A(\xi)g(f(\xi)) \cdot \upsilon(\xi)d\Omega, \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} A(\xi)\frac{f(\xi)}{|f(\xi)|^n} \cdot \upsilon(\xi)d\Omega, \quad \omega_n = \text{ Oberfläche von } S^{n-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

□

IX.3 Lemma: *Seien $f_i, i = 1, 2$ wie oben, und für ein $\varepsilon_1 > 0$ gelte $|f_i| \geq 7\epsilon_1$ auf $\partial\Omega$, $|f_1 - f_2| \leq \varepsilon_1$ in $\overline{\Omega}$. Dann ist*

$$deg(f_1, \Omega, 0) = deg(f_2, \Omega, 0).$$

Dieses Lemma bringen wir **ohne Beweis.**

IX.4 Folgerung: *Mit (1) ist $deg(f, \Omega, 0)$ für beliebige $f \epsilon C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $f(\partial\Omega) \not\ni 0$ definiert durch*

$$\lim_{k \to \infty} deg(f_k, \Omega, 0) \text{ für } f_k \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), f_k \to f \text{ in } C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),$$

$$k \in \mathbb{N} \text{ bzw. } k \to \infty.$$

IX.5 Satz: *Sei Ω wie oben, sei $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p \notin f(\partial\Omega)$ und*

$$deg(f, \Omega, p) \neq 0.$$

Dann ist $p \in f(\Omega)$.

Beweis: Angenommen, es sei $p \notin f(\Omega)$. Dann ist für ein $\varepsilon_0 > 0$ jedenfalls $|f(x) - p| \geq \varepsilon_0$ auf $\overline{\Omega}$, also

$$\int_\Omega \varphi(|f(x) - p|) \det Df(x)dx = 0 \text{ für alle } \varphi \text{ wie in Definition IX.1 mit } \sup\varphi \subset (0, \varepsilon_0).$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

IX.6 Satz: *Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega$ wie oben, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega, f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)p \notin f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Dann ist*

$$deg(f, \Omega, p) = deg(f, \Omega_1, p) + deg(f, \Omega_2, p).$$

Beweis: Es ist $|f(x) - p| \geq \varepsilon_0$ auf $\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(|f(x)-p|)\det Df(x)dx &= \int_{\overline{\Omega}-(\Omega_1\cup\Omega_2)} \varphi(|f(x)-p|)\det Df(x)dx + \int_{\Omega_1\cup\Omega_2} \varphi(|f(x)-p|)\det Df(x)dx,\\ &= \int_{\Omega_1} \varphi(|f(x)-p|)\det Df(x)dx + \int_{\Omega_2} \varphi(|f(x)-p|)\det Df(x)dx.\end{aligned}$$

□

IX.7 Satz (Homotopieinvarianz): *Sei Ω wie oben, $F : I = [0,T]x\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $0 \notin F(I \times \partial\Omega)$. Sei $f(t,.) := F(t,.) \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, sei $\frac{\partial}{\partial x_i} f(.,.) \in C^0(I \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $i = 1,\ldots,n$. Dann ist*

$$\deg(f(T,.),\Omega,0) = \deg(f(0,.)\Omega,0)$$

Beweis: $I \times \partial\Omega$ ist kompakt. Sei also $\varepsilon_0 > 0$ so gewählt, daß $|F(t,x)| \geq 8\varepsilon_0$ ist auf $Ix\partial\Omega$. Es ist $|F(x,t) - F(x,t')| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ für $|t-t'| \leq \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ geeignet. Sei $\tau_k = k\frac{T}{N}$, $k = 0,\ldots,N$. Zu k wählen wir $f_k \in C^2(\overline{\Omega})$ mit $|f_k - F(\tau_k,.)| \leq \frac{\varepsilon_0}{3}$ auf $\overline{\Omega}$. Dann ist $|f_k - f_{k+1}| \leq \varepsilon_0$ auf $\overline{\Omega}$, $|f_k| \geq 7\varepsilon_0$ auf $\partial\Omega$. Aus Lemma IX.3 folgt

$$\deg(f_{k+1},\Omega,0) = \deg(f_k,\Omega,0)$$

$$\deg(f_0,\Omega,0) = \deg(f_N,\Omega,0)$$

Ersetzen wir ε_0 durch ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, und lassen ε gegen Null streben, so folgt aus Folgerung IX.4 die Gleichheit

$$\deg(F(0,.)\Omega,0) = \deg(F(T,.),\Omega,0),$$

also

$$\deg(f(0,.),\Omega,0) = \deg(f(T,.),\Omega,0).$$

□

Sei Ω wie oben, seien $f_1, f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, $0 \notin f_i(\partial\Omega)$, $i = 1,2$, $f_1|\partial\Omega = f_2|\partial\Omega$.

Dann ist

$$\deg(f_1,\Omega,0) = \deg(f_2,\Omega,0),$$

denn aus Satz IX.7 folgt für $F(t,x) = (1-t)f_1(x) + tf_2(x)$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\deg(F(1,.),\Omega,0) = \deg(f_2,\Omega,0) = \deg(F(0,.),\Omega,0),$$

$$= \deg(f_1,\Omega,0).$$

IX.8 Satz: *Sei Ω wie oben. Dann ist*

$$\deg(id,\Omega,p) = 1 \text{ für } p \in \Omega.$$

Sei $f \in C^1(\overline{\Omega}), 0 \notin f(\partial\Omega)$. Dann ist

$$\deg(f,\Omega,0) \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Sei $p \in \Omega$. Dann ist $B_{\varepsilon_0}(p) \subset \Omega$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Insbesondere ist $id - p \neq 0$ auf $\partial\Omega$ und

$$\deg(id,\Omega,p) = \int_\Omega \varphi_{\varepsilon/2}(|x-p|) \cdot 1dx = 1.$$

Die zweite Behauptung sieht man leicht, falls $f^{-1}(0) = \{x_1,\ldots,x_n\}$, $\det Df(x_i) \neq 0$ ist, $i = 1,\ldots,n$. Dann ist für ein $\varepsilon > 0$

$$f : U_\varepsilon(x_i) \to B_\varepsilon(0) \text{ bijektiv}$$

mit geeigneten offenen Umgebungen $U_\varepsilon(x_i)$, die wir als glatt berandet voraussetzen können und für die

$$\overline{U_\varepsilon(x_i)} \subset \Omega, \overline{U_\varepsilon(x_i)} \cap \overline{U_\varepsilon(x_j)} = \emptyset, i \neq j$$

ist. Nach Satz IX.6 ist

$$
\begin{aligned}
\deg(f,\Omega,0) &= \sum_{i=1}^{n} \deg(f,U_\varepsilon(x_i),0),\\
&= \sum_{i=1}^{n} sign \det Df(x_i) \int_{U_\varepsilon(x_i)} \varphi(|f(x)|)|\det Df(x)|dx,\\
&= \sum_{i=1}^{n} sign \det Df(x_i) \underbrace{\int_{B_\varepsilon(0)} \varphi(|y|)dy.}_{=1 \text{ für } \varphi \text{ mit } \sup\varphi\subset(0,\varepsilon)}
\end{aligned}
$$

Sonst muß man das **Lemma von Sard** anwenden, das besagt: Bei glatten Funktionen liegt die Menge der Punkte $f(x)$ mit $\det Df(x) \neq 0$ dicht in $f(\Omega)$, genauer: $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sei aus $C^1(\overline{\Omega})$. Dann ist $f(\{x \in \Omega | \det Df(x) = 0\})$ eine Nullmenge. Demnach existiert eine Folge (c_n) mit $|c_n| \downarrow 0, n \to \infty$ so, daß für alle $x \in f^{-1}(c_n)$ gilt $\det Df(x) \neq 0$. Wegen $0 \notin f(\partial\Omega)$ ist $0 \notin (f-c_n)(\partial\Omega), n \geq n_0$ und $\deg(f-c_n,\Omega,0)$ ist jedenfalls eine wohldefinierte endliche Zahl, $n \geq n_0$. Außerdem ist

$$f^{-1}(c_n) \subset \Omega, n \geq n_0.$$

Nun enthalte ein $f^{-1}(c_n)$, $n \geq n_0$, unendlich viele $x_1, x_2, \ldots$, von denen wir also annehmen können, daß sie für $\nu \to \infty$ gegen ein $x \in \Omega$ konvergieren. Sie mögen in $U(\overline{x})$ liegen, $\overline{U(\overline{x})} \subset \Omega$. In $\overline{U(\overline{x})}$ sei $\det Df(x) \neq 0$. Ohne Einschränkung sei $\det Df(x)$ dort > 0. $B = \{x_1, x_2, \ldots, \overline{x}\}$ ist kompakt, $dist(B, A = f^{-1}(c_n) - B) > 0$. Daher gibt es offene Mengen $V, \widetilde{U}$ mit $A \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$, $B \subset U \subset \overline{\widetilde{U}} \subset \Omega$ mit $\overline{V} \cap \overline{\widetilde{U}} = \emptyset$. Ohne Einschränkung sei $U = \widetilde{U}$, V und U seien glatt berandet. Es ist $0 \notin (f-c_n)(\overline{\Omega} - V \cup U)$, $n \geq n_0$. Nach Satz IX.6 ist

$$\deg(f-c_n,\Omega,0) = \deg(f-c_n,V,0) + \deg(f-c_n,U,0)$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, $\delta(N)\overline{B_{\delta(N)}(\overline{x})} \subset U > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in U - \overline{B_{\delta(N)}(\overline{x})}$. Anwendung des eingangs benutzten Verfahrens liefert

$$\deg(f-c_n,U,0) = \sum_{i=1}^{n} \deg(f-c_n,U_\varepsilon(x_i),0) + \deg(f-c_n), B_{\delta(N)}(\overline{x}), 0 =\geq N$$

(Hinweis: $f(\overline{x}) = c_n . \exists \widetilde{U} \subset U(\overline{x})$, $V = V(c_n)$ mit $f : \widetilde{U} \to V$ bijektiv. $x_j \in U$ $j \geq j_0$ $f(x_j) = c_n$, Widerspruch gegen Bijektivität.) im Widerspruch zur Endlichkeit von $\deg(f-c_n,U,0)$. Also ist $f^{-1}(c_n)$ endlich, $n \geq n_0$, $\deg(f-c_n,\Omega,0) \in \mathbb{Z}$ nach dem ersten Teil des Beweises.

Für $n \geq n_1$ ist $\deg(f-c_n,\Omega,0)$ konstant, da für hinreichend kleine c die Größe $\deg(f-c,\Omega,0)$ stetig von c abhängt. Also ist $\deg(f,\Omega,0) \in \mathbb{Z}$. □

IX.9 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz): *Sei $B \subset \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$ offen, $\overline{B}$ kompakt und konvex und glatt berandet. Sei $f : B \to \overline{B}$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt in $\overline{B}$.*

Beweis:

1. Sei $B = B_R(0)$, $F(t,x) = x - tf(x)$, $0 \leq t \leq 1$. Sei $f \in C^1(\overline{B}, \mathbb{R}^n)$. Angenommen, es ist $0 = F(t_0, x_0)$ für ein $x_0 \in \partial B$ und ein $t_0 \in [0,1]$. Ist $t_0 = 1$, so folgt $f(x_0) = x_0$ und wir sind fertig. Ist $t_0 < 1$, so folgt $R = |x_0| = |t_0 f(x_0)| < |f(x_0)|$ im Widerspruch zur Annahme $f : \overline{B} \to \overline{B}$. Also ist nach Satz IX.7 und IX.8

$$
\begin{aligned}
\deg(F(1,.),B,0) &= \deg(F(0,.),B,0),\\
&= \deg(id,B,0) = 1.
\end{aligned}
$$

   Nach Satz IX.5 existiert ein $x_0 \in B$ mit $F(1,x_0) = 0$, d.h. $x_0 = f(x_0)$.

2. Sei $\overline{B} \subset B_R(0)$. Sei $p : \overline{B_R(0)} \to B$ definiert durch: Jedem $x \in \overline{B_R(0)}$ wird derjenige Punkt $p(x) \in \overline{B}$ zugeordnet, für den $|p(x) - x| = \inf |y - x|$ ist. Dann ist $p(x) = x$ für $x \in \overline{B}$. Ist $x \in \overline{B_R(0)} - \overline{B}$, so gibt es wegen der Konvexität von $\overline{B}$ genau einen solchen Punkt $p(x) \in \partial B$. x liegt auf der äußeren Normalen auf ∂B in $p(x)$. p ist, da ∂B glatt ist, stetig differenzierbar. Die letzten 3 Aussagen beweisen wir hier nicht. Sei $i : \overline{B} \to \overline{B_R(0)}$ die Inklusionsabbildung. Dann ist $\widetilde{f} : \overline{B_R(0)} \to \overline{B_R(0)}$, $\widetilde{f} = iofop$ stetig differenzierbar in $\overline{B_R(0)}$ und hat nach Teil 1 dieses Beweises einen Fixpunkt $x_0 \in B_R(0)$, d.h. $\widetilde{f}(x_0) = x_0$. Also ist $x_0 \in B$, also $p(x_0) = x_0)$, also $f(x_0) = x_0$.

3. Der Satz gilt auch, wie angegeben, für stetiges f, doch beweisen wir dies hier gleich. $\square$

Wir behalten die Voraussetzungen an Ω bei und zeigen, wie man die Unternummern IX.2, IX.5, IX.6, IX.7, IX.8 und IX.9 auf nur stetige $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ verallgemeinert. Sei also $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Sei (f_k) eine Folge mit $f_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

$$f_k \to f \text{ in } C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), k \to \infty$$

Sei $0 \notin f(\partial\Omega)$. Dann ist auch $0 \notin f_k(\partial\Omega)$, $k \geq k_0$ und für ein $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} &|f_k| \geq 7\varepsilon, \\ &|f_k - f_l| \leq \varepsilon, \quad k, l \geq k_1. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung sei $k_0 = k_1$. Wegen IX.3 und IX.8 ist

$$\deg(f_k, \Omega, 0) = \text{ konstant } \in \mathbb{Z}, k \geq k_1.$$

Wir setzen

$$\deg(f, \Omega, 0) = \deg(f_k, \Omega, 0), k \geq k_1.$$

Aus IX.3 folgt auch, daß die Definition von $\deg(f, \Omega, 0)$ nicht von der Auswahl der approximierenden Folge (f_k) abhängt. Das entscheidende Hilfsmittel ist Lemma IX.3.

IX.10 Satz (Igelsatz): *Sei $B_1 = \{x | x \in \mathbb{R}^{2m+1}, |x| < 1\}$. Sei $S^{2m} = \partial B_1$. Sei $f \in C^0(S^{2m}, \mathbb{R}^{2m+1})$. Sei $f(x) \perp x$, $x \in S^{2m}$, d.h. f ist Tangentialfeld. Dann existiert ein $x_0 \in S^{2m}$ mit $f(x_0) = 0$ ("Jeder stetig gekämmte Igel hat einen Glatzpunkt").*

Beweis: Sei also $f \in C^0(S^{2m}, \mathbb{R}^{2m+1})$. Wir setzen f stetig auf $\overline{B}_1$ durch

$$H(x) = \begin{cases} (2|x| - 1) f(\frac{x}{|x|}) & \text{für } |x| \geq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

fort. Sei $F_\pm(t, x) = (1 - t)H(x) \pm tx$, $t \in [0, 1]$. Angenommen, für ein $x \in \partial B_1$ und ein $t \in [0, 1]$ sei $F_\pm(t, x) = 0$. Dann folgt zunächst für dieses x, daß $H(x) = f(x)$, also $(1 - t)f(x) \pm tx = 0$ ist. Skalarmultiplikation mit x liefert $\pm t|x|^2 = \pm t = 0$, also $H(x) = f(x) = 0$. Demnach können wir uns auf den Fall

$$F_\pm(t, x) \neq 0, t \in [0, 1], x \in \partial B_1$$

beschränken und erhalten mit Satz IX.7 die Gleichungen

$$\begin{gathered} \deg(F_\pm(1, .), B_1, 0) = \deg(F_\pm(0, .), B_1, 0) = \deg(H, B_1, 0) \\ {''} \\ \deg(\pm id, B_1, 0) = \int_{B_1} \varphi(|x|) \det(\pm E) dx = \pm 1, \end{gathered}$$

da die Raumdimension ungerade ist. Also ist

$$\deg(H, B_1, 0) = 1 \text{ und } \deg(H, B_1, 0) = -1$$

und nach dem ersten Teil des Beweises gibt es ein $x_0 \in S^{2m}$ mit $f(x_0) = 0$. $\square$

IX.11 Lemma: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie oben, $f \in C^0(\mathbb{R} \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ und lokal Lipschitzstetig bezüglich $x \in \Omega$. Wir betrachten das System $x' = f(t, x)$ für Anfangswerte $x_0 \in K \subset \Omega$, K kompakt. Sei $0 < T < t_+(x_0)$, $x_0 \in K$. Dann ist die Funktion*

$$F(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{t}(x(t, 0, y) - y), t > 0 \\ f(0, y), t = 0 \end{cases}$$

stetig auf $[0, T] \times K$.

Beweis: Für $t > 0$ ist wegen der stetigen Abhängigkeit von den Anfangswerten nichts zu beweisen (siehe Folgerung I.7.8). Sei also $(t_j, y_j) \to (0, y_0)$, $j \to \infty$, in $[0, T] \times K$. Sei $t_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|F(t_j,y_j)-f(0,y_0)| &= |\frac{1}{t_j}(x(t_j,0,y_j)-y_j)-f(0,y_0)|,\\
&= |\frac{1}{t_j}\int_0^{t_j} x'(\sigma,0,y_j)d\sigma - f(0,y_0)|\\
&= |\frac{1}{t_j}\int_0^{t_j} (f(\sigma,x(\sigma,0,y_j))-f(0,y_0))d\sigma| \to 0 \text{ für } t_j\to 0, y_j\to y_0.
\end{aligned}$$

□

IX.12 Satz: *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ wie oben, $f\in C^0(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$ wie in IX.11. Sei f $T-$periodisch bezüglich t. Sei $U\subset\Omega$ offen, beschränkt und mit glattem Rand ∂U. Sei $\overline{U}\subset\Omega$ und $T<t_+(x_0)$ für $x_0\in\overline{U}$. Ferner gelte*

1. *$x_0\in\partial U$ habe zur Folge, daß $x(t,0,x_0)\neq x_0$ für $t, 0<t\leq T$, d.h. es gibt keine $t-$periodische Lösung, die auf ∂U startet,*
2. *$f(0,x_0)\neq 0$ auf ∂U,*
3. *$\deg(f(0,.),U,0)\neq 0$.*

Dann gibt es eine $T-$periodische Lösung in $\overline{U}$.

Beweis: Wir wollen Lemma IX.11 anwenden. F liefert die Homotopie. Nach Forderung 1. und Forderung 2. ist $F(t,y)\neq 0$ auf $[0,T]\times\partial U$. Satz IX.7 zeigt dann, daß

$$\deg(\frac{1}{T}(x(T,0,.)-id)U,0)=\deg(f(0,.),U,0)\neq 0$$

ist, und aus Satz IX.5 folgt, daß es ein $y\in U$ gibt mit

$$x(T,0,y)=y.$$

□

Das Problem besteht jetzt in der Verifikation der Bedingungen des Satzes IX.12.

IX.13 Lemma: *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ wie oben, $f\in C^0(\mathbb{R}\times\Omega,\mathbb{R}^n)$ wie in IX.11. Sei f $T-$periodisch bezüglich t. Sei $V\in C^1(\Omega)$ und für ein $\alpha\in\mathbb{R}$ sei $U_\alpha=U=\{x|V(x)<\alpha\}$ mitsamt seines Abschlusses $\overline{U}=\{x|V(x)\leq\alpha\}$ in Ω enthalten und besitze den Rand $\partial U=\{x|V(x)=\alpha\}$. Ist $\dot V<0$ auf $[0,T]\times\partial U$, so gilt: Für $x_0\in U$ ist $t_+(x_0)>T$ und für $x_0\in\partial U$ ist $x(t,0,x_0)\neq x_0$, $0<t\leq T$, d.h. 1. in Satz IX.12 gilt.*

Beweis: Wir wenden einen Kunstgriff an: Sei $\widehat{x}=\binom{t}{x}$, also $\widehat{x}'(s)=\widehat{f}(\widehat{x}(s))$ mit $\widehat{f}=\binom{1}{f}$, und das neue System ist autonom. Sei $\widehat{V}(\widehat{x})=V(x)$. Dann ist $\dot{\widehat{V}}=\langle\nabla\widehat{V},\widehat{f}\rangle=\langle\nabla V,f\rangle=\dot V<0$ auf $[0,T]\times\partial U$. Insbesondere ist $\dot{\widehat{V}}<0$ auf $\partial\widehat{U}$, wenn $\widehat{U}=\{\widehat{x}|\widehat{x}=(t,x)\in[0,T]\times U\}=\{\widehat{x}|\widehat{x}=(t,x),\widehat{V}(\widehat{x})<\alpha\}$. Nach Satz VII.12, Seite 61 und der Bemerkung auf Seite .... ist $\widehat{U}$ invariant, d. h. insbesondere, $\widehat{x}(s,0,\widehat{x}_0)$ existiert für alle s, falls $\widehat{x}_0=\binom{0}{x_0}\in\overline{\widehat{U}}$. $x(t,0,x_0)$ existiert also für alle t, d.h. mindestens für $t\in[0,T]$. Weiter ist $\dot{\widehat{V}}<0$ auf $[0,T]\times$ Umgebung (∂U). Ist $V(x_0)=\alpha$, d.h. $x_0\in\partial U$, so erreicht also $x(t,0,x_0)$ den Rand ∂U nicht mehr, denn wäre $x(\widetilde{t},0,x_0)$ ein Punkt auf ∂U, so wäre $x(\sigma,0,x_0)$ in einer Umgebung (∂U), $\widetilde{t}-\varepsilon\leq\sigma\leq\widetilde{t}$ mit $\varepsilon>0$, also

$$\begin{aligned}
\alpha=V(x(\widetilde{t},0,x_0)) &= V(x(\widetilde{t}-\varepsilon,0,x_0))+\int_{\widetilde{t}-\varepsilon}^{\widetilde{t}}\underbrace{\dot V(x(\sigma,0,x_0))}_{<0}d\sigma,\\
&< V(x(\widetilde{t}-\varepsilon,0,x_0)).
\end{aligned}$$

Wegen $\dot V<0$ auf $[0,T]\times\partial U$ ist $V(x(t,0,x_0))<\alpha$, $0<t<\delta$ mit $\delta>0$ und wir können annehmen, daß $\widetilde{t}$ der erste Zeitpunkt nach 0 ist, zu dem $V(x(t,0,x_0))=\alpha$ wird. Dann ist $V(x(\widetilde{t}-\varepsilon,0,x_0))<\alpha$ und wir erhalten einen Widerspruch. □

IX.14 Satz: *Seien $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ wie oben, $h,f\in C^0(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $\langle h,f\rangle<0$ auf $\partial\Omega$. Dann ist*

$$\deg(h,\Omega,0)=\deg(f,\Omega,\Omega)\cdot(-1)^n$$

Beweis: Sei $F(t,x)=th(x)-(1-t)f(x), t\in[0,1]$. Für $x\in\partial\Omega$ ist $\langle F(t,x),f(x)\rangle=t\langle h(x),f(x)\rangle-(1-t)|f(x)|^2<0$ für alle $t\in[0,1]$. Also ist $F(t,x)\neq 0$ auf $[0,1]\times\partial\Omega$. Aus Satz IX.7 folgt

$$\deg(h,\Omega,0)=\deg(-f,\Omega,0).$$

Approximieren wir $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, im Raum $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ durch $f_k \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, so sehen wir aus Definition IX.1, daß

$$\deg(-f, \Omega, 0) = (-1)^n \deg(f, \Omega, 0)$$

ist. $\square$

Das Ziel ist $\deg(\nabla g, \Omega, 0) \neq 0$ für geeignete Funktionen g. Hierzu gilt

IX.15 Lemma: *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie oben, $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$, $W_\beta = W = \{x | x \in \overline{\Omega}, g(x) < \beta\}$ und $\overline{W} \subset \Omega$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$. Ferner sei $x < \beta$ und $\{x | x \in \overline{\Omega}, g(x) \leq \alpha\} \subset \overline{B_r(x_0)} \subset W$ für ein $x_0 \in \Omega$. Außerdem sei $\nabla g \neq 0$ auf $\{x | x \in \overline{\Omega}, \alpha \leq g(x) \leq \beta\}$. Dann ist*

$$\deg(\nabla g, w, 0) = 1.$$

Beweis:

A. Wir wählen $\gamma \in (\alpha, \beta)$ mit $\overline{B_r(x_0)} \subset \{x | x \in \overline{\Omega}, g(x) < \gamma\}$. Sei $\rho = \min\{|\nabla g(x)| | x \in \overline{\Omega}, \alpha \leq g(x) \leq \beta\}$. Dann ist nach Voraussetzung $\rho > 0$. Wir wählen eine in einer Umgebung von $\overline{W}$ einmal stetig differenzierbare Vektorfunktion h derart, daß in $\overline{W}$ gilt: $|h - \nabla g| \leq \frac{\rho}{2}$. Dann ist

$$\frac{\rho}{2} \geq |h - \nabla g| \geq |\nabla g| - |h| \geq \rho - |h|, \alpha \leq g(x) \leq \beta,$$

$$|h| \geq \frac{\rho}{2}, \alpha \leq g(x) \leq \beta.$$

Durch $F(t, x) = th(x) + (1 - t)\nabla g(x), (t, x) \in [0, 1] \times \overline{W}$, führen wir eine Homotopie ein. Es ist $|th + (1 - t)\nabla g| \geq |\nabla g| - t|h - \nabla g| \geq \frac{\rho}{2} > 0$ auf $[0, T] \times \partial W$, also

$$\deg(\nabla g, W, 0) = \deg(h, W, 0)$$

2. Wir betrachten die Differentialgleichung $x' = -h(x)$. Sei $V(x) := g(x) - \gamma$. Dann ist $\dot{V} = \langle \nabla g, -h \rangle$ und $\langle \nabla g, -h \rangle = \langle \nabla g, -h + \nabla g - \nabla g \rangle = -|\nabla g|^2 + \langle \nabla g, \nabla g - h \rangle$, also

$$\begin{aligned} \dot{V} = \langle \nabla g, -h \rangle &\leq |\nabla g|(\frac{\rho}{2} - |\nabla g|) \leq -\frac{\rho}{2}|\nabla g| \\ &\leq -\frac{\rho^2}{2} < 0 \text{ auf } \{x | x \in \overline{\Omega}, \alpha \leq g(x) \leq \beta\} \end{aligned}$$

Nach VII.12, Seite 61, und der Bemerkung auf Seite ..... ist $C_\gamma := \{x | x \in \overline{\Omega}, g(x) \leq \gamma\}$ invariant für $x' = -h(x)$, und es gilt für $y \in \partial C_\gamma$ sogar: $x(t, 0, y) \in C_\gamma$ für $t > 0$. Wäre stets $g(x(t, 0, y)) > \alpha$, dann folgte

$$\begin{aligned} g(x(t,0,y)) - g(y) &= V(x(t,0,y)) - V(y) = \int_0^t \dot{V}(x(\sigma,0,y))d\sigma \\ &\leq -\frac{\rho^2}{t}, \\ g(x(t,0,y)) &\leq \gamma - \frac{\rho^2}{2}t, \end{aligned}$$

und dies ist ein Widerspruch für $t > T_0 = \frac{2(\gamma - \alpha)}{\rho^2}$. Also existiert ein $\tilde{t} > T_0$ mit $g(x(\tilde{t}, 0, y)) \leq \alpha$. Dann ist jedoch

$$g(x(t, 0, y)) \leq \alpha, t \geq \tilde{t},$$

da $\dot{V} < 0$ auf $\alpha \leq g(x) \leq \beta$ ist.

C. Wir betrachten die Homotopie

$$F(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{t}(y - x(t, 0, y)), T_0 \geq t > 0, \\ h(y), t = 0, \end{cases}$$

die nach Lemma IX.11 stetig auf $[0, T] \times C_\gamma$ ist. Nach A. und B. ist $F(t, y) \neq 0$ auf $[0, T_0] \times \partial C_\gamma$. Weiter ist $h \neq 0$ auf $\overline{W} - C_\gamma$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \deg\left(\frac{id - x(T_0, 0, .)}{T_0}, C_\gamma, 0\right) &= \deg(h, C_\gamma, 0), \\ &= \deg(h, W, 0). \end{aligned}$$

D. Wir betrachten die folgende Homotopie:

$$\begin{aligned} G(t,y) &: [0,1]\times C_\gamma \to \mathbb{R}^n \text{ mit} \\ G(t,y) &= (1-t)F(T_0,y)+t(y-x_0)\frac{1}{T_0}, \\ &= \frac{1}{T_0}[y-((1-t)\times(T_0,0,y)+tx_0)]. \end{aligned}$$

Es ist $|y-x_0|>r$ für $y\in\partial C_\gamma$, und es bedeutet keine Einschränkung, $T_0=2(\gamma-\alpha)/\rho^2$ durch $T_0=2(\gamma-\alpha)/\rho^2+1$ zu ersetzen. Dann ist $x(T_0,0,y)\in\{x|x\in\overline{\Omega}, g(x)<\alpha\}$ für $y\in C_\gamma$ und

$$|x(T_0,0,y)-x_0|<r.$$

Für $t\in[0,1]$, $y\in\partial C_\gamma$ folgt

$$|G(t,y)|\geq\frac{1}{T_0}[|y-x_0|-|x(T_0,0,y)-x_0|]>0,$$

also

$$\deg\left(\frac{id-x(T_0,0,.)}{T_0},C_\gamma,0\right)=\deg\left(\frac{id-x_0}{T_0},C_\gamma,0\right)=1$$

nach Satz IX.8. Mit den letzten beiden Gleichungen aus Beweisschritt C. folgt die Behauptung. □

IX.16 Korollar zu Lemma IX.15: *Sei $g\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $g(x)\to\infty$ für $|x|\to\infty$, $|\nabla g(x)|\neq 0$ für $|x|\geq r_0$. Dann ist*

$$\deg(\nabla g,B_r(0),0)=1 \text{ für } r\geq r_0.$$

Beweis: Sei $\alpha=\max g(x)$, $\widetilde{r}=\max\{|x||g(x)\leq\alpha\}$. Dann ist $\infty>\widetilde{r}\geq r_0$, denn wäre $\widetilde{r}<r_0$, so $\exists x'$ mit $\widetilde{r}<|x'|<r_0$ und $g(x)>\alpha$, Widerspruch. Sei $\beta>\frac{\max}{B\widetilde{r}(0)}g$. Mit $\Omega=\mathbb{R}^n$, $W=\{x|x\in\mathbb{R}^n,g(x)<\beta\}$ ist $\overline{W}\subset\Omega$, $\alpha<\beta$, $\{x|x\in\mathbb{R}^n,g(x)\leq\alpha\}\subset\overline{B_{\widetilde{r}}(0)}\subset W$ und wegen $\widetilde{r}\geq r_0$ ist $\nabla g\neq 0$ auf $\{x|x\in\mathbb{R}^n,\alpha\leq g(x)\leq\beta\}$. Nach Lemma IX.15 ist $\deg(\nabla g,W,0)=1$. Wegen $\nabla g\neq 0$ auf $W-B_{r_0}(0)$ folgt mit Satz IX.6 daß

$$\deg(\nabla g,B_r(0),0)=1, r\geq r_0.$$

□

IX.17 Satz (Krasnoselskij): *Sei $f\in C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $T-$periodisch bezüglich t, lokal Lipschitzstetig bezüglich $x\in\mathbb{R}^n$. Sei $V\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ mit $\dot{V}(t,x)<0$ für $|x|\geq r_0>0$, $t\in[0,T]$. Sei $V(x)\underline{\to\infty}$ für $|x|\to\infty$ oder $V(x)\to-\infty$ für $|x|\to\infty$. Dann hat $x'=f(t,x)$ eine $T-$periodische Lösung in $\overline{B_r(0)}$ mit $r=\max\{|x||V(x)\leq\frac{\max}{B_{r_0}(0)}V\}$.*

Beweis: Falls $V(x)\to+\infty$ für $|x|\to\infty$, wollen wir Satz IX.12 anwenden. Es sei

$$U=\{x|x\in\mathbb{R}^n,V(x)<\alpha\},\alpha=\frac{\max}{B_{r_0}(0)}V$$

U ist offen und beschränkt wegen unserer Annahme über V. Aus demselben Grund ist $\overline{U}=\{x|x\in\mathbb{R}^n,V(x)\leq\alpha\}\subset\mathbb{R}^n$. Auf ∂U ist $V(x)=\alpha$ und umgekehrt. Also ist $\overline{B_{r_0}(0)}\subset\overline{U}$. Sei $\widetilde{x}\in\partial U\cap B_{r_0}(0)$. Dann existieren ein $B_\varepsilon(\widetilde{x})\subset B_{r_0}(0)$ und ein $y\in B_\varepsilon(\widetilde{x})$ mit $V(y)>\alpha$, Widerspruch. Demnach ist $|x|\geq r_0$ auf ∂U und $\dot{V}(t,x)<0$. Nach Lemma IX.13 ist 1. in Satz IX.12 erfüllt. Insbesondere ist $\dot{V}(t,x)=\langle\nabla V(x),f(t,x)\rangle<0$ für $x\in\partial U$, $t\in[0,T]$, und $f(0,x_0)\neq 0$, $x_0\in\partial U$. Also ist IX.12, 2. erfüllt.

Weiter haben wir nach Satz IX.14

$$\begin{aligned} &\deg(f(0,.),U,0) &&= (-1)^n\deg(\nabla V,U,0), \\ \text{also}\quad &\deg(f(0,.),U,0) &&= (-1)^n\deg(\nabla V,B_{r_0}(0),0) \text{ wegen } \nabla V\neq 0 \text{ auf } U-B_{r_0}(0), \\ & &&= (-1)^n \text{nach IX.16.} \end{aligned}$$

Nach Satz IX.12 gibt es eine $T-$periodische Lösung in $\overline{U}$. Mit $\overline{U}\subset\overline{B_r(0)}$ folgt die Behauptung im Fall $V(x)\to+\infty$ für $|x|\to\infty$. Im anderen Fall setze man $\widetilde{V}=-V$, $\widetilde{f}(t,x)=-f(-t,x)$. Dann gibt es nach dem bereits bewiesenen Teil eine $T-$periodische Lösung x von $x'=\widetilde{f}(t,x)$. Also ist $y(t)=x(-t)$ $T-$periodische Lösung von $y'=f(t,y)$. □

IX.18 Beispiel: $y'' + g'(y)y' + by = h(t)$ mit $b > 0$, $g(y)y > 0$, h $T-$periodisch. Sei

$$\begin{array}{lll} x_1 := y, & \Rightarrow & x_1' = x_2 - g(x_1), \\ x_2 := g(y) + y', & \Rightarrow & x_2' = h(t) - bx_1. \end{array}$$

Sei $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} < \min\{b, 1\}$,

$$V(x) = bx_1^2 - \varepsilon x_1 x_2 + x_2^2, \text{ also } V(x) \geq (b - \frac{\varepsilon}{2})x_1^2 + (1 - \frac{\varepsilon}{2})x_2^2 \to +\infty \text{ für } |x| \to \infty.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &= (2bx_1 - \varepsilon x_2)(x_2 - g(x_1)) + (2x_2 - \varepsilon x_1)(h(t) - bx_1), \\ &= -\varepsilon x_2^2 - 2bx_1 g(x_1) + 2bx_1x_2 + \varepsilon x_2 g(x_1) + \varepsilon b x_1^2 + h(t)(2x_2 - \varepsilon x_1) - 2bx_1x_2. \end{aligned}$$

Zusatzvoraussetzungen: $g(y)y \geq \delta y^2$ mit einem $\delta > 0$, $|g(y)| \leq A|y|$ mit einem $A \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \dot{V}(t,x) &\leq -2b\delta x_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}x_2^2 + \frac{\varepsilon}{2}g(x_1)^2 + \varepsilon b x_1^2 + |h|(2|x_2| + \varepsilon|x_1|), \\ &\leq (\varepsilon(b + \frac{A^2}{2}) - 2b\delta)x_1^2 - \frac{\varepsilon}{2}x_2^2 + |h|(2|x_2| + \varepsilon|x_1|), \\ &< 0 \text{ für } \varepsilon > 0 \text{ klein und } |x| \geq R = R(\varepsilon). \end{aligned}$$

Eine Verallgemeinererung auf den Fall $|g(y)| \leq A|y| + B|y|^{3/2}$ ist möglich, wenn B geeignet ist. Wir wenden IX.17 an mit $r_0 = R$.

Falls man keine, wie man auch sagt, Leitfunktionen V findet, kann man versuchen, Fixpunktsätze in Banachräumen anzuwenden.

Sei $T > 0$,

$$C_T = \{y | y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), y\ T - \text{periodisch}\}.$$

Dann ist C_T ein Banachraum, wenn wir als Norm $||y|| = \max_{\substack{0 \leq t \leq T \\ i=0,1}} |y^{(i)}(t)|$ zu Grunde legen. Wir betrachten i.f. das Problem $y'' = g(t, y, y')$ mit g T periodisch und geeignet regulär.

Ohne Beweis geben wir das folgende Ergebnis an:

IX.19 Satz: *Wir betrachten die Probleme*

$$(P_\lambda) \qquad\qquad y'' = \lambda g(t, y, y'), \lambda \in (0, 1]$$

mit g wie eben eingeführt. Sei $D \subset C_T$ offen und beschränkt. Es gelte

i) Ist y eine $T-$periodische Lösung von P_λ, so ist $y \notin \partial D$

ii) Sei $g_0(a) := \frac{1}{T}\int_0^T g(t, a, 0)dt$. Ist $g_0(a) = 0$, so ist $a(t) :\equiv a \notin \partial D$

iii) Für $\widetilde{D} = \{a | a \in \mathbb{R}, a(t) \equiv a \in D\}$ ist $\deg(g_0, \widetilde{D}, 0) \neq 0$ ($\widetilde{D}$ ist offen und beschränkt).

Dann hat P_1 eine $T-$periodische Lösung in D.

IX.20 (Anwendung des Satzes IX.19): *Sei g wie eben eingeführt. Sei*

a) *$g(t, -M, 0) < 0 < g(t, M, 0)$ für ein $M > 0$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.*

b) *$|g(t, y, z)| \leq \Phi(|z|)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, für alle y mit $|y| \leq M$ und alle $z \in \mathbb{R}$ und mit einer Funktion $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die*

$$\int_0^\infty \frac{\sigma d\sigma}{\Phi(\sigma)} = \infty$$

sei.

Dann gibt es eine $T-$periodische Lösung y von $y'' = g(t, y, y')$ mit $|y(t)| \leq M$.

Beweis:

A. Sei $y(t)$ eine $T-$periodische Lösung von P_λ. Sei $y(t_0)^2 = \sup_{t\in[0,T]} y(t)^2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} y(t)^2$. Also ist $2y(t_0)y'(t_0) = 0,\ 2(y'(t_0))^2 + 2y(t_0)y''(t_0) \le 0$. Ohne Einschränkung sei $y(t_0) \neq 0$. Dann ist $y'(t_0) = 0$ und $y(t_0)g(t_0, y(t_0), 0) \le 0$. Also ist $|y(t_0)| \neq M$ nach Voraussetzung, also $\sup_{t\in[0,T]} |y(t)| \neq M$.

B. Aus Voraussetzung b) folgt, daß eine $T-$periodische Lösung von P_λ mit $|y(t)| \le M$ auch $|y'(t)| \le C(M)$ erfüllt. Siehe hierzu [Hartmann, ODE, 1964]. Wir zeigen dies für den Spezialfall $\Phi(|z|) \le K$. Es ist

$$y(T) - y(t) = (T-t)y'(t) + \frac{1}{2}(T-t)^2 y''(\xi),$$

$$y(0) - y(t) = -ty'(t) + \frac{1}{2}t^2 y''(\xi').$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} y(T) - y(0) &= Ty'(t) + \frac{1}{2}(T-t)^2 y''(\xi) - \frac{1}{2}t^2 y''(\xi'), \\ y'(t) &= \frac{1}{T}(y(T) - y(0)) + \frac{1}{T}(\frac{t^2}{2}y''(\xi') - \frac{(T-t)^2}{2}y''(\xi)), \\ |y'(t)| &\le \frac{1}{T}2M + KT =: C(M). \end{aligned}$$

Sei $D = \{y | y \in C_T, \sup_{t\in[0,T]} |y(t)| < M, \sup_{t\in[0,T]} |y'(t)| < C(M)+1\}$. Dann ist D offene und beschränkte Teilmenge von C_T. Ist $y \in \partial D$, so ist $\sup_{t\in[0,T]} |y(t)| = M$ oder $\sup_{t\in[0,T]} |y'(t)| = C(M)+1$. Demnach ist IX.19 i) erfüllt. Sei $a(t) \equiv a \in \partial D$. Dann ist $a \in \{-M, M\}$. Nach Voraussetzung a) ist $g_0(\pm M) \neq 0$. Also ist Voraussetzung ii) in IX.19 erfüllt. Es ist $id(x) \cdot g_0(x) > 0$ für $x \in \partial\widetilde{D} = \{-M, M\}$. Damit folgt nach Satz IX.14 die Gleichung

$$\deg(g_0, \widetilde{D}, 0) = \deg(-id, \widetilde{D}, 0)(-1)^1 = (-1)^2 = 1.$$

Also ist auch iii) in IX.19 erfüllt. Aus IX.19 folgt die Behauptung. □

IX.21 Variante für

$$\begin{aligned} &y'' + \lambda\frac{d}{dt}(G'(y)) + \lambda by = \lambda f(t) \text{ mit } b \neq 0, \\ &G(y) = \hat{a}y^{2p} + \widetilde{G}(y), |\widetilde{G}'(y)| \le c_1|y|^{2p-2} + c_2 \\ &\text{und Konstanten } p \in \mathbb{N}, \hat{a} > 0, c_1, c_2 \ge 0, \lambda \in (0,1] \text{ wie vorher.} \end{aligned}$$

Speziell ist $p = 2$, $G(y) = \frac{\widetilde{c}}{12}y^4 - \frac{\widetilde{a}}{2}y^2$ mit positiven Konstanten $\widetilde{c}, \widetilde{a}$ zulässig. Dies führt auf $G'(y) = \frac{\widetilde{c}}{3}y^3 - \widetilde{a}y$ und damit auf die van der Pol-Gleichung

$$y'' + (\widetilde{c}y^2 - \widetilde{a})y' + by = f \ (a = \widetilde{c})$$

(für $\lambda = 1$). Von f setzen wir voraus: f ist $T-$periodisch und $\int_0^T f(s)ds = 0$. Wir zeigen nun, daß IX.19 i), ii) und iii) gelten. Es ist $g(t, y, y^0) = f(t) - by - G''(y)y'$, also

$$g_0(a) = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t) - ba)dt.$$

$g_0(\pm a) \neq 0$ für $|a|$ groß. Insbesondere ist auch $g(t, \pm M, 0) \neq 0, t \in \mathbb{R}$,

$$sign g(t, M, 0) \neq sign g(t, -M, 0),$$

wenn $M > 0$ groß ist. Nun haben wir zu beweisen, daß für $T-$periodische Lösungen $y(t)$ stets $|y(t)| \le M$, $|y'(t)| \le C(M)$ ist in $[0,T]$. M.a.W.: A-priori Abschätzungen liefern, daß keine periodischen Lösungen auf ∂D liegen, wenn die offene beschränkte Menge D geeignet gewählt wird. Sei also $y \in C_T$ Lösung von $y'' + \lambda\frac{d}{dt}(G'(y)) + \lambda by = \lambda f(t)$ mit $b \neq 0$, $\lambda \in (0,1]$. Dann ist $\int_0^T y'' d\sigma = 0$, $\int_0^T \frac{d}{dt}(G'(y))d\sigma = 0$, $\int_0^T f d\sigma = 0$. Daraus folgt

$$\int_0^T y d\sigma = 0.$$

Sei $Y(t) = \int_0^t y(\sigma)d\sigma - \frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_0^u y(\sigma)d\sigma\right) du$. Dann ist

$$Y(T) = -\frac{1}{T}\int_0^T \left(\int_0^u y(\sigma)d\sigma\right) du = Y(0)$$

$$\int_0^T Y(\sigma)d\sigma = 0, Y'(t) = y(t).$$

Nun multiplizieren wir $y'' = \lambda \frac{d}{dt}(G'(y)) + \lambda b y = \lambda f(t)$ mit $Y(t)$ und integrieren von 0 bis T. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\int_0^T y'' Y d\sigma &= -\int_0^T y'Y' d\sigma + [y'Y]_0^T, \\
&= -\int_0^T y'Y' d\sigma = -\int_0^T y'y d\sigma = -\frac{1}{2}\int_0^T (y^2)' d\sigma = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{d}{dt}(G'(y)) Y d\sigma = -\int_0^T G'(y) y d\sigma, \\
&\int_0^T b y Y d\sigma = b \int_0^T Y'Y d\sigma = \frac{1}{2} b (Y^2(T) - Y^2(0)) = 0, \\
\text{also} \quad &+\int_0^T fY d\sigma = -\int_0^T G'(y) y d\sigma, \hat{a}2p \int_0^T y^{2p} d\sigma \leq \int_0^T (c_1|y|^{2p-1} + c_2|y|) d\sigma + |\int_0^T fY d\sigma|, \\
&\leq \int_0^T (c_1|y|^{2p-1} + c_2|y|) d\sigma + c(T) \sup_{[0,T]} |Y|.
\end{aligned}$$

Als Einschub behandeln wir nun eine Abschätzung für Funktionen $w \in C^1([0,T], \mathbb{R})$, mit $\int_0^T w(\sigma) d\sigma = 0$. Dann ist $w(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in [0,T]$ und

$$w(s)^2 = (w(s) - w(t_0))^2 = (\int_s^{t_0} w'(\sigma) d\sigma)^2 \leq (\int_0^T w'(\sigma)^2 d\sigma) T$$

□

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{a}2p \int_0^T y^{2p} d\sigma &\leq \int_0^T (c_1|y|^{2p-1} + c_2|y|) d\sigma + \sqrt{T} C(T) (\int_0^T |y|^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq \widetilde{c}_1 (\int_0^T |y|^{2p} d\sigma)^{\frac{2p-1}{2p}} + \widetilde{c}_2 (\int_0^T |y|^{2p} d\sigma)^{\frac{1}{2p}} + \widetilde{c}_3 (\int_0^T |y|^{2p} d\sigma)^{\frac{1}{2p}}, \\
&\quad \widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(T), i = 1,2,3;
\end{aligned}$$

Mit $z = (\int_0^T |y|^{2p} d\sigma)^{\frac{1}{2p}}$ heißt das

$$\begin{aligned}
&z^{2p} \leq \widetilde{\widetilde{c}}_1 z^{2p-1} + \widetilde{\widetilde{c}}_2 z, \widetilde{\widetilde{c}}_i = \widetilde{\widetilde{c}}_i(T), i = 1,2, \\
&z \leq K_1, \int_0^T |y|^{2p} d\sigma \leq K_1, \int_0^T |y|^2 d\sigma \leq K_1, K_1 = K(T).
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit y und integrieren von 0 bis T. Es ist $(y \in C_T)$

$$\int_0^T \partial_t (G'(y)) y d\sigma = -\int_0^T G'(y) y' d\sigma = -\int_0^T \partial_t (G(y)) d\sigma = 0,$$

also wegen $y \in C_T$

$$\int_0^T |y'|^2 d\sigma \leq \hat{c}_1 (\int_0^T |y|^2 d\sigma + \int_0^T |f||y| d\sigma), \hat{c}_1 = \hat{c}(T).$$

Mit dem Einschub folgt $|y(T)| \leq K_2 = K_2(T), 0 \leq t \leq T$. Nun multiplizieren wir die Differentialgleichung mit y'' und integrieren. Es folgt

$$\int_0^T |y''|^2 d\sigma + \lambda \int_0^T \partial_t (G'(y)) y'' d\sigma + \lambda b \int_0^T y y'' d\sigma = \int_0^T \lambda f y'' d\sigma,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T |y''|^2 d\sigma &\leq \hat{c}_2 (\int_0^T |y''| d\sigma + \int_0^T |y'||y''| d\sigma), \hat{c}_2 = \hat{c}_2(T, K_2) \\
&\leq \hat{c}_3 [(\int_0^T |y''| d\sigma)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^T |y'|^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T |y''|^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}], \hat{c}_3 = \hat{c}_3(T, K_2) \\
&\leq \hat{c}_4 (\int_0^T |y''| d\sigma)^{\frac{1}{2}}, \hat{c}_4 = \hat{c}_4(T, K_2, \int_0^T |y'|^2 d\sigma)
\end{aligned}$$

Da $y \in C_T$ ist, ist $\int_0^T y'(\sigma)d\sigma = 0$. Mit dem Einschub folgt

$$|y'(t)| \leq \hat{c}_5 = \hat{c}_5(T, K_2, \int_0^T |y'|^2 d\sigma), 0 \leq t \leq T.$$

Mit der bereits gewonnenen Abschätzung für $\int_0^T |y'|^2 d\sigma$ erhalten wir

$$|y'(t)| \leq K_3, K_3 = K_3(K_2), 0 \leq t \leq T.$$

Man wird also $M = K_2 + 1$,

$$D = \{y | y \in C_T, \sup_{t \in [0,T]} |y(t)| < M, \sup_{t \in [0,T]} |y'(t)| < K_3(M) + 1\},\ C(M) = K_3(M)$$

wählen. Damit liegt keine $T-$periodische Lösung von P_λ auf ∂D. Verlangen wir auch noch, daß $M > \frac{1}{T|b|} \int_0^T |f(\sigma)| d\sigma$ ist, so gelten außer IX.19 i) auch IX.19 ii). Mit derselben Methode wie im Beweis von IX.20 zeigt man IX.19 iii).

IX.22 Variante für $y'' + \lambda(cy' + h(y)) = \lambda f(t)$ ***unter den folgenden Voraussetzungen:*** $c \neq 0$, $sign(h(y)y) = const \neq 0$ für $|y| \geq \mathbb{R}_1$ und f $T-$periodisch, $\int_0^T f(\sigma)d\sigma = 0$. Der Parameter λ variiert wieder in $(0, 1]$. Wir wollen wieder die Existenz einer $T-$periodischen Lösung $y \in C_T$ zeigen und benötigen dazu entsprechende a-priori Abschätzungen. Wir multiplizieren mit y' und integrieren von 0 bis T. Dann folgt

$$\int_0^T y''y' d\sigma = 0, \int_0^T h(y)y' d\sigma = 0,$$
$$|c| \int_0^T y'^2(\sigma) d\sigma = |\int_0^T fy' d\sigma| \leq c_1 T (\int_0^T |y'|^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}},$$
$$\int_0^T y'^2(\sigma) d\sigma \leq c_2, c_2 = c_2(T).$$

Sei $n(s) = y(s) - \frac{1}{T}\int_0^T y(\sigma)d\sigma$. Dann ist $\int_0^T n(\sigma)d\sigma = 0$, und es gibt ein $t_0 \in [0, T]$ mit $n(t_0) = 0$. Also ist $|n(t)| = |n(t) - n(t_0)| = |\int_{t_0}^t n'(\sigma)d\sigma| \leq c_3, c_3 = c_3(c_2, T)$. Nun integrieren wir die Gleichung von 0 bis T. Dann folgt:

$\int_0^T h(y)d\sigma = 0$, also existiert $t_1 \in [0, T]$ mit $h(y(t_1)) = 0$ und $|y(t_1)| < R_1$, da sich sonst ein Widerspruch zur Voraussetzung ergibt. Also ist

$$|\frac{1}{T}\int_0^T y(\sigma)d\sigma| = |n(t_1) - y(t_1)| \leq c_3 + R_1,$$

$$|y(t)| \leq |n(t)| + |\frac{1}{T}\int_0^T y(\sigma)d\sigma| \leq 2c_3 + R_1, 0 \leq t \leq T.$$

Nun multiplizieren wir die Differentialgleichung mit y'' und integrieren von 0 bis T. Dann ist $\int_0^T y'y'' d\sigma = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^T |h(y)||y''| d\sigma &\leq c_4(c_2, c_3, T) \cdot (\int_0^T y''^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}, \\ \int_0^T |f||y''| d\sigma &\leq c_4(c_2, T) \cdot (\int_0^T y''^2 d\sigma)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

also

$$\int_0^T y''^2 d\sigma \leq c_5(c_2, c_3, T) \text{ und wegen } \int_0^T y' d\sigma = 0 \text{ auch}$$
$$|y'(t)| \leq c_6(c_2, c_3, T), 0 \leq t \leq T.$$

Damit ist klar, wie D in IX.19 i) zu wählen ist. Es ist

$$g_0(a) = \frac{1}{T}\int_0^T g(t, a, 0) = \frac{1}{T}\int_0^T h(\sigma)d\sigma - h(a) = -h(a) (\neq 0 \text{ für } |a| \geq R_1)$$

und IX. ii) erfüllt. Zu IX.19 iii): Wir haben

$$\deg(g_0, \widetilde{D}, 0) = \deg(-h, B_{R_1}(0), 0).$$

Mit $\widetilde{y}$ fest, $|\widetilde{y}| \geq \mathbb{R}_1$, $F(t,x) = th(x) + (1-t) \underbrace{sign(h(\widetilde{y})\widetilde{y})}_{=\pm 1 \text{ für } |\widetilde{y}| \geq R_1} x, 0 \leq t \leq 1, |x| \leq R_1$ folgt

$$\deg(g_0, \widetilde{D}, 0) = \deg(-sign(h(\widetilde{y})\widetilde{y})id, B_{R_1}(0), 0) = -signh(\widetilde{y})\widetilde{y} \neq 0.$$

X. Aspekte der Verzweigungstheorie

Wir betrachten Probleme der Form $x' = f(t, x, \lambda)$ mit $\lambda \in \Lambda$, Λ eine Parametermenge, und interessieren uns hauptsächlich für die qualitative Veränderung des Lösungsverhaltens in kritischen Punkten (x_0, λ_0), d.h. $f(t, x_0, \lambda_0) = 0$.

X.1 Verzweigung bei kritischen Punkten autonomer Systeme $x' = f(x, \lambda)$

Sei $f(x_0, \lambda_0) = 0$, d.h. x_0 ist kritischer Punkt. Problem: Gibt es für $\lambda \in U(\lambda_0)$ ebenfalls einen kritischen Punkt $x(\lambda)$? Ist $D_x f(x_0, \lambda_0)$ eine reguläre Matrix, so existiert nach dem Satz über implizite Funktionen lokal eine eindeutig bestimmte Vektorfunktion $x(\lambda)$ mit $f(x(\lambda), \lambda) = 0$, $\lambda \in U(\lambda_0)$.

Beispiel:

1. $f(x, \lambda) = x^2 - \lambda$, $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Zu $\lambda = 0$ hat $x^2 - \lambda = x^2 = 0$ nur die eine Lösung $x = 0$. Zu $\lambda > 0$ existieren die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt{\lambda}$, $x_2 = -\sqrt{\lambda}$. Es ist $\frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = 0$ in $(0, \lambda)$. Solche Punkte, bei denen sich die Anzahl der kritischen Punkte ändert, sollen Verzweigungspunkte heißen.

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \lambda x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$
Dann ist
$$D_x f(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$
Obwohl $\det D_x f(0, 0) = 0$ ist, sind $\{(0, \lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ alle Nullstellen, d.h. in $(0, 0)$ ändert sich die Anzahl der kritischen Punkte nicht, und wir haben keine Verzweigung.

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,
$$\widetilde{f}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \lambda x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}.$$
Dann ist $(0, \lambda)$ kritischer Punkt für $\lambda \in \mathbb{R}$ und
$$D_x \widetilde{f}(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$
$\widetilde{f}(x, \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda x_1^2 = \lambda x_2^2$, $x_1 = \pm x_2$, $\lambda x_1 + 2x_2^3 = 0$, $\lambda x_2 + 2x_1^3 = 0$, also $\lambda = -2x_2^2 (x_1 = x_2)$, $\lambda = 2x_2^2 (x_1 = -x_2)$. Demnach haben wir folgendes Bild:

4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$,
$$\widehat{f}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x_1(\lambda - |x|^2) \\ x_2(\lambda - |x|^2) \end{pmatrix}$$
Stationäre Punkte: $x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und x mit $|x|^2 = \lambda$ für $\lambda > 0$. Es ist
$$\begin{aligned} D_x \widehat{f}(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda - x_2^2 - 3x_1^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & \lambda - x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix} \\ D_x \widehat{f}(0, \lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, D\widehat{f}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -2x_1^2 & -2x_1 x_2 \\ -2x_1 x_2 & -2x_2^2 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda = |x|^2 \end{aligned}$$

Spektrum: $\mu^2 + 2\mu(x_1^2 + x_2^2) + 4x_1^2 x_2^2 - 4x_1^2 x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 + 2\mu\lambda = 0$, $\mu_1 = -2\lambda$, $\mu_2 = 0$.

In den Fällen **2.**, **3.**, **4.** ist $\mu = 0$ Eigenwert der Vielfachheit 2 (gerade) von $D_x f(0, \lambda), D_x \widetilde{f}(0, \lambda)$, $D_x \widehat{f}(0, \lambda)$. In **3.**, **4.** liegt in $(0, 0)$ ein Verzweigungspunkt vor, in 2. nicht.

Die Stabilität der kritischen Punkte (x_0,λ_0) richtet sich gemäß Satz IV.4, S. 45 nach $x' = (x-x_0)' = f(x,\lambda_0) - f(x_0,\lambda_0)$ mit

$$f(x,\lambda_0) - f(x_0,\lambda_0) = f(x,\lambda_0) = D_x f(x_0,\lambda_0)(x-x_0) + \sum_{i,j=1}^{n(=2)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\cdot$$

$$\cdot(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \sum_{i,j,k=1}^{n(=2)} \frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0 + \widetilde{t}(x-x_0))(1-t)^2 dt$$

$$\cdot(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)(x^k - x_0^k)$$

Daraus ergibt sich mit Satz IV.4, daß in Beispiel 4. die kritischen Punkte $(0,\lambda)$ für $\lambda < 0$ stabil und für $\lambda > 0$ instabil sind. Durch Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung (s.o.) oder Betrachtung von Funktionalen zeigt man die Stabilität von $|x| = \sqrt{\lambda}$, $\lambda > 0$. Ähnliche Überlegungen lassen sich in den anderen Fällen durchführen.

X.2 Dynamische Verzweigung, Beispiele

Sei

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - \lambda) \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - \lambda) \end{pmatrix}$$

Die kritischen Punkte sind genau $(0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist $D_x f(0,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ und das Spektrum bestimmt sich aus $(\lambda-\mu)^2 + 1 = 0$ zu $\mu_{1,2} = \lambda \pm i$. Für $\lambda = 0$ wird die imaginäre Achse gekreuzt. Wir betrachten das System $x' = f(x,\lambda)$ und führen Polarkoordinaten ein, d. h.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r(t)\cos\varphi(t),\ x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t), \\ x_1' &= r'\cos\varphi - r(\sin\varphi)\varphi', \\ x_2' &= r'\sin\varphi + r(\cos\varphi)\varphi', \\ x_2x_1' - x_1x_2' &= -r^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\varphi' = -r^2\varphi', \\ \varphi' &= \frac{1}{r^2}(x_1x_2' - x_2x_1'),\ r' = \frac{1}{r}(x_1x_1' + x_2x_2'). \end{aligned}$$

Da $(x_1,x_2)^T$ das DGL-System löst, ist

$$\begin{aligned} x_1x_2' - x_2x_1' &= -x_1^2 - x_1x_2(r^2-\lambda) - x_2^2 + x_1x_2(r^2-\lambda) = -r^2, \\ \varphi' &= -1, \\ x_1x_1' + x_2x_2' &= -x_1^2(r^2-\lambda) - x_2^2(r^2-\lambda) = -r^2(r^2-\lambda), \\ r' &= -r^3 + \lambda r. \end{aligned}$$

Für $\lambda \leq 0$ folgt $r' \leq -r^3$, also $r(t) \to 0$, $r \to \infty$, und 0 ist für **alle** Anfangswerte stabil. Für $\lambda > 0$ erhalten wir $r' = -r(r^2-\lambda)$. Eine Lösung ist $r = \sqrt{\lambda}$, $\varphi(t) = -t$, d.h. $x_1(t) = \sqrt{\lambda}\cos t$, $x_2(t) = -\sqrt{\lambda}\sin t$

An diesem Beispiel sehen wir, daß sich zusätzlich zu den stationären Lösungen $(0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, zeitlich periodische Lösungen einstellen. Dieses Phänomen heißt Hopf-Verzweigung (E. Hopf 1942). Ursache: $Re\mu_{1,2} = 0$, Im $\mu_{1,2} \neq 0$ für $\lambda = 0$. Mit anderen Worten: Es liegen rein imaginäre Eigenwerte vor, die $\neq 0$ sind.

Einige Literaturangaben zur Verzweigung: Iooss-Joseph: 1980 Springer, Chow-Hale: 1982 Springer, Guckenheimer-Holmes: 1983 Springer.

Wir interessieren uns für das folgende Problem $P(\lambda)$: $x' = f(t,x,\lambda)$ besitze für $\lambda = \lambda_0$ eine nichttriviale $T(\lambda_0)$-periodische Lösung. Es sei $f(t,x,\lambda)$ bezüglich t gerade $T(\lambda)$-periodisch mit einmal stetig differenzierbaren Funktionen T, f. Wann besitzt $P(\lambda)$ für $\lambda \in U(\lambda_0)$ eine $T(\lambda)-$periodische Lösung, die nichttrivial ist?

Beispiel: $y'' + ay = \sin wt$, $a > 0$.

$f(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -ax_1 + \sin wt \end{pmatrix}$, $\lambda = (a,w) \in \mathbb{R}^2$, $T(\lambda) = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{(\text{Projektion auf 2. Komp. von } \lambda) = \lambda_2}$

Für $w^2 \neq a$ existiert genau eine $\frac{2\pi}{w}$-periodische Lösung. Für sämtliche Werte $\lambda_0 = (a_0, w_0)$ mit $\mathbb{N}^2 w_0^2 \neq a^2$ gilt dies auch in einer Umgebung von λ_0.

Im nächsten Satz untersuchen wir das Problem $P(\lambda)$ das **kein** Verzweigungsproblem ist. Die Methode zu seiner Lösung heißt Poincarésche Kontinuitätsmethode.

X.3 Satz: *Wir betrachten das Problem $P(\lambda)$ wie vorhin eingeführt. Das linearisierte Problem*

$$\begin{array}{l} y' = D_x f(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) y \text{ mit der } T(\lambda_0)\text{−periodischen} \\ \text{Lösung } x_{\lambda_0}(t) \text{ von } x' = f(t, x, \lambda_0) \text{ besitze keine nichttriviale} \\ T(\lambda_0)\text{-periodische Lösung} \end{array}$$

Dann hat $P(\lambda)$ in einer Umgebung $U(\lambda_0)$ von λ_0 für jedes $\lambda \in U(\lambda)$ genau eine $T(\lambda)$-periodische Lösung $x_\lambda(t)$ mit folgender Eigenschaft. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|x_\lambda(tT(\lambda)) - x_{\lambda_0}(tT(\lambda_0))| < \varepsilon \text{ für } |\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon),\ t \in \mathbb{R},$$

ist.

Bemerkung: Im letzten Beispiel ist $D_x f(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis: $x(t, 0, z, \lambda)$ sei die Lösung von $x' = f(t, x, \lambda)$ mit Anfangswert z. Dann gilt offenbar für $z_0 := x_{\lambda_0}(0)$ die Gleichung $x_{\lambda_0}(t) = x(t, 0, z_0, \lambda_0)$ und $x_{\lambda_0}(t)$ existiert für alle $t \geq 0$. Es gibt also Umgebungen $U_0 \times V_0$ von (z_0, λ_0) in $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ derart, daß $x(t, 0, z, \lambda)$ für mindestens $t > T(\lambda)$ existiert. Sei $P : U_0 \times V_0 \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $P(z, \lambda) = x(T(\lambda), 0, z, \lambda)$. Es ist $P(z_0, \lambda_0) = z_0$. P ist von der Klasse C^1, da f und T von der Klasse C^1 sind. Sei $g(z, \lambda) = P(z, \lambda) - z$. Gesucht sind Punkte (z, λ) mit $g(z, \lambda) = 0$. Nötig für die **eindeutige Auflösung** um (z_0, λ_0): $D_z g(z_0, \lambda_0)$ nicht singulär. Dann wäre $g(h(\lambda), \lambda) \equiv 0$ in einer Umgebung $U(\lambda_0)$. Es ist

$$D_z g(z_0, \lambda_0) = D_z x(T(\lambda_0), 0, z_0, \lambda) - E.$$

Nun löst $\partial x / \partial z_i$ das System $y' = A(t) y$, $y(0) = e_i$ mit $A(t) = D_x f(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0)$ (siehe Satz I.7.11). Also ist $D_z x(T(\lambda_0), 0, z_0, \lambda_0) = X(T(\lambda_0))$, wobei $X'(t) = A(t) \cdot X(t)$ und $X(0) = E$ sind. Wie nach dem Korollar zu Satz II.1 bemerkt, ist $X(T(\lambda_0))$ Mondromiematrix. Nach dem Korollar zu Satz II.1 und Voraussetzung ist 1 kein Eigenwert von $X(T(\lambda_0))$, also ist $X(T(\lambda_0)) - E$ regulär. Noch zu zeigen ist

$$|x(tT(\lambda), 0, h(\lambda), \lambda) - x(tT(\lambda_0), 0, h(\lambda_0), \lambda_0)| < \varepsilon$$

für $t \in \mathbb{R}$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon)$. Das Vektorfeld $v(t, x) = x(t \cdot T(\lambda), 0, h(\lambda), \lambda)$ ist 1-periodisch. Also ist für $\varepsilon > 0$ gerade

$$|v(t, \lambda) - v(t, \lambda_0)| < \varepsilon \text{ für } |\lambda - \lambda_0| < \delta(\varepsilon),\ t \in [0, 1],$$

denn sonst existieren ein $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen (λ_i), (t_i) mit $\lambda_i \to \lambda_0$, $i \to \infty$, $t_i \in [0, 1]$, $t_i \to t^*$, $i \to \infty$ derart, daß

$$\begin{aligned} |v(t_i, \lambda_i) - v(t_i, \lambda_0)| &\geq \varepsilon_0, \text{ also für } i \to \infty \\ |v(t^*, \lambda_0) - v(t^*, \lambda_0)| &\geq \varepsilon_0 \end{aligned}$$

sind, und dies ist ein Widerspruch. □

Betrachten wir wieder die Verzweigung stationärer Lösungen von $x' = f(x, \lambda)$, d.h. von Lösungen (x_0, λ_0) von $f(x_0, \lambda_0)$. Wie durch die Erörterungen in X.1 nahegelegt wird, tritt jedenfalls dann keine Verzweigung ein, wenn $D_x f(x_0, \lambda_0)$ regulär ist. Notwendig ist also, daß $D_x f(x_0, \lambda_0)$ singulär ist. Bei der Verzweigung periodischer Lösungen bei $x' = f(t, x, \lambda)$, bei der man also von einer $T(\lambda_0)$-periodischen Lösung $x_{\lambda_0}(t)$ von $x' = f(t, x, \lambda_0)$ abzweigende $T(\lambda)$-periodische Lösungen $x_\lambda(t)$ von $x' = f(t, x, \lambda)$ sucht, liegen die Dinge so: Wir haben keine Verzweigung, falls $y' = D_x f(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) y$ keine nichttriviale $T(\lambda_0)$-periodische Lösung hat, was damit äquivalent ist, daß 1 kein Eigenwert der zugehörigen Mondromiematrix $D_z x(T(\lambda_0), 0, x_{\lambda_0}(0), \lambda_0)$ ist. Notwendig ist also entsprechend (damit Verzweigung auftritt), daß die Linearisierung eine nichttriviale periodische Lösung besitzt. Dies ist jedoch nicht hinreichend, da jedes autonome Problem wegen

$$(x_{\lambda_0}')' = D_x f(x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) x_{\lambda_0}'$$

eine nichttriviale periodische Lösung besitzt, wenn x_{λ_0} nichttrivial ist.

X.4 Beispiele: Wir betrachten $P(\lambda)$:

$$y'' + \alpha y' + \beta y + \gamma y^3 + \delta \sin y = \varepsilon \sin^3 \omega t \tag{2}$$

mit $\lambda = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \omega) \in \mathbb{R}^6$, $T(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda_6} = \frac{2\pi}{\omega}$. Sei $\lambda_0 = (\alpha_0, \beta_0, 0, 0, 0, \omega_0)$ mit $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\omega_0 \neq 0$. Demnach ist $P(\lambda_0)$:

$$y'' + \alpha_0 y' + \beta_0 y = 0, \text{ oder als System} \tag{3}$$

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\beta_0 x_1 - \alpha_0 x_2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\alpha_0 \neq 0$ folgt aus I.6, daß die einzige $T(\lambda_0)$-periodische Lösung $x_{\lambda_0} \equiv 0$ ist. Die Linearisierung stimmt mit dem ursprünglichen System überein, so daß nach Satz X.3 die Gleichung (1) für alle λ nahe bei λ_0 genau eine $T(\lambda)$-periodische Lösung nahe 0 hat.

Bemerkung zum Stabilitätsverhalten: Der Satz VI.1 sagt aus, daß eine $T(\lambda_0)$-periodische Lösung von $x_{\lambda_0}(t)$ von $x' = f(t, x, \lambda_0)$ gleichmäßig asymptotisch stabil ist, wenn in

$$D_x f(t, x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) = A(t)$$

$$\text{mit Fundamentalsystem } \Phi(t) = P(t)e^{Rt}$$

gerade $\sigma(R) \subset \{z | Rez < 0\}$ ist. Im Beispiel (2) mit $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\alpha_0 \end{pmatrix} x$ ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\alpha_0 \end{pmatrix}$.
$\sigma(R) \subset \{z | Rez < 0\}$ ist äquivalent damit, daß alle Eigenwerte der Mondromiematrix $e^{T(\lambda_0)R}$ betragsmäßig kleiner als 1 sind. Die Mondromiematrix ist in Beispiel (2) gerade $e^{T(\lambda_0)A}$, und wir haben $\sigma(e^{T(\lambda_0)A}) = e^{T(\lambda_0)\sigma(A)}$ (siehe Korollar zu Satz II.1, Seite 22). Die Eigenwerte von A sind $\lambda_\pm = \frac{-\alpha_0}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{4} - \beta_0}$. Ist also $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, so ist $Rez < 0$, $z \in \sigma(T(\lambda_0)A)$.

X.5 Satz: *Sei γ_{λ_0} nichtkritischer periodischer Orbit eines Problems $x' = f(x, \lambda_0)$, T_{λ_0} sei die minimale Periode (> 0). $y' = D_x f(x_{\lambda_0}(t), \lambda_0)$ besitze 1 als charakteristischen Multiplikator, der algebraisch einfacher Eigenwert von $e^{RT(\lambda_0)}$ sei. Für λ nahe bei λ_0 gilt dasselbe, es gibt zu λ einen periodischen Orbit γ_λ mit der Periode $T(\lambda)$ und es sind $|T(\lambda) - T(\lambda_0)|$ und*

$$d_H(\gamma_\lambda, \gamma_{\lambda_0}) \textit{ klein in der Hausdorff-Metrik}$$
$$d_H(A, B) := \max\{\sup_{x \in A} dist(x, B), \sup_{y \in B} dist(A, y)\}$$

Hierfür geben wir keinen Beweis.

Der Parameterraum Λ sei jetzt eine offene Menge eines $\mathbb{R}^m$. Bevor wir definieren, was wir unter einem Verzweigungspunkt verstehen wollen, reduzieren wir das Problem. Sei $f(t, x, \lambda)$ nun $T(\lambda)$-periodisch bezüglich t, $\lambda \in \Lambda$. Sei $x_\lambda(t)$ eine Familie von $T(\lambda)$-periodischen Lösungen. Wir setzen

$$\widetilde{f}(t, x, \lambda) = \frac{T(\lambda)}{2\pi}(f(t \cdot \frac{T(\lambda)}{2\pi}, x + x_\lambda(t\frac{T(\lambda}{2\pi}), \lambda) - f(t \cdot \frac{T(\lambda}{2\pi}, x_\lambda(t\frac{T(\lambda)}{2\pi}, \lambda)).$$

Dann ist $\widetilde{f}$ gerade 2π-periodisch bezüglich t, $\widetilde{f}(t, 0, \lambda) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$. Demnach hat

$$x' = \widetilde{f}(t, x, \lambda) \text{ die Lösung 0 für alle } \lambda \in \Lambda.$$

y ist 2π-periodische Lösung von $y' = \widetilde{f}(t, y, \lambda)$ genau dann, wenn

$$x(t) = y(t\frac{2\pi}{T(\lambda)}) + x_\lambda(t)$$

$T(\lambda)$-periodische Lösungen von $x' = f(t, x, \lambda)$ ist. Also geben wir folgende

X.6 Definition: *Sei $m \in \mathbb{N}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f : \mathbb{R} \times B_r(0) \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, f 2π-periodisch bezüglich t und $f(t, 0, \lambda) = 0$. Sei $\lambda_0 \in \Lambda$. $(0, \lambda_0)$ heißt Verzweigungspunkt zu $x' = f(t, x, \lambda)$,* *wenn es in jeder Umgebung $U(\lambda_0)$ von λ_0 in Λ ein $\lambda \neq \lambda_0$ gibt derart, daß $x' = f(t,x,\lambda)$ eine 2π-periodische nichtkritische, d.h. nichttriviale Lösung x_λ besitzt.*

Das uns interessierende Problem besteht also darin, 2π-periodische nichttriviale Lösungen von $x' = f(t,x,\lambda)$ zu finden. Nach X.3 ist notwendig dafür, daß $(0,\lambda_0)$ Verzweigungspunkt ist, daß

$$y' = D_x f(t,0,\lambda_0)y$$

nichttriviale 2π-periodische Lösungen besitzt. Wir betrachten die Poincaré-Abbildung und setzen $g(z,\lambda) = z - x(2\pi,0,z,\lambda)$. Dann ist $g(0,\lambda) = 0$ und $g(z,\lambda) = 0$ ist äquivalent dazu, daß $x(t,0,z,\lambda)$ 2π-periodische Lösung ist. Wir beginnen mit einem Kriterium für die Verzweigung stationärer Lösungen autonomer Systeme, das aber auch auf die eben eingeführte Abbildung g Anwendung finden kann. Es stammt von Krasnoselskij.

X.7 Satz: *Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ offen, $g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \Lambda, \mathbb{R})$, $g(0,\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$ (z.B. g wie oben eingeführt). Es gelte für ein $\lambda_0 \in \Lambda$:*

i) $g(z,\lambda_0) = 0$ nur für $z = 0$, falls $z \in U(0)$, $U(0)$ geeignet.

ii) $D_z g(0,\lambda)$ sei nichtsingulär für λ, $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.

iii) $\det D_z g(0,\lambda)$ wechsle in λ_0 das Vorzeichen.

Dann ist $(0,\lambda_0)$ Verzweigungspunkt stationärer Lösungen $0 = g(z,\lambda)$.

Beweis: Angenommen, $(0,\lambda_0)$ ist kein Verzweigungspunkt. Dann gibt es nach ii) und dem Satz über implizite Funktionen zu jedem λ mit $0 < |\lambda - \lambda_0| \leq \varepsilon/2$ eine Umgebung $U_\lambda(0) \times J(\lambda)$ mit $g(z,\widetilde{\lambda}) \neq 0$, $(z,\widetilde{\lambda}) \in (U_\lambda(0) - \{0\}) \times J(\lambda)$. Für λ_0 nach Annahme und i) ebenfalls richtig. Es ist

$$\{|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \bigcup_{\lambda \in \{|\lambda-\lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}} J(\lambda).$$

Endlich viele $J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_N)$ überdecken $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Sei

$$\widetilde{U} = \bigcap_{i=1}^{N} U_{\lambda_i}(0).$$

$\widetilde{U}$ ist Nullumgebung. Also ist $g(z,\lambda) \neq 0$ auf $\widetilde{U} - \{0\} \times \{|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Insbesondere ist $|g(z,\lambda)| \geq \varepsilon_0 > 0$ auf $\partial\widetilde{U} \times \{|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$. Aus Satz IX.7 folgt, indem wir zwei Punkte λ', λ'' mit $|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ durch eine Gerade verbinden, daß

$$\deg(g(.,\lambda'),U,0) = \deg(g(.,\lambda''),U,0)$$

ist. Insbesondere haben wir, weil $\Lambda \subset \mathbb{R}$ ist,

$$\deg(g(.,\lambda_0 - \frac{\varepsilon}{2}),U,0) = \deg(g(.,\lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2}),U,0).$$

Verkleinern wir $\widetilde{U}$ eventuell, so ist $\det D_x g(z,\lambda_0 \pm \frac{\varepsilon}{2}) \neq 0$ in $\widetilde{U}$ und die Rechnungen zu Satz IX.8 zeigen

$$\deg(g(0,\lambda_0 \pm \frac{\varepsilon}{2},U,0)) = sign \det D_x g(0,\lambda_0 \pm \frac{\varepsilon}{2})$$

und somit Übereinstimmung der Vorzeichen, im Widerspruch zu iii). □

Der Nachweis von Verzweigungspunkten beinhaltet im allgemeinen schwierige Untersuchungen. Zu diesem Zweck studieren wir jetzt die **Ljapunov-Schmidt-Reduktion.** Wir betrachten wieder die Poincaré-Abbildung g. Sei also $g(0,\lambda) = 0$, $\lambda \in \Lambda$. g sei von der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei ohne Einschränkung $\lambda_0 = 0$. Sei

$$\begin{aligned} N &= \ker D_x g(0,0) \neq \{0\}, \\ R &= Im D_x g(0,0). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbb{R}^n = N \oplus N^\perp, \mathbb{R}^n = R \oplus R^\perp,$$

$$\begin{aligned}\dim N^\perp &= n - \dim N = n - \dim\ker D_x^T g(0,0),\\ &= n - (n - \dim ImD_x g(0,0) = \dim R.\end{aligned}$$

Wir betrachten Umgebungen der Null der Gestalt $U = U_N \oplus U_N^\perp$ mit $U_N \subset N$, $U_N^\perp \subset N^\perp$. $P : \mathbb{R}^n \to R$ sei die orthogonale Projektion. Es sei

$$\begin{aligned}h_2(x_n, x_N^\perp, \lambda) &= Pg(x_N + x_N^\perp, \lambda),\\ h_1(x_N, x_N^\perp, \lambda) &= (I-P)g(x_N + x_N^\perp, \lambda).\end{aligned}$$

$g(x,\lambda) = 0$ ist also äquivalent zu $h_1(x_N, x_N^\perp, \lambda) = 0$ und $h_2(x_N, x_N^\perp, \lambda) = 0$. Es ist $h_1(0,0,0) = h_2(0,0,0) = 0$,

$$D_{x_N^\perp} h_2(0,0,0) = PD_x g(0,0)|_{N^\perp} : N^\perp \to R,$$

weil $Pg(0 + x_N^\perp + \delta^\perp, 0) - Pg(0 + x_N^\perp, 0) - PD_x g(0 + x_N^\perp, 0)\cdot\delta^\perp + o(||\delta^\perp||)$ ist. Wir schreiben $x^\perp$ für $x_N^\perp$. Weiter folgt aus $PD_x g(0,0)|_{N^\perp} x^\perp = 0$ für ein $x \in N^\perp$, daß $D_x g(0,0)|_{N^\perp} x^\perp = 0$ ist. Also ist $x^\perp \in N \cap N^\perp$, $x^\perp = 0$ und $PD_x g(0,0)|_{N^\perp}$ ist regulär. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist demnach in einer Umgebung der Null $(0 \in N, 0 \in N^\perp, 0 \in \Lambda)$

$$0 = h_2(x_N, x^\perp, \lambda) \Leftrightarrow x^\perp = \varphi(x_N, \lambda) \text{ mit einer } C^k\text{-Vektorfunktion } \varphi.$$

Damit ist die Gleichung $g = 0$ reduziert auf

$$\mathbf{h_1(x_n, \varphi(\lambda, x_N), \lambda) = 0}.$$

Sei i. f. $h(x_N, \lambda) := h_1(x_N, \varphi(\lambda, x_N), \lambda)$. Es gilt also, und dies ist die Reduktion,

$$\mathbf{h(x_N, \lambda) = 0 \Leftrightarrow g(x_N + \varphi(x_N, \lambda), \lambda) = 0} \text{ mit}$$

$$\mathbf{h(0,0) = 0,\ h \in C^k(U_N \times V, R^\perp)}.$$

Diese Rechnungen gelten unter Zusatzvoraussetzungen auch, wenn für Banachräume B_1, B_2 gilt: $g : B_1 \times \Lambda \to B_2$.

E, F seien Banachräume, $U \subset E$ offen. $f : U \to F$ heißt differenzierbar in $p \in U$, wenn es eine lineare Abbildung $g : E \to F$ gibt mit

$$f(x) - f(p) = g(x-p) + o(||x-p||)$$

g heißt das Differential von f in p: $Df(p)$ oder $D_x f(p)$ mit x als Variabler.

Beispiele:
1.) x_N fest. $h_2 : N^\perp \to R$. Ist h_2 differenzierbar? Ja, denn

$$h_2(x_N, x_N^\perp + \delta_N^\perp, \lambda) - h_2(x_N, x_N^\perp, \lambda) = PD_x g(x_N + x_N^\perp, \lambda)\cdot\delta_N^\perp + o(||\delta^\perp||).$$

Also

$$D_{x_N^\perp} h_2(\lambda, x_N, x_N^\perp) = PD_x g(x_N + x_N^\perp, \lambda)|_{x_N^\perp}$$

2.
Wir zeigen die Differenzierbarkeit von $g(. + x_N^\perp, \lambda)$ als Abbildung von N in $\mathbb{R}^n$. Sei $e_1, \ldots, e_m$ eine Basis von N, $x_N = t^i e_i$, $\delta_N = \delta^i e_i$. Dann ist

$$g(x_N + \delta_N + x_N^\perp, \lambda) - g(x_N + x_N^\perp, \lambda) = D_x g(x_N + x_N^\perp, \lambda)\cdot D_t h(t)\cdot\begin{pmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta^m\end{pmatrix} + o(||\delta^i e_i||)$$

mit

$$\begin{aligned}h(t) &= \begin{pmatrix} t^1 e_1 & + & t^2 e_2 & + & \ldots & + & t^m e_m\\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots\end{pmatrix},\\ D_t h(t) &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_m\\ \vdots & \vdots & & \vdots\end{pmatrix},\\ D_t h(t)\begin{pmatrix}\delta^1\\ \vdots\\ d^m\end{pmatrix} &= \delta^i e_i \in N,\end{aligned}$$

also (vgl. 1) wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation:

$$g(x_N+\delta_N+x_N^\perp,\lambda)-g(x_N+x_N^\perp,\lambda)=D_xg(x_N+x_N^\perp,\lambda)\cdot\delta^i e_i.$$

Es wird eine verallgemeinerte Form des Satzes über implizite Funktionen benutzt. Die Berechnung von $D_{x_N}\varphi(x_N,\lambda)$ geschieht folgendermaßen:

$$\varphi: U_N\subset N\times V\subset\Lambda\to N^\perp$$

$$0=PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)(w+D_{x_N}\varphi(x_N,\lambda)w),\ w\in N$$

$$D_{x_N}\varphi(x_N,\lambda)w=-(PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)|_{N^\perp})^{-1}\cdot(PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)w,\ w\in N$$

mit der Inversen $(PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)|_{N^\perp})^{-1}$ von $PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)|_{N^\perp}: N^\perp\to R$, was für $(x_N,\lambda)\in U_N\times V$ möglich ist (Determinantenbedingung).

Es ist $D_{x_N}\varphi(0,0)=0=D_{x_N}h(0,0)$. Dies zeigen wir wie folgt: Es ist $g(0,\lambda)=0$. Also ist $h_2(0,0,\lambda)=0$. Wegen der lokal eindeutigen Auflösung folgt $\varphi(0,\lambda)=0$. Nun differenzieren wir $Pg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)$ nach x_N. Das ergibt

$$\begin{aligned}0&=PD_xg(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)(w+D_{x_N}\varphi(x_N,\lambda)w)\text{ für alle }w\in N,\\0&=PD_xg(0,0)(w+D_{x_N}\varphi(0,0)w)\text{ für alle }w\in N,\ x_N=0,\ \lambda=0.\end{aligned}$$

Da $w\in N$ ist, ist $D_xg(0,0)w=0$ und wir erhalten

$$0=PD_xg(0,0)D_{x_N}\varphi(0,0)w,\ w\in N.$$

$D_{x_N}\varphi(0,0)$ bildet N in $N^\perp$ ab, da φ dies tut. Auf $N^\perp$ ist jedoch $PD_xg(0,0)$ injektiv nach Seite 92. Also ist

$$D_{x_N}\varphi(0,0)w=0,\ w\in N,\ \text{also } D_{x_N}\varphi(0,0)=0.$$

Analog behandelt wir $h(x_N,\lambda)=(I-P)g(x_N+\varphi(x_N,\lambda),\lambda)$. Es ist nämlich

$$D_{x_N}h(0,0)w=(I-P)D_xg\underbrace{(0,0)(w}_{=0}+\underbrace{D_{x_N}\varphi(0,0)w}_{=0}=0.$$

Außerdem folgt: $h(\lambda,0)=0$. Soweit der allgemeine Teil der Ljapunov-Schmidt Reduktion. Zur weiteren Untersuchung benötigen wir spezielle Voraussetzungen.

X.8 Satz (Verzweigung bei einfachen Eigenwerten): *Sei $k\in\mathbb{N}$, $\Lambda\subset\mathbb{R}$, g wie oben eingeführt und aus $C^k(\mathbb{R}^n\times\wedge,\mathbb{R}^n)$, $g(0,\lambda)=0$. Mit*

$$A=D_xg(0,0)\ \textit{und}\ B=\frac{\partial}{\partial\lambda}D_xg(0,0)$$

gelte:

$$B(\ker A)\not\subset ImA,\ \ker A=\{\widetilde{\lambda}e|\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}\},\ \textit{d.h.}\ \ker A\ \textit{ist eindimensional.}$$

Dann ist $(0,0)$ Verzweigungspunkt, d.h. die Nullstellenmenge von $g(x,\lambda)$ in der Nähe von $(0,0)$ besteht neben der trivialen Kurve $(0,\lambda)$ aus einer weiteren Kurve von Γ von der Klasse C^{k-1}, die eine Parameterdarstellung

$$(\lambda(s),se+sy(s))\ \textit{mit}\ (\lambda,y):(-\varepsilon,\varepsilon)\to V\times\{\widetilde{\lambda}e|\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}\}^\perp,$$
$$(\lambda(0),y(0))=0$$

hat.

Beweis: Es ist $\dim N=\dim R^\perp$. Sei also $R^\perp=\{\widetilde{\lambda}\widetilde{e}|\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}\}$. Durch $h(te,\lambda)=\psi(t,\lambda)\widetilde{e}$, $h: V\times N\to R^\perp$, ist eine Funktion $\psi(t,\lambda)$ definiert. Wir haben, wie eben gezeigt.

$$D_{x_N}h(0,0)=0.$$

Es ist also $(t\neq 0)$

$$\frac{h(te,0)-h(0,0)}{t}-D_{x_N}h(0,0)e=\frac{\psi(t,0)-\psi(0,0)}{t}\widetilde{e}.$$

Die linke Seite konvergiert gegen Null für $t\to 0$, die rechte gegen $\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,0)\widetilde{e}$. Insgesamt erhalten wir $\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,0)=0=D_{x_N}h(0,0)$. Aus $h(0,0)=0$ folgt $\psi(0,0)=0$. Sei

$$\psi_0(t,\lambda)=\frac{1}{t}\psi(t,\lambda),\ t\neq 0.$$

Aus $h(0,\lambda) = 0$ folgt $\psi(0,\lambda) = 0$, $\lambda \in V$. Daher erhalten wir als stetige Fortsetzung von ψ_0 nach $t = 0$ die Funktion

$$\begin{aligned} \psi_0(0,\lambda) &= \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,\lambda),\ \lambda \in V \text{ mit} \\ \psi_0(0,0) &= 0. \end{aligned}$$

Es war nach Seite 93

$$D_{x_N} h(0,\lambda)w = (I-P)D_x g(0,\lambda)(w + D_{x_N}\varphi(0,\lambda)w),$$

woraus

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} D_{x_N} h(0,0)w = (I-P)B(w + \underbrace{D_{x_N}\varphi(0,0)w}_{=0 \text{ nach Seite 93}} + \underbrace{(I-P)A}_{=0 \text{ nach Seite 93}} \frac{\partial}{\partial\lambda} D_{x_N}\varphi(0,0)w$$

$$= (I-P)Bw$$

folgt. Nun ist $D_{x_N} h(0,\lambda) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(0,\lambda)\widetilde{e} = \psi_0(0,\lambda)\widetilde{e}$, also

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} D_{x_N} h(0,0)e = \frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda}(0,0)\widetilde{e}.$$

Nach Voraussetzung ist $Be = \delta\widetilde{e} + r$ mit $r \in R$, $\delta \neq 0$. Also ist

$$(I-P)Be = \delta\widetilde{e}, \text{ da } P\widetilde{e} = 0,\ Pr = r \text{ sind.}$$

Aus $\frac{\partial}{\partial\lambda} D_{x_N} h(0,0)e = (I-P)Be = \frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda}(0,0)\widetilde{e}$ folgt

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\lambda}(0,0) = \delta \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt mit $\psi_0(0,0) = 0$, daß in einer Umgebung von $(0,0)$ das Nullstellengebilde von ψ_0 durch eine Kurve $(s, \lambda(s))$ mit $\lambda(0) = 0$ gegeben ist, d.h.

$$\psi_0(s, \lambda(s)) = 0,\ -\varepsilon < s < \varepsilon.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= s\psi_0(s,\lambda(s))\widetilde{e} = \psi(s,\lambda(s))\widetilde{e} = h(se, \lambda(s)), \\ 0 &= g(se + \varphi(se,\lambda(s)), \lambda(s)) = 0,\ -\varepsilon < s < \varepsilon, \\ 0 &= g(se + sy(s), \lambda(s)) \text{ mit } y(s) = \frac{\varphi(s,\lambda(s))}{s},\ s \neq 0. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi(0,\lambda) = 0$ nach Seite 93, $\lambda \in V$, ist $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(0,\lambda) = 0$ und somit 0 die stetige Ergänzung von y in 0. ψ_0 ist von der Klasse C^{k-1}, also auch λ. □

X.9 Lemma: *Es liege die Situation des Satzes X.8 vor. Die Nichtentartungsbedingung $B(N = \ker A) \not\subset ImA$ mit $A = D_x g(0,0)$ gilt genau dann, wenn*

$$d(\lambda) = \det D_x g(\lambda, 0)$$

in 0 eine einfache Nullstelle hat und also in $\lambda_0 = 0$ das Vorzeichen wechselt (vgl. Satz X.7).

Beweis: Sei $\{\widetilde{\lambda} f_1 | \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}\} = \ker A$. Sei E_0 der verallgemeinerte Eigenraum $= \ker A^m$, m geeignet. m ist die algebraische Vielfachheit von 0. Mit $Af_i = f_{i-1}$, $i = 2, \ldots, m$, erhalten wir eine Basis $\{f_1, \ldots f_m\}$ von E_0, die wir durch die Basis $f_{m+1}, \ldots, f_n$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$ ergänzen. Seien $e_1, \ldots, e_n$ die üblichen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$. Wir wählen eine invertierbare $n \times n$-Matrix C mit $Ce_i = f_i$ und setzen $e_j(\lambda) = D_x g(\lambda, 0)Ce_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= \frac{1}{\det C} \det(e_1(\lambda), \ldots e_n(\lambda)), \\ d'(0) &= \frac{1}{\det C} \sum_{j=1}^{n} \det(e_1(0), \ldots, e_{j-1}(0),\ e_j'(0), e_{j+1}(0), \ldots, e_n(0)). \end{aligned}$$

Wegen $e_1(0) = Af_1 = 0$ folgt

$$d'(0) = \frac{1}{\det C} \det(e_1'(0), e_2(0), \dots, e_n(0)).$$

Mit $e_1'(0) = (\frac{\partial}{\partial\lambda} D_x g)(0,0) f_1 = Bf_1, e_2(0) = Af_2, \dots, e_m(0) = Af_m, e_{m+1}(0) = Af_{m+1}, \dots, e_n(0) = Af_n$ folgt: $d'(0) \neq 0 \Leftrightarrow Bf_1 \notin$ Teilraum, der von $Af_2, \dots, Af_m, Af_{m+1}, \dots, Af_n$ aufgespannt wird, sofern $Af_2, \dots, Af_n$ linear unabhängig sind. Diese Vektoren spannen jedoch den $(n-1)-$dimensionalen Teilraum ImA (siehe Seite 92 oben) auf. □

X.10. Eine Anwendung. Wir betrachten $x' = f(t,x,\lambda)$, $\Lambda \subset \mathbb{R}$, nahe bei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Es sei wieder $f(t,0,\lambda) \equiv 0$ und bezüglich t sei $f(t,x,\lambda)$ wieder 2π-periodisch. Die Lösungen $x(t,0,0,\lambda)$ verschwinden identisch. Sei

$$g(z,\lambda) = z - x(2\pi, 0, z, \lambda + \lambda_0).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A &= D_x g(0,0) = E - D_z x(2\pi, 0, 0, \lambda_0), \\ B &= \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x g(0,0) = -\frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(2\pi, 0, 0, \lambda_0). \end{aligned}$$

Weiter ist $x'(t,0,z,\lambda) = f(t, x(t,0,z,\lambda), \lambda)$, also

$$\frac{\partial}{\partial t} D_z x(t,0,z,\lambda) = D_x f(t, x(t,0,z,\lambda), \lambda) \cdot D_z x(t,0,z,\lambda) \text{ und}$$

$$D_z x(0,0,z,\lambda) = E.$$

Insbesondere gilt dies für $z = 0$, also $\frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(0,0,0,\lambda) = 0$.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(t,0,0,\lambda)\right)' &= \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(t,0,\lambda) \cdot D_z x(t,0,0,\lambda) + D_x f(t,0,\lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(t,0,0,\lambda), \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(0,0,0,\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist dies richtig für λ_0. Betrachten wir das lineare System $y' = A(t)y$ mit $A(t) = D_x f(t,0,\lambda)$. Zu ihm gehört der Evolustions- oder Übergangsoperator $U(t,s)$. Nach I.7.9 ist $D_z x(t,0,0,\lambda)$ ein Fundamentalsystem zu $y' = A(t)y$. Sei $\Phi(t,\lambda) = D_z x(t,0,0,\lambda)$. Dann ist

$$\begin{aligned} U(t,s) = U(t,s,\lambda) &= \Phi(t,\lambda)\Phi(s,\lambda)^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(t,0,0,\lambda_0) &= U(t,0)\frac{\partial}{\partial\lambda} D_z x(0,0,0,\lambda_0) + \int_0^t U(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(\sigma,0,\lambda_0) D_z x(\sigma,0,0,\lambda_0) d\sigma, \\ B &= -\int_0^{2\pi} U(t,\sigma)\frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(\sigma,0,\lambda_0) U(\sigma,0,\lambda_0) d\sigma. \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir die Bedingung $Be \notin ImA, e \in \ker A \neq \{0\}$. Sei $Be = Ax$, $e^\perp \in \ker A^T$. Dann folgt $\langle Be, e^\perp\rangle = \langle Ax, e^\perp\rangle = \langle x, A^T e^\perp\rangle = 0$. Die Gültigkeit der Nichtentartungsbedingung ist also insbesondere dann gegeben, wenn $\langle Be, e^\perp\rangle \neq 0$ ist für ein $e^\perp \in \ker A^T = \ker(E - U(2\pi,0,\lambda_0)^T)$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &\neq \int_0^{2\pi} \langle U(2\pi,\sigma,\lambda_0)\frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(\sigma,0,\lambda_0) U(\sigma,0,\lambda_0)e, e^\perp\rangle d\sigma \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(\sigma,0,\lambda_0) U(\sigma,0,\lambda_0)e, U(2\pi,\sigma,\lambda_0)^T e^\perp\rangle d\sigma \end{aligned}$$

Mit $A(t) = D_x f(t,0,\lambda_0)$ ist $\omega(\sigma) = U(2\pi,\sigma,\lambda_0)^T e^\perp$ Lösung von $y' = -A(t)^T y$ und $v(\sigma) = U(\sigma,0,\lambda_0)e$ Lösung von $y' = A(t)y$. $v(.)$ ist 2π periodische Lösung von $y' = A(t)y$. Mit diesen Erörterungen erhalten wir

X.10.1 Satz: *Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$. f sei 2π-periodisch, $f(t,0,\lambda) = 0$. Für $\lambda_0 \in \wedge$ besitze $y' = D_x f(t,0,\lambda_0)y$ genau eine linear unabhängige 2π-periodische Lösung v. Ist dann ω eine nichttriviale 2π-periodische Lösung des dualen Problems $z' = -D_x f(t,0,\lambda_0)_z^T$ und gilt*

$$\int_0^{2\pi} \langle \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x f(t,0,\lambda_0)v(t), \omega(t)\rangle dt \neq 0,$$

so ist $(0, \lambda_0)$ Verzweigungspunkt von 2π-periodischen Lösungen, d.h. neben den Lösungen $(0, \lambda)$ gibt es noch einen Lösungszweig $(u_s(t), \lambda(s))$ mit $\lambda(0) = \lambda_0$, $|u_s(t)|$ klein, $-\varepsilon < s < \varepsilon$, und $u_s(t) \neq 0$ für $s \neq 0$.

Beweis: Nach S. 94/95 sind die Voraussetzungen des Satzes X.8 erfüllt. Als Anfangswerte von u_s dienen die in Satz X.8 konstruierten Vektoren $se + sy(s)$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$. $\square$

Beispiel: Wir betrachten $y'' + \lambda y = f(t, y, y')$. f sei bezüglich t 2π-periodisch, $f(t, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y'}(t, 0, 0) = 0$. Umschreibung auf ein System liefert

$$x' = F(t, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\lambda x_1 + f(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \; F(t, 0, \lambda) = 0, \; D_x F(t, 0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0 & 0 \end{pmatrix},$$

also F 2π- periodisch bezüglich t, $F(t, 0, \lambda) = 0$.

Die 2π-periodischen Lösungen von $\widetilde{y}' = D_x F(t, 0, \lambda_0)\widetilde{y}$ führen auf die Differentialgleichung $y'' + \lambda_0 y = 0$. 2π-periodische Lösungen gibt es nur für $\lambda_0 = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$, und zwar sind dies $y(t) = \lambda_1 \sin\sqrt{k^2}t + \lambda_2 \cos\sqrt{k^2}t$, $\lambda_1, \lambda_2 = 0$. Der Lösungsraum hat also nur für $\lambda_0 = 0$ die Dimension 1 und wir können für v den Vektor $(1, 0)^T$ wählen. ω finden wir aus $\omega' = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\omega$ zu $\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiter ist $\frac{\partial}{\partial\lambda} D_x F(t, 0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit entsteht

$$\int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = -2\pi$$

und Satz X.10.1 ist anwendbar. An den anderen Stellen $\lambda_0 = k^2$, an denen die Linearisierung nichttriviale 2π-periodische Lösungen hat, zweigen auch 2π-periodische Lösungen ab, aber dort ist Satz X.10.1 zunächst nicht anwendbar, weil $\dim\ker A = 2$ ist. Doch erhalten wir hier auch periodische Lösungen, indem wir etwas anders vorgehen. Sei der Banachraum

$$\mathbb{B}_{2,0} = \{x | x \in C^2([0, 2\pi], \mathbb{R}), x\, 2\pi\text{-periodisch}, \, x(0) = 0\},$$

$$||x||_{\mathbb{B}_{2,0}} = \sup_{t \in [0, 2\pi]} (|x(t)| + |x'(t)| + |x''(t)|)$$

betrachtet. Sei $G(x, \lambda) = x'' + \lambda x - f(t, x, x')$. Dann ist $G : \mathbb{B}_2 \times \wedge \to \mathbb{B}_0$ mit $\mathbb{B}_0 = \{x | x \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{R}),$ x 2π-periodisch$\}$ und entsprechender Norm. Gesucht sind nichttriviale x mit $x \in \mathbb{B}_{2,0}$ und $G(x, \lambda) = 0$. Für die Ableitung im Sinn von Seite 92 erhalten wir

$$\begin{aligned} D_x G(0, \lambda)\varphi &= \varphi'' + \lambda\varphi, \text{ also } \ker D_x G(0, \lambda) = \{\widetilde{\lambda} \sin\sqrt{\lambda = k^2}t | \widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}\} \\ \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x G(0, \lambda)\varphi &= \varphi \end{aligned}$$

Sei $A = D_x G(0, \lambda)$, $B = \frac{\partial}{\partial\lambda} D_x G(0, \lambda)$. Dann ist $\dim\ker D_x G(0, \lambda) = 1$, und der Raum wird von $e_1 = \sin\sqrt{\lambda = k^2}t$ aufgespannt. Es ist $B(e_1) = e_1$ und im Sinn von Satz X.8 prüfen wir, ob $Be_1 \in ImA$ eintreten kann. Dies ist äquivalent damit, daß

$$\varphi'' + (\lambda = k^2)\varphi = e_1 \text{ in } \mathbb{B}_{2,0} \text{ lösbar ist.}$$

Man prüft leicht nach, daß dies nicht möglich ist. (Vgl. Satz II.).

Formale Anwendung von Satz X.8 liefert, daß auch die Punkte $(0, \lambda = k^2)$, $k \in \mathbb{Z}$, Verzweigungspunkte sind.

X.11 Hopf-Verzweigung bei autonomen Systemen. Wir betrachten autonome Systeme $x' = f(x, \lambda)$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^n \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ mit $f(0, \lambda) = 0$. Es sei im Gegensatz zu vorher zusätzlich (Für "Spektrum" wird jetzt $\sum$ geschrieben)

$$0 \notin \sum(D_x f(0, \lambda_0))$$

vorausgesetzt für ein $\lambda_0 \in \Lambda$. Es zweigen also keine stationären Lösungen in $(0, \lambda_0)$ ab. Es könnten aber T-periodische Lösungen abzweigen. Dieses Phänomen bezeichnet man als Hopf-Verzweigung. Nach Satz X.10.1 benötigten wir dafür, daß das linearisierte Problem eine T_0-periodische Lösung hat, also

$$\begin{aligned}
1 \in \sum\left(e^{T_0 D_x f(0,\lambda_0)}\right) &\Leftrightarrow \sum (T_0 D_x f(0, \lambda_0)) \cap 2\pi i\mathbb{Z} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \left\{\pm \frac{2\pi \widetilde{k}}{T_0} i\right\} \in \sum (D_x f(0, \lambda_0)) \text{ für ein } \widetilde{k} \in \mathbb{N}, \\
&\Leftrightarrow \{\pm ai\} \in \sum (D_x f(0, \lambda_0)) \text{ für ein } a > 0.
\end{aligned}$$

Wir setzen voraus, daß $a = \frac{2\pi}{T_0}$ und $\sum(D_x f(0, \lambda_0)) \cap ai\mathbb{Z} = \{\pm ai\}$ ist. Für die abzweigenden periodischen Lösungen erwarten wir nach Beispiel I.7 die Periode $T = T_0 + w$, $|w|$ klein. Genau dann ist u eine (T_0+w)-periodische Lösung von $u' = f(u, \lambda + \lambda_0)$, wenn $x(t) = u(\frac{t}{2\pi}(T_0 + w))$ eine 2π-periodische Lösung von $x' = \frac{T_0+w}{2\pi} f(x, \lambda + \lambda_0)$ ist. Sei

$$\begin{aligned}
\sigma &= (w, \lambda) \in \mathbb{R}^2, |\sigma| \text{ klein}, \ \widetilde{f}(x, \sigma) = \frac{T_0 + w}{2\pi} f(x, \lambda + \lambda_0) \\
L &= D_x \widetilde{f}(0, 0) = \frac{T_0}{2\pi} D_x f(0, 0).
\end{aligned}$$

Dann ist $\{\pm i\} \subset \sum(L)$. Sei

$$\begin{aligned}
g(z, \sigma) &= z - x(2\pi, 0, z, \sigma) \\
A &= E - D_z x(2\pi, 0, 0, 0)
\end{aligned}$$

Nach Seite 95 ist $D_z x(2\pi, 0, 0, 0) = \Phi(t, 0) =$ Fundamentalsystem zu $y' = Ly = e^{2\pi L}$, also

$$A = E - e^{2\pi L}$$

Sei $B = D_\sigma D_z x(2\pi, 0, 0, 0)$. B ist dann eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$, die gegeben ist durch

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n \ni (w, \lambda) \times e \longmapsto w \frac{\partial}{\partial w} D_z x(2\pi, 0, 0, 0)e + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} D_z x(2\pi, 0, 0, 0)e = B(\sigma, e)$$

Sei wieder

$$N = \ker A$$

X.11.1 Annahme: *Wie schon erwähnt, soll mit* $\alpha = \frac{2\pi}{T_0}$ *gerade*

$$\sum (D_x f(0, \lambda_0)) \cap ai\mathbb{Z} = \{\pm ai\}$$

sein. Zusätzlich nehmen wir an, daß die geometrische Vielfachheit = Dimension der zugehörigen Eigenräume zu $\pm ai$ *gleich 1 ist, d. h.* $\ker(L \pm i)$ *ist eindimensional.*

Es gibt also ein linear unabhängiges $z \in \mathbb{C}^n$ mit $Lz = iz$. Also ist $\overline{z}$ linear unabhängiger Eigenvektor von L zu $-i : L\overline{z} = i\overline{z}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
& e^{2\pi L} z = e^{2\pi i} z = z, \ e^{2\pi L}\overline{z} = e^{-2\pi i}\overline{z} = \overline{z}, \\
& \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}^n \cap \ker A, \\
& \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \in \mathbb{R}^n \cap \ker A.
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{2}(z + \overline{z}), \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, ist $\dim \ker A \geq 2$. Nach X.11.1 ist 1 dann und nur dann Eigenwert von $e^{2\pi L}$, wenn $\pm i$ Eigenwert von L ist. Man muß jetzt noch beweisen, daß $\dim \ker A \leq 2$ ist: In Wahrheit zeigt man mit Hilfe des Funktionalkalküls und der eben erwähnten Annahme gleich, daß $\dim \ker A = 2$ ist.

Wir zerlegen wieder $\mathbb{R}^n = ImA \oplus R^\perp$ wie auf S. 93. Nach Seite 93 ist dann $\dim R = \dim N^\perp = \dim(\ker A)^\perp = n - 2$, also $\dim R^\perp = 2$. Die Ljapunov-Schmidt-Reduktion liefert jetzt eine Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= h(x_N, \sigma) \text{ mit } h : \ker A \times V = N \to R^\perp \\
h(0, \sigma) &= 0, D_{x_N} h(0, 0) = 0. \\
\text{Weiter ist } h(x_N, \sigma) &= h_0(x_N, \sigma) x_N \text{ mit } h_0(x_N, \sigma) : N \to R^\perp \text{ linear, da} \\
h(x_N, \sigma) &= h(x_N, \sigma) - h(0, \sigma) \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} h(tx_n, \sigma) dt = \underbrace{\left(\int_0^1 D_{x_N} h(tx_N, \sigma) dt\right)}_{=: h_0(x_n, \sigma)} x_N
\end{aligned}$$

Sei $V \supset [-\varepsilon,\varepsilon]\times[-\varepsilon,\varepsilon]$. Wir definieren ein $a \in C^{k-1}([-\varepsilon,\varepsilon]^2 \times [-\varepsilon,\varepsilon] \times \partial B_1^N(0), R^\perp)$, $\partial B_1^N(0) = \{x|x \in N, |x| = 1\}$ durch

$$a(\sigma, s, e) = h_0(se, \sigma)e.$$

Dann ist $h(x_N,\sigma) = 0$, $x_N \neq 0 \Leftrightarrow a(\sigma, |x_N|, \frac{x_N}{|x_N|}) = 0$, $x_N \neq 0$. Ferner ist $a(0,0,e) = h_0(0,0)e = 0$ wegen $D_{x_N}h(0,0) = 0$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} D_\sigma a(0,0,e)(.) &= D_0 h_0(0,0)(.,e) = (I-P)\int_0^1 D_\sigma D_{x_N} h(0,0)dt(.,e) \\ &= (E-P)D_\sigma D_{x_N} h(0,0)(.,e) = -(E-P)D_\sigma D_z x(2\pi,0,0,0)(.,e), \\ D_\sigma a(0,0,e) &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^\perp. \end{aligned}$$

Cauchysche Integralformel: f in $U \supset \Gamma$ holomorph

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma} \frac{f(z)}{z-1}dz$$

$\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Gamma \Rightarrow$

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma}\frac{f(\lambda)}{\lambda - \mathcal{A}}d\lambda \text{ mit } \frac{1}{\lambda-\mathcal{A}} = (\lambda - \mathcal{A})^{-1}$$

x Eigenvektor zu $\mathcal{A}$, etwa $\mathcal{A}x = \mu x \Rightarrow x$ Eigenvektor zu $f(\mathcal{A})$, $f(\mathcal{A})x = f(\mu)x$, $\sigma(f(\mathcal{A})) \supseteq f(\sigma(\mathcal{A}))$. Sei umgekehrt

$$f(\mathcal{A})y = \lambda y,\ y \neq 0$$

Dann ist y Eigenvektor zu $\mathcal{A}$, $\lambda \in f(\sigma(\mathcal{A}))$ und y ist Eigenvektor zu einem der Punkte $\mu \in f^{-1}(\lambda)$. Sind etwa $\mu_1, \ldots, \mu_r \in f^{-1}(\lambda)$, so ist

$$\dim\ker(\lambda - f(\mathcal{A})) = \sum_{\rho=1}^{r} \dim\ker(\mu_\rho - \mathcal{A}).$$

X.11.2 Annahme: *Wir nehmen an, daß für jedes $e \in N - \{0\}$, $|e| = 1$, ein Isomorphismus ist.*

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es wegen X.11.2 zu $(0,e)$ eine Umgebung $\{|s| < \widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\varepsilon}(e)\} \times \widetilde{U} = \widetilde{U}(e) = U(e) \cap \partial B_1^N(0)$, $U(e) \subset N$ offen, mit

$$a(\sigma, s, \omega) = 0 \Leftrightarrow \sigma = \lambda(s,\omega),\ \lambda = \lambda(e),\ (s,\omega) \in \{|s| < \widetilde{\varepsilon}\} \times \widetilde{U}.$$

Da $\partial B_1^N(0)$ kompakt ist, gibt es endlich viele solche $\widetilde{U}(e_i)$, die $\partial B_1^N(0)$ überdecken. Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}\min_i \widetilde{\varepsilon}(e_i)$. Also werden die Nullstellen von a auf $\{|s| \leq \varepsilon\} \times \partial B_1^N(0)$ durch eine einzige C^{k-1}-Funktion $\lambda = \lambda(s,e)$ beschrieben, da die $\lambda(e_i)$ sich wegen der Eindeutigkeit der Auflösung gegenseitig fortsetzen. Sei nun

$$\widehat{\sigma}(x_N) := \lambda(|x_N|, \frac{x_N}{|x_N|}) \text{ für } 0 < |x_N| \leq \varepsilon,\ x_N \in N.$$

Dann gilt: $h(x_N,\sigma) = 0 \Leftrightarrow \sigma = \widehat{\sigma}(x_N)$. Man hat im allgemeinen nur $\widehat{\sigma} \in C^{k-1}(B_\varepsilon^N(0) - \{0\}, \Lambda)$ und $t \longmapsto \widehat{\sigma}(te) \in C^{k-1}((-\varepsilon,\epsilon),\Lambda)$ für $e \in \partial B_1^n(0)$. $B_\varepsilon^N(0)$ definieren wir analog zu $B_1^N(0)$. Man kann nun zeigen, daß $\widehat{\sigma} \in C^{k-1}(B_\varepsilon^N(0),\Lambda)$ ist. Wir betrachten nun die Nullstellenmenge von $g(z,\sigma)$. Es ist

$$0 = h(x_N,\sigma) \overset{\text{lokal}}{\Leftrightarrow} g(x_N + \varphi(x_N,\sigma),\sigma) = 0,$$

wobei wir φ der Ljapunov-Schmidt-Reduktion entnehmen (Vgl. Seite 92,97). Also ist die Nullstellenmenge von $g(z,\sigma)$ lokal gegeben durch

$$(\{0\}\times\Lambda) \cup M,\ M = \{(\widehat{\sigma}(x_N), x_N + \varphi(\widehat{\sigma}(x_N), x_N)|x_N \in B_\varepsilon^N(0)\}.$$

Es ist $\varphi(0,\sigma) = 0$. (vgl. Seite 93). Damit folgt wie auf Seite 97, daß $\varphi(\widehat{\sigma}(x_N), x_N) = \widehat{y}(x_N)x_N$ ist mit einer linearen Abbildung $\widehat{y}(x_N) : N \to N^\perp$. Damit erhalten wir als Nullstellenmenge von $g(z,\sigma)$ lokal

$$(\{0\}\times\Lambda) \cup M,\ M = \{(\widehat{\sigma}(x_N), x_N + \widehat{y}(x_N)x_N|x_N \in B_\varepsilon^N(0)\}.$$

Für $(z,\sigma) \in M - \{0\}$ ist $x(t) = x(t,0,z,\sigma)$ nicht-kritische 2π-periodische Lösung von $x' = \widetilde{f}(x,\sigma)$. Es ist $(\sigma, x(t)) \in M - \{0\}$ nach III.18.

Wegen $\dim N = \dim\ker A$ steht uns noch eine andere Interpretationsmöglichkeit offen. Sei Q die orthogonale Projektion auf N, sei

$$\widehat{h}(x_N) = Q\widetilde{f}(x_N + \widehat{y}(x_N)x_N, \widehat{\sigma}(x_N))$$

Dann ist $Qx(t) =: x_N(t)$, $x(t)$ einer der eben konstruierten 2π-periodischen nichttrivialen Lösungen von $x' = \widetilde{f}(x,\sigma)$, Lösungen des ebenen autonomen Systems

$$x_N' = \widehat{h}(x_N).$$

Sei $x_1 + iy_1$ mit $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n$ Element von $\ker(L-i)$. Dann ist

$$\begin{aligned}&(L-i)(x_1+iy_1) = Lx_1 + iLy_1 - ix_1 + y_1 = 0, \text{ also}\\ &Lx_1 = -y_1, sx_1 \in N, s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Sei

$$\rho(sx_1) = Q\widetilde{f}(sx_1 + \widehat{y}(sx_1)sx_1, \widehat{\sigma}(sx_1)),\ |s| \text{ klein.}$$

Dann ist ($.' =$ Differentation nach s) für k

$$\begin{aligned}&\rho'(0) = QD_x\widetilde{f}(0,0)x_1 = QLx_1 = -Qy_1 = -y_1,\\ &\rho(sx_1) = -sy_1 + 0(s^2),\ |s| \text{ klein.}\end{aligned}$$

Nun interpretieren wir $\{\widetilde{s}x_1)||\widetilde{s}| \text{ klein }\}$ als transversalen Schnitt, indem wir beachten, daß $x_1, y_1 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ und über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind. Nach VII.4 hat die 2π-periodische Trajektorie $x_N(t)$ mit

$$x_N' = Q\widetilde{f}(x_N + \widehat{y}(x_N)sx_N, \widehat{\sigma}(x_N))$$

mit dem transversalen Schnitt $\{\widetilde{s}x_1||\widetilde{s}| \text{ klein}\}$ zunächst höchstens einen Punkt gemeinsam. Sei $0 < s < \varepsilon$. Startet x in $x(0) = sx_1 + \widehat{y}(sx_1)sx_1$, so erhalten wir also durch $x_N(t)$ eine Schar $\gamma(s)$ von 2π-periodischen Orbits, die den oben genannten transversalen Schnitt genau in sx_1 kreuzen.

Im nächsten Satz befassen wir uns mit den Annahmen X.11.1 und X.11.2.

X.11.3 Satz: *Sei $f \in C^k(\mathbb{R}^n \times \Lambda, \mathbb{R}^n)$ wie zu Beginn des Abschnitts X.11 eingeführt. Für ein $\lambda_0 \in \Lambda$ und ein $T_0 > 0$ habe $L = \frac{T_0}{2\pi} D_x f(0,\lambda_0)$ die folgenden Eigenschaften:*

i) *$\sigma(L) \cap i\mathbb{Z} = \{\pm i\}$, i und damit $-i$ sind geometrisch einfache Eigenwerte.*

ii) *$ker(L-i)$ werde durch $x_1 + iy_1$, $\ker(L^T + i)$ werde durch $x_2 + iy_2$ aufgespannt ($x_2, y_2 \in \ker A^T$, $x_1, y_1 \in \ker A$). Es sei*

$$0 \neq \det\begin{pmatrix} \langle x_2, y_1\rangle & \int_0^{2\pi}\langle e^{-tL^T}x_2, \frac{\partial}{\partial\lambda}D_x f(0,\lambda_0)e^{tL}x_1\rangle dt \\ \langle y_2, y_1\rangle & \int_0^{2\pi}\langle e^{-tL^T}y_2, \frac{\partial}{\partial\lambda}D_x f(0,\lambda_0)e^{tL}x_1\rangle dt\end{pmatrix}$$

Dann hat $x' = f(x,\lambda)$ in der Nähe von $(0,\lambda_0)$ eine Schar $\gamma(s)$ von nichtkritischen periodischen Orbits, d. h. es gibt $(y(.), T(.), \lambda(.)) \in C^{k-1}([0,\varepsilon], \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \times \wedge)$ mit:

$(y(0), T(0), \lambda(0)) = (0, T_0, \lambda_0)$,
durch $x(s) := sx_1 + sy(s)$ verläuft für
$0 < s \leq \varepsilon$ ein $T(s)$-periodischer Orbit,
der nichtkritisch ist.

Ohne Beweis merken wir an:

X.11.4 Lemma: *Zu $x_1 + iy_1 \in \ker(L-i)$ gibt es $x_2 + iy_2 \in \ker(L^T + i)$ mit*

$$\begin{aligned}\langle x_2, x_1\rangle &= \langle y_2, y_1\rangle = 1 \text{ und}\\ \langle x_2, y_1\rangle &= \langle x_1, y_2\rangle = 0.\end{aligned}$$

Als Konsequenz erhalten wir, daß die Determinantenbedingung in Satz X.11.3 sich auf

$$\int_0^{2\pi}\langle e^{-tL^T}x_2, \frac{\partial}{\partial\lambda}D_x f(0,\lambda_0)e^{tL}x_1\rangle dt \neq 0$$

reduziert.

Zum Beweis des Satzes X.11.3: $(E-P)B(.,e):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^\perp$ ist, wie man zeigen kann, genau dann ein Isomorphismus, wenn für eine Basis $\widehat{e}_1,\widehat{e}_2$ von $\ker A^T$ und eine Basis n_1,n_2 von $\mathbb{R}^2$ gilt

$$\det\begin{pmatrix}\langle\widehat{e}_1,B(n_1,e)\rangle & \langle\widehat{e}_1,B(n_2,e)\rangle\\ \langle\widehat{e}_2,B(n_1,e)\rangle & \langle\widehat{e}_2,B(n_2,e)\rangle\end{pmatrix}\neq 0.$$

Man kann zeigen, daß dies auf die Determinantenbedingung des Satzes führt. Wir nehmen die 2π-periodischen Lösungen x von $x'=\widetilde{f}(x,\sigma)$ auf Seite 99. Wir setzen

$$\begin{aligned}u(t) &= x\left(\frac{2\pi}{T_0+w}t\right)\\ x_N &= sx_1,\widehat{\sigma}(x_N)=\widehat{\sigma}(sx_1)=(w(sx_1),\widetilde{\lambda}(sx_1))^T=:(w(s),\widetilde{\lambda}(s))^T\\ T(s) &= T_0+w(s),\\ \lambda(s) &= \lambda_0+\widetilde{\lambda}(s),0\le s<\varepsilon,\end{aligned}$$

so daß $w(0)=\widetilde{\lambda}(0)$ entsteht, $w,\widetilde{\lambda}$ sind $(k-1)$-Mal stetig nach s differenzierbar. Es sei

$$\begin{aligned}u(0) &= x(0)=sx_1+s\widehat{y}(sx_1)x_1,y(s)=\widehat{y}(sx_1)x_1,\ \text{also}\\ u(0) &= sx_1+sy(s);s\ \text{beliebig in}\ (0,\varepsilon),\ \text{aber fest.}\end{aligned}$$

Da φ von der Klasse C^k ist, ist y bezüglich s von der Klasse C^{k-1} (vgl. Seite 92). Die $u(t)$ liefern, wenn wir s variieren lassen, die Orbits $\gamma(s)$.

X.11.4 Hilfssatz: *Sei $\Lambda\subset\mathbb{R}$ offen, $k\in\mathbb{N}$, $A\in C^k(\Lambda,\mathbb{R}^{n^2})$ und für $\lambda_0\in\Lambda$ sei μ_0 ein algebraisch einfacher Eigenwert von $A(\lambda_0)$ mit dem Eigenvektor y_0. In einer Umgebung $U(\lambda_0)$ von λ_0 gibt es genau einen Zweig von algebraisch einfachen Eigenwerten $\mu(\lambda)$ von $A(\lambda)$ mit den Eigenvektoren $y(\lambda)$, d.h.*

$$A(\lambda)y(\lambda)=\mu(\lambda)y(\lambda),$$

mit $y(\lambda_0)=y_0$, $\mu(\lambda_0)=\mu_0$. $\mu(.),y(.)$ sind von der Klasse C^k.

Mit diesem Hilfssatz läßt sich nachweisen, daß die Determinantenbedingung aus Satz X.11.3 genau dann erfüllt ist, wenn $Re\mu'(\lambda_0)\neq 0$ ist. Wir erhalten

X.11.5 Satz (Satz über Hopf-Verzweigung): *Sei $f\in C^k(\mathbb{R}^n\times\Lambda,\mathbb{R}^n)$ wie zu Beginn des Abschnitts X.11 eingeführt. Insbesondere sei $f(0,\lambda)=0,\lambda\in\Lambda$. Sei $\frac{2\pi i}{T_0}\mathbb{Z}\cap\sigma(D_xf(0,\lambda_0))=\{\pm\frac{2\pi i}{T_0}\}$ und die Eigenwerte $\pm\frac{2\pi i}{T_0}$ seien algebraisch einfach. Es sei $\mu(\lambda)$, $\lambda\in U(\lambda_0)$, der in $U(\lambda_0)$ eindeutig bestimmte Zweig von Eigenwerten von $D_xf(0,\lambda)$ mit $\mu(\lambda_0)=\frac{2\pi i}{T_0}$. Gilt dann*

$$Re\mu'(\lambda_0)\neq 0,$$

so findet Hopf-Verzweigung statt.

X.11.6 Beispiel: *$\Lambda\subset\mathbb{R}$ offen, $f:\Lambda\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.* $y''+y'(y^2-f(\lambda))-\lambda y+y^3=0$. Umformung in ein System liefert

$$x'=F(x,\lambda),\ F(x,\lambda)=\begin{pmatrix}x_2\\ -(x_1^2-f(\lambda))x_2+\lambda x_1-x_1^3\end{pmatrix},$$

insbesondere $F(0,\lambda)=0$.

Weiter ist

$$\begin{aligned}D_xF(0,\lambda)&=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \lambda & f(\lambda)\end{pmatrix},\\ \sigma(D_xF(0,\lambda))&=\left\{\frac{1}{2}f(\lambda)\pm\sqrt{\frac{1}{4}f(\lambda)^2+\lambda}\right\},\\ \sigma(D_xF(0,\lambda))\cap i\mathbb{R}&\neq\emptyset\Leftrightarrow f(\lambda)=0,\lambda<0,\end{aligned}$$

und im Fall $f(\lambda) = 0$, $\lambda < 0$ sind die Eigenwerte $\pm\sqrt{\lambda}$ algebraisch einfach. Sei also $\lambda_0 < 0$ In $U(\lambda_0)$ sind die jeweils zu $\pm\sqrt{\lambda_0}$ gehörigen eindeutig bestimmten Zweige algebraisch einfacher Eigenwerte

$$\begin{aligned} \mu^+(\lambda) &= \frac{1}{2}f(\lambda) + \sqrt{\frac{1}{4}f(\lambda)^2 + \lambda} \text{ mit } Re\,\mu^+(\lambda) = \frac{1}{2}f(\lambda), \\ \mu^-(\lambda) &= \frac{1}{2}f(\lambda) - \sqrt{\frac{1}{4}f(\lambda)^2\lambda} \text{ mit } Re\,\mu^-(\lambda) = \frac{1}{2}f(\lambda). \end{aligned}$$

Ist also $f'(\lambda_0) \neq 0$, so findet Hopf-Verzweigung statt.

Nullstellen von $F(x, \lambda)$ liegen auch in $x_2 = 0$, $x_1 = \pm\sqrt{\lambda}$, $\lambda \geq 0$.

Wir erhalten das folgende Bild:

Wir untersuchen jetzt die Verzweigung in diesen Nullstellen (sekundäre Verzweigung). Sei $F_{\text{neu}}(z, \lambda) = F(z \pm \sqrt{\lambda}e_1, \lambda)$. Löst z das System $z' = F_{\text{neu}}(z, \lambda)$, so löst $x = z \pm \sqrt{\lambda}e_1$ das System $x' = F(x, \lambda)$ und umgekehrt. Es ist $F_{\text{neu}}(0, \lambda) = 0$, $\lambda \in \wedge$,

$$\begin{aligned} F_{\text{neu}}(z, \lambda) &= \begin{pmatrix} z_2 \\ -((z_1 \pm \sqrt{\lambda})^2 - f(\lambda))z_2 + \lambda(z_1 \pm \sqrt{\lambda}) - (z_1 \pm \sqrt{\lambda})^3 \end{pmatrix}, \\ D_z F_{\text{neu}}(0, \lambda) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\lambda & f(\lambda) - \lambda \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so daß die Eigenwerte durch

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= \frac{f(\lambda) - \lambda}{2} + \sqrt{\left(\frac{f(\lambda) - \lambda}{2}\right)^2 - 2\lambda} \\ \mu_2(\lambda) &= \frac{f(\lambda) - \lambda}{2} - \sqrt{\left(\frac{f(\lambda) - \lambda}{2}\right)^2 - 2\lambda} \end{aligned}$$

gegeben sind. Zwei konjugiert komplexe, rein imaginäre Eigenwerte ergeben sich, wenn $\lambda_0 > 0$ Nullstelle von $f(\lambda) - \lambda$ ist. Dann ist

$$Re\mu'(\lambda) = \frac{1}{2}(f'(\lambda_0) - 1)$$

und ist z.B. $\neq 0$, wenn $f(\lambda) \equiv \lambda_0$ ist. In diesem Fall liegt Hopf-Verzweigung vor.