Vorlesung Funktionalanalysis III
IV. Hyperbolische Evolutionsgleichungen

§1. Hilfsbetrachtungen über Lipschitzstetige Abbildungen eines Intervalls in einen Banachraum

Obwohl die folgenden Betrachtungen später meist in einem Hilbertraum Anwendung finden, führen wir sie doch in einem Banachraum durch, da dies keinen Mehraufwand bedeutet.

Definition IV.1.1: *Sei $\alpha \in (0,1]$ eine fest vorgegebene Zahl. Für $\alpha \in (0,1)$ ist $C^\alpha(I,\mathcal{B})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Abbildungen f eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ in einen Banachraum $\mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften: Ist I von der Form $(a,b), [a,b), (a,+\infty), [a,+\infty), (a,b], (-\infty,b), (-\infty,b]$ oder einfach $(-\infty,+\infty)$, so ist*

$$\sup_{\substack{t,s\in K,\\ t\neq s}} \frac{||f(t)-f(s)||}{|t-s|^\alpha} < +\infty$$

für alle kompakten Teilmengen K von I. $||.||$ ist natürlich die Norm in $\mathcal{B}$. Ist I von der Form $[a,b]$, so verlangen wir

$$\sup_{\substack{t,s\in I\\ t\neq s}} \frac{||f(t)-f(s)||}{|t-s|^\alpha} < +\infty$$

Im Falle $\alpha = 1$ sind die Definitionen dieselben, doch schreiben wir dann $C^{0,1}(I,\mathcal{B})$, da $C^1(I,\mathcal{B})$ bereits für stetig differenzierbare Abbildungen verwendet wurde (s. meine Vorlesung Funktionalanalysis I, V.3).

Es ist klar, daß jedes Element aus $C^\alpha(I,\mathcal{B})$ bzw. $C^{0,1}(I,\mathcal{B})$ stetige Abbildung von I in $\mathcal{B}$ ist. Im Fall $I = [a,b]$ läßt sich $C^\alpha(I,\mathcal{B})$ bzw. $C^{0,1}(I,\mathcal{B})$ leicht zu einem Banachraum machen, indem man als Norm festsetzt:

$$||f||_{C^\alpha(I,\mathcal{B})} = \sup_{t\in I} ||f(t)|| + \sup_{\substack{t,s\in I\\ t\neq s}} \frac{||f(t)-f(s)||}{|t-s|^\alpha}.$$

Im Fall $\alpha = 1$ schreibt man für die rechte Seite $||f||_{C^{0,1}(I,\mathcal{B})}$. Nun gilt

Satz IV.1.1: *Sei $\mathcal{B}$ reflexiv. Sei $f \in C^{0,1}(I,\mathcal{B})$ mit $I = [a,b]$. Dann hat f fast überall eine schwache Ableitung f' (=Distributionsableitung) im Sinne von „Funktionalanalysis I“, V.3.5. Es gilt*

$$f' \in L^\infty(\mathring{I},\mathcal{B}),$$

$$||f'||_{L^\infty(\mathring{I},\mathcal{B}} \leq ||f||_{C^{0,1}(I,\mathcal{B})}.$$

Beweis: Wir setzen zunächst f auf $[a-1,b+1]$ fort, indem wir definieren

$$\begin{aligned} f(t) &= f(a),\ a-1 \leq t \leq a,\\ f(t) &= f(b),\ b \leq t \leq b+1. \end{aligned}$$

Die derart fortgesetzte Abbildung f wird ebenfalls mit f bezeichnet. Offenbar ist $f \in C^{0,1}([a-1,b+1],\mathcal{B})$. Für die Differenzenquotienten von f gilt

$$\frac{||f(s+h)-f(s)||}{|h|} \leq ||f||_{C^{0,1}([a-1,b+1],\mathcal{B}} \leq ||f||_{C^{0,1}(I,\mathcal{B})}, t \in I,\ h \neq 0, |h| < 1.$$

Weil $\mathcal{B}$ reflexiv ist, ist $L^\infty(I,\mathcal{B})$ der Dualraum von $L^1(I,\mathcal{B}^*)$ (siehe hierzu Funktionalanalysis I, Bemerkung V. 4.1,2). Daher gibt es eine Folge (h_ν) mit $|h_\nu| \in (0,1)$, $\nu \in \mathbb{N}$, und $h_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, derart, daß

$$\frac{f(.+h_\nu-f(.)}{h_\nu}\to g(.),\ \nu\to\infty,$$

schwach $*$ in $L^\infty(I,\mathcal{B})$ (siehe Funktionalanalysis I, Satz IV.3.5). Mit $<.,.>$ wird wieder die Dualität zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}^*$ bezeichnet. Sei $\psi\in C^1([a,b],\mathcal{B}^*)$, ψ besitze kompakten Träger in (a,b). Dann ist

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<\frac{f(s+h_\nu)-f(s)}{h_\nu},\psi(s)>ds=\int_a^b<g(s),\psi(s)>ds,$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<f(s+h_\nu)-f(s),\ \frac{1}{h_\nu}[\psi(s)-\psi(s+h_\nu)+\psi(s+h_\nu)]>ds.$$

Dabei entsteht die erste Gleichung folgendermaßen: Wenn J die natürliche Abbildung von $\mathcal{B}$ in B^{**} ist, wenn $<.,.>$ die Dualität zwischen $\mathcal{B}^*$ und B^{**} ist, so haben wir

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<\psi(s),\frac{Jf(s+h_\nu)-Jf(s)}{h_\nu}>ds=\int_a^b<\psi(s),Jg(s)>ds$$

mit $\frac{Jf(.+h_\nu)-Jf(.)}{h_\nu}\to Jg(.)$, $\nu\to\infty$, schwach $*$ in $L^\infty(I,\mathcal{B}^{**})$.

Man beachte hierzu, daß sich jedes Element H aus $(L^1(I,\mathcal{B}^*))^*$ auf eine und nur eine Weise in der Form

$$H(f)=\int_a^b<f(s),Jg(s)>ds$$

schreiben läßt mit $g\in L^\infty(I,\mathcal{B})$, $||H||_{(L^1(I,\mathcal{B}^*))^*}=||Jg||_{L^\infty(I,\mathcal{B}^{**})}=||g||_{L^\infty(I,\mathcal{B})}$ (vgl. Funktionalanalysis I, Bemerkung V.4.1,2, Satz V.4.4.).

Mit $<x,Jg>=Jg(x)=x(g)$, $x\in\mathcal{B}^*$, $g\in\mathcal{B}$, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b&<\psi(s),\frac{Jf(s+h_\nu)-Jf(s)}{h_\nu}>ds=\\ &=\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<\frac{f(s+h_\nu)-f(s)}{h_\nu},\psi(s)>ds,\\ &=\int_a^b<\psi(s),Jg(s)>ds,\\ &=\int_a^b<g(s),\psi(s)>ds.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<f(s+h_\nu)-f(s),\ \frac{1}{h_\nu}[\psi(s)-\psi(s+h_\nu)+\psi(s+h_\nu)]>ds$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b\frac{1}{h_\nu}(<f(s+h_\nu),\ \psi(s+h_\nu)>-<f(s),\psi(s)>)ds+\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b<f(s+h_\nu),\frac{\psi(s)-\psi(s+h_\nu)}{h_\nu}>ds,$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b\frac{1}{h_\nu}(<f(s+h_\nu),\psi(s+h_\nu)>-<f(s),\psi(s)>)ds-\int_0^T<f(s),\psi'(s)>ds.$$

Die Funktion $<f(.),\psi(.)>$ ist eine Lipschitzstetige Abbildung von $I=[a,b]$ in $\mathbb{C}$. Daher besitzt sie nach einem Satz von Rademacher fast überall eine Ableitung, die beschränkt ist, und der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt in diesem Fall. Daher folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_a^b\frac{1}{h_\nu}(<f(s+h_\nu),\psi(s+h_\nu)>-<f(s),\psi(s)>)ds,$$

$$=\int_a^b<f(.),\psi(.)>'(s)ds=<f(b),\psi(b)>-<f(a),\psi(a)>=0.$$

Für $\varphi\in\mathcal{D}(I)$ folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b < g(s), \varphi(s)v > ds &= -\int_a^b < f(s), \varphi'(s)v > ds,\ v \in \mathcal{B}^*,\\ < \int_a^b \varphi(s)g(s)ds, v > &= - < \int_a^b \varphi'(s)f(s)ds, v > ds,\ v \in \mathcal{B}^*,\\ \int_a^b \varphi(s)g(s)ds &= -\int_a^b \varphi'(s)f(s)ds.\end{aligned}$$

Nach V.5 ist somit g die Distributionsableitung von f. Nach dem erwähnten Satz von Rademacher ist $< f(.), v >$, $v \in \mathcal{B}^*$, in fast allen $s \in I$ differenzierbar mit schwacher Ableitung f'_w. Wir haben

$$< f(.), \varphi(.)v >' (s) =< f'_w(s), \varphi(s)v > + < f(s), \varphi'(s)v >$$

$$=< f'w(s), \varphi(s)v > - < g(s), \varphi(s)v >,\ \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Hieraus folgt

$$\int_a^b \varphi(s) < f'_w(s) - g(s), v > ds = 0,\ \varphi \in \mathcal{D}(I),\ v \in \mathcal{B}^*.$$

Hieraus folgt $f'_w = g$ fast überall in I. $\square$

Häufig benutzt wird im folgenden ein Resultat über partielle Integration, das wir so aussprechen:

Satz IV.1.2: *Sei $\mathcal{B}$ reflexiv. Sei $I = [a, b]$. Sei zu jedem $s \in I$ ein Operator $H(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

$$H(.)x \in C^0(I, \mathcal{B}),\ x \in \mathcal{B},$$
$$H(.)x \in C^1(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B}),\ x \in \mathcal{B};$$

mit $G(s)x = \frac{d}{ds}(H(.)x)(s)$ *gelte* $G(s) \in \mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, $s \in \overset{\circ}{I}$,

$$G(.)x \in C^0(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B}) \cap L^\infty(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B}),\ x \in \mathcal{B}.$$

Dann haben wir für alle $f \in C^{0,1}(I, \mathcal{B})$ *die folgende Formel:*

$$\begin{aligned}\int_a^b G(s)f(s)ds &= [H(s)f(s)]_a^b - \int_a^b H(s)f'(s)ds,\\ &= H(b)f(b) - H(a)f(a) - \int_a^b H(s)f'(s)ds.\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß nach Satz IV.1.1

$$f \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B}),$$

$$f' \in \bigcap_{p\geq 1} L^p(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B}).$$

Wählen wir irgendein $p \geq 1$, das im folgenden fest sein soll. Dann können wir f, f' in der folgenden Weise approximieren: Es gibt eine Folge (f_ν) mit

$$f_\nu \in C^1(I, \mathcal{B}),$$

$$f_\nu(t) = \sum_{\lambda=1}^{N(\nu)} \vartheta^(\nu)_\lambda(t)v_\lambda^{(\nu)},$$

$$f'_\nu(t) = \sum_{\lambda=1}^{N(\nu)} \vartheta'^{\nu}_\lambda(t)v_\lambda^{(\nu)},\ t \in I,\ \vartheta^\nu_\lambda \in C^1(I, \mathbb{C}),\ \nu \in \mathbb{N}, 1 \leq \lambda \leq N(\nu),$$

derart, daß $f_\nu \to f$, $f'_\nu \to f'$ in $L^p(\overset{\circ}{I}, \mathcal{B})$, $\nu \to \infty$. Wir können sogar verlagen, daß

$$f_\nu(a) = f(a), \ \nu \in \mathbb{N},$$

ist. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus „Funktionalanalysis I“, Satz V.5.1. Mit dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit folgt wegen $||G(s)x|| \leq M(x) < +\infty$, $s \in \overset{\circ}{I}$, sofort: $||G(s)|| \leq c$, $s \in \overset{\circ}{I}$, c eine positive Konstrante. Also gilt:

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b G(s) f_\nu(s) ds = \int_a^b G(s) f(s) ds.$$

In $\overset{\circ}{I}$ ist, wie man leicht zeigt, $H(.)f_\nu(.)$ stetig differenzierbar und

$$(H(.)f_\nu(.))'(s) = G(s) f_\nu(s) + H(s) f'_\nu(s).$$

Also haben wir

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} G(s) f_\nu(s) ds = [H(s) f_\nu(s)]_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} - \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} H(s) f'_\nu(s) ds,$$

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b-a)$, so daß wir durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Formel

$$\int_a^b G(s) f_\nu(s) ds = [H(s) f_\nu(s)]_a^b - \int_a^b H(s) f'_\nu(s) ds$$

gewinnen. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_a^b G(s) f(s) ds &= \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b G(s) f_\nu(s) ds, \\
&= \lim_{\nu\to\infty} ([H(s) f_\nu(s)]_a^b - \int_a^b H(s) f'_\nu(s) ds) \\
&= H(b) f(b) - H(a) f(a) - \int_a^b H(s) f'_\vartheta(s) ds.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Zunächst weisen wir darauf hin, daß uter den Voraussetzungen des Satze IV.1.2 es hinreichend ist, von f zu verlangen, daß

$$f \in L^p(I, \mathcal{B}),$$
$$f' \in L^p(I, \mathcal{B})$$

für ein $p \geq 1$. Man kann dann wieder den Approximationssatz V.5.1 aus „Funktionalanalysis I“verwenden. Sodann dürfen die operatorwertigen Funktionen H, G Singularitäten aufweisen, worauf jedoch erst im Zusammenhang mit parabolischen Gleichungen eingegangen werden soll.

§2. Lineare abstrakte Wellengleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten im Hilbertraum

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. A sei weiter strikt positiv definit, d. h.

$$(A\widetilde{f},\widetilde{f}) \geq \hat{c}||\widetilde{f}||^2,\ \widetilde{f} \in \mathcal{D}(A),$$

wobei wie üblich $(.,.)$ und $||.||$ Skalarprodukt und Norm in $\mathcal{H}$ sind; $\hat{c}$ ist eine positive Konstante. Wir interessieren uns für die Auflösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $u'' + Au = f.\text{.}',.''$ bedeuten erste und zweite Distributionsableitung für Abbildungen eines Intervalls I in $\mathcal{H}$ mit $I = [a,b])$ in $\mathcal{H}$; vorgegeben sind f als eine Abbildung von I in $\mathcal{H}$ und die Anfangswerte $u(a), u'(a)$. Die Auflösungsformel für das Cauchy-Problem gewöhnliche Differentialgleichungen $u'' + \lambda u = f$ liefert die Beweisidee für den folgenden Satz:

Satz IV.2.1: *Sei $T > 0$, seien*

$$\begin{gathered}\varphi \in \mathcal{D}(A),\\ \psi \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}),\\ f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H}).\end{gathered}$$

Dann gibt es ein und nur ein $u \in C^2([0,T],\mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{gathered}u(t) \in \mathcal{D}(A),\ t \in [0,T],\\ u'(t) \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}),\ t \in [0,T],\\ Au \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\\ Au' \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\\ u'' + Au = f \text{ in } [0,T],\\ u(0) = \varphi,\\ u'(0) = \psi.\end{gathered}$$

u besitzt die Darstellungsformel

(IV.2.1) $$u(t) = \cos A^{\frac{1}{2}}t\varphi + \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}\psi + \textstyle\int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f(s)ds,\ t \in [0,T].$$

Weiter gelten die folgenden Identitäten

(IV.2.2) $$||u'(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}u(t)||^2 = 2\textstyle\int_0^t Re(f(s),u'(s))ds + ||\psi||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}\varphi||^2,\ t \in [0,T],$$

(IV.2.3) $$||A^{\frac{1}{2}}u'(t)||^2 + ||Au(t)||^2 = 2Re[(f(s),Au(s))]_0^t - 2Re\textstyle\int_0^t (f'(s),Au(s))ds + ||A^{\frac{1}{2}}\psi||^2 + ||A\varphi||^2,$$

(IV.2.4) $$= 2Re(f(t),Au(t)) - 2Re(f(0),A\varphi) - 2\textstyle\int_0^t Re(f'(s),Au(s))ds + ||A^{\frac{1}{2}}\psi||^2 + ||A\varphi||^2,\ t \in [0,T],$$

die wir auch als erste und zweite Energiegleichung bezeichnen. Zur Definition der Operatorfunktionen $\cos A^{\frac{1}{2}}t$, $\sin A^{\frac{1}{2}}t$, $sinA^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}$ verweisen wir auf II.8.

Beweis: Sei

$$v_0(t) = \cos A^{\frac{1}{2}}t\varphi + \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}\psi.$$

Wir zeigen, daß v_0 das homogene Problem $u'' + Au = 0$, $u(0) = \varphi$, $u'(0) = \psi$ löst. Zunächst haben wir

$$v_0(0) = \varphi$$

wegen $\cos A^{\frac{1}{2}}0 = I$ (Identität), $\sin A^{\frac{1}{2}}0A^{-\frac{1}{2}} = 0$ (Nulloperator). Dann ist wegen

(IV.2.5) $\quad ||(\cos A^{\frac{1}{2}}t - \cos A^{\frac{1}{2}}t')\widetilde{\varphi}||^2 = \int_{\hat{c}/2}^{+\infty} |\cos\sqrt{\lambda}t - \cos\sqrt{\lambda}t'|^2 d(E(\lambda)\widetilde{\varphi},\widetilde{\varphi}),\ \widetilde{\varphi}\in\mathcal{H}, t, t'\in[0,T]$

jedenfalls $\cos A^{\frac{1}{2}}.\ \widetilde{\varphi}$ für alle $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{H}$ eine stetige Abbildung von $[0,T]$ in $\mathcal{H}$. Dies sieht man, indem man t' gegen t streben läßt und den Satz von der majorisierten Konvergenz anwendet. Zur genaueren Einsicht ist ein kurzer **Exkurs über das Spektralmaß** angebracht. Wir berufen uns hierfür auf [Bauer, Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie I, Sammlung Göschen, Band 1216/1216a]. Wir bezeichnen mit J^1 die Menge aller endlichen halboffenen Intervalle $[a,b)$ aus $\mathbb{R}$ (=$\emptyset$, falls $b\le a$). Sei $f\in\mathcal{H}$. Wir setzen

$$\mu_f([a,b)) = ((E(b-0)-E(a))f,f).$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{F}^1 = \{E|E \text{ hat eine Darstellung} E = \bigcup_{\nu<1}^{N} I_\nu,\ I_\nu\in J^1\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}^1$ ein Ring in $\mathbb{R}$. Die Abbildung $\mu_f : J^1 \to [0,+\infty)$ läßt sich auf eine und nur eine Weise zu einem Inhalt auf $\mathcal{F}^1$ fortsetzen. Dies liegt im wesentlichen daran, daß jedes Element E aus $\mathcal{F}^1$ eine Darstellung

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{N} I_\nu \text{ mit } \begin{array}{l} I_\nu\in J^1,\ 1\le\nu\le N \\ I_\nu\cap I_\kappa=\emptyset, \\ \nu\ne\kappa,\ 1\le\nu,\ \kappa\le N, \end{array}$$

besitzt. Man kann dann

$$\mu_f(E) = \sum_{\nu=1}^{N}\mu_f(I_\nu)$$

setzen und beweisen. daß μ_f ein Prämaß ist. Nun können wir μ_f auf die von $\mathcal{F}^1$ erzeugte σ- Algebra fortsetzen. Da J^1 durchschnittsstabil ist und es eine Folge von Mengen (E_n) in J^1 gibt mit $E_n\subset E_{n+1}$,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{=1}^{\infty} E_n,$$

ist diese Fortsetzung eindeutig bestimmt. Die von $\mathcal{F}^1$ erzeugte σ-Algebra ist die σ-Algebra $\mathcal{B}^1$ der Borelschen Mengen in $\mathbb{R}$. Sie wird bereits von J^1 erzeugt. Daher ist die Fortsetzung von μ_f auf $\mathcal{B}^1$ bereits eindeutig bestimmt. μ_f kann man noch vervollständigen, die Vervollständigung wird auch mit μ_f bezeichnet. Wegen

$$[a,b] = \bigcap_{\nu=1}^{\infty}[a,b+\frac{1}{\nu}),$$

der Monotonie und rechtsseitigen Stetigkeit von $(E(.)f,f),\ f\in\mathcal{H}$, erhält man mit der Stetigkeit von oben des Maßes μ_f die Formel

$$\begin{array}{l} ((E(b)-E(a))f,f) = \mu_f([a,b]), \text{ d. h.} \\ (E(\Delta)f,f) = \mu_f(\Delta) \text{ mit } \Delta=[a,b],\ f\in\mathcal{H} \end{array}$$

Sei $\varphi:\Delta\to\mathbb{C}$ stetig. Wir wollen zeigen, daß

$$\int_a^b \varphi(\lambda)d(E(\lambda)f,f) = \int_{\mathbb{R}}\varphi\cdot\chi_\Delta d\mu_f = \int_a^b \varphi d\mu_f$$

ist. Wenn wie in II.2, Definition II.2.3,

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{n}\Delta_j^{(n)},\ n\in\mathbb{N},$$

gesetzt wird mit nichtdegenerierenden abgeschlossenen Intervallen $\Delta_j^{(n)}$, für die gilt $\overset{\circ}{\Delta}{}_i^{(n)}\cap\overset{\circ}{\Delta}{}_j^{(n)}=\emptyset$, $i\ne j$, $1\le i,j\le n$, so ist

$$\int_a^b \varphi(\lambda) d(E(\lambda)f,f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \varphi(\widetilde{\lambda}_j^{(n)}) \cdot (E(\Delta_j^{(n)})f,f)$$

für irgendwelche $\widetilde{\lambda}_j^{(n)} \in \Delta_j^{(n)}$. Dabei wird natürlich angenommen, daß $\max\limits_{1\le j\le n} |\Delta_j^{(n)}| \to 0,\ n \to \infty$. Die letzte Summe formen wir um.

Sei $\Delta_j^{(n)} = [a_j^{(n)}, b_j^{(n)}]$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^n \varphi(\widetilde{\lambda}_j^{(n)})(E(\Delta_j^{(n)})f,f) = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(\widetilde{\lambda}_j^{(n)} \cdot \mu_f([a_j^{(n)}, b_j^{(n)})) + \varphi(\widetilde{\lambda}_n^{(n)})\mu_f(\Delta_n^{(n)}) + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(\widetilde{\lambda}_j^{(n)})\mu(b_j^{(n)}),$$

$$= \int_a^b (\sum_{j=1}^{n-1} \varphi(\widetilde{\lambda}_j^{(n)})\chi_{[a_j^{(n)}, b_j^{(n)})} + \varphi(\widetilde{\lambda}_u^{(n)})\chi_{\Delta_u^{(n)}})d\mu_f + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(\lambda_j^{(n)}) \cdot ((E(b_j^{(n)}) - E(b_j^{(n)} - 0))f,f).$$

Nun ist μ_f ein endliches Maß, wir haben nämlich $\mu_f(\mathbb{R}) = ||f||^2$; insbesondere sind die Konstanten sogar über $\mathbb{R}$ integrierbar. Daher konvergieren die letzten Integrale für $n \to \infty$ gegen

$$\int_a^b \varphi(\lambda) d\mu_f,$$

wie der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt. Als Funktion von beschränkter Variation ist $(E(.)f,f)$ in höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig. Wenn wir die Intervalle $\Delta_j^{(n)}$ so wählen, daß die $b_j^{(n)}$, $1 \le j \le n$, nicht in die Unstetigkeitspunkte von $(E(.)f,f)$ fallen, so verschwindet die letzte Summe. Also folgt in der Tat $\int_a^b \varphi(\lambda)d(E(\lambda)f,f) = \int_a^b \varphi(\lambda)d\mu_f$. Man überlegt sich nun leicht, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) d(E(\lambda)f,f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\lambda) d\mu_f$$

ist für alle $f \in \mathcal{D}(\varphi(A))$. Die Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz in (IV.2.5) ist also gerechtfertigt und zeigt

$$\cos A^{\frac{1}{2}} \cdot \widetilde{\varphi} \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0,\ \widetilde{\varphi} \in \mathcal{H}.$$

Ebenso beweist man

$$\sin A^{\frac{1}{2}} \cdot \widetilde{\varphi} \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0,\ \widetilde{\varphi} \in \mathcal{H},$$

$$\sin A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{-1/2}\widetilde{\varphi} \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{H}), \widetilde{T} > 0, \widetilde{\varphi} \in \mathcal{H}.$$

Für φ statt $\widetilde{\varphi}$ erhalten wir

$$|| \left(\frac{\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h) - \cos A^{\frac{1}{2}}t}{h} + \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{\frac{1}{2}} \right) \varphi||^2 = \int_{\widetilde{c}/2}^{+\infty} |\frac{\cos\sqrt{\lambda}(t+h) - \cos\sqrt{\lambda}t}{h} + \sin\sqrt{\lambda}t\sqrt{\lambda}|^2 d(E(\lambda)\varphi,\varphi),\ h \neq 0.$$

Für $h \to 0$ ergibt sich mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\cos A^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi \in C^1([0,\widetilde{T}], \mathcal{H}), \widetilde{T} > 0,$$

$$\frac{d}{dt}(\cos A^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi)(t) = -\sin A^{\frac{1}{2}}tA^{\frac{1}{2}}\varphi.$$

Insgesamt folgt, daß v_0 Lösung von $u'' + Au = 0$ ist und neben den im Satz angegebenen Regularitätseigenschaften auch noch die vorgeschriebenen Anfangswerte besitzt, d.h.

$$v_0(0) = \varphi,\ v_0'(0) = \psi.$$

Es bleibt die Untersuchung des Terms

$$v_1(t) = \int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f(s)ds.$$

Wir halten t fest und setzen

$$\begin{aligned} G(s) &= \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}} \\ H(s) &= \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-1}. \end{aligned}$$

Nach Satz IV.1.2 folgt

$$\int_0^t \sin A\frac{1}{2}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f(s)ds = \cos A^{\frac{1}{2}}\cdot 0A^{-1}f(t) - \cos A^{\frac{1}{2}}tA^{-1}f(0) - \int_0^t \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-1}f'(s)ds$$

Für $t=0$ ist $v_1(0)=0$. Differentiation nach t ergibt die folgenden Formeln

$$\text{(IV.2.6)} \quad v_1'(t) = \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}f(0) + \cos A^{\frac{1}{2}}\cdot 0A^{-1}f'(t) - \cos A^{\frac{1}{2}}\cdot 0A^{-1}f'(t) + \textstyle\int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f'(s)ds,$$

$$\text{(IV.2.7)} \quad = \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}f(0) + \textstyle\int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f'(s)ds \text{ für fast alle } t\in[0,T].$$

Hierbei verfährt man mit dem Integralterm wie folgt:

$$\frac{1}{h}\Big(\int_0^{t+h}\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s)A^{-1}f'(s)ds - \int_0^t \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-1}f'(s)ds\Big)$$

$$= \frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h}\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s)A^{-1}f'(s)ds\Big) + \frac{1}{h}\int_0^t (\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s) - \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s))A^{-1}f'(s)ds,$$

$$t\in[0,T), T-t>h>0.$$

Nun haben wir

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s)A^{-1}f'(s)ds = \frac{1}{h}\Big(\int_t^{t+h}(\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s) - \cos A^{\frac{1}{2}}0)\cdot A^{-1}f'(s)ds + \cos A^{\frac{1}{2}}0A^{-1}\int_t^{t+h}f'(s)ds\Big)$$

Für den ersten Integranden erhalten wir

$$||(\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s) - \cos A^{\frac{1}{2}})A^{-1}f'(s)||^2 \le c||(\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s) - \cos A^{\frac{1}{2}}0)A^{-1}||^2,$$

$$\le c \sup_{\substack{\lambda\ge\hat{c}/2,\\ t\le s\le t+h}} \Big|\frac{\cos\sqrt{\lambda}(t+h-s) - \cos\sqrt{\lambda}\cdot 0}{\lambda}\Big|^2,$$

$$\le c(\hat{c})\Big(\frac{1}{\lambda}2h\sqrt{\lambda}\Big)^2 = c(\hat{c})h^2\frac{1}{\lambda}$$

nach dem Mittelwertsatz. Also konvergiert das erste Integral rechts in der vorletzten Gleichung auch nach Multiplikation mit $1/h$ und gegen Null, falls h gegen Null strebt. Für das zweite Integral in der vorletzten Gleichung rechts folgt nach „Funktionalanalysis I“die Formel

$$\frac{1}{h}\cos A^{\frac{1}{2}}\cdot 0A^{-1}\int_t^{t+h}f'(s)ds = \frac{1}{h}A^{-1}(f(t+h)-f(t)) = A^{-1}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert jedoch nach Satz IV.1.1 für fast alle $t\in(0,T)$ schwach gegen $A^{-1}f'(t)$, falls $h\to 0$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhält man

$$\frac{1}{h}\int_0^t (\cos A^{\frac{1}{2}}(t+h-s) - \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s))A^{-1}f'(s)ds \to -\int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}f'(s)ds \text{ in } \mathcal{H},\ h\to 0,$$

$$\text{für jedes feste } t\in(0,T).$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Formel (IV.2.6) in der Tat fast überall in $(0,T)$, und damit in $[0,T]$, gilt, wenn $v_1'(t)$ als punktweise schwache Ableitung von v_1 interpretiert wird. Nach Formel (IV.2.7) ist jedoch

$$v_1' \in C^0([0,T],\mathcal{H})$$

Für jedes $g \in \mathcal{H}$ ist demnach $(v_1(.), g)$ fast überall in $(0, T)$ differenzierbar und die Ableitung ist stetig in $[0, T]$; genauer müßten wir in den beiden letzten Aussagen sagen: v_1' bzw. $(v_1(.), g)'(.)$ stimmen mit auf $[0, T]$ stetigen Abbildungen überein. Eine Durchsicht der Abschätzungen des Differenzenquotienten $\frac{1}{h}(v_1(t+h) - v_1(t))$ auf den Seiten 7 bis 8 zeigt, daß

$$v_1 \in C^{0,1}([0, T], \mathcal{H})$$

ist. Insbesondere ist $(v_1(.), g)$ absolut stetig, wir haben

$$(v_1(t) - v_1(0), g) = \int_0^t \frac{d}{ds}(v_1(.), g)(s) ds, \ g \in \mathcal{H},$$

also

$$\begin{aligned} (v_1(t) - v_1(0), g) &= \int_0^t (v_1'(s), g) ds, \\ &= (\int_0^t v_1'(s) ds, g), \ g \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

so daß

$$v_1(t) = \int_0^t v_1'(s) ds + v(0),$$

$$v_1 \in C^1([0, T), \mathcal{H})$$

entsteht. Wiederholung der vorhergehenden Argumentation liefert mit (IV.2.7)

$$v_1 \in C^2([0, T], \mathcal{H})$$

(IV.2.8)
$$v_1^{''}(t) = \cos A^{\frac{1}{2}} t f(0) + \int_0^t \cos A^{\frac{1}{2}}(t-s) f'(s) ds, \ t \in [0, T].$$

Aus der Formel für v_1 auf S. 7 und 8 sowie aus (IV.2.6), (IV.2.8) folgt, daß v_1 Lösung von $u'' + Au = f$ ist mit den im Satz angegebenen Regularitätseigenschaften. Außerdem ist $v_1(0) = 0$, $v_1'(0) = 0$. Also ist durch (IV.2.1) jedenfalls eine Lösung von $u'' + Au = f$ mit $u(0) = \varphi$, $u'(0) = \psi$ gegeben mit den im Satz angegebenen Regularitätseigenschaften. Aus (IV.2.2) folgt sofort, daß es auch die einzige ist. Wir zeigen daher (IV.2.2). Skalarmultiplikation von $u'' + Au = f$ mit u' liefert

(IV.2.9)
$$(u'', u') + (Au, u') = (f, u') \text{ in } [0, T].$$

Nun ist

$$\frac{d}{dt}||u'(.)||^2(t) = 2Re(u''(t), u'(t))$$

$$\begin{aligned} Au(t), u'(t) &= \lim_{\substack{h \neq 0, \\ h \to 0}} \frac{(Au(t), u(t+h)) - (Au(t), u(t))}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \neq 0, \\ h \to 0}} \frac{(A^{\frac{1}{2}} u(t), A^{\frac{1}{2}} u(t+h)) - (A^{\frac{1}{2}} u(t), A^{\frac{1}{2}} u(t))}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{h \neq 0, \\ h \to 0}} [\frac{(A^{\frac{1}{2}} u(t+h), A^{\frac{1}{2}} u(t+h))}{h} - \frac{(A^{\frac{1}{2}} u(t), A^{\frac{1}{2}} u(t))}{h} + \frac{(A^{\frac{1}{2}} u(t) - A^{\frac{1}{2}} u(t+h), A^{\frac{1}{2}} u(t+h))}{h}],$$

$$= \lim_{\substack{h \neq 0, \\ h \to 0}} [\frac{||A^{\frac{1}{2}} u(t+h)||^2 - ||A^{\frac{1}{2}} u(t)||^2}{h} + \frac{u(t) - u(t+h), \ Au(t+h)}{h}],$$

$$= \lim_{\substack{h \neq 0, \\ h \to 0}} \frac{||A^{\frac{1}{2}} u(t+h)||^2 - ||A^{\frac{1}{2}} u(t)||^2}{h} - (u'(t) - Au(t)),$$

also

$$\frac{d}{dt}||A^{\frac{1}{2}} u(.)||^2(t) = 2Re(Au(t), u'(t)).$$

Insbesondere sind $||u'(.)||^2$, $||A^{\frac{1}{2}}u(.)||^2$ stetig differenzierbar in $[0,T]$. Geht man daher in (IV.2.9) auf beiden Seiten zu den doppelten Realteilen über und integriert von 0 bis t, so folgt (IV.2.2). Der Beweis von (IV.2.3) bzw. (IV.2.4) erfordert einen kleinen Kunstgriff. Wir betrachten den Operator e^{-tA}, $t \geq 0$, den wir gemäß II.8 durch

$$e^{-tA}x = \int_{\hat{c}/2}^{+\infty} e^{-\lambda t} dE(\lambda)x, \ t \geq 0$$

definieren. Man beachte, daß für $t > 0$ wegen $e^{-\lambda t} \to 0$, $\lambda \to +\infty$, das Integral $\int_{\hat{c}/2}^{+\infty} e^{-\lambda t} dE(\lambda)$ sogar in der Norm von $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ konvergiert. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhält man

$$e^{-tA}x \to x, \ t \to 0, \ \text{in } \mathcal{H}. \tag{IV.2.10}$$

Endlich ist $A^\nu e^{-tA} \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $\nu \in \mathbb{N}$, $t > 0$, und

$$||A^\nu e^{-tA}|| \leq \sup_{\lambda \geq \hat{c}/2} |e^{-\lambda t}\lambda^\nu| \leq \frac{c}{t^\nu}. \tag{IV.2.11}$$

Löst nun u die Gleichung $u'' + Au = f$ in $[0,T]$ wie im Satz angegeben, so folgt wegen der Vertauschbarkeit der Differentiation nach t mit $e^{-(1/\nu)A}$ und der Vertauschbarkeit von $e^{-(1/\nu)A}$ mit A, daß $e^{-(1/\nu)A}u$ Lösung von

$$\begin{aligned} u'' + Au &= e^{-(1/\nu)A}f, \\ u(0) &= e^{-(1/\nu)A}\varphi, \\ u'(0) &= e^{-(1/\nu)A}\psi \end{aligned}$$

ist. Insbesondere ist mit $u_\nu = e^{-(1/\nu)A}u$

$$\frac{d^j}{dt^j}u_\nu(t) \in \bigcap_{\lambda \in \mathbb{N}} D(A^\lambda), \ j = 0,1,2, \ t \in [0,T],$$

$$A^\lambda \frac{d^j}{dt^j}u_\nu \in C^0([0,T],\mathcal{H}), \ \lambda \in \mathbb{N}, \ j = 0,1,2.$$

Die Gleichung $u_\nu'' + Au_\nu = e^{-(1/\nu)A}f$ wird skalar mit Au_ν' multipliziert. Dies liefert

$$2Re(u_\nu'', Au_\nu') + 2Re(Au_\nu, Au_\nu') = 2Re(e^{-(1/\nu)A}f, Au_\nu').$$

Wie schon gezeigt, ist

$$2Re(u_\nu'', Au_\nu') = \frac{d}{dt}||A^{\frac{1}{2}}u_\nu'||^2.$$

Wir haben weiter für alle $f \in \mathcal{D}(A)$, $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} (Au_\nu(t) - Au_\nu(0), f) &= (u_\nu(t) - u_\nu(0), Af), \\ &= (\int_0^t u_\nu'(s)ds, Af), \\ &= \int_0^t (u_\nu'(s), Af)ds, \\ &= \int_0^t (Au_\nu'(s), f)ds, \\ &= (\int_0^t Au_\nu'(s)ds, f). \end{aligned}$$

Da jedoch $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt

$$Au_\nu(t) - Au_\nu(0) = \int_0^t Au_\nu'(s)ds, \tag{IV.2.12}$$

$$Au_\nu \in C^1([0,T],\mathcal{H}),$$

$$(Au_\nu)'(t) = Au'_\nu(t).$$

Dies liefert

$$2Re(Au_\nu, Au'_\nu) = \frac{d}{dt}||Au_\nu||^2.$$

Somit folgt

$$\frac{d}{dt}||A^{\frac{1}{2}}u'_\nu(.)||^2(t) + \frac{d}{dt}||Au_\nu(.)||^2(t) = 2Re(f(t), Au'_\nu(t)),\ t \in [0,T],$$

woraus durch Integration von 0 bis t die Relation

$$\text{(IV.2.13)}\quad ||A^{\frac{1}{2}}u'_\nu(t)||^2 + ||Au_\nu(t)||^2 = \int_0^t 2Re(e^{-(1/\nu)A}f(s), Au'_\nu(s))ds + ||A^{\frac{1}{2}}e^{-(1/\nu)A}\psi||^2 + ||Ae^{-(1/\nu)A}\varphi||^2$$

entsteht. Auf den letzten Integralterm wenden wir partielle Integration an. Sinngemäße Übertragung der Argumentation auf S. 4 liefert

$$\int_0^t 2Re(e^{-(1/\nu)A}f(s), Au'_\nu(s))ds = 2Re\int_0^t (e^{-(1/\nu)A}f(s),\ Au'_\nu(s))ds,$$

$$= 2Re([(e^{-(1/\nu)A}f(s), Au_\nu(s))]_0^t - \int_0^t (e^{-(1/\nu)A}f'(s),\ Au_\nu(s))ds).$$

Insgesamt folgt aus (IV.2.12)

$$(e^{-(1/\nu)A}A^{1/2}u'(t)||^2 + ||e^{-(1/\nu)A}Au(t)||^2 = 2Re([(e^{-(1/\nu)A}f(s),$$

$$e^{-(1/\nu)}Au(s))]_0^t - \int_0^t (e^{-(1/\nu)A}f'(s),\ e^{-(1/\nu)A}Au(s))ds).$$

Nun lassen wir ν gegen $+\infty$ streben. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgen (IV.2.3) und (IV.2.4). □

Wir hatten in Satz IV.2.1 angenommen, daß A strikt positiv definit ist. Es ist jedoch ausreichend, anzunehmen, daß $(Au,u) \geq -\widehat{c}||u||^2$, $u \in \mathcal{D}(A)$, ist mit einer Konstanten $\widehat{c} \geq 0$. Dann betrachtet man statt $u'' + Au = f$ die Gleichung $u'' + (A + \widehat{c} + 1)u = f + (\widehat{c} + 1)u$ und kann für diese ein Analogon zu Satz IV.2.1 beweisen, bei dem A durch den strikt positiven Operator $A + \widehat{c} + 1$ ersetzt wird. Wir kommen daruf im Zusammenhang mit semilinearen Problemen zu sprechen.

Es sei ferner bemerkt, daß für Satz IV.2.1 bereits die Voraussetzungen

$$f \in L^1((0,T),\mathcal{H})$$
$$f' \in L^1((0,T),\mathcal{H})$$

ausreichen; übrigens folgt hieraus $f \in C^0([0,T],\mathcal{H})$, f' ist natürlich die Distributionsableitung von f.

§3. Anwendungen des abstrakten Resultats aus §2

Wir studieren hier Wellengleichungen der Form $u'' + Au = f$ über einem zylindrischen Gebiet $[0,T] \times \Omega$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dabei ist A ein elliptischer Operator (elliptisches System) der Ordnung $2m$, auf $[0,T] \times \partial\Omega$ bzw. in $\{0\} \times \Omega$ sind gewisse Rand- bzw. Randanfangswerte vorgeschrieben. Die Randwerte können allerdings erst bei einer gewissen Regularität des Randes im Sinne des Spuroperators interpretiert werden, während man sich für beliebiges offenes Ω auf die Aussage $u(t) \in V$, $0 \leq t \leq T$, beschränken muß. V ist dabei im Sinn von III.4 zu verstehen. Wir präzisieren zunächst unsere Voraussetzungen bezüglich A.

Voraussetzung IV.3.1: Ω *sei eine offene Menge des* $\mathbb{R}^n (\Omega = \mathbb{R}^n$ *ist zugelassen). Seien* $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. *Zu* $x \in \Omega$ *und je zwei Multiindizes* α, β *des* $\mathbb{R}^n$ *mit* $|\alpha|, |\beta| \leq m$ *sei eine* $N \times N$*-Matrix* $a_{\alpha\beta}(x)$ *gegeben. Die Abbildung* $a_{\alpha\beta}$ *von* Ω *in die* $N \times N$*-Matrizen besitze folgende Eigenschaften:*

$$a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega),\ D^\gamma a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega),\ |\gamma| \leq |\alpha|,\ |\alpha|, |\beta| \leq m,$$

$$a_{\alpha\beta}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}(x),\ x \in \Omega, |\alpha|, |\beta| \leq m.$$

Sei V *ein abgeschlossener Unterrraum von* $H^m(\Omega)$ *mit* $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \subset V$*; für alle* $u, v \in V$ *sei wie in III.4*

$$B(u,v) = (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha| \leq m, \\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|-m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(.) D^\beta u D^\alpha v > dx$$

gesetzt (Erinnerung: Wir schreiben zur Vereinfachung $H^m(\Omega)$ *statt* $(H^m(\Omega))^N$ *usw.,* $< .,. >$ *ist das* $\mathbb{C}^N$*-Skalarprodukt). Von der Sesquilinearform* $B : V \times V \to \mathbb{C}$ *verlangen wir:*

$$\text{(IV.3.1)} \qquad B(v,v) \geq c||v||_V^2 = c||v||_m^2,\ v \in V,$$

mit einer positiven Konstante c. *Endlich sei für jedes Kompaktum* $K \subset \Omega$

$$\text{(IV.3.2)} \qquad |\det \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| = m}} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta| \geq (1/c_E(K))|\xi|^{2m \cdot N},\ \ x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer positiven Konstanten $(1/c_E(K))$.

Nach Satz III.4.4 ist

$$Au = \mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha| = m, \\ |\beta| \leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.) D^\beta u),\ u \in H^{2m}_{loc}(\Omega),$$

eingeschränkt auf $\mathcal{D}(A) = \{u | u \in V \cap H^{2m}_{loc}(\Omega),\ Au \in L^2(\Omega),\ B(u,v) = (Au, v),\ \ v \in V\}$ ein strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ gegeben mit

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = V,$$

$$(1/c)||u||_V = (1/c)||u||_m \leq ||A^{\frac{1}{2}} u|| \leq c||u||_m = c||u||_V.$$

Wir merken an, daß gemäß Problem III.4.1 für diese Aussage bereits die Regularitätsannahme $a_{\alpha\beta} \in C^{2m}(\Omega)$ statt $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega)$ hinreichend ist. Nach meiner Vorlesung **Klass. Randwertprobleme...,** Problem IV.4.1, ist sogar die Annahme $a_{\alpha\beta} \in C^m(\Omega)$ hinreichend. Damit erhalten wir

Satz IV.3.1: *Es gelte Voraussetzung IV.3.1. Sei* A *der eben eingeführte selbstadjungierte Operator in* $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. *Seien* $T > 0$,

$$\begin{aligned}
&f \in C^{0,1}([0,T], L^2(\Omega)),\\
&\varphi \in \mathcal{D}(A),\\
&\psi \in V = \mathcal{D}(A^{1/2}).
\end{aligned}$$

Dann gibt es ein und nur ein $u \in C^2([0,T], L^2(\Omega))$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&u(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \le t \le T,\\
&u'(t) \in V = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}),\ 0 \le t \le T,\\
&Au \in C^0([0,T], L^2(\Omega)),\\
&u \in C^1([0,T], V),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'' + Au &= f \ in\ [0,T],\\
u(0) &= \varphi,\ u'(0) = \psi.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{D}(A) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$ gilt für jedes $t \in [0,T]$ und fast alle $x \in \Omega$ die folgende punktweise Gleichung

$$\text{(IV.3.3)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) + \sum_{\substack{|\alpha| \le m,\\ |\beta| \le m}} D^\alpha (a_{\alpha\beta}(.) D^\beta u(.,.))(t,x) = f(t,x).$$

Hierbei sind $\partial^2./\partial t^2$, $D^\alpha.$, $D^\beta.$ die Distributionsableitungen über $(0,T) \times \Omega$, die sich bei D^α, D^β nur auf die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ beziehen.

Bevor wir zum (kurzen) Beweis kommen eine Bemerkung zum vorhergehenden Satz. Der Vorteil des von uns gewählten Zugangs liegt darin, daß ohne irgendeine Voraussetzung an dem Rand bereits eine punktweise Aufstellung der Gleichung (IV.3.3) möglich ist. Falls $\partial\Omega$ bei beschränktem Ω der Regularitätsklasse C^{2m+1} angehört, so ist sogar $u(t) \in H^{2m}(\Omega)$ und die durch V implizierten Randbedingungen lassen sich im Sinn des Spuroperators interpretieren. Auf diesen Fall gehen wir gleich am Beispiel der schwingenden Platte ein.

Beweis des Satzes IV.3.1: Der erste Teil folgt im wesentlichen aus Satz IV.2.1. Nur die Aussage $u \in C^1([0,T], V)$ bedarf noch einer Begründung. Auf Grund von Satz IV.2.1 ist bereits bekannt, daß

$$A^{1/2} u' \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$$

ist. Wie auf den Seiten 10 und 11 folgert man hieraus

$$A^{1/2} u \in C^1([0,T], L^2(\Omega)).$$

Da die V-Norm mit der Norm $||A^{1/2}.||$ äquivalent ist, entsteht in der Tat

$$u \in C^1([0,T], V).$$

Zur punktweisen Interpretation unseres Resultats setzen wir

$$u(t,x) = u(t)(x)$$

Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$, $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, gilt

$$u \in C^0([0,T], H^{2m}(\overset{\circ}{K})).$$

Sei $\psi \in C_0^\infty((0,T) \times \Omega)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{(0,T)\times\Omega} (-1)^{|\widetilde{\alpha}|} \langle u(t,x) D^{\widetilde{\alpha}} \psi(t,x) \rangle dxdt &= (-1)^{2|\widetilde{\alpha}|} \int_0^T \int_\Omega \langle D^{\widetilde{\alpha}} u(t)(x),\ \psi(t,x) \rangle dxdt,\\
&= \sum_{(0,T)\times\Omega} \langle D^{\widetilde{\alpha}} u(t)(x), \psi(t,x) \rangle dxdt,\ |\widetilde{\alpha}| \le 2m.
\end{aligned}$$

$\widetilde{\alpha}$ ist dabei ein Multiindex des $\mathbb{R}^n$, bei dem sich $D^{\widetilde{\alpha}}$ nur auf $x_1, \ldots, x_n$ bezieht. Somit ist $D^{\widetilde{\alpha}} u(t)(x)$ die schwache Ableitung (Distributionsableitung) von u der Ordnung $\widetilde{\alpha}$ über $(0,T) \times \Omega$. Mit $\psi(t)(x) = \psi(t,x)$ folgt ($(.,.)$ = Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$)

$$\begin{aligned}\int_0^T (\frac{d^2u}{dt^2}(s), \psi(s))ds &= \int_0^T (u(s), \frac{d^2}{dt^2}\psi(s))ds \\ &= \int_0^T \int_\Omega \langle u(s,x), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(s,x)\rangle dxds.\end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^T (\frac{d^2u}{dt^2}(s), \psi(s))ds = \int_0^T \int_\Omega \langle \frac{d^2u}{dt^2}(s)(x), \psi(s,x)\rangle dxds,$$

so daß wir endlich erhalten

$$\int_{(0,T)\times\Omega} \langle \frac{d^2u}{dt^2}(s)(x), \psi(s,x)\rangle dxdt = \int_{(0,T)\times\Omega} \langle u(s,x), \frac{d^2}{dt^2}\psi(s,x)\rangle dxds.$$

Damit ist Satz IV.3.1 bewiesen. □

Der folgende Satz über die teilweise freie, teilweise fest eingespannte schwingende dünne Platte ist im wesentlichen eine Konsequenz aus Satz IV.3.1. Die Schwingungsleichung ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u + \Delta^2 u = f.$$

Diese Gleichung beschreibt die vertikale Auslenkung $u(t,x)$ der Platte zur Zeit t und im Punkte $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, wobei Ω die Platte in der Ruhelage darstellt, unter dem Einfluß einer äußeren Kraft f. Die Anfangsauslenkung $u(0,x) = \varphi(x)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $u_t(0,x) = \psi(x)$ sind vorgeschrieben, auf einem Teil $\partial\Omega_1$ von $\partial\Omega$ verlangen wir $u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial u} = 0$, auf dem Rest $\partial\Omega_2$ soll

$$\frac{\partial}{\partial_\nu}\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial\nu\partial s} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0,\ s = \text{ Bogenlänge},$$

sein (σ eine Konstante aus (-1, +1)). Unser Ergebnis hierzu ist

Satz IV.3.2: *Sei Ω eine offene beschränkte Punktmenge des $\mathbb{R}^2$, sei*

$$\partial\Omega = \bigcup_{\nu=1}^{N} |\Gamma_\nu|$$

mit positiv durchlaufenen einfach geschlossenem (= Jordankurven) Γ_ν die fünf Mal stetig differenzierbar sind und paarweise disjunkte Spuren haben, und mit einem $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$.

Sei

$$\partial\Omega_1 = \bigcup_{\nu=1}^{M} |\Gamma_\nu|,\ \partial\Omega_2 = \bigcup_{\nu=M+1}^{N} |\Gamma_\nu|.$$

Sei $\sigma \in (-1,+1)$ eine Konstante,

$$\begin{aligned}Au = \Delta^2 u,\ u \in \mathcal{D}(A) \quad = \quad & \{u | u \in H^4(\Omega), \\ & u = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \textit{ in } \partial\Omega_1 \\ & \frac{\partial}{\partial\nu}\Delta u + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial\nu\partial s} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial\nu^2} + \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0 \textit{ in } \partial\Omega_2, \\ & \textit{alles im Sinn des Spuroperators}\}\end{aligned}$$

Dann ist A ein strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator in $L^2(\Omega)$ mit

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = V = \{u | u \in H^2(\Omega), u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \textit{in } \partial\Omega_1 \textit{ im Sinn des Spuroperators.}$$

ν ist hier die innere Normale an $\partial\Omega$. Seien

$$\begin{aligned}
&\varphi \in \mathcal{D}(A)\\
&\psi \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = V\\
&f \in C^{0,1}([0,T], L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Dann gibt es genau ein $u \in C^2([0,T], L^2(\Omega))$ mit folgenden Eigenschaften:

$$u(t) \in \mathcal{D}(A), 0 \le t \le T,\ Au \in C^0([0,T], L^2(\Omega)),$$

$$u'(t) \in V = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ 0 \le t \le T,\ u \in C^1([0,T], V),$$

$$\begin{aligned}
u'' + Au &= f \text{ in } [0,T]\\
u(0) &= \varphi,\\
u'(0) &= \psi.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) = f(t,x)$$

fast überall in $(0,T) \times \Omega$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Δ^2. sind im Sinn der Distributionsableitungen von u über $(0,T) \times \Omega$ zu verstehen, $\Delta^2 u = \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$ bezieht sich nur auf die Raumvariablen x, y. Über die Ergebnisse von Satz IV.3.1 hinaus gilt

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0,T], H^4(\Omega)),\\
&u \in C^2([0,T], H^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Beweis: Die Aussagen über A folgen aus Satz III.7.2. Auf die Gleichung $u'' + Au = f$ wenden wir Satz IV.2.1 an. Neben $Au \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$ folgt zunächst

$$A^{\frac{1}{2}} u' \in C^0([0,T], L^2(\Omega)).$$

Wie auf Seite 10 und Seite 11 folgt

$$A^{\frac{1}{2}} u \in C^1([0,T], L^2(\Omega)),$$

$$\frac{d}{dt}(A^{\frac{1}{2}} u)(t) = A^{\frac{1}{2}} u'(t),\ 0 \le t \le T,\ \text{insbesondere}$$

$$u \in C^1([0,T], V),$$

$$u \in C^1([0,T], H^2(\Omega)).$$

Für die Gültigkeit der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \Delta^2 u(t,x) = f(t,x)$ in $(0,T) \times \Omega$ im Distributionssinn verweisen wir auf Satz IV.3.1. Nach Satz III.7.2 ist

$$||u||_4 \le c||\Delta^2 u||_0 = c||Au||_0,\ u \in \mathcal{D}(A),$$

so daß aus $Au \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$ sofort folgt: $u \in C^0([0,T], H^4(\Omega))$. □

Als nächstem Anwendungsbeispiel wenden wir uns den **Maxwellschen Gleichungen** zu. Ω sei ein nichtleitendes, nichtferromagnetisches Medium im $\mathbb{R}^3$, das in Gestalt einer unbeschränkten offenen Punktmenge des $\mathbb{R}^3$ mit kompaktem Rand $\partial\Omega$ von der Klasse C^4 gegeben sei (Medium 1). Ω sei homogen, in Ω seien keine Ladungen und Ströme vorhanden. $\complement\Omega$ sei ein Leiter (Medium 2). In $\complement\Omega$ herrsche ein elektrisches Feld E_2 mit Verschiebungsvektor D_2, das induzierte Magnetfeld sei H_2, die zugehörige magnetische Induktion B_2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß

$$H_2, B_2 \in C^3([0,T] \times \complement\Omega)$$

sind. Mit Hilfe des Fortsetzungsoperators T aus III. kann man leicht zeigen, daß H_2, B_2 Fortsetzungen auf $[0,T] \times \mathbb{R}^3$ besitzen mit folgenden Eigenschaften

$$H_2 \in C^3([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T], H^2(\mathbb{R}^3)),$$

$$B_2 \in C^3([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T], H^2(\mathbb{R}^3));$$

diese Fortsetzungen werden natürlich ebenfalls mit H_2, B_2 bezeichnet. Für die entsprechenden Größen E_1, D_1, H_1, B_1 in Ω gilt

$$E_1 = \varepsilon D_1,\ B_1 = \mu H_1$$

mit positiven Konstanten ε, μ. Im Gauß-System lauten die Maxwellschen Gleichungen in Ω wie folgt

$$rot\, E_1 = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t},\ divD_1 = \varepsilon divE_1 = 0,$$

$$rot\, H_1 = \frac{1}{c}\frac{\partial D_1}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_1}{\partial_t},\ divB_1 = \mu\, divH_1 = 0.$$

Wir erinnern hier an die Begriffe $div.$, $rot.$, die wir für irgendein Vektorfeld $u \in (H^1_{loc}(\Omega'))^3$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$ und offen, definieren können. Es ist

$$div\ u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

$$rot\, u = \sum_{(i,j,k)\in\Pi_z(1,2,3)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) e_k,$$

wobei $\Pi_z(1,2,3)$ gerade aus den Permutationen (3,2,1), (1,3,2) und (2,1,3) besteht; e_1, e_2, e_3 sind die 3 Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^3$. Nun notieren wir eine Relation, die für Vektorfunktionen aus $H^2_{loc}(\Omega')$ gilt. Es ist

$$\Delta u = -rot\, rot\, u + grad\, xdiv\, u.$$

Setzen wir hinreichende Differenzierbarkeitsstufen von E_1, H_1 voraus, so folgt in Ω

$$rot\, rot\, H_1 = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t} rot\, E_1 = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}$$

$$-\Delta H_1 + grad\, div\, H_1 = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2},\ \text{also wegen } div\, H_1 = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta H_1 = 0.$$

Die Randbedingungen sind

(IV.3.4) $$(n, H_1) = \tfrac{1}{\mu}(n, B_2) \text{ auf } \partial\Omega,$$

(IV.3.5) $$n \times H_1 = n \times H_2 - \tfrac{4\pi}{c} I_s \text{ auf } \partial\Omega,$$

wobei n die äußere Normale bezüglich Ω an $\partial\Omega$ ist, und wobei I_s die Oberflächenstromdichte auf $\partial\Omega$ ist. Wir nehmen an, daß I_s eine Fortsetzung auf $\mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften hat:

$$I_s \in C^3([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T], H^2(\mathbb{R}^3));$$

nun ist weiter das Vektorfeld H_1 durch die Randvorgaben (IV.3.4) und (IV.3.5) eindeutig auf $\partial\Omega$ bestimmt, denn für eine zweite Abbildung $H_1' : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $(n, H_1') = (n, H_2)$ auf $\partial\Omega$, $n \times H_1' = n \times H_2 - I_s$ auf $\partial\Omega$ folgt

(IV.3.6) $$(n, H_1 - H_1') = 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

(IV.3.7) $$n \times (H_1 - H_1') = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Demnach ist $H_1 - H_1'$ parallel zu n, also $H_1 - H_1' = 0$, wobei wir zuerst (IV.3.7) und dann (IV.3.6) benutzt haben. Mit den Regeln des Vektorprodukts bestätigt man leicht die Formel

$$\begin{aligned} H_1 &= (n, H_1)n - n \times (n \times H_1), \\ &= (n, \frac{B_2}{\mu})n - n \times (n \times \frac{B_2}{\mu}) + n \times \frac{4\pi}{c} I_s. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Regularitätseigenschaften von $\partial\Omega$, B_2, I_s, d.h. insbesondere der bereits angegeben Fortsetzungen von B_2, I_s kann man zeigen, daß $\frac{1}{\mu}(n, B_2)n - \frac{1}{\mu}n \times (n \times B) + n \times I_s$ eine Fortsetzung v auf $\mathbb{R}^3$ besitzt mit folgenden Eigenschaften

$$v \in C^3([0,T], L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0,T], H^2(\mathbb{R}^3)).$$

Die Übereinstimmung sowohl von I_s als auch von v mit den vorgeschriebenen Werten auf $\partial\Omega$ ist dabei selbstverstndlich im Sinn des Spuroperators gegeben. Wegen $B_1 = \mu H_1$ haben wir damit auch die Randwerte von B_1 auf Ω fortgesetzt und zwar durch $\mu \cdot v$.
Wir bemerken, daß man mit gewissen Einschränkungen (vgl. „Kritik“am Ende des Paragraphen!) v so konstruieren kann, daß $div\, v(t) = 0$ ist, $0 \leq t \leq T$. Wir betrachten statt $\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta H_1 = 0$ das System

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta H_1 - \frac{d^2}{dt^2}v + \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta v = -\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta v,$$

d.h.

$$\frac{d^2}{dt^2}w + \widetilde{A}w = F = -\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\Delta v$$

mit

$$w = H_1 - v.$$

$\widetilde{A}$ ist der Operator, der gegeben ist durch

$$\widetilde{A}u = \sum_{|\alpha|=1,|\beta|=1} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$$

mit $-a_{e_k e_i}(.) = 3 \times 3$ Einheitsmatrix für $i = k$ und $a_{e_k e_i}(.) = 0$, $i \neq k$, $1 \leq i,k \leq 3$, $x \in \overline{\Omega}$, $\mathcal{D}(\widetilde{A}) = (H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))^3$. Wegen

$$(\widetilde{A}u, u) = \sum_{i,k=1}^{3} ||\frac{\partial u_i}{\partial x_k}||_0^2$$

haben wir $((\widetilde{A}+I)u, u) = ||u||_1^2$. Offenbar ist $\widetilde{A}+I$ hermitesch und man kann zu jedem $f \in (L^2(\Omega))^3$ ein und nur ein $u \in \mathcal{D}(\widetilde{A}+I)$ finden mit $(\widetilde{A}+I)u = f$. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf III. : Da Ω unbeschränkt ist, ist $\widetilde{A}$ selbst nicht mehr strikt positiv definit, sondern nur noch positiv definit, so daß wir den strikt positiv definiten Operator $\widetilde{A}+I$ betrachten. Für die Regularität der Lösung $u \in \mathcal{D}(A)$ von $(\widetilde{A}+I)u = f$ gilt wegen dund Kompaktheit von $\partial\Omega$ das in III. gesagte. Insbesondere sind $\widetilde{A}$ und $A = \widetilde{A}+I$ selbstadjungiert, $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Schreiben wir noch Anfangswerte $H_1(0,.) = \varphi(.) \in \mathcal{D}(A)$ mit $div\varphi = 0$ in Ω, $\frac{\partial}{\partial t}H_1(0,.) = \psi(.) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ vor so haben wir für $w = H_1 - v$ die Gleichung

(IV.3.8)
$$\begin{aligned} &w'' + Aw = F - w, \\ &w(0) = \varphi, \\ &w'(0) = \psi \end{aligned}$$

im Hilbertraum $\mathcal{H} = (L^2(\Omega))^3$ mit

$$F \in C^{0,1}([0,T], \mathcal{H}),\ \varphi \in \mathcal{D}(A),\ \psi \in \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}).$$

Eine Lösung w gewinnen wir gemäß Satz IV.2.1. Daß w noch auf der rechten Seite von (IV.3.8) auftritt ändert nichts am Resultat, da man die Integralgleichung für w, nämlich

$$w(t) = \cos A^{\frac{1}{2}}t\varphi + \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}\psi + \int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}$$

$$(F(s) - w(s))ds,\ 0 \leq t \leq T$$

mit dem Verfahren der sukzessiven Approximation in den in Satz IV.2.1 angegebenen Regularitätsklassen lösen kann. Dies wird im nächsten Paragraphen in einem allgemeineren Zusammenhang geschehen. Die Eindeutigkeit von w und damit die von H_1 ist ebenfalls klar, da aus (IV.2.2) für zwei Lösungen H_1, H_1' mit denselben Anfangs- und Randwerten folgt:

$$||(H_1 - H_1')(t)||^2 + ||A^{\frac{1}{2}}(H_1 - H_1')(t)||^2 \leq \int_0^t ||(H_1 - H_1')(s)|| \cdot ||\frac{d}{dt}(H_1 - H_1')(s)||ds,$$

$$\leq \int_0^t [\frac{1}{2}||(H_1 - H_1')(s)||^2 + \frac{1}{2}||\frac{d}{dt}(H_1 - H_1')(s)||^2]ds.$$

Für die Funktion $h(t) = ||\frac{d}{dt}(H_1 - H_1')(t)||^2 + ||(H_1 - H_1')(t)||^2, 0 \leq t \leq T$, gilt also $h \in C^0([0,T],[0,+\infty))$,

$$h(t) \leq \int_0^t h(s)ds.$$

Hieraus folgt $h(t) = 0$, $t \in [0,T]$, wie man sich leicht überlegt und auch im nächsten Paragraphen bewiesen wird. Es bleibt nun die Frage offen, inwieweit das aus w gewonnene Vektorfeld $H_1 = w + v$ zusammen mit dem aus H_1 zu bestimmenden Vektorfeld E_1 auch tatsächlich den Maxwellschen Gleichungen genügt. Z.B. ist nicht klar, ob auch $div\, H_1 = 0$ ist. Mit anderen Worten: Die Existenz einer Lösung des Maxwellschen Systems ist **nicht** bewiesen. Eine Bemerkung läßt sich jedoch sofort machen: Im allgemeinen sind $E_1(0), H_1(0)$ vorgegeben. Dann folgt: $rot\, E_1(0) = -\frac{\mu_1}{c}\frac{d}{dt}H_1(0)$, so daß ψ die Gestalt $\psi = -\frac{c}{\mu} rot E_1(0)$ hat., insbesondere ist $div \psi = 0$. Wir können hierauf nicht weiter eingehen.

Problem IV.3.1: Setze $\Omega = \mathbb{R}^3$ (mit $\complement\Omega = \emptyset$). Betrachte das Maxwellsche System

$$\begin{aligned} rot\, E_1 &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_1}{\partial t},\ div\, E_1 = 0, \\ rot\, H_1 &= \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E_1}{\partial t},\ div\, H_1 = 0, \end{aligned}$$

mit den Anfangsvorgaben $H_1(0,x) = \varphi(x)$, $E_1(0,x) = \eta(x)$. Setze $\psi = -\frac{c}{\mu} rot \eta$. Löse mit dem vorhin angegebenen Ansatz für H_1 das Mexwellsche System unter geeigneten Annahmen an φ, η und zeige, daß die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Anleitung: Im obigen Fall kann $F = v = 0$ gewählt werden.

§4. Semilineare Wellengleichungen: Abstrakte Theorie und Anwendungen

Sei A ein strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir betrachten nichtlineare Abbildungen in $\mathcal{H}$, die folgender Voraussetzungen genügen.

Voraussetzung IV.4.1: *Für ein $\rho \in [0, 1/2]$ sei M eine Abbildung von $\mathcal{D}(A^{1-\rho})$ in $\mathcal{H}$ mit*

$$||M(u) - M(v)|| \leq K(C)||A^{1/2}(u - v)||,$$

$$||M(u)|| \leq K(C),\ u, v \in \mathcal{D}(A^{1-\rho}),\ ||A^{1-\rho}u|| + ||A^{1-\rho}v|| \leq C;$$

hierbei ist k irgendeine stetige Abbildung von $[0, +\infty)$ in $(0, +\infty)$. Ohne Einschränkung sei k als monoton nicht fallend angenommen.

Wir studieren die in t lokale Lösbarkeit von $u'' + Au + M(u) = 0$ Hierzu benöten wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz IV.4.1: Sei $T > 0$, sei $w \in C^1([0, T], \mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$w(t) \in D(A^{1-\rho}),\ t \in [0, T],$$

$$A^{1-\rho}w \in C^0([0, T], \mathcal{H}),$$

$$w'(t) \in D(A^{1/2}),\ t \in [0, T],$$

$$A^{1/2}w' \in C^0([0, T], \mathcal{H}).$$

Dann ist $M(w(.)) \in C^{0,1}([0, T], \mathcal{H})$. Für die Distributionsableitung $M(w)'$ gemäß Satz IV.1.1 gilt

$$ess \sup_{s\in(0,T)} ||M(w)'(s)|| \leq k(2 \sup_{s\in(0,t)} ||A^{1-\rho}w(t)||) \cdot \sup_{s\in(0,T)} ||A^{1/2}w'(s)||.$$

Beweis: Wie auf Seite 10 und 11 zeigt man

$$A^{\frac{1}{2}}w \in C^1([0, T], \mathcal{H})$$

$$\frac{d}{dt}(A^{\frac{1}{2}}w(.))(t) = A^{\frac{1}{2}}w'(t),\ t \in [0, T].$$

Damit folgt

$$||\frac{M(w(t + h)) - M(w(t)))}{h}|| \leq k(||A^{1-\rho}w(t + h)|| + ||A^{1-\rho}w(t)||) \cdot ||\frac{A^{1/2}w(t + h) - A^{1/2}w(t)}{h}||,$$

$$\leq k(2 \sup_{s\in[0,T]} ||A^{1-\rho}w(s)||) \cdot \sup_{s\in[0,T]} ||A^{1/2}w'(s)||,\ h \neq 0,\ t \in [0, T],\ t + h \in [0, T]. \quad \text{(IV.4.1)}$$

Satz IV.1.1 liefert die Distributionsableitung $M(w)'$, die in $L^\infty((0, T), \mathcal{H})$ liegt. Vermöge der Konstruktion von $M(w)'$ im Beweis von Satz IV.4.1 folgt aus (IV.4.1) sofort die gewünschte Schranke für $M(w)'$. □

Bezüglich der Lösbarkeit von $u'' + Au + M(u) = 0$ gilt
Satz IV.4.1: *Seien $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $\psi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Die Abbildung M genüge der Voraussetzung IV.4.1. Dann existiert zu φ, ψ eine Zahl $T(\varphi, \psi)$ mit $+\infty \geq T(\varphi, \psi) > 0$ derart, daß gilt: Es gibt genau ein*

$$u \in \bigcap_{0<\widetilde{T}<T(\varphi,\psi)} C^2([0, \widetilde{T}], \mathcal{H}),$$

$u(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \leq t < T(\varphi, \psi)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $0 \leq t < T(\varphi, \psi)$,

$$Au \in \bigcap_{0<\widetilde{T}<T(\varphi,\psi)} C^0([0, \widetilde{T}], \mathcal{H}),$$

$$A^{1/2}u \in \bigcap_{0<\widetilde{T}<T(\varphi,\psi)} C^0([0,\widetilde{T}],\mathcal{H}),$$

$$\begin{aligned} u'' + Au + M(u) &= 0 \text{ in } [0,T(\varphi,\psi)),\\ u(0) &= \varphi,\\ u'(0) &= \psi. \end{aligned}$$

Falls $T(\varphi,\psi) < +\infty$ ausfällt, so gilt $\lim_{t\uparrow T(\varphi,\psi)}(||Au(t)|| + ||A^{1/2}u'(t)||) = +\infty$ und

$$\lim_{t\uparrow T(\varphi,\psi)} \sup_{0\le\sigma\le t} ||A^{1-\rho}u(\sigma)|| = +\infty.$$

Beweis: Sei w wie in Hilfssatz IV.4.1. Dann lösen wir $u'' + Au + M(w(.)) = 0$, $u(0) = \varphi$, $u'(0) = \psi$ gemäß Satz IV.2.1. Für die Lösung gilt die folgende Formel:

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos A^{1/2}t\varphi + \sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}\psi - \int_0^t \sin A^{1/2}(t-s)A^{-1/2}M(w(s))ds\\ &= v_0(t) - A^{-1}M(w(t)) + \cos A^{1/2}tA^{-1}M(\varphi) + \int_0^t \cos A^{1/2}(t-s)A^{-1}M(w)'(s)ds. \end{aligned}$$

Wir setzen $u(t) = (\mathcal{T}w)(t)$ und wollen zeigen, daß $\mathcal{T}$ für hinreichend kleines T einen und nur einen Fixpunkt besitzt. Dazu führen wir den folgenden vollständigen metrischen Raum ein: Es sei

$$\mathcal{M}_T = \{w | w \in C^1([0,T],\mathcal{H}), w(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \le t \le T,\ w'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ 0 \le t \le T,$$

$$Aw \in C^0([0,T],\mathcal{H}), A^{1/2}w \in C^1([0,T],\mathcal{H}),$$

$$\sup_{t\in[0,T]} ||Aw(t)|| \le ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1,$$

Es ist klar, daß als Metrik $\sup_{0\le t\le T}(||A(w_1(t) - w_2(t))|| + ||A^{\frac{1}{2}}(w_1'(t) - w_2'(t))||)$ zu wählen ist, doch können wir den Banachschen Fixpunktsatz nicht direkt anwenden und müssen eine modifizierte Methode verwenden. Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{T}(\mathcal{M}_T) \subset \mathcal{M}_T$ ist. Wir haben mit $||A^{1-\rho}u|| \le c||Au||$, $u \in \mathcal{D}(A)$, c eine positive Konstante:

$$\begin{aligned} ||A\mathcal{T}w(t)|| &\le ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + ||M(w(t))|| + ||M(\varphi)|| + \int_0^t k(2\sup_{\sigma\in[0,s]}||A^{1-\rho}w(\sigma)||)\cdot\sup_{\sigma\in[0,s]}\\ &\quad ||A^{\frac{1}{2}}w'(\sigma)||ds\\ &\le ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + \int_0^t ||M(w)'(s)||ds + \int_0^t k(2\sup_{\sigma\in[0,s]}||A^{1-\rho}w(\sigma)||)\sup_{\sigma\in[0,s]}||A^{\frac{1}{2}}w'(\sigma)||ds,\\ &\le ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 2\int_0^t k(2\sup_{\sigma\in[0,s]}||A^{1-\rho}w(\sigma)||)\sup_{\sigma\in[0,s]}||A^{\frac{1}{2}}w'(\sigma)||ds,\\ &\le ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 2tk(2c(||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1))\cdot\\ &\quad \cdot(||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 1), \end{aligned}$$

so daß für hinreichend kleines T, $0 \le t \le T$, in der Tat folgt

$$\sup_{t\in[0,T]} ||A\mathcal{T}w(t)|| \le ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1.$$

Für $(\mathcal{T}w)'(t)$ liefert die Formel (IV.2.6) die Gleichung

$$(\mathcal{T}w)'(t) = -\sin A^{\frac{1}{2}}tA^{-\frac{1}{2}}M(\varphi) - \int_0^t \sin A^{\frac{1}{2}}(t-s)A^{-\frac{1}{2}}M(w)'(s)ds + v_0'(t)$$

und damit die Abschätzung

$$||A^{\frac{1}{2}}(\mathcal{T}w)'(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + ||M(\varphi)|| + tk(2c(||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1))\cdot$$

$$\cdot(||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 1),$$

so daß für hinreichend kleine t, $0 \leq t \leq T$, in der Tat folgt

$$\sup_{t\in[0,T]} ||A^{\frac{1}{2}}(\mathcal{T}w)'(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{\frac{1}{2}}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 1.$$

Zu beachten ist, daß gemäß der Konstruktion von $\mathcal{T}w$ gilt: $A\mathcal{T}w \in C^0([0,T],\mathcal{H})$, $A^{1/2}(\mathcal{T}w)' \in C^0([0,T],\mathcal{H})$. Es sei nun

$$u_0(t) = v_0(t),$$

$$u_{n+1}(t) = \mathcal{T}u_n(t),\ u \in \mathbb{N}\cup\{0\},\ t \in [0,T];$$

T ist dabei so klein gewählt, daß $\mathcal{T}(\mathcal{M}_T) \subset \mathcal{M}_T$ (s. die obige Konstruktion). Dann haben wir

$$u_n \in \mathcal{T}(\mathcal{M}_T),\ u \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Die Formel (IV.2.1) liefert

$$||A^{1/2}(\mathcal{T}u_{u+1} - \mathcal{T}u_n)(t))|| \leq \int_0^t k(2c(||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1))||A^{1/2}(u_n(s) - u_{n-1}(s))||ds,$$

$$0 \leq t \leq T,\ u \in \mathbb{N}.$$

Durch Induktion folgt hieraus wie beim Picard-Lindelöf-Verfahren, daß

(IV.4.2) $$\sup\nolimits_{t\in[0,T]} ||A^{\frac{1}{2}}(u_{n+1} - u_n)(t)|| \leq \tfrac{k(\dots)^nT^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}.$$

Demnach konvergieren die $A^{1/2}u_n$ gleichmäßig in $[0,T]$ (d.h. in $C^0([0,T],\mathcal{H})$ gegen ein Element $U \in C^0([0,T],\mathcal{H})$ mit

$$U(t) = A^{1/2}u(t),\ 0 \leq t \leq T,$$
$$u \in C^0([0,T],\mathcal{H}) \text{ mit}$$
$$u(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ 0 \leq t \leq T,$$
$$A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H})$$

Da $||Au_n(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1,\ ||A^{1/2}u_n'(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 1$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $t \in [0,T]$ folgt zunächst

$$u(t) \in \mathcal{D}(A),\ t \in [0,T], Au(t) = w - \lim_{n\to\infty} Au_n(t) \text{ in } [0,T];$$

Differentation von (IV.2.1) nach t liefert, daß auch

(IV.4.3) $$\sup\nolimits_{t\in[0,T]} ||(u_{n+1}' - u_n')(t)|| \to 0,\ n \to \infty, \text{ also}$$

$$u \in C^1([0,T],\mathcal{H}),$$

und mit der gleichmäßigen Beschränktheit von $||A^{1/2}u_n'(t)||$, $t \in [0,T]$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, folgt

$$u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2}),\ t \in [0,T],\ A^{1/2}u'(t) = w - \lim_{n\to\infty} A^{1/2}u_n'(t) \text{ in } [0,T].$$

Natürlich ist auch

(IV.4.4) $$\sup_{t\in[0,T]} ||Au(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + 2||M(\varphi)|| + 1,$$

(IV.4.5) $$\sup_{t\in[0,T]} ||A^{1/2}u'(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 1.$$

Somit erhält man

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{M(u(t+h))-M(t(t))}{h}\right\| &\leq k(2c(\|A\varphi\|+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|+\|M(\varphi)\|+1))\cdot\left\|\frac{A^{1/2}u(t+h)-A^{1/2}u(t)}{h}\right\|,\\
&= k(2c(\|A\varphi\|+A^{\frac{1}{2}}\psi\|+\|M(\varphi)\|+1))\cdot\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{A^{1/2}u_n(t+h)-A^{1/2}u_n(t)}{h}\right\|,\\
&\leq k(2c(\|A\varphi\|+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|+\|M(\varphi)\|+1)\cdot(\|A\varphi\|+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|+\|M(\varphi)\|+1),\\
&\quad h\neq 0,\ t\in[0,T], t+h\in[0,T].
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $M(u.) \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$ und uns steht gemäß Satz IV.1.1 die Distributionsableitung $M(u)' \in L^\infty((0,T),\mathcal{H})$ zur Verfügung. Aus (IV.4.2), (IV.4.4) folgt: $M(u_n) \to M(u)$ in $C^0([0,T],\mathcal{H})$ für $n\to\infty$. Damit ergibt sich

$$u(t) = v_0(t) - \int_0^t \sin A^{1/2}(t-s)A^{-1/2}M(u(s))ds. \qquad \text{(IV.4.6)}$$

Die Rechnung auf S. 8 liefert

$$u(t) = v_0(t) - A^{-1}M(u(t)) + \cos A^{1/2}tA^{-1}M(\varphi) + \int_0^t \cos A^{1/2}(t-s)A^{-1}M(u)'(s)ds,$$

woraus mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz sofort folgt:

$$Au \in C^0([0,T],\mathcal{H}).$$

Nun gilt auch (IV.2.7) mit $-M(u(.))$, $-M(u)'(.)$ statt f, f'. Dies zeigt

$$
\begin{gathered}
A^{1/2}u' \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\ \text{insbesondere}\\
A^{1/2}u \in C^1([0,T],\mathcal{H})\\
A^{1/2}u'(t) = \frac{d}{dt}(A^{1/2}u(.))(t).
\end{gathered}
$$

Jetzt darf man noch einmal differenzieren und wir erhalten wie im Beweis des Satzes IV.2.1

$$
\begin{gathered}
u \in C^2([0,T],\mathcal{H}),\\
\frac{d^2}{dt^2}u + Au + M(u) = 0,\\
u(0)=\varphi, u'(0)=\psi.
\end{gathered}
$$

Damit ist zunächst der Existenzbeweis auf einem gewissen Intervall $[0,T]$ geführt. Für T können wir die Zahl

$$T = \frac{1}{2k(2c(\|A\varphi\|+\|A^{1/2}\psi\|+2\|M(\varphi)\|+1))\cdot(\|A\varphi\|+\|A^{\frac{1}{2}}\psi\|+\|M(\varphi)\|+1)} \qquad \text{(IV.4.7)}$$

wählen. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus (IV.4.6) folgendermaßen:
Seien u,v zwei Lösungen von $u''+Au+M(u)=0$ mit $u,v\in C^2([0,T],\mathcal{H})$, $u(t),v(t)\in\mathcal{D}(A)$, $0\le t\le T$, $Au,Av\in C^0([0,T],\mathcal{H})$, $u'(t),v'(t)\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $A^{1/2}u, A^{1/2}v\in C^1([0,T],\mathcal{H})$, $u(0)=v(0)=\varphi$, $u'(0)=v'(0)=\psi$. Dann folgt aus (IV.4.6) die Beziehung

$$\|A^{1/2}(u(t)-v(t))\| \le \int_0^t k(C)\|A^{\frac{1}{2}}(u(s)-v(s))\|ds,$$

wobei $C = \sup_{t\in[0,T]}\|Au(t)\| + \sup_{t\in[0,T]}\|Av(t)\|$ ist. Nach einem schon benutzten Argument ist $0 = \|A^{1/2}(u(t)-v(t)\|$, also $u(t)=v(t)$ in $[0,T]$ (Gronwallsche Ungleichung). Die Größe T aus (IV.4.7) setzen wir gleich T_1. Auf $[T_1,T_2]$ mit

$$T_2 = \frac{1}{2k(2c(\|Au(T_1)\|+\|A^{1/2}u'(T_1)\|+2\|M(u(T_1))\|+1))(\|Au(T_1)\|+\|A^{1/2}u'(T_1)\|+\|M(u(T_1))\|+1)}+T_1$$

können wir eine eindeutig bestimmte Lösung $\widetilde{u}$ von $u''+Au+M(u)=0$ konstruieren mit $\widetilde{u}\in C^2([T_1,T_2],\mathcal{H})$, $\widetilde{u}(t)\in\mathcal{D}(A)$, $A\widetilde{u}\in C^0([T_1,T_2],\mathcal{H}),\dots,\widetilde{u}(T_1)=u(T_1)$, $\widetilde{u}'(T_1)=u'(T_1)$. Mit Hilfe der Additionstheoreme für die Operatoren $\sin A^{1/2}t$, $\cos A^{1/2}t$, die denen für die Funktionen sin, cos entsprechen, erkennt man unmittelbar, daß $\widetilde{u}$ eine Fortsetzung von u auf $[0,T_2]$ ist in dem Sinn, daß

$$u(t) = \left[\begin{array}{l} u(t),\ 0 \le t \le T_1, \\ \\ \widetilde{u}(t),\ T_1 \le t \le T_2, \end{array} \right.$$

Lösung von $u''+Au+M(u) = 0$ auf $[0, T_2]$ ist im Sinne des zu beweiseneden Satzes. Dies Verfahren können wir durch Konstruktion von T_3 fortsetzen usw.. Wir erhalten eine Folge (T_ν) mit $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$. Sei

$$T(\varphi, \psi) = \lim_{\nu \to \infty} T_\nu,$$

wobei wir $+\infty$ zulassen. Sei die Folge (T_ν) beschränkt, also $T(\varphi, \psi) < +\infty$. Sei

$$\sup_{0 \le t < T(\varphi,\psi)} ||Au(t)|| \le \widehat{c} < +\infty$$

Aus (IV.2.7) mit $-M(u)(.)$, $-M(u)'(s)$ statt f, f' folgt:

$$||A^{1/2}u'(t)|| \le ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + \int_0^t k(2 \sup_{0 \le s < T(\varphi,\psi)} ||Au(s)||) \sup_{0 \le \sigma \le s} ||A^{1/2}u'(\sigma)||ds,$$

$$\le ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + \int_0^t k(2\widehat{c}) \sup_{0 \le \sigma \le s} ||A^{1/2}u'(\sigma)||ds.$$

Daher genügt die auf $[0, T(\varphi, \psi))$ stetige Funktion v mit

$$0 \le v(t) = \sup_{0 \le \sigma \le t} ||A^{1/2}u'(\sigma)||$$

dort der Ungleichung

$$v(t) \le ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + \int_0^t k(2\widehat{c})v(s)ds.$$

Hieraus schließt man leicht, daß v in $[0, T(\varphi, \psi))$ jedenfalls nicht größer ist als die Lösung der gewöhnlichen Differetialgleichung $y' = k(2\widehat{c})y$ mit Anfangswert $||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)||$ (sogen. Gronwallsche Ungleichung). Also entsteht

$$0 \le v(t) \le (||A\varphi|| + A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)||)e^{k(2\widehat{c})t},\ t \in [0, T(\varphi, \psi)).$$

Insbesondere ist mit $C_1(\sigma) = ||Au(\sigma)|| + ||A^{1/2}u'(\sigma)||$, $\sigma \in [0, T(\varphi, \psi))$,

$$\sup_{0 \le \sigma \le t} C_1(\sigma) = \sup_{0 \le \sigma \le t} (||Au(\sigma)|| + ||A^{1/2}u'(\sigma)||) \le \widetilde{c} < +\infty,\ t \in [0, T(\varphi, \psi)).$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} T_{\nu+1} - T_\nu &\ge \frac{1}{k(2c(\widetilde{c} + 2k(\widetilde{c}) + 1))(\widetilde{c} + k(\widetilde{c}) + 1)}, \\ &\ge \delta(\widetilde{c}) > 0,\ \nu \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so daß $T_\nu \to +\infty$, $\nu \to \infty$, im Widerspruch zu unserer Annahme $T(\varphi, \psi) < +\infty$. Nun nehmen wir an, es gebe eine Folge $(\widetilde{T_\nu})$ mit

$$0 < \widetilde{T}_\nu < T(\varphi, \psi),\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$\widetilde{T}_\nu \uparrow T(\varphi, \psi),\ \nu \to \infty$$

$$C(\widetilde{T}_\nu) \le \widetilde{\widetilde{c}} < +\infty,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Zu jedem $\widetilde{T}_\nu$ können wir eine Lösung $\widetilde{u}_\nu$ von $u'' + Au + M(u) = 0$ mit $\widetilde{u}_\nu(\widetilde{T}_\nu) = u(\widetilde{T}_\nu)$, $\widetilde{u}_\nu(\widetilde{T}_\nu) = u'_\nu(T_\nu)$ konstruieren im Intervall $[\widetilde{T}_\nu, \widetilde{T}_\nu + \delta(\widetilde{\widetilde{c}})]$, die in den bekannten Regularitätsklassen liegt. Hierbei ist

$$\frac{1}{k(2c(\widetilde{\widetilde{c}} + 2k(\widetilde{\widetilde{c}}) + 1))(\widetilde{\widetilde{c}} + k(\widetilde{\widetilde{c}}) + 1)} \ge \delta(\widetilde{\widetilde{c}}) > 0.$$

Für $\nu \geq \nu_0$ ist jedenfalls $\widetilde{T}_\nu + \delta(\widetilde{\widetilde{c}}) \geq T(\varphi, \psi) + \frac{1}{2}\delta(\widetilde{\widetilde{c}})$. Wegen $\widetilde{u}_\nu(t) = u(t)$ in $[\widetilde{T}_\nu, \widetilde{T}_\nu + \delta(\widetilde{\widetilde{c}})) \cap [0, T(\varphi, \psi))$ ist jedenfalls

$$\sup_{0 \leq \sigma < T(\varphi,\psi)} C_1(\sigma) < +\infty,$$

und dies ist ein Widerspruch. Somit folgt: Falls $T(\varphi, \psi) < +\infty$ ist, ist

$$C_1(t) \to +\infty,\ t \uparrow T(\varphi, \psi).$$

Im nächsten Schritt zeigen wir

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq t} C_{1-\rho}(\sigma) \to +\infty,\ t \uparrow T(\varphi, \psi)$$

mit $C_{1-\rho}(t) = ||A^{1-\rho}u(t)||$. Wir nehmen an, daß

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq t} C_{1-\rho}(\sigma) \leq \widehat{c}_{1-\rho} < +\infty,\ 0 < t < T(\varphi, \psi)$$

ist. Aus der partiell integrierten Integralgleichung für u folgt

$$||Au(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 2\int_0^t k(2 \sup_{0 \leq \sigma \leq t} ||A^{1-\rho}u(\sigma)||) \sup_{0 \leq \sigma \leq s} ||A^{\frac{1}{2}}u'(\sigma)|| d\sigma,$$

$$\leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + 2\int_0^t k(2\widehat{c}_{1-\rho}) \sup_{0 \leq \sigma \leq s} ||A^{1/2}u'(\sigma)|| d\sigma$$

$$||A^{1/2}u'(t)|| \leq ||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)|| + \int_0^t k(2\widehat{c}_{1-\rho}) \cdot \sup_{0 \leq \sigma \leq s} ||A^{1/2}u'(\sigma)|| d\sigma,$$

also

$$||Au(t)|| + ||A^{1/2}u'(t)|| \leq 2(||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)||) + \int_0^t 3k(2\widehat{c}_{1-\rho}) \sup_{0 \leq \sigma \leq s} ||A^{1/2}u'(\sigma)|| d\sigma,$$

so daß mit der Gronwallschen Ungleichung folgt:

$$\sup_{0 \leq \sigma \leq t} (||Au(t)|| + ||A^{1/2}u'(t)||) \leq 2(||A\varphi|| + ||A^{1/2}\psi|| + ||M(\varphi)||) \cdot e^{3k(2\widehat{c}_{1-\rho})t},\ 0 \leq t < T(\varphi, \psi).$$

Insbesondere bleibt $C_1(t)$ beschränkt, wenn sich t von unten an $T(\varphi, \psi)$ annähert. Dies ist jedoch ein Widerspruch. Damit ist Satz IV.4.1 bewiesen. □

Es ist nun klar wie im linearen Fall die Gleichung $u'' + Au = f$ behandelt wird, wenn für A nur gilt

$$(Au, u) \geq -\lambda ||u||^2,\ u \in \mathcal{D}(A) \tag{IV.4.8}$$

mit einem $\lambda \geq 0$. Zunächst bemerken wir, daß Satz IV.4.1 auch bei Vorliegen von (IV.4.8) richtig bleibt, wenn M eine Abbildung von $[0, +\infty) \times \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1-\rho})$, $\widetilde{A} = A + \lambda + 1$, $\rho \in [0, 1/2]$, in $\mathcal{H}$ ist, die der folgenden Lipschitzbedingung genügt:

$$\begin{aligned} &||M(t,u) - M(s,v)|| \leq k(C)(|t-s| + ||A^{\frac{1}{2}}(u-v)||), \\ &||M(t,u)|| \leq k(C),\ u, v \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1-\rho}),\ t, s \geq 0,\ ||\widetilde{A}^{1-\rho}u|| + ||\widetilde{A}^{1-\rho}v|| \leq C. \end{aligned}$$

Hierbei ist k eine stetige Abbildung von $[0, +\infty)$ in $(0, +\infty)$, die als monoton nicht fallend angenommen wird. Für w wie in Hilfssatz IV.4.1 erhält man $M(w(.)) \in C^{0,1}([0,T], \mathcal{H})$ und für die Distributionsableitung $M(w)'$ gilt

$$ess \sup_{s \in (0,T)} ||M(w)'(s)|| \leq k(2 \sup_{s \in (0,T)} ||A^{1-\rho}w(t)||) \cdot (1 + \sup_{s \in (0,T)} ||A^{1/2}w'(s)||).$$

Es ist nun klar, daß Satz IV.4.1 zunächst für Gleichungen $u'' + \widetilde{A}u + M(., u) = 0$ richtig bleibt. Die Inhomogenität f in $u'' + Au = f$ setzen wir durch $f(t) = f(T)$, $t \geq T$, auf $[0, +\infty)$ fort und bezeichen die Fortsetzung ebenfalls mit f. Nun genügen sowohl

$$\widetilde{M}(t,u) = M(t,u) - (\lambda+1)u \text{ als auch}$$
$$\widetilde{\widetilde{M}}(t,u) = -f(t) - (\lambda+1)u$$

den soeben für M formulierten Lipschitzbedingungen. Aus $u'' + Au + M(.,u) = 0$ entsteht $u'' + \widetilde{A}u + \widetilde{M}(.,u) = 0$ und damit ist unsere Behauptung in diesem Fall klar. Im linearen Fall entteht $u'' + \widetilde{A}u + \widetilde{\widetilde{M}}(.,u) = 0$ und wir erhalten genau eine Lösung auf einem maximalen Intervall $[0, T(\varphi,\psi))$. Da wir im Fall der Inhomogenität f bzw. „Nichtlinearität“ $\widetilde{\widetilde{M}}(t,u)$ jedenfalls $\rho = \frac{1}{2}$ wählen können, müssen wir zum Nachweis, daß $T(\varphi,\psi) = +\infty$ ist, nur $||\widetilde{A}^{1/2}u(t)||$ in $[0, T(\varphi,\psi))$ a-priori abschätzen. Die Gleichung (IV.2.2) liefert

$$\begin{aligned}
||u'(t)||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}u(t)||^2 &= 2Re\int_0^t (f(s) + (\lambda+1)u(s), u'(s))ds + ||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2, \\
&\leq \sup_{s\geq 0} ||f(s)|| \int_0^t ||u'(s)||ds + \frac{1}{2}(\lambda+1)\int_0^t (||u(s)||^2 + ||u'(s)||^2)ds + ||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2, \\
&\leq \frac{t}{2}\sup_{s\geq 0} ||f(s)|| + \int_0^t (\lambda+1)(||u(s)||^2 + ||u'(s)||^2)ds + ||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2.
\end{aligned}$$

Wegen $||\widetilde{A}^{1/2}u|| \geq ||u||$, $u \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})$, liegt jedenfalls die Funktion $||u'(t)||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}u(t)||^2$ in $[0, T(\varphi,\psi))$ unterhalb der Lösung der linearen Integralgleichung

$$v(t) = h(t) + \int_0^t (\lambda+1)v(s)ds,$$

in der wir $h(t) = \frac{t}{2}\sup_{t\geq 0} ||f(t)|| + ||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2$ gesetzt haben.

Zur Lösung dieser Integralgleichung haben wir die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = h + (\lambda+1)y$ zu lösen mit $y(0) = ||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2$. Die Lösung bestimmt sich zu

$$y(t) = (||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{1/2}\varphi||^2)\cdot e^{(\lambda+1)t} + \int_0^t h(s)e^{-(\lambda+1)s}ds \cdot e^{(\lambda+1)t},$$

woraus sofort klar wird, daß $T(\varphi,\psi) = +\infty$ ist. Die im letzten Absatz dargestellten Resultate benutzen wir im folgenden ohne Kommentar.

Es sei noch auf eine andere Tatsache hingewiesen, die nicht aus Satz IV.4.1 ersichtlich ist. Falls $\rho = \frac{1}{2}$ und $T(\varphi,\psi) < +\infty$ ist, ist

$$\lim_{t\uparrow T(\varphi,\psi)} (||u'(t)|| + ||A^{1/2}u(t)||) = +\infty,$$

während Satz IV.4.1 liefert

$$\lim_{t\uparrow T(\varphi,\psi)} \sup_{\sigma\in[0,T]} ||A^{1/2}u(\sigma)|| = +\infty.$$

Zum obigen Resultat vgl. [Heinz - v. Wahl, zu einem Satz von F. E. Browder über nichtlineare Wellengleichungen, Math Z. 141, 33-45(1975)].

Wir stellen un unsere Voraussetzungen hinsichtlich der ersten Anwendung zusammen.

Voraussetzung IV.4.2: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n (\Omega = \mathbb{R}^n$ ist zugelassen). Ω genüge der Kegelbedingung. Seien $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Zu $x \in \Omega$ und je zwei Multiindizes α, β des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq m$ sei eine $N \times N$-Matrix $a_{\alpha,\beta}(x)$ gegeben. Die Abbildung $a_{\alpha\beta}$ von Ω in die $N \times N$-Matrizen besitze folgende Eigenschaften:*

$$a_{\alpha\beta} \in C^{2m-1+|\alpha|}(\Omega),\ D^\gamma a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega),\ |\gamma| \leq \alpha,\ |\alpha|, |\beta| \leq m,$$

$$a_{\alpha\beta}(x) = (-1)^{|\beta|+|\alpha|} a^*_{\beta\alpha}(x),\ x \in \Omega,\ |\alpha|, |\beta| \leq m.$$

Sei V ein abgeschlossener Unterraum von $H^m(\Omega)$ mit $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \subset V$. Für alle $u, v \in V$ sei wie in III.4

$$B(u,v) = (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} (-1)^{|\alpha|-m} \cdot \int_\Omega \langle a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u, D^\alpha v\rangle dx$$

gesetzt. Von der Sesquilinearform $B : V \times V \to \mathbb{C}$ verlangen wir

(IV.4.9) $$B(v,v) \geq c||v||_V^2 - \lambda||v||_0^2,\ v \in V,$$

mit einer positiven Konstante c und einer nichtnegativen Konstante λ. Endlich sei für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$

(IV.4.10) $$|\det \sum_{\substack{|\alpha|=m\\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta| \geq (1/c_E(K))|\xi|^{2m\cdot N},\ x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer positiven Konstante $(1/c_E(K))$. Bezüglich der zu betrachtenden Nichtlinearität nehmen wir folgendes an: Für $u \in V$, $n > 2m$ ist $M(u) = F'(|u|^2)u$. Dabei ist F' die Ableitung einer einmal stetig differenzierbaren Funktion $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, F' ist in jedem Intervall $[\delta, 1/\delta]$, $0 < \delta < 1$ totalstetig. Mit

$$q = \frac{m}{n-2m}$$

gilt

$$\begin{aligned} &|F'(r)| \leq cr^q,\ r \geq 1 \\ &|F''(r) \leq cr^{q-1} \textit{ fast überall in } \ (0,+\infty. \end{aligned}$$

Für $u \in V$, $n \leq 2m$ ist $M(u) = F'(|u|^2)u$. Dabei ist F' die Ableitung einer einmal stetig differenzierbaren Funktion $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, F' ist in jedem Intervall $[\delta, 1/\delta]$, $0 < \delta < 1$ totalstetig. Es ist

$$\begin{aligned} |F''(r)| + |F'(r)| &\leq cr^q \text{ fast überall in } [1,+\infty), \\ |F''(r)| &\leq c \text{ fast überall in } [0,1) \end{aligned}$$

mit irgendeinem q, $0 \leq q < +\infty$. In beiden Fällen sei $F(0) = 0$. Daß $F'(|u|^2)u \in L^2(\Omega)$ ist, $u \in V$, wird im folgenden mitbewiesen.

Sei nun

$$Au = \mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in H^{2m}_{loc}(\Omega)$$

Wir betrachten die Sesquilincarform $B_\lambda(u,v) = B(u,v)+(\lambda+1)(u,v)$. Dann ist $B_\lambda(v,v) \geq c||v||_V^2$, $v \in V$, und

$$\widetilde{A}u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u) + (\lambda+1)u,\ u \in H^{2m}_{loc}(\Omega),$$

betrachtet auf $\mathcal{D}(\widetilde{A}) = \{u | u \in H^{2m}_{loc}(\Omega) \cap V,\ \widetilde{A}u \in L^2(\Omega),\ B_\lambda(u,v) = (\widetilde{A}u, v),\ v \in V\}$, ist ein strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Es ist $\mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = V$, und es gelten die auf Seite 12 formulierten Aussagen, wenn man A durch $\widetilde{A}$ ersetzt. Außerdem ist

$$\widetilde{A}u = Au + (\lambda+1)u,\ u \in \mathcal{D}(\widetilde{A}).$$

Satz IV.4.2: *Sei mit $N = 1$ die Voraussetzung IV.4.1 erfüllt. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{A})$, $\psi \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2})$. Sei $F \geq 0$ (F wurde in Voraussetzung IV.4.1 eingeführt). Dann gibt es genau ein $u \in C^2([0,+\infty), L^2(\Omega))$ mit*

$$\begin{aligned} &u(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{A}),\ t \geq 0,\ \widetilde{A}u \in C^0([0,+\infty),\ L^2(\Omega)), \\ &u'(t) \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}),\ t \geq 0,\ \widetilde{A}^{1/2}u \in C^2([0,+\infty),\ L^2(\Omega)), \\ &u'' + \widetilde{A}u + M(u) - (\lambda+1)u = 0, \\ &u(0) = \varphi, \\ &u'(0) = \psi,\ \textit{d. h.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) + \sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u)(t,x) + F'(|u|^2(t,x))u(t,x) = 0$$

fast überall in $(0,+\infty)\times\Omega$ *und die Ableitungen sind im Distriebution in* u *über* $(0,+\infty)\times\Omega$ *zu verstehen.*

Beweis: Zur Anwendung von Satz IV.4.1 müssen wir zunächst zeigen, daß Voraussetzung IV.4.1 mit $\rho = 1/2$ erfüllt ist. Dies geschieht folgendermaßen: Für den Anteil $(\lambda+1)u$ ist dies klar. Für $u,v \in \mathcal{D}(\widetilde{A}^{1/2}) = V$ gilt, wenn $\varepsilon > 0$ ist,

$$\begin{aligned}
||F'(|u|^2+\varepsilon)u - F'(|v|^2+\varepsilon)v||_0^2 &= \int_\Omega |\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\tau}(F'(|u+\tau(v-u)|^2+\varepsilon)(u+\tau(u-v))d\tau|^2dx \\
&\le \int_\Omega c|\int_0^1 ||u+\tau(v-u)|^2+\varepsilon|^{q-1}|u+\tau(v-u)|^2|u-v|d\tau|^2dx \\
&\quad + \int_\Omega c|\int_0^1 ||u+\tau(v-u)|^2+\varepsilon|^q|u-v|d\tau|^2dx, \\
&\le \int_\Omega c|\int_0^1 |u+\tau(v-u)|^{2q}d\tau|^2|u-v|^2dx + \\
&\quad + \int_\Omega c|\int_0^1 |u+\tau(v-u)|^{2q}d\tau|^2|u-v|^2dx, \\
&\le c\int_\Omega ||u|+|v-u||^{4q}|u-v|^2dx, \\
&\le c(\int_\Omega ||u|+|v-u||^{4qq_1}dx)^{1/q_1}(\int_\Omega |u-v|^{2q_2}dx)^{1/q_2},
\end{aligned}$$

wobei $1/q_2 = 2(1/2 - m/n)$ und $1/q_1 = 1 - 1/q_2$ ist, falls $n > 2m$ ist. Wenn $n \le 2m$ ist, wähle man zwei beliebige $q_1, q_2 > 1$ mit $1/q_1 + 1/q_2 = 1$. Nun ist

$$(\int_\Omega ||u|+|v-u||^{4qq_1}dx)^{1/q_1} \le c((\int_\Omega |u|^{4qq_1}dx)^{1/q_1} + (\int_\Omega |v|^{4qq_1}dx)^{1/q_1}).$$

Im Fall $n > 2m$ ist $1/4qq_1 = (1/4q)(1-1/q_2) = ((n-2m)/4m)\cdot(1-1/q_2) = 2m(n-2m)|4m\cdot n = 1/2 - m/n$. Da Ω der Kegelbedingung genügt, haben wir nach Satz III.2.4 im Fall $n > 2m$

$$\begin{aligned}
(\int_\Omega ||u|+|v-u||^{4qq_1}dx)^{1/q_1} &\le ((\int_\Omega |u|^{4qq_1}dx)^{1/q_1} + (\int_\Omega |v|^{4qq_1}dx)^{1/q_1}), \\
&\le c(||u||_m^{4q} + ||v||_m^{4q}), \\
&\le c(||\widetilde{A}^{1/2}u||^{4q} + ||\widetilde{A}^{1/2}v||^{4q}).
\end{aligned}$$

Im Fall $n \le 2m$ kann man sich anhand des Beweises von Satz III.2.4 leicht überlegen, daß die Abschätzung (Einbettung) $||u||_{L^p(\Omega)} \le c||u||_m$ für jedes $p \ge 2$ gilt. Daher folgt auch in diesem Fall

$$(\int_\Omega ||u|+|v-u||^{4qq_1}dx)^{1/q_1} \le c(||\widetilde{A}^{1/2}u||^{4q} + ||\widetilde{A}^{1/2}v||^{4q})$$

Im Fall $n > 2m$ ist $1/2q_2 = 1/2 - m/n$, so daß in allen Fällen

$$||F'(|u|^2+\varepsilon)u - F'(|v|^2+\varepsilon)v||^2 \le c(||\widetilde{A}^{1/2}u||^{4q} + ||\widetilde{A}^{1/2}v||^{4q})||\widetilde{A}^{1/2}(u-v)||^2,$$

$$||F'(|u|^2+\varepsilon)u||_0^2 \le c||\widetilde{A}^{1/2}u||^{4q+2}$$

entsteht mit von ε unabhängigen Konstanten c. Grenzübergang ε gegen Null und Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz vollenden den Nachweis, daß $\widetilde{M}(u) = F'(|u|^2)u - (\lambda+1)u$ der Vorasusetzung IV.4.1 mit $\rho = 1/2$ und $\widetilde{A}$ statt A genügt. Satz IV.4.1 liefert nun die Lösbarkeit des in Frage stehenden Problems mit allen in Satz IV.4.2 angegebenen Eigenschaften, wenn wir $+\infty$ durch $T(\varphi,\psi)$ ersetzen. Es bleibt also zu zeigen, daß $T(\varphi,\psi) = +\infty$ ist. Aus Satz V.3.2 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“folgt, daß man jedes Element $u \in C^1([0,T],V)$ in $C^1([0,T],V)$ durch Elemente der Gestalt

(IV.4.11) $$u_\nu(t) = \sum_{j=0}^{N(\nu)} t^j u_j^{(\nu)},\ u_j^\nu \in V,\ \nu\in\mathbb{N},\ 0\le j\le N(\nu),$$

approximieren kann. Wir betrachten die Gleichung

$$u'' + \widetilde{A}u + \widetilde{M}(u) = 0 \text{ in } [0, T(\varphi, \psi))$$

mit $\widetilde{M}(u) = F'(|u|^2)u - (\lambda+1)u$.

Nach Satz IV.4.1 müssen wir nur noch eine a-priori Schranke für $\|\frac{du}{dt}(t)\| + \|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|$ herleiten. Dazu betrachten wir

$$2Re\int_0^t (\widetilde{M}(u(\sigma)), \frac{du}{d\sigma}(\sigma))d\sigma = 2Re\int_0^t [(F'(|u|^2(\sigma))u(\sigma), \frac{du}{d\sigma}(\sigma)) - ((\lambda+1)u(\sigma), \frac{du}{d\sigma})]d\sigma$$

für ein Element $u \in C^1([0,T), V)$.

Zunächst ist $F(0) = 0$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |F(|\widetilde{u}|^2)|dx &\leq \int_\Omega\int_0^1 |F'(\tau|\widetilde{u}|^2)|d\tau|\widetilde{u}|^2dx \\ &\leq c_4\int_\Omega |\widetilde{u}|^{2+2q}dx\end{aligned}$$

für jedes $\widetilde{u} \in (\widetilde{A}^{\frac{1}{2}})$. Wegen

$$(2+2q)^{-1} = \frac{1}{2+\frac{2m}{n-2m}} = \frac{n-2m}{2n-2m} \geq \frac{n-2m}{2n},$$

falls $n > 2m$ ist, fällt nach dem erwähnten Einbettungssatz immer

$$\int_\Omega |F(|\widetilde{u}|^2)|dx \leq c_{1\,2}||\widetilde{A}^{\frac{1}{2}}u||^{2+2q},$$

also endlich, aus. Nun ist

$$\frac{1}{h}\int_\Omega (F(|u(t+h,x)|^2) - F(|u(t,x)|^2))dx = \frac{1}{h}\int_\Omega\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial\tau}F(|u(t,x)|^2 + \tau(|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2))d\tau dx$$

$$= \frac{1}{h}\int_\Omega\int_0^1 F'(|u(t,x)|^2 + \tau(|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2))d\tau(|u(t+h,x)|^2 - |u(t,x)|^2)dx.$$

Setzt man nun für u ein Element der Gestalt

$$u(t) = \sum_{v=1}^N \psi_v(t)v_v \qquad \text{(IV.4.12)}$$

ein mit Elementen $v_v \in V$, $\psi_v \in C^1([0,T])$, so erkennt man sofort, daß jedenfalls für u der Gestalt IV.4.12 die Beziehung

$$\begin{aligned}&2Re\textstyle\int_0^t((F'(|u|^2(\sigma)) - (\lambda+1))u(\sigma), \frac{du}{d\sigma}(\sigma))d\sigma = \int_\Omega F(|u(t,x)|^2dx - \int_\Omega F(|u(0,x)|^2)dx \\ &-2Re\textstyle\int_0^t(\lambda+1)(u(\sigma), \frac{du}{d\sigma}(\sigma))d\sigma.\end{aligned} \qquad \text{(IV.4.13)}$$

richtig ist. Da man jedes $u \in C^1([0,T), V)$ im Raum $C^1([0,t], V)$ durch Elemente der Gestalt IV.4.12 approximieren kan, wie gerade bemerkt wurde, ist IV.4.13 für alle u aus $C^1([0,T], V)$ richtig. Daraus folgt:

$$2Re\int_0^t((F'(|u|^2(\sigma)) - (|c_1|+1))u(\sigma), \frac{du}{d\sigma}(\sigma))d\sigma \geq -\int_\Omega F(|u(0,x)|^2)dx - \int_0^t(\lambda+1)(||u(\sigma)||^2 + ||\frac{du}{d\sigma}(\sigma)||^2)d\sigma.$$

Die Schlußweise auf Seite 25 zeigt nun, daß

$$||\frac{du}{dt}(t)||^2 + ||\widetilde{A}^{\frac{1}{2}}u(t)||^2 \leq (||\psi||^2 + ||\widetilde{A}^{\frac{1}{2}}\phi||^2 + c_{1\,3}||\widetilde{A}^{\frac{1}{2}}\phi||^{2+2q})e^{(\lambda+1)t},$$

ausfällt, wenn jetzt u das eindeutig bestimmte Element aus $C^{2-\nu}([0, T(\varphi,\psi)), H^{\nu m}(\Omega))$, $\nu = 0, 1$ ist, das $\widetilde{A}u \in C^0([0,T], L^2(\Omega))$ erfüllt und in $C^0([0,T), V)$ liegt sowie der Gleichung $u'' + \widetilde{A}u + \widetilde{M}u = 0$, $u(0) = \varphi$,

$u'(0) = \psi$ genügt. Damit ist Satz IV.4.2 bewiesen. $\square$

Wegen der Voraussetzung $N = 1$ haben wir in Satz IV.4.2 nur ein Resultat für Gleichungen erhalten. Für Systeme ($N \geq 2$) müssen für ein analoges Resultat einschränkende Voraussetzung an die Nichtlinearität gestellt werden. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall $n > 2m$ und geben diese Voraussetzungen an: Es ist

$$M(u) = f(u),\ u \in \mathbb{C}^N, \tag{IV.4.14}$$

mit einer Abbildung $f : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, die auf jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}^N$ einer Lipschitzbedingung

((IV.4.15) $$|f(u) - f(v)| \leq c(K)|u - v|,\ u, v \in K,$$

mit einer von K abhängigen Konstante $c(K) \geq 0$ genügt. Weiter sei $f(\mathbb{R}^N) \subset \mathbb{R}^N$ und für alle $u \in \mathbb{R}^N$ sei

$$f(u) = \nabla F(u)$$

mit einer stetig differenzierberan Funktion $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Bekanntlich ist f dann in $\mathbb{R}^N$ fast überall total differenzierbar mit $|(\partial f/\partial u_\nu)(u)| \leq c(K),\ 1 \leq \nu \leq N,\ u, v \in K$. Es gelten die folgenden Wachstumsbedingungen: Sei $q = m/(n - 2m)$,

$$|f(u)| \leq c|u|^{2q+1},\ |u| \geq 1,\ u \in \mathbb{R}^N, \tag{IV.4.16}$$

$$|\tfrac{\partial f}{\partial u_i}(u)| \leq c|u|^{2q},\ |u| \geq 1,\ u \in \mathbb{R}^N,\ 1 \leq 1 \leq N. \tag{IV.4.17}$$

Endlcih sei

$$F(0) = 0,\ F(u) \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^N;$$

die Matrizen $a_{\alpha\beta}(x)$, $x \in \Omega$, mögen nur reelle Koeffizienten besitzen, φ, ψ aus $\mathcal{D}(A)$ bzw. $\mathcal{D}(A^{1/2}) = V$ seien reellwertig. Wie im Beweis des Satzes IV.4.2 konstruieren wir mit (IV.4.14) bis (IV.4.17) eine reelle Lösung von $u'' + \widetilde{A}u + M(u) - (\lambda+1)u = 0$, $u(0) = \varphi$, $u(0) = \psi$, auf $[0, T(\varphi, \psi))$ wobei Voraussetzung IV.4.1 mit $\widetilde{A}$ statt A und $\rho = 1/2$ gilt. Für die globale Fortsetzbarkeit werden die Bedingungen $F(u) = \nabla F(u)$, $F(u) \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^N$ benötigt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_\Omega < M(u) - (\lambda+1)u, u' > dxds &\geq \int_0^t \int_\Omega < f(u), u' > dxds - \frac{\lambda+1}{2} \int_0^t (||u'(\sigma)||^2 + ||u(\sigma)||^2) d\sigma, \\
&= \int_0^t \int_\Omega \sum_{\nu=1}^N f_\nu(u) u'_\nu dxds - \frac{\lambda+1}{2} \cdot \int_0^t (||u'(\sigma)||^2 + ||w(\sigma)||^2) d\sigma, \\
&= \int_0^t \int_\Omega \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial F}{\partial u_\nu}(u) u'_\nu dxds - \frac{\lambda+1}{2} \cdot \int_0^t (||u'(\sigma)||^2 + ||u(\sigma)||^2) d\sigma, \\
&= \int_\Omega F(u(t)) dx - \int_\Omega F(\varphi) dx - \frac{\lambda+1}{2} \cdot \int_0^t (||u'(\sigma)||^2 + ||u(\sigma)||^2) d\sigma, \\
&\geq - \int_\Omega F(\varphi) dx - \frac{\lambda+1}{2} \int_0^t (||u'(\sigma)||^2 + ||u(\sigma)||^2) d\sigma,
\end{aligned}$$

wobei man diese Relationen ebenso beweist wie die entsprechenden Abschätzungen im Beweis von Satz IV.4.2. Ebenfalls wie im Beweis von Satz IV.4.2 folgert man nun eine a-priori Schranke für $\sup_{0 \leq \sigma \leq t}(||u'(\sigma)|| + ||\widetilde{A}^{1/2} u(\sigma)||)$ und daraus $T(\varphi, \psi) = +\infty$.

Die Beschäftigung mit Gleichungen des in Satz IV.4.2 behandelten Typs hat ihren Ursprung in der Physik. Diese Gleichungen kommen als Feldgleichungen einer nichtlinearen klassischen Mesonentheorie in Betracht. Für diese ist die Lösbarkeit des Anfangswertproblems im Großen notwendig (Anfangswertproblem heißt $\Omega = \mathbb{R}^n$). Siehe hierzu: K. Jörgens: Über die nichtlinearen Wellengleichungen der mathematischen Physik, Math. Annalen 138, 179-202 (1959). Ein anderes Beispiel stammt aus der Theorie der nichtlinearen Schwingungen. Bei dem Gleichgewicht dünner Platten bzw. den Schwingungen dünner Platten mußte angenommen werden, daß die Auslenkung klein im Verhältnis zur Plattendicke ist. Läßt man jedoch Auslenkungen zu, die nur klein im Verhältnis zu den Dimensionen der Platte sind, so muß man im Falle der schwingenden Platte ein nichtlineares Problem betrachten, das die folgende Gestalt hat

$$\text{(IV.4.18)} \qquad \begin{aligned} &u'' + \Delta^2 u = [u, v] = f, \\ &\Delta^2 v + [u, u] = 0; \end{aligned}$$

wir nehmen alle Konstanten =1 an, f ist eine zeitabhängige äußere Kraft. u ist die Auslenkung der Platte, v ist die Airy'sche Spannungsfunktion. Das Problem (IV.4.18) wird über einem zylindrischen Gebiet $(0, T) \times \Omega \subset \mathbb{R}^3$ betrachtet, wir nehmen an, daß die Platte am Rand $\partial\Omega$ fest eingespannt ist, d.h. $u|\partial\Omega = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}|\partial\Omega = 0$. Wir schreiben außerdem $u(0, x) = \varphi(x)$ in Ω, $u'(0, x) = \psi(x)$ in Ω vor, die Spannungsfunktion v soll ebenfalls den Randbedigungen $v|\partial\Omega = 0$ genügen. $[u, v]$ ist ein quadratischer Ausdruck in den zweiten Ableitungen von u, v, der im folgenden Satz erklärt wird. Geometrisch bedeutet unser Problem, daß $\overline{\Omega}$ die Platte in Ruhelage ist, $\{(x, u(x))|x \in \overline{\Omega}\}$ ist die gebogene Platte. Zur lokalen Lösbarketi von (IV.4.18) gilt der folgende Satz:

Satz IV.4.3: *Sei Ω eine beschränkte offene Punktmenge des $\mathbb{R}^2$, sei für ein $N \in \mathbb{N}$*

$$\partial\Omega = \bigcup_{\nu=1}^{N} |\Gamma_\nu|$$

mit positiv durchlaufenden Jordankurven Γ_ν, die fünfmal stetig differenzierbar sind und paarweise diesjunkte Spuren haben (man vergleiche hierzu Satz IV.3.2). Für $u, v \in H^2(\Omega)$ setze man

$$[u, v] = u_{x_1x_1} v_{x_2x_2} - 2u_{x_1x_2} v_{x_1x_2} + u_{x_2x_2} v_{x_1x_1}$$

Sei $\varphi \in H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, $\psi \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, sei $f \in C^{0,1}([0, \widetilde{T}], L^2(\Omega))$, $\widetilde{T} > 0$. Zu φ, ψ gibt es ein $T(\varphi, \psi), +\infty \geq T(\varphi, \psi) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt genau ein $u \in C^2([0, T(\varphi, \psi)), L^2(\Omega))$ mit

$$\begin{aligned} &u \in C^0([0, T(\varphi, \psi)), H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)) \\ &u \in C^1([0, T(\varphi, \psi)), \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)) \\ &u(0) = \varphi,\ u'(0) = \psi \end{aligned}$$

und genau ein $v \in C^0([0, T(\varphi, \psi)), H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega))$ derart, daß

$$\begin{aligned} u'' + \Delta^2 u - [u, v] &= f \text{ in } [0, T(\varphi, \psi)), \\ \Delta^2 v + [u, u] &= 0 \text{ in } [0, T(\varphi, \psi)). \end{aligned}$$

Ist $T(\varphi, \psi) < +\infty$, so ist

$$\lim_{t \uparrow T(\varphi, \psi)} (||A^{1/2} u'(t)|| + ||Au(t)||) = +\infty$$

und

$$\lim_{t \uparrow T(\varphi, \psi)} \sup_{0 \leq \sigma \leq t} ||Au(\sigma)|| = +\infty$$

Dabei ist A der in $L^2(\Omega)$ strikt positiv definite selbstadjungierte Operator, der gegeben ist durch

$$Au = \Delta^2 u,\ u \in \mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega).$$

Beweis: Setzen wir $Au = \Delta^2 u$, $u \in \mathcal{D}(A) = H^4(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega)$, so ist nach III.7.1 in der Tat A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ mit

$$\text{(IV.4.19)} \qquad ||u||_4 \leq c||Au||,\ u \in \mathcal{D}(A),$$

$$\text{(IV.4.20)} \qquad c||u||_2 \geq (Au, u) \geq (1/c)||u||_2^2,\ u \in \mathcal{D}(A),$$

$$\text{(IV.4.21)} \qquad \mathcal{D}(A^{1/2}) = \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega).$$

Wir wollen zeigen, daß Voraussetzung IV.4.1 mit $\rho = 0$ für die Gleichung

$$\text{(IV.4.22)} \qquad \left[\begin{array}{rcl} u'' + Au + M(u) & = & 0, \\ u(0) & = & \varphi,\ u'(0) = \psi, \end{array}\right.$$

in $\mathcal{H}$ mit $M(u) = [u, A^{-1}[u,u]]$ erfüllt ist. Für $u, \widetilde{u} \in \mathcal{D}(A)$ folgt

$$||[u, A^{-1}[u,u]] - [\widetilde{u}, A^{-1}[\widetilde{u},\widetilde{u}]]||_0$$

$$\leq ||[u-\widetilde{u}, A^{-1}[u,u]]||_0 + ||[\widetilde{u}, A^{-1}([u,u]-[\widetilde{u},\widetilde{u}])]||_0,$$

$$\leq ||[u-\widetilde{u}, A^{-1}[u,u]]||_0 + ||[\widetilde{u}, A^{-1}[u-\widetilde{u},u]]||_0 + ||[\widetilde{u}, A^{-1}[\widetilde{u},u-\widetilde{u}]]||_0,$$

$$\leq ||u-\widetilde{u}||_2||A^{-1}[u,u]||_{C^2(\overline{\Omega})} + ||\widetilde{u}||_{C^2(\overline{\Omega})}||A^{-1}[u-\widetilde{u},u]||_2 + ||\widetilde{u}||_{C^2(\overline{\Omega})}||A^{-1}[\widetilde{u},u-\widetilde{u}]||_2,$$

so daß mit Satz III.2.3 und (IV.4.20) folgt

$$||M(u)-M(\widetilde{u})||_0 \leq ||[u,u]||_0||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||A^{-\frac{1}{2}}[u-\widetilde{u},u]||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||A^{-\frac{1}{2}}[\widetilde{u},u-\widetilde{u}]||_0,$$

$$\leq ||[u,u]||_0||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||[u-\widetilde{u},u]||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||[\widetilde{u},u-\widetilde{u}]||_0,$$

$$\leq c||u||^2_{C^2(\overline{\Omega})}||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||u||_{C^2(\overline{\Omega})}||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0 + ||A\widetilde{u}||_0||\widetilde{u}||_{C^2(\overline{\Omega})}||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0,$$

$$\leq c(||A\widetilde{u}||_0 + ||Au||_0)^2||A^{\frac{1}{2}}(u-\widetilde{u})||_0.$$

Es ist aus den vorhergehenden Rechnungen klar, daß

$$||M(u)|| \leq K(C),\ u \in \mathcal{D}(A),\ C \geq ||Au||,$$

ist mit einer monoton nicht fallenden Abbildung $k : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$. Satz IV.4.1 liefert die Behauptung des Satzes, indem man

$$v(t) = -A^{-1}[u(t),u(t)],\ 0 \leq t < T(\varphi,\psi),$$

setzt. □

Wir bemerken, daß das System des Satzes IV.4.3 global in t schwach gelöst werden kann. Siehe hierzu: [Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlineaires, Dunod: Paris (1969), p. 48]. Doch war es bisher weder möglich, die Eindeutigkeit noch die höhere Regularität einer schwachen Lösung zu beweisen. Es ist also nicht einmal klar, ob die schwache Lösung mit der in Satz IV.4.3 konstruierten sogenannten starken Lösung übereinstimmt, solange die letztere existiert, d.h. auf $[0, T(\varphi,\psi))$. Es sei weiter darauf hingewiesen, daß $[u(t,x),u(t,x)]$ im System des Satzes IV.4.3 einen Krümmungsterm darstellt, er ist im wesentlichen die Gaußsche Krümmung der gebogenen Platte. Man kann beweisen, daß im Fall $T(\varphi,\psi) < +\infty$ gilt: $\lim\limits_{t\uparrow T(\varphi,\psi)} \sup\limits_{0\leq\sigma\leq t} ||[u(\sigma,.),u(\sigma,.)]||_{L^{1+\delta}(\Omega)} = +\infty$ für jedes $\delta > 0$, während $||[u(t,.),u(t,.)]||_{L^1(\Omega)}$ gerade die Größe ist, die a-priori abgeschätzt werden kann, wie in [Lions, ...J im Zusammenhang mit der Konstruktion der schwachen Lösung bewiesen wird. S. hierzu: [von Wahl: On Nonlinear Evolution Equations in a Banach Space and on Nonlinear Vibrations of the Clamped Plate, Bayr. Math. Schriften No. 7 (1981)].

V. Parabolische Evolutionsgleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten

§1. Lineare abstrakte parabolische Gleichungen mit zeitunabhängigen Koeffizienten im Hilbertraum

In gewisser Weise ist dieser Abschnitt das Gegenstück zu §2 in Kapitel IV für einen anderen Gleichungstyp. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, A ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. A sei weiter strikt positiv definit, d.h.

$$(A\widetilde{f}, \widetilde{f}) \geq \widehat{c}||\widetilde{f}||^2, \ \widetilde{f} \in \mathcal{D}(A)$$

mit einer positiven Konstante $\widehat{c}$. Wir interessieren uns für die Auflösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $u' + Au = f$ in einem Intervall $I = [a, b]$ in $\mathcal{H}$; vorgegeben sind f als eine Abbildung von I in $\mathcal{H}$ und der Anfangswert $u(a)$. Die Auflösungsformel für das Cauchy-Problem für gewöhnliche Differentialgleichungen $u' + \lambda u = f$ liefert die Beweisidee für den folgenden Satz

Satz. V.1.1: *Sei $T > 0$, sei*

$$\begin{aligned} &\varphi \in \mathcal{D}(A), \\ &f \in C^\alpha([0, T], \mathcal{H}) \text{ für ein } \alpha \in (0, 1) \end{aligned}$$

Dann gibt es ein und nur ein $u \in C^1([0, T], \mathcal{H})$ mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} u(t) \in \mathcal{D}(A), \ 0 \leq t \leq T, \\ Au \in C^0([0, T], \mathcal{H}), \\ u' + Au = f \text{ in } [0, T], \\ u(0) = \varphi. \end{aligned}$$

u besitzt die Darstellungsformel

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds.$$

Der Operator e^{-tA}, $t \geq 0$, ist mit Hilfe der Spektralschar durch $e^{-tA}f = \int_{\widehat{c}/2} e^{-\lambda t} dE(\lambda) f$, $t \geq 0$, erklärt (vgl. S. 10).

Ist zusätzlich $f \in C^{0,1}([0, T], \mathcal{H})$, so ist

$$\begin{aligned} &u'(t) \in D(A^{1-\rho}), \ 0 < t \leq T, \ 0 < \rho \leq 1, \\ &A^{1-\rho}u' \in C^0((0, T], \mathcal{H}), \\ &||A^{1-\rho}u'(t)|| \leq \frac{c(\varphi, \rho)}{t^{1-\rho}}, \ 0 < t \leq T; \end{aligned}$$

setzen wir vom Anfangswert φ nur voraus $\varphi \in \mathcal{H}$, so gibt es genau ein $u \in C^1((0, T], \mathcal{H})$ mit

$$\begin{aligned} &u(t) \in \mathcal{D}(A), \, 0 < t \leq T, \\ &Au \in C^0((0, T], \mathcal{H}), \\ &u' + Au = f \text{ in } (0, T], \\ &u \in C^0([0, T], \mathcal{H}), \\ &u(0) = \varphi \end{aligned}$$

im Fall $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ $(0<\alpha<1)$ *während im Fall*

$$f \in \bigcap_{0<\varepsilon<T} C^{0,1}([\varepsilon,T],\mathcal{H}) \cap C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$$

folgt: $u'(t) \in D(A^{1-\rho})$, $0<t\leq T$, $0<\rho\leq 1$, $A^{1-\rho}u' \in C^0((0,T],\mathcal{H})$; *setzen wir von Anfangswert* φ *voraus* $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, *so haben wir in den eben betrachteten Fällen*

$$A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H}).$$

Im Fall $\varphi \in \mathcal{H}$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ *gilt:* $A^{1/2}u \in L^2((0,T),\mathcal{H})$,

$$\text{(V.1.1)} \qquad ||u(t)||^2 + 2\int_0^t ||A^{1/2}u(\sigma)||^2 d\sigma = 2Re\int_0^t (f(\sigma),u(\sigma))d\sigma + ||\varphi||^2,\ 0\leq t\leq T$$

(1. Energiegleichung), im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ *gilt* $Au \in L^2((0,T),\mathcal{H})$,

$$\text{(V.1.2)} \qquad ||A^{1/2}u(t)||^2 + 2\int_0^t ||Au(\sigma)||^2 d\sigma = 2Re\int_0^t (f(\sigma),Au(\sigma))d\sigma + ||A^{1/2}\varphi||^2,$$

$$\text{(V.1.3)} \qquad ||A^{1/2}u(t)||^2 + 2\int_0^t ||u'(\sigma)||^2 d\sigma = 2Re\int_0^t (f(\sigma),u'(\sigma))d\sigma + ||A^{1/2}\varphi||^2,\ 0\leq t\leq T$$

(2. Energiegleichung)

Beweis: Wir setzen an

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds.$$

Für $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ überzeugt man sich mit Hilfe des Spektralmaßes leicht davon, daß $e^{-(t+s)A}x = e^{-tA}e^{-sA}x$, $t,s\geq 0$, insbesondere $e^{-tA} \in \mathcal{L}(H,H)$, $t\geq 0$, $e^{-0A}=I$,

$$\begin{array}{l} e^{-\cdot A}\varphi \in C^1([0,T],\mathcal{H}) \\ e^{-tA}\varphi \in \mathcal{D}(A),\ 0\leq t\leq T, \\ Ae^{-A}\varphi \in C^0([0,T],\mathcal{H}) \\ v_0' + Av_0 = 0 \text{ in } [0,T], v_0(t) = e^{-tA}\varphi \end{array}$$

Man vergleiche hierzu S. 7. Sei

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(t)ds, \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds + [e^{-(t-s)A}A^{-1}f(t)]_0^t, \\ &= \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds + A^{-1}f(t) - e^{-tA}A^{-1}f(t). \end{aligned}$$

Nun ist $Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))$ in $s, 0\leq s<t$, stetig, weil $Ae^{-tA}x$, $x\in\mathcal{H}$, in $t>0$ stetig ist. Außerdem ist

$$\begin{aligned} ||Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))|| &\leq \frac{c}{|t-s|}||f(s)-f(t)||, \\ &\leq \frac{c}{|t-s|^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Also ist $Ae^{-(t-.)A}(f(.)-f(t)) \in L^1((0,t),\mathcal{H})$ und es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds &= \int_0^t A^{-1}Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds, \\ &= A^{-1}\int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds, \end{aligned}$$

$$v_1(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \le t \le T.$$

Wir setzen $\mathcal{R}(t) = A^{-1}f(t) - e^{-tA}A^{-1}f(t)$. Wir haben $A\mathcal{R} \in C^0([0,T],\mathcal{H})$, da $A\,A^{-1}f(.)$, $Ae^{-.A}A^{-1}f(\emptyset)$ aus $C^0([0,T],\mathcal{H})$ sind; es ist jetzt zu zeigen, daß $A\int_0^{\cdot} e^{-(.-s)A}(f(s)-f(.))ds \in C^0([0,T],\mathcal{H})$ ist.

Für $h > 0$ haben wir mit $\widetilde{v}_1(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds$ die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_1(t+h) - \widetilde{v}_1(t) &= \int_0^{t+h} e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds = \\
&= \int_0^t e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds - \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds \\
&\quad + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds, \\
&= \int_0^t (e^{-(t+h-s)A} - e^{-(t-s)A})(f(s)-f(t))ds + \int_0^t e^{-(t+h-s)A}(f(t)-f(t+h))ds + \\
&\quad + \int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds, \\
&= (e^{-hA}-I)A^{-1}\int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds + [e^{-(t+h-s)A}A^{-1}(f(t)-f(t+h))]_0^t + \\
&\quad + A^{-1}\int_t^{t+h} Ae^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds.
\end{aligned}$$

Wegen $(e^{-hA}-I)f \to 0,\ h \to 0,\ h \ge 0,\ f \in \mathcal{H}$, wegen

$$||Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))|| \le \frac{c}{|t-s|^{1-\alpha}}$$

$$||Ae^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))|| \le \frac{c}{|t+h-s|^{1-\alpha}}$$

folgt $Av_1(t+h) \to Av_1(t),\ h \to 0,\ h > 0$. Für $h < 0$ ist der Beweis analog. Damit haben wir gezeigt: $Av_1 \in C^0([0,T],\mathcal{H})$. Weiter liefert (V.1.4) mit der stetigen Differenzierbarkeit von $e^{-.A}f,\ f \in \mathcal{D}(A)$, auf $[0,+\infty)$ die Formel

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0,\\ h>0}} \frac{v_1(t+h)-v_1(t)}{h} &= -\int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))dt + \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}[\frac{e^{-hA}-e^{-(t+h)A}}{h}A^{-1}(f(t)-f(t+h)) + \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}(t+h)-\mathcal{R}(t)}{h} + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds], \\
&= -\int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds + \lim_{\substack{h\to 0,\\ h>0}}[\frac{e^{-hA}-e^{-(t+h)A}}{h}A^{-1}(f(t)-f(t+h)) + \\
&\quad + \frac{\mathcal{R}(t+h)-\mathcal{R}(t)}{h} + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds].
\end{aligned}$$

Es ist leicht zu erkennen, daß für $\varepsilon > 0$ jedenfalls

$$||e^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))|| < \varepsilon$$

ist, $t \le s \le t+h,\ 0 \le h \le \delta(\varepsilon)$. Daher konvergiert der vorletzte Term gegen 0 für $h \to 0$. Es ist klar, daß auch der letzte Term für $h \to 0$ gegen 0 konvergiert. Nun ist

$$\lim_{\substack{h\to 0,\\ h>0}}[\frac{e^{-hA}-e^{-(t+h)A}}{h}A^{-1}(f(t)-f(t+h)) + \frac{1}{h}(A^{-1}f(t+h) - e^{-(t+h)A}A^{-1}f(t+h) - A^{-1}f(t) + e^{-tA}A^{-1}f(t))],$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0,\\ h>0}}[\frac{e^{-hA}-I}{h}A^{-1}f(t) - \frac{e^{-(t+h)A}-e^{-tA}}{h}A^{-1}f(t) - \frac{e^{-hA}-I}{h}A^{-1}f(t+h) + \frac{e^{-(t+h)A}}{h}A^{-1}f(t+h) -$$

$$-\frac{e^{-(t+h)A}}{h}A^{-1}f(t+h)] = e^{-tA}f(t).$$

Ist $h < 0$, so erhält man dasselbe Ergebnis wie man leicht nachrechnet. Somit ist v_1 in jedem Punkt $t \in [0,T]$ differenzierbar und

$$v_1'(t) + Av_1(t) = f(t).$$

Insbesondere ist $v_1 \in C^1([0,T],\mathcal{H})$. Somit besitzt im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ die Abbildung

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds$$

alle gewünschten Regularitätseigenschaften und löst $u'+Au = f$, $u(0) = \varphi$. Zum Beweis der Eindeutigkeit verfahren wir wie folgt (der Beweis ist etwas umständlicher als im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ nötig, da er auch noch in den anderen Fällen gelten soll): Sei $0 < \varepsilon < T$. Skalarmultiplikation von $u' + Au = f$ mit u liefert in $[\varepsilon,T]$

$$(u',u) + (Au,u) = (f,u).$$

In $[\varepsilon,T]$ haben wir $2\mathcal{R}e(u'(t),u(t)) = \frac{d}{dt}||u(.)||^2(t)$; man vergleiche hierzu Seite 9. Das ergibt

$$||u(t)||^2 + \int_\varepsilon^t ||A^{1/2}u(\sigma)||^2 d\sigma = 2\int_\varepsilon^t \mathcal{R}e(f(\sigma),u(\sigma))d\sigma + ||u(\varepsilon)||^2;$$

lassen wir $\varepsilon \to 0$ streben, so folgt

$$||u(t)||^2 + 2\int_0^t ||A^{1/2}u(\sigma)||^2 d\sigma = 2\mathcal{R}e\int_0^t (f(\sigma),u(\sigma))d\sigma + ||\varphi||^2.$$

Für $\varphi = 0$, $f(t) = 0$, $0 \le t \le T$, ergibt sich $u(t) = 0$ in $[0,T]$ und daraus die Eindeutigkeit. Sei nun $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$. Dann folgt für die bereits konstruierte Lösung u mit Satz IV.1.2 die Formel

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-tA}\varphi - \int_0^t e^{-(t-s)A}A^{-1}f'(\sigma)d\sigma + [e^{-(t-s)A}A^{-1}f(s)]_0^t \\ &= e^{-tA}\varphi - \int_0^t e^{-(t-s)A}A^{-1}f'(\sigma)d\sigma + A^{-1}f(t) - e^{-tA}A^{-1}f(0). \end{aligned}$$

Bilden wir auf beiden Seiten die Distributionsableitung, so entsteht

$$\begin{aligned} u'(t) &= -e^{-tA}A\varphi - A^{-1}f'(t) + A^{-1}f'(t) + e^{-tA}f(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A}f'(\sigma)d\sigma, \\ &= -e^{-tA}A\varphi + e^{-tA}f(0) - \int_0^t e^{-(t-s)A}f'(\sigma)d\sigma \text{ fast überall in } (0,T). \end{aligned}$$

Hier wird die Differentation des Integralterms ausgeführt wie auf Seite 8. Die Spektraldarstellung $e^{-tA}x = \int_{\widehat{c}/2}^\infty e^{-\lambda t}dE(\lambda)x$, $x \in \mathcal{H}$, liefert sofort

$$e^{-tA}x \in D(A^{1-\rho}),\ \rho > 0, t > 0,$$

$$\begin{aligned} ||A^{1-\rho}e^{-tA}|| &\le \sup_{\lambda \ge \widehat{c}/2} \lambda^{1-\rho}e^{-\lambda t}, \\ &\le c^{-(\widehat{c}/4)t} \cdot \frac{1}{t^{1-\rho}},\ \rho > 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

(V.1.5) $$A^{1-\rho}e^{-\cdot A}x \in C^0((0,+\infty),\mathcal{H}),\ \rho > 0.$$

Insbesondere sind $A^{1-\rho}e^{-\cdot A}A\varphi$, $A^{1-\rho}e^{-\cdot A}f(0)$ aus $C^0((0,T],\mathcal{H})$.

Nun ist noch der Integegralform zu betrachten. Sei

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(t) &= \int_0^t e^{-(t-s+\varepsilon)A} f'(s)ds, \\ &= A^{-(1-\rho)} \int_0^t A^{1-\rho} e^{-(t-s+\varepsilon)A} f'(s)ds, \ \varepsilon > 0, \ 0 < \rho < 1. \end{aligned}$$

Mit (V.1.5) ist leicht zu sehen, daß $\int_0^\cdot A^{1-\rho} e^{-(\cdot-s+\varepsilon)A} f'(s)ds \in C^0([0,T],\mathcal{H})$ ist. Also ist $A^{1-\rho}F_\varepsilon(.) \in C^0([0,T],\mathcal{H})$. Nun ist

$$\begin{aligned} A^{1-\rho}F_\varepsilon(t) - A^{1-\rho}F_{\varepsilon'}(t) &= \int_0^t A^{1-\rho}(e^{-(t-s+\varepsilon)A} - e^{-(t-s+\varepsilon')A}) f'(s)ds \\ ||A^{1-\rho}F_\varepsilon(t) - A^{1-\rho}F_{\varepsilon'}(t)|| &\leq \int_0^t ||A^{1-\rho}(e^{-(t-s+\varepsilon)A} - e^{-(t-s+\varepsilon')A})|| \cdot ||f'(s)||ds, \ \varepsilon, \varepsilon' > 0. \end{aligned}$$

Für $\sigma > 0$, $1 \geq \gamma \geq 0$ haben wir $|(e^{-\sigma} - 1)(\sigma^\gamma| \leq c(\gamma)$ mit einer von γ abhängigen positiven Konstante $c(\gamma)$. Für $x \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned} ||A^{1-\rho}(e^{-(t-s)+\varepsilon)A} - e^{-(t-s+\varepsilon')A})x||^2 &= \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} \lambda^{2(1-\rho)} |e^{-(t-s+\varepsilon)\lambda} - e^{-(t-s+\varepsilon')\lambda}|^2 d||E(\lambda)x||^2, \\ &= \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} \lambda^{2(1-\rho)} |e^{-(t-s)\lambda - \varepsilon'\lambda}(e^{-(\varepsilon-\varepsilon')\lambda} - 1)|^2 d||E(\lambda)x||^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &|\lambda^{2(1-\rho)} e^{-2(t-s)\lambda - 2\varepsilon'\lambda}||e^{-(\varepsilon-\varepsilon')\lambda} - 1|^2 \\ &\leq |(\varepsilon-\varepsilon')^\gamma \lambda^{\gamma+(1-\rho)} e^{-(t-s)\lambda-\varepsilon'\lambda}|^2 \sup_{\lambda \geq \widehat{c}/2} |\frac{e^{-(\varepsilon-\varepsilon')\lambda} - 1}{(\varepsilon-\varepsilon')^\gamma \lambda^\gamma}|^2 \\ &\leq c(\rho) \left(\frac{(\varepsilon-\varepsilon')^\gamma}{(t-s)^{1-\rho/2}} e^{-(t-s)(\lambda/2)} \right)^2, \ 0 < \varepsilon' < \varepsilon, \ \gamma \in (0, \rho/2), \ t > s \end{aligned}$$

so daß

$$||(A^{1-\rho}e^{-(t-s+\varepsilon)A} - A^{1-\rho}e^{-(t-s+\varepsilon')A})x|| \leq c(\rho) \frac{(\varepsilon-\varepsilon')^\gamma}{(t-s)^{1-\rho/2}} ||x||$$

ausfällt. Daher ist

$$||A^{1-\rho}F_\varepsilon(t) - A^{1-\rho}F_{\varepsilon'}(t)|| \leq (\varepsilon-\varepsilon')^\gamma \int_0^t c(\rho) \frac{1}{(t-s)^{1-\rho/2}} ds \cdot ess \sup_{\sigma \in (0,T)} ||f'(\sigma)||, \ 0 < \varepsilon' < \varepsilon,$$

und die $A^{1-\rho}F_\varepsilon(.)$. konvergieren in $C^0([0,T],\mathcal{H})$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt sofort, daß die Grenzfunktion gerade

$$\int_0^t A^{1-\rho} e^{-(t-s)A} f(s)ds, \ t \in [0,T],$$

ist. Damit folgt die Aussage des Satzes im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$. Im Fall $\varphi \in \mathcal{H}$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ schließen wir wie folgt: Wir setzen wieder an

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds.$$

Der Integralterm wird wie im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ behandelt. Von $v_0(t) = e^{-tA}\varphi$ gilt

$$\begin{gathered} v_0(t) \in \mathcal{D}(A), \ 0 < t \leq T, \\ Av_0 \in C^0((0,T],\mathcal{H}), \\ v_0 \in C^1((0,T],\mathcal{H}) \cap C^0([0,T],\mathcal{H}), \\ v_0' + Av_0 = 0 \text{ in } 0 < t \leq T, \end{gathered}$$

$$v_0(0) = \varphi.$$

Man vergleiche hierzu S. .... Damit ist eine Lösung u mit den gewünschten Eigenschaften im Fall $\varphi \in \mathcal{H}$, $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ konstruiert. Der Beweis auf den Seiten 6 bis 8 zeigt das Bestehen der 1. Energiegleichung für die eben konstruierte Lösung u, die Eigenschaft

$$A^{1/2}u \in L^2((0,T),\mathcal{H})$$

und ihre Eindeutigkeit. Zum Fall $\varphi \in \mathcal{H}$, $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$ bemerken wir folgendes. Der Integralterm in der Darstellung für u wird wie eben im Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$ behandelt. Von v_0 gilt offenbar auch $A^{1-\rho}v_0' = -A^{2-\rho}e^{-\cdot A}\varphi \in C^0((0,T],\mathcal{H})$, da sogar $A^\mu e^{-\cdot A}x \in C^0((0,+\infty),\mathcal{H})$, $x \in \mathcal{H}$, $\mu \geq 0$, $||A^\mu e^{-tA}x|| \leq (c(\mu)/t^\mu)||x||$, $t > 0, \mu > 0, x \in \mathcal{H}$, wie aus der Spektraldarstellung von $A^\mu e^{-tA}x$, $t > 0$, $\mu \geq 0$ leicht folgt. Im Satz war aber nur

$$f \in \bigcap_{\varepsilon, 0<\varepsilon<T} C^{0,1}([\varepsilon,T],\mathcal{H}) \cap C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$$

angenommen. Dieser Fall wird folgendermaßen auf den eben behandelten reduziert. Für $t \in [\varepsilon, T]$ gilt

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{-(t-\varepsilon)A}e^{\varepsilon A}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \\
&= e^{-(t-\varepsilon)A}e^{-\varepsilon A}\varphi + \int_\varepsilon^t e^{-(t-s)A}f(s)ds + \int_0^\varepsilon e^{-(t-s)A}f(s)ds, \\
&= e^{-(t-\varepsilon)A}(e^{-\varepsilon A}\varphi + \int_0^\varepsilon e^{-(\varepsilon-s)A}f(s)ds) + \int_\varepsilon^t e^{-(t-s)A}f(s)ds, \\
&= e^{-(t-\varepsilon)A}u(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t e^{-(t-s)A}f(s)ds.
\end{aligned}$$

Wir wissen bereits: $u(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$. Wir können offenbar den Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$ benutzen, um zu zeigen, daß

$$\begin{gathered}
u' \in C^1([\varepsilon,T],\mathcal{H}) \\
u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1-\rho}),\ \varepsilon < t \leq T,\ 0 < \rho \leq 1, \\
A^{1-\rho}u' \in C^0((\varepsilon,T],\mathcal{H}) \\
u(t) \in \mathcal{D}(A),\ \varepsilon \leq t \leq T, \\
Au \in C^0([\varepsilon,T],\mathcal{H});
\end{gathered}$$

statt $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ nehme man $u(\varepsilon) \in \mathcal{D}(A)$, statt $[0,T]$ nehme man $[\varepsilon,T]$, statt $f \in C^{0,1}([0,T],\mathcal{H})$ nehme man $f \in C^{0,1}([\varepsilon,T],\mathcal{H})$. Damit bleibt nur der Fall $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ zu betrachten mit $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$. Zunächst folgt durch Skalarmultiplikation der in $(0,T]$ bestehenden Gleichung

$$u' + Au = f$$

mit Au:

$$\text{(V.1.6)} \qquad \tfrac{d}{dt}||A^{\frac{1}{2}}u(.)||^2(t) + 2||Au(t)||^2 = 2\mathcal{R}e(f(t),Au(t)),\ 0 < t < T,$$

da nach Seite 9 gilt $\frac{d}{dt}||A^{\frac{1}{2}}u(.)||^2(t) = 2\mathcal{R}e(Au(t),u'(t)) = 2\mathcal{R}e(u'(t),Au(t))$, $0 < t \leq T$. Integration über (ε, t), $0 < \varepsilon < t$, von (V.1.6) liefert

$$\text{(V.1.7)} \qquad ||A^{\frac{1}{2}}u(t)||^2 + 2\int_\varepsilon^t ||Au(\sigma)||^2 d\sigma = ||A^{\frac{1}{2}}u(\varepsilon)||^2 + 2\mathcal{R}e\int_\varepsilon^t (f(\sigma),Au(\sigma))d\sigma.$$

Multiplizieren wir $u' + Au = f$ skalar mit u', so folgt ebenso

$$\text{(V.1.8)} \qquad ||A^{\frac{1}{2}}u(t)||^2 + 2\int_\varepsilon^t ||u'(\sigma)||^2 d\sigma 0||A^{\frac{1}{2}}u(\varepsilon)||^2 + 2\mathcal{R}e\int_\varepsilon^t (f(\sigma),u'(\sigma))d\sigma.$$

Da für u die Formel auf Seite 36, nämlich

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds,$$

gilt, ergibt sich mit $A^{1/2}e^{-tA}\varphi = e^{-tA}A^{\frac{1}{2}}\varphi$, $e^{-.A}A^{1/2}\varphi \in C^0([0,T],\mathcal{H})$ und der auf Seite 33/34 bewiesenen Inklusion

$$A\int_0^{\cdot} e^{-(.-s)A}f(s)ds \in C^0([0,T],\mathcal{H}), \text{ woraus}$$

$$A^{1/2}\int_0^{\cdot} e^{-(.-s)A}f(\sigma)ds \in C^0([0,T],\mathcal{H})$$

folgt, daß $A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H})$ ist. Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ in (V.1.7) und (V.1.8) liefert nun

$$\begin{aligned} u' &\in L^2((0,T),\mathcal{H}) \cap C^0((0,T],\mathcal{H}), \\ Au &\in L^2((0,T),\mathcal{H}) \cap C^0((0,T],\mathcal{H} \end{aligned}$$

sowie die 2. Energiegleichungen (V.1.2) und (V.1.3). □

Der letzte Teil des Satzes V.1.1 suggeriert, daß man für $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in L^2((0,T),\mathcal{H})$ eine Lösung von $u' + Au = f$ finden könnte, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\begin{aligned} u' &\in L^2((0,T),\mathcal{H}), \\ Au &\in L^2((0,T),\mathcal{H}), \\ u' + Au &= f \text{ fast überall in } (0,T), \\ A^{1/2}u &\in C^0([0,T],\mathbf{H}), \\ u(0) &= \varphi. \end{aligned}$$

u' ist hierbei im Sinn meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“, V.5, zu verstehen. Wenn eine solche Aussage gilt, so heißt das, daß man zu $f \in L^2((0,T),\mathcal{H})$ eine Lösung von $u' + Au = f$, $u(0) = \varphi$, finden kann, bei der u', Au im gleichem Raum wie f liegen. Ebenso kann man sich fragen, ob $f \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ impliziert, daß bei geeigneten Annahmen an φ folgt: $u', Au \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$. Auf diese Fragen soll im folgenden Paragraphen eingegangen werden. Die Eigenschaft von u, daß u', Au im gleichen Raum wie f liegen, nennt man **maximale Regularität.**

§2. Maximale Regularität

Zunächst eine Vorbemerkung: Sei $T > 0$, $f \in L^2((0,T),\mathcal{H})$. Dann können wir gemäß meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“, Seite V.33/330und Seite V.34/331, f in $L^2((0,T),\mathcal{H})$ durch eine Folge (f_ν) mit $f_\nu \in C^1([0,T],\mathcal{H})$ approximieren. Endlich gibt es, wenn A wie in §1 ein selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ ist, der strikt positiv ist, d.h.

$$(Af,f) \geq \widehat{c}||f||^2,\ f \in \mathcal{D}(A),$$

mit einer positiven Konstante $\widehat{c}$, zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ eine Folge (φ_ν) mit $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(A)$, $\varphi_\nu \to \varphi$ in $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$, d.h. $||A^{1/2}\varphi_\nu - A^{1/2}\varphi|| \to 0$, $\nu \to \infty$.

Satz V.2.1: *Sei A ein strikt positiver selbstadjungierter Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei $T > 0$, $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in L^2((0,T),\mathcal{H})$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften: u ist eine Abbildung von $[0,T]$ in $\mathcal{D}(A^{1/2})$,*

$$A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H}),$$

$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),$$

$$Au \in L^2((0,T),\mathcal{H}),$$
$$u' \in L^2((0,T),\mathcal{H}),$$
$$u' + Au = f \text{ fast überall in } (0,T)$$
$$u(0) = \varphi.$$

Es gilt in $[0,T]$ die Ungleichung $2||A^{1/2}u(t)||^2 + \int_0^t (||u'(s)||^2 + ||Au(s)||^2)ds \leq 2||A^{\frac{1}{2}}\varphi||^2 + 2\int_0^t ||f(s)||^2 ds.$

Beweis: Zunächst wählen wir φ_ν, f_ν wie eingangs dieses Paragraphen ausgeführt. Sei u_ν die gemäß Satz V.1.1 eindeutig bestimmte Lösung von $u' + Au = f_\nu$, $u_\nu(0) = \varphi_\nu$, mit folgenden Eigenschaften:

$$u_\nu \in C^1([0,T],\mathcal{H}),\ u_\nu(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \leq t \leq T,$$
$$Au_\nu \in C^0([0,T],\mathcal{H}),$$
$$u'_\nu + Au_\nu = f_\nu \text{ in } [0,T],\ u_\nu(0) = \varphi_\nu.$$

Die zweiten Energieungleichungen (V.1.2), (V.1.3) liefern in $[0,T]$:

$$2||A^{\frac{1}{2}}(u_\nu(t) - u_\mu(t))|| + 2\int_0^t ||u'_\nu(s) - u'_\mu(s)||^2 ds = ||A^{\frac{1}{2}}(\varphi_\nu - \varphi_\mu)||^2 +$$

$$+2\mathcal{R}e\int_0^t (f_\nu(s) - f_\mu(s), A(u_\nu(s) - u_\mu(s))ds + 2\mathcal{R}e\int_0^t (f_\nu(s) - f_\mu(s), u'_\nu(s) - u'_\mu(s))ds,$$

$$\leq ||A^{\frac{1}{2}}(\varphi_\nu - \varphi_\mu)||^2 + 2\int_0^t ||f_\nu(s) - f_\mu(s)||||A(u_\nu(s) - u_\mu(s))||ds + 2\int_0^t ||f_\nu(s) - f_\mu(s)||||u'_\nu(s) - u'_\mu(s)||ds$$

$$\leq ||A^{\frac{1}{2}}(\varphi_\nu - \varphi_\mu)||^2 + 2\int_0^t ||f_\nu(s) - f_\mu(s)||^2 ds + \int_0^t ||u'_\nu(s) - u'_\mu(s)||^2 ds + \int_0^t ||Au_\nu(s) - Au_\mu(s)||^2 ds, \text{ also}$$

$$2||A^{\frac{1}{2}}(u_\nu(t) - u_\mu(t))||^2 + \int_0^t ||u'_\nu(s) - u'_\mu(s)||^2 ds + \int_0^t ||Au_\nu(s) - Au_\mu(s)||^2 ds$$

$$\leq 2||A^{\frac{1}{2}}(\varphi_\nu - \varphi_\mu)||^2 + 2\int_0^t ||f_\nu(s) - f_\mu(s)||^2 ds,\ \nu,\mu \in \mathbb{N}.$$

Daher bilden die $A^{\frac{1}{2}}u_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge in $C^0([0,T],\mathcal{H})$, die u'_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, eine solche in $L^2((0,T),\mathcal{H})$ und die Au_ν, $\nu \in \mathbb{N}$, eine solche in $L^2((0,T),\mathcal{H})$. Da A strikt positiv definit ist, folgt

$u_\nu \to u$ in $C^0([0,T],\mathcal{H})$, $\nu \to \infty$. Mit der Abgeschlossenheit von $A^{1/2}$ ergibt sich: $A^{1/2}u_\nu \to A^{1/2}u$ in $C^0([0,T],\mathcal{H})$, $\nu \to \infty$, insbesondere

$$A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\ u(0) = \varphi.$$

Aus der Definition der Distributionsableitung in meiner Vorlesung „Fuktionalanalysis I“, insbesondere Lemme V.5.2, folgt, daß u die Distributionsableitung u' besitzt, wenn u' der Grenzwert der Cauchy-Folge (u'_ν) in $L^2((0,T),\mathcal{H})$ ist. Sei v der Grenzwert der Cauchy-Folge (Au_ν) in $L^2((0,T),\mathcal{H})$. Für eine Teilfolgte (Au_{ν_j}) von (Au) gilt

$$Au_{\nu_j}(t) \to v(t),\ j \to \infty,\ \text{ fast überall in } (0,T),$$

und gleichzeitig

$$u_{\nu_j}(t) \to u(t),\ j \to \infty,\ \text{ in } [0,T].$$

Aus der Abgeschlossenheit von A folgt:

$$\begin{aligned} u(t) &\in \mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,T) \\ v(t) &= Au(t) \text{ fast überall in } (0,T). \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir $u' \in L^2((0,T),\mathcal{H})$, $Au \in L^2((0,T),\mathcal{H})$, $u' + Au = f$ fast überall in $(0,T)$, $u(0) = \varphi$.

Damit ist die Existenzaussage des Satzes V.2.1 bewiesen. Offenbar gilt für u_ν die Ungleichung (siehe Seite 39)

$$2||A^{\frac{1}{2}}u_\nu(t)||^2 + \int_0^t ||u'_\nu(s)||^2 ds + \int_0^t ||Au_\nu(s)||^2 ds \le ||A^{\frac{1}{2}}\varphi_\nu||^2 + 2\int_0^t ||f_\nu(s)||^2 ds,\ 0 \le t \le T,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Lassen wir ν gegen $+\infty$ streben, so folgt wie eben gezeigt

$$2||A^{\frac{1}{2}}u(t)||^2 + \int_0^t ||u'(s)||^2 ds + \int_0^t ||Au(s)||^2 ds \le 2||A^{\frac{1}{2}}\varphi||^2 + 2\int_0^t ||f(s)||^2 ds,\ 0 \le t \le T.$$

Nun zur Eindeutigkeit: Skalarmultiplikation von $u'(t) + Au(t) = f(t)$ mit $u(t)$, wobei u irgendeine Lösung von $u' + Au = f$, $u(0) = \varphi$, mit den im Satz beschriebenen REgularitätseigenschaften ist, liefert

$$(u'(t), u(t)) + (Au(t), u(t)) = (f(t), u(t)).$$

Approximieren wir u wie in Satz V.5.1 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“(es reicht $\mathcal{B} = \mathcal{X} = \mathcal{H}$ zu wählen), so folgt

$$\begin{aligned} 2\mathcal{R}e\int_0^t (u'(s), u(s))ds &= ||u(t)||^2 - ||u(0)||^2, \\ &= ||u(t)||^2 - ||\varphi||^2. \end{aligned}$$

Mit $(Au(t), u(t)) \ge \widehat{c}||u(t)||^2$ für fast alle $t \in (0,T)$ folgt

$$\begin{aligned} ||u(t)||^2 + 2\widehat{c}\int_0^t ||u(s)||^2 ds &\le ||\varphi||^2 + 2\int_0^t ||f(s)||||u(s)||ds, \\ &\le ||\varphi||^2 + \int_0^t (\frac{1}{\widehat{c}}||f(s)||^2 + \widehat{c}||u(s)||^2)ds, \\ ||u(t)||^2 + \widehat{c}\int_0^t ||u(s)||^2 ds &\le ||\varphi||^2 + \int_0^t (1/\widehat{c})||f(s)||^2 ds. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Eindeutigkeit. $\square$

Wir wollen nun zu von 2 verschiedenen Integrationsexponenten übergehen.

Hilfssatz V.2.1: *Sei $k \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ irgendwelche positiven Zahlen. Dann gilt die folgende Ungleichung:*

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \leq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \cdot \prod_{i=1}^{k} \lambda_1^{(2k-1)/k}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_k^2 &= (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k)^{2-1/k} \cdot (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k)^{1/k} \\ &= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) \cdot (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k)^{2-1/k} \cdot (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_k)^{1/k} \cdot 1/\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i. \end{aligned}$$

Anwendung der Ungleichung von arithmetischen und geometrischen Mittel vollendet den Beweis. □

Hilfssatz V.2.2: *Sei $r \in \mathbb{N}$, weiter sei r gerade. Sei $\mathrm{T} > 0$, sei $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1-1/r})$ für ein beliebiges aber festes $r \in 2\mathbb{N}$. Dann ist*

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt \leq \frac{1}{r}||A^{1-1/r}\varphi||^r.$$

Insbesondere ist für $r \in 2\mathbb{N}$ der Ausdruck $Ae^{-\cdot A}\varphi$ in $L^r((0,+\infty),\mathcal{H})$.

Beweis: Das Intervall $[\widehat{c}/2, b]$, $\widehat{c}/2 < b$, wird für $n \in \mathbb{N}$ in n äquidistante kompakte Intervall $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ aufgeteilt, die die Länge T/n haben. Sei $r > 0$, $\rho = r/2$. Wenn $\lambda_i \in \overset{\circ}{\Delta}_i$, $1 \leq i \leq n$, ist, so haben wir, wenn wir zunächst φ durch $E([\widehat{c}/2, b])\varphi \in \mathcal{D}(A)$ ersetzen

$$||Ae^{-tA}E([\widehat{c}/2, b])\varphi||^r = \lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e^{-2\lambda_i t}||E(\Delta_i)\varphi||^2]^{\frac{r}{2}},\ t \in (0,T).$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}E([\widehat{c}/2, b])\varphi||^r dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^T [\sum_{i=1}^{u} \lambda_i^2 e^{-2\lambda_i t}||E(\Delta_i)\varphi||^2]^\rho dt,$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^T [\sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^2 e^{-2(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_\rho})t}||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2 dt,$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{1_\rho}^2 \frac{1-e^{-2(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_\rho})T}}{2(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_\rho})}||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2$$

$$\leq \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^{(2\rho-1)/\rho} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^{(2\rho-1)/\rho}||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2$$

nach Hilfssatz V.2.1,

$$= \frac{1}{r}\lim_{n\to\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^{2(r-1)/r} \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^{2(r-1)/r}||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2,$$

$$= \frac{1}{r}[\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2(r-1)/r}||E(\Delta_i)\varphi||^2]^\rho,$$

$$= \frac{1}{r}(\int_{\widehat{c}/2}^{t} \lambda^{2(r-1)/r} d(E(\lambda)\varphi,\varphi))^{r/2},$$

$$= \frac{1}{r}||A^{1-1/r}E([\widehat{c}/2, b])\varphi||^r,$$

$$\leq \frac{1}{r}||A^{1-1/r}\varphi||^r.$$

Damit folgt

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}E([\widehat{c}/2,b])\varphi||^r dt \leq \frac{1}{r}||A^{1-1/r}\varphi||^r,\ r>0.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt \leq \frac{1}{r}||A^{1-1/r}\varphi||^r,\ r>0,\ \text{und weiter}$$

$$Ae^{-\cdot A}\varphi \in \bigcup_{\widetilde{T}>0} L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),$$

da $T>0$ beliebig war. Da die Schranke für $\int_0^T ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt$ nicht von T abhing, folgt $Ae^{-\cdot A}\varphi \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H})$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. $\square$

Hilfssatz V.2.3: *Für alle $r\geq 2$, für alle $\varphi\in\mathcal{D}(A^{1-1/r})$, für alle $T>0$, gilt*

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt \leq c(\frac{1}{r})||A^{1-1/r}\varphi||^r,$$

wobei $c(1/r)=1$ ist, $2\leq r<6$, und $c(1/r)=1/r$, $r\geq 6$.

Beispiel: Sei $k\in\mathbb{N}$. Dann kennen wir die zu beweisende Abschätzung schon für $r=2k$ und $r=2(k+1)$, wie aus Hilfssatz V.2.2 folgt. Sei $\varepsilon>0$. Sei $z=\sigma+i\tau$, $\sigma,\tau\in\mathbb{R}$, $0\leq\sigma\leq 1$, $1/r'(z)=(1-z)/(2k/(2k-1))+z/(2(k+1))/(2k+1)$, $1/r(z)=(1-z)/2k+z/2(k+1)$, $.'$ bedeutet den dualen Exponenten. Sei $r'(\vartheta)=r'(\vartheta+i\cdot 0)$, $r(\vartheta)=r(\vartheta+i\cdot 0)$, $0\leq\vartheta\leq 1$. Sei ϑ fest aus $[0,1]$, sei

$$F_\vartheta(z)=F_\vartheta(\sigma,\tau)=\int_0^T (Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(z))}e^{-\varepsilon A}\varphi,$$

$$\frac{g(t)}{||g(t)||}||g(t)||^{r(\vartheta)/r'(z)})dt.$$

Hierbei ist g irgendein Element aus $L_0^\infty((0,T),\mathcal{H})$ und wie üblich wird $g(t)/||g(t)||$ durch 0 ersetzt, falls $g(t)=0$ ist. $F(z)$ ist holomorph in $0<\sigma<1$, stetig auf $0\leq\sigma\leq 1$ fortsetzbar und es gilt

$$\begin{aligned}
|F(0+i\tau)| &\leq \int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(0+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi||\cdot||\frac{g(t)}{||g(t)||}||g(t)||^{r'(\vartheta)/r'(0+i\tau)}||dt,\\
&\leq (\int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(0+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi||^{r(0)}dt)^{1/r(0)}\cdot(\int_0^T |||g(t)||^{r'(\vartheta)\cdot r'(0)/r'(0+i\tau)}|d\tau)^{1/r'(0)}\\
&\leq ||A^{1-1/r(0)-(1-1/r(0+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi||(1/r(0))^{1/r(0)}\cdot(\int_0^T |||g(t)||^{r'(\vartheta)\cdot r'(0)/r'(0+i\tau)}|dt)^{1/r'(0)}.
\end{aligned}$$

Nun ist $r'(0)/r'(0+i\tau)=1-i\tau+i\tau 2k/(2k/(2k+1))$, also $|||g(t)||^{r'(\vartheta)\cdot r'(0)/r'(0+i\tau)}|=||g(t)||^{r'(\vartheta)}$, und weiter gilt

$$A^{1-1/r(0)-(1-1/r(0+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi = A^{-1/2k+1/r(0+i\tau)}e^{-\varepsilon A}\varphi,$$

$$\begin{aligned}
A^{-1/2k+1/r(0+i\tau)}e^{-\varepsilon A}\varphi &= A^{-i\tau/2k+i\tau/2(k+1)}e^{-\varepsilon A}\varphi,\\
&= \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty}\lambda^{-i\tau/2k+i\tau/2(k+1)}d(E(\lambda)e^{-\varepsilon A}\varphi).
\end{aligned}$$

Wegen $|\lambda^{-i\tau/2k+i\tau/2(k+1)}|=1$ folgt

$$\begin{aligned}
|F_\vartheta(0+i\tau)| &\leq ||e^{-\varepsilon A}\varphi||(1/r(0))^{1/r(0)}(\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{1/r'(0)}\\
&\leq (1/r(0))^{1/r(0)}||\varphi||(\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{1/r'(0)},\ \tau\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
F_\vartheta(1+i\tau) &\le \int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(1+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi|| \cdot ||\frac{g(t)}{||g(t)||}||g(t)||^{r(\vartheta)/r'(1+i\tau)}||dt,\\
&\le (\int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(1+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi||^{r(1)}dt)^{1/r(1)} \cdot (\int_0^T |||g(t)||^{r'(\vartheta)\cdot r'(1)/r'(1+i\tau)}dt)^{1/r'(1)},\\
&\le ||A^{1-r/r(1)-(1-1/r(1+i\tau))}e^{-\varepsilon A}\varphi||(1/r(1))^{1/r(1)} \cdot (\int_0^T |||g(t)||^{r'(\vartheta)\cdot r'(1)/r'(1+i\tau)}|dt)^{1/r(1)},\\
&\le (1/r(1))^{1/r(1)}||\varphi||(\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{1/r(1)}, \tau \in \mathbb{R},\ g \in L_0^\infty((0,T),\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

denn $-1/r(1) + 1/r(1+i\tau) = -1/2(k+1) + (-i\tau)/2k + (1+i\tau)/2(k+1) = -i\tau/2k + i\tau/2(k+1)$, $r'(1)/r'(1+i\tau) = \frac{2(k+1)}{2k+1}(-i\tau/(2k/(2k-1)) + (1+i\tau)/(2(k+1)/(2k+1))) = 1 + i\tau - i\tau\frac{2(k+1)\cdot(2k-1)}{(2k+1)\cdot 2k}$.
Der Hadamardsche Dreiliniensatz (Lemma V.6.1 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“) zeigt

$$|F_\vartheta(\sigma)| \le (1/r(0))^{(1-\sigma)/r(0)}(1/r(1))^{\sigma/r(1)}||\varphi||(\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{\frac{1-\sigma}{r'(0)}} \cdot (\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{\frac{\sigma}{r'(1)}},$$
$$0 \le \vartheta, \sigma, \le 1.$$

Nun ist $\frac{1-\sigma}{r'(0)} + \frac{\sigma}{r'(1)} = \frac{1}{r'(\sigma)}$, also

$$|F_\vartheta(\sigma)| \le (1/r(0))^{(1-\sigma)/r(0)}(1/r(1))^{\sigma/r(1)}||\varphi||(\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{\frac{1}{r'(\sigma)}},$$

also für $\vartheta = \sigma$

$$|F_\vartheta(\vartheta)| \le (1/r(0))^{(1-\vartheta)/r(0)}(1/r(1))^{\vartheta/r(1)}||\varphi|| \cdot (\int_0^T ||g(t)||^{r'(\vartheta)}dt)^{\frac{1}{r'(\vartheta)}},$$

$$0 \le \vartheta \le 1,\ g \in L_0^\infty((0,T),\mathcal{H}).$$

$L_0^\infty((0,T),\mathcal{H})$ ist dichter Teilraum von $L^{r'(\vartheta)}((0,T),\mathcal{H})$, $r'(\vartheta)$ durchläuft, wenn ϑ das Intervall $[0,1]$ durchläuft, gerade $[2k, 2(k+1)]$. $\mathcal{H}$ war als separabel vorausgesetzt. Satz V.4.4 zeigt

$$(\int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(\vartheta))}e^{-\varepsilon A}\varphi||^{r(\vartheta)}dt)^{1/r(\vartheta)} \le ||\varphi|| \cdot [(1/r(0))^{(1-\vartheta)/r(0)}(1/r(1))^{\vartheta/r(1)}],$$

also wegen $1/r(\vartheta) = (1-\vartheta)/r(0) + \vartheta/r(1)$ gerade für alle $\varphi \in \mathcal{H}^1$:

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}A^{-(1-1/r(\vartheta))}e^{-\varepsilon A}\varphi||^{r(\vartheta)}dt \le c(1/r(\vartheta))||\varphi||^{r(\vartheta)}.$$

Für $\psi = A^{-(1-1/r(\vartheta))}\varphi$ erhalten wir

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}e^{-\varepsilon A}\psi||^{r(\vartheta}dt \le c(1/r(\vartheta))||A^{1-1/r(\vartheta)}\psi||^{r(\vartheta}.$$

Begründung folgt am Ende des Beweises.
Für $f \in \mathcal{H}$ ist

$$||e^{-\varepsilon A}f||^2 = \int_{\hat{c}/2} e^{-2\lambda\varepsilon}d(E(\lambda)f,f),\ \varepsilon > 0$$

so daß $||e^{-\varepsilon A}f|| \le ||c^{-\varepsilon' A}f||$ ausfällt, wenn $\varepsilon > \varepsilon' > 0$ ist. Der Satz von der monotonen Konvergenz zeigt für $\varepsilon \to 0$, daß

$$\int_0^T ||Ae^{-tA}\psi||^{r(\vartheta)}dt \le c(1/r(\vartheta))||A^{1-1/r(\vartheta)}\psi||^{r(\vartheta)},\ 0 \le \vartheta \le 1,\ \psi \in \mathcal{D}(A^{1-1/r(\vartheta)}).$$

Das Auftreten der Konstante $c(1/r(\vartheta))$ wie im gegenwärtigen Hilfssatz beschrieben kommt dabei folgendermaßen zustande: Wie aus dieser Seite oben ersichtlich, ist die fragleiche Konstante gerade

$$[(1/r(0))^{(1-\vartheta)/r(0)}(1/r(1))^{\vartheta/r(1)}]^{r(\vartheta)}.$$

Wir betrachten die Funktion $f(x) = (1/x)^{1/x}$, $x \geq 2$. Die Funktion $log\, f(x)$ ist jedenfalls für $x \geq 6$ strikt konkav, wie eine leichte Reichnung zeigt. Also ist

$$(1-\vartheta) log\, f(x) + \vartheta log\, f(y) \leq log\, f((1-\vartheta)x + \vartheta y),\ 0 \leq \vartheta \leq 1,\ x, y \geq 6,$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1-\vartheta}{x}} \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{\vartheta}{y}} \leq \left(\frac{1-\vartheta}{x} + \frac{\vartheta}{y}\right)^{\frac{1-\vartheta}{x}+\frac{\vartheta}{y}},$$

Für $r(0) = x \geq 6$, $r(1) = y \geq 8$, d.h. $k \geq 3$, ist

$$r(\vartheta) = \frac{1-\vartheta}{r(0)} + \frac{\vartheta}{r(1)}.$$

Offenbar ist stets

$$[(1/r(0))^{(1-\vartheta)/r(0)} (1/r(1))^{\vartheta/r(1)}] \leq 1.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Offenbar ist der die Anwendung des Hadamardschen Dreiliniensatzes betreffende Teil des Beweises von Hilfssatz V.2.3 vollkommen dem Beweis des Satzes von Riesz-Thorin (Satz V.6.1 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“) nachgebildet. Die Behandlung des Falles $1 < r < 2$ bei der Abschätzung von $\int_0^T ||Ae^{-tA}||^r dt$ konnte nicht erbracht werden. Dazu braucht man eine Abschätzung des Typs $|| \int_0^T A^{1/r} e^{-tA} g(t) || dt \leq c(\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'}$ für alle Treppenfunktionen g. Die Schwierigkeiten hierbei illustriert das folgende Lemma (besser sein Beweis).

Lemma V.2.1: *Sei $T > 0$. Sei*

$$(0, T) = \bigcup_{\nu=1}^{N} I_\nu$$

eine Zerlegung in disjunkte Intervalle I_ν mit $\overline{I}_\nu = [t_\nu, T_{\nu+1}]$, $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_{N+1} = T$. Jedem I_ν sei ein Element $g_{I_\nu} \in \mathcal{H}$ zugeordnet. Wir behaupten, daß für jede Treppenfunktion

$$g = \sum_{\nu=1}^{N} \chi_{I_\nu} g_{I_\nu},$$

und für jedes $r' > 2$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|| \int_0^T A^{1/r} e^{-tA} g(t) dt || \leq c^* (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'},$$

$1/r = 1 - 1/r'$ mti einer von $t_1, \ldots, t_{N+1}$ abhängigen Zahl $c^* > 0$, die außerdem noch von $r, \widehat{c}$ und T abhängen kann, d.h. $c^* = c^*(r, T, \widehat{c}, t_1, \ldots, t_{N+1})$.

Beweis: Wir haben

$$\int_0^T A^{1/r} e^{-tA} g(t) dt = \sum_{\nu=1}^{N} \int_{I_\nu} A^{1/r} e^{-tA} g_{I_\nu} dt,$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} A^{1/r-1} (e^{-t_\nu A} - e^{-t_{\nu+1} A}) g_{I_\nu},$$

$$|| \int_0^T A^{1/r} e^{-tA} g(t) dt || \leq \sum_{\nu=1}^{N} ||A^{1/r-1} (e^{-t_\nu A} - e^{-t_{\nu+1} A}) g_{I_\nu}||,$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} (\int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} \lambda^{2(1/r-1)} (e^{-t_\nu \lambda} - e^{-t_{\nu+1}\lambda})^2 d||E(\lambda) g_{I_\nu}||^2)^{1/2},$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} (\int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} (t_{\nu+1} - t_\nu)^{2(1-1/r)} (e^{-t_\nu \lambda} - e^{-t_{\nu+1}\lambda})^{2(1-1/r')} \cdot \left(\frac{e^{-t_\nu \lambda} - e^{-t_{\nu+1}\lambda}}{\lambda(t_{\nu+1} - t_\nu)}\right)^{2(1-1/r)} \cdot d||E(\lambda) g_{I_\nu}||^2)^{1/2},$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N}(e^{-c_\nu t_\nu} - e^{c_\nu t_{\nu+1}})^{1-1/r'}(t_{\nu+1}-t_\nu)^{1-1/r}\cdot e^{-t_\nu \widehat{c}/4(1-\frac{1}{r})}\cdot(\int_{\widehat{c}/2}^{+\infty}(\frac{1-e^{-\lambda(t_{\nu+1}-t_\nu)}}{\lambda(t_{\nu+1}-t_\nu)})^{2(1-1/r)}||dE(\lambda)g_{I_\nu}||^2)^{1/2},$$

weil $e^{-t_\nu\lambda} - e^{-t_\nu\lambda}$ bezüglich $\lambda \geq 0$ sein Maximum in $c_\nu = ln\frac{t_{\nu+1}}{t_\nu}/(t_{\nu+1}-t_\nu)$ annimmt,

$$\leq \sum_{\nu=1}^{N}(e^{-c_\nu t_\nu} - e^{-c_\nu t_{\nu+1}})^{1-1/r'}(t_{\nu+1}-t_\nu)^{1-1/r}\cdot ||g_{I_\nu}||$$

$$\leq (\sum_{\nu=1}^{N} e^{-c_\nu t_\nu} - e^{-c_\nu t_{\nu+1}})^{r(1-1/r')}e^{-((r-1)\widehat{c}/4)t_\nu})^{1/r}(\sum_{\nu=1}^{N}(t_{\nu+1}-t_\nu)||g_{I_\nu}||^{r'})^{1/r'}.$$

Nun ist $r(1-1/r') = 1$. Dies liefert

$$(\sum_{\nu=1}^{N}(e^{-c_\nu t_\nu} - e^{-c_\nu t_{\nu+1}})e^{-((r-1)\widehat{c}/4)t_\nu})^{1/r} = c^*(r,T,\widehat{c},t_1,\ldots,t_{N+1}).$$

Weiter ist

$$\sum_{\nu=1}^{N}(t_{\nu+1}-t_\nu)||g_{I_\nu}||^{r'} = \int_0^T \sum_{\nu=1}^{N}\chi_{I_\nu}||g_{I_\nu}||^{r'}dt = \int_0^T ||\sum_{\nu=1}^{N}\chi_{I_\nu}g_{I_\nu}||^{r'}dt,$$

da die I_ν paarweise disjunkt sind. Damit folgt die folgende Abschätzung:

$$||\int_0^T A^{1/r}e^{-tA}g(t)dt|| \leq c^*(r,T,\widehat{c},t_1,\ldots,t_{N+1})||g||_{L^{r'}((0,T),\mathcal{H})},$$

und das Lemma ist bewiesen. □

Der Beweis des Lemmas V.2.1 zeigt, daß

$$\begin{aligned}
c^*(r,T,\widehat{c},t_1,\ldots,t_{N+1}) &= \sum_{\nu=1}^{N}(e^{-c_\nu t_\nu} - e^{-c_\nu t_{\nu+1}})\cdot e^{-((r-1)\widehat{c}/4)t_\nu}, \\
&= \sum_{\nu=1}^{N}((\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}})^{t_\nu/(t_{\nu+1}-t_\nu)} - (\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}})^{t_{\nu+1}/(t_{\nu+1}-t_\nu)})\cdot e^{-((r-1)\widehat{c}/4)t_\nu}, \\
&= \sum_{\nu=1}^{N}(\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}})^{\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}-t_\nu}}(1-\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}})e^{-((r-1)\widehat{c}/4)t_\nu} \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{N}\frac{t_{\nu+1}-t_\nu}{t+1}.
\end{aligned}$$

Es ist nun erwünscht, eine Folge $(\mathcal{Z}_k)$, $\mathcal{Z}_k = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_{N(k)+1}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, von Zerlegungen von $(0,T)$ zu konstruieren, derart, daß

1. $\max\limits_{1\leq j\leq N(k)}|t_{j+1}^{(k)} - t_j^{(k)}| \to 0,\ k \to \infty$
2. Für die Ausdrücke

$$c^*(\mathcal{Z}_k) = \sum_{\nu=1}\frac{t_{\nu+1}^{(k)} - t_\nu^{(k)}}{t_{\nu+1}^{(k)}}$$

   gilt:

$$c^*(\mathcal{Z}_k) \leq D,\ k = 1,2,\ldots,$$

wobei D eine von k unabhängige Schranke ist. Jedoch erscheint dies nicht möglich.

Immerhin gilt

Lemma V.2.2: *Sei $T > 0$, sei $1 < r' \leq 2$. Sei $g \in L^{r'}((0,T), \mathcal{H})$. Dann ist*

$$\int_0^T e^{-tA} g(t)dt \in \mathcal{D}(A^{1/r})$$

und es gilt die Abschätzung

$$||A^{\frac{1}{r}} \int_0^T e^{-tA} g(t)dt|| \leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'}.$$

Beweis: Sei $\widehat{c}/2 < b$. Dann ist für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ jedenfalls

$$\begin{aligned}
(A^{\frac{1}{r}} E([\widehat{c}/2, b]) \int_0^T e^{-tA} g(t)dt, \varphi) &= (\int_0^T e^{-tA} g(t)dt,\ A^{\frac{1}{r}} E([\widehat{c}/2, b])\varphi) \\
&= \int_0^T (e^{-tA} g(t), AE([\widehat{c}/2, b]) A^{-\frac{1}{r'}} \varphi) \\
&= \int_0^T (g(t), Ae^{-tA} E([\widehat{c}/2, b]) A^{-\frac{1}{r'}} \varphi) dt.
\end{aligned}$$

Man beachte, daß $\int_0^T e^{-tA} g(t)dt$ wohldefiniert ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}
|(A^{\frac{1}{r}} E([\widehat{c}/2, b]) \int_0^T e^{-tA} g(t)dt, \varphi)| &\leq \int_0^T ||g(t)|| ||Ae^{-tA} E([\widehat{c}/2, b]) A^{-\frac{1}{r'}} \varphi|| dt, \\
&\leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'} (\int_0^T ||Ae^{-tA} E([\widehat{c}/2, b]) A^{-\frac{1}{r'}} \varphi||^r dt)^{1/r} \\
&\leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'} ||A^{1-1/r} E([\widehat{c}/2, b]) A^{-1/r'} \varphi|| \\
&\quad \text{nach Hilfssatz V.2.3, da } r \geq 2 \text{ ist,} \\
&= (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'} ||E([\widehat{c}/2, b])\varphi||, \\
&\leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'} ||\varphi||.
\end{aligned}$$

Mit dem Rieszschen Darstellungssatz folgt

$$||A^{1/r} E([\widehat{c}/2, b]) \int_0^T e^{-tA} g(t)dt|| \leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'}$$

Grenzübergang $b \to \infty$ und die Selbstadjungiertheit von $A^{1/r}$ liefern

$$\int_0^T e^{-tA} g(t)dt \in \mathcal{D}(A^{1/r}),$$

$$||A^{1/r} \int_0^T e^{-tA} g(t)dt \leq (\int_0^T ||g(t)||^{r'} dt)^{1/r'},$$

was zu beweisen war. □

Hilfssatz V.2.4: *Sei $t > 0$, sei $1 < r' \leq 2$. Sei $g \in L^{r'}((0,t), \mathcal{H})$. Dann ist*

$$\int_0^t e^{-(t-s)A} g(s)ds \in \mathcal{D}(A^{1/r})$$

und es gibt die Abschätzung

$$||A^{\frac{1}{r}} \int_0^t e^{-(t-s)A} g(s)ds|| \leq (\int_0^t ||g(\sigma)||^{r'} d\sigma)^{1/r'}$$

Beweis: Wir setzen g auf $\mathbb{R}$ fort, indem wir $g(s) = 0$ setzen für $s < 0$ und $s > t$. Sei $\sigma = t - s$, also $s = t - \sigma$. Dann ist

$$\int_0^t e^{-(t-s)A} g(s)ds = \int_0^t e^{-\sigma A} g(t-\sigma)d\sigma$$

und mit Lemma V.2.2 folgt das gewünschte Resultat. $\square$

Sei

$$k(t) = \begin{cases} Ae^{-tA}, \ t > 0, \\ 0, \ t \leq 0. \end{cases}$$

Die $k(t), t \in \mathbb{R}$, stellen also eine Schar von Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ dar. $\mathcal{H}$ läßt sich eineindeutig und normtreu auf den Banachraum $\mathcal{H}^*$ abbilden ($\mathcal{H}^*$ ist der Dualraum im Sinne der Banachraumtheorie) und die Abbildung ist antilinear (siehe hierzu meine Vorlesung „Funktionalanalysis I“, die Abbildung war dort mit $\widetilde{J}^{-1}$ bezeichnet). Für die zu den $k(t)$ adjungierten Operatoren $k^*(t)$ im Sinne der Banachraumtheorie, die aus $\mathcal{L}(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}^{**})$ sind, gilt

$$k^*(t) = Jk(t)\widetilde{J}^{-1},$$

wobei die Abbildung $J : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^{**}$ die Reflexivitätsabbildung in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“ ist. Nun gilt

Hilfssatz V.2.5: *Für alle $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist*

$$\int_{|s|>4|t|} ||k(s-t) - k(s)||ds \leq c_2,$$

$$\int_{|s|>4|t|} ||k^*(t-s) - k^*(-s)||ds \leq c_2.$$

mit einer von $\widehat{c}, t$ unabhängigen Konstante $c_2 > 0$.

Beweis: Die zweite Aussage ist eine Konsequenz der ersten. Für $0 < 4t < s$ folgt

$$\begin{aligned} ||(Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA})x||^2 &= \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} \lambda^2(e^{-(s-t)\lambda} - e^{-s\lambda})^2 d||E(\lambda)x||^2 \\ &= \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} \lambda^4 t^2 e^{-2\tau\lambda} d||E(\lambda)x||^2, \ x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

mit einem τ, $s - t < \tau < s$. Also folgt

$$\begin{aligned} ||(Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA})x||^2 &\leq (t^2/\inf_{\lambda \geq \widehat{c}/2} \tau(\lambda)^4)||x||^2, \\ &\leq (t^2/(s-t)^4)||x||^2, \ x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

so daß

$$||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}|| \leq t/(s-t)^2$$

entsteht. Dies liefert

$$\begin{aligned} \int_{s>4t>0} ||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}||ds &\leq t\int_{4t}^{+\infty} (s-t)^{-2}ds, \\ &= \frac{1}{3}, \ 0 < 4t < s, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Nun sind noch die folgenden Fälle zu behandeln:

Zunächst sei $s > 0 > t$, $s > 4|t|$. Dann ist $s - t = s + |t|$; bei Durchfürhung der obigen Rechnung können wir τ so wählen, daß $s < \tau < s + |t|$ entsteht. Dies liefert

$$\int_{s>4|t|} ||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}||ds \le |t| \int_{4|t|}^{+\infty} 1/s^2 ds = \frac{1}{4}.$$

Sei weiter $t > 0 > s$, $|s| > 4t$. Dann ist $s - t = -|s| - t < -4t - t < 0$ und die Behauptung trivial, da in diesem Fall $k(s-t) = k(s) = 0$ ist. Sei endlich $0 > 4t > s$. Dann ist $s - t = -|s| + |t| < -3|t|$ und die Behauptung wieder trivial. □

Nun können wir die folgende Erweiterung von Satz V.2.1 beweisen:

Satz V.2.2: *Sei A ein strikt positiver selbstadjungierter Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei $r > 2$. Sei $T > 0$, sei $f \in L^r((0,T),\mathcal{H})$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1-1/r})$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften: u ist eine Abbildung von*

$$[0,T] \text{ in } \bigcup_{0<\varepsilon\le 1/2-1/r} \mathcal{D}(A^{1-\frac{1}{r}-\varepsilon})$$

mit

$$u \in \bigcup_{0<\varepsilon\le 1/2-1/r} C^0([0,T],\mathcal{D}(A^{1-\frac{1}{r}-\varepsilon})),$$

$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T)$$
$$Au \in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$u' \in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$u' + Au = f \text{ fast überall in } (0,T),$$
$$u(0) = \varphi.$$

Es gilt in $[0,T]$ die Ungleichung

$$||A^{1-1/r-\varepsilon}u(t)||^r + \int_0^t ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Au(\sigma)||^r d\sigma \le c(\varepsilon, r, \varepsilon)(||A^{1-1/r}\varphi||^r + \int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma)$$

mit einer von $\widehat{c}, r, \varepsilon$ abhängigen Konstante $c(\varepsilon)$. Weiter ist ($c(r)$ hängt nur von r ab)

$$\int_0^T ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^T ||Au(\sigma)||^r d\sigma \le c(r)(||A^{1-1/r}\varphi||^r + \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma).$$

Beweis: Wie eingangs dieses Paragraphen eingeführt, wählen wir eine Folge (f_ν) mit

$$f_\nu \in C_0^0((0,T),\mathcal{H}),\ \nu \in \mathbb{N},$$
$$f_\nu \to f \text{ in } L^r((0,T),\mathcal{H}),\ \nu \to \infty,$$

und eine Folge (φ_ν) mit

$$\varphi_\nu \in \mathcal{D}(A),\ \nu \in \mathbb{N},$$
$$A^{1-1/r}\varphi_\nu \to A^{1-1/r}\varphi,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Sei u_ν die gemäß Satz V.1.1 eindeutig bestimmte Lösung von $u' + Au = f_\nu$, $u_\nu(0) = \varphi_\nu$, mit folgenden Eigenschaften:

$$u_\nu \in C^1([0,T],\mathcal{H}),$$
$$u_\nu(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \le t \le T,\ Au_\nu \in C^0([0,T],\mathcal{H}),$$
$$u_\nu' + Au_\nu = e^{-\frac{1}{\nu}A}f_\nu,\ u_\nu(0) = \varphi_\nu.$$

Ebenfalls gemäß Satz V.1.1. gilt die folgende Darstellungsformel:

$$u_\nu(t) = e^{-tA}\varphi_\nu + \int_0^t e^{-(t-s)A-\frac{1}{\nu}A}f_\nu(s)ds$$

Wir haben

$$A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi_\nu \to A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi$$

in $C^0([0,T],\mathcal{H})$. Natürlich ist $A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi$ in $C^0([0,T],\mathcal{H})$.

Nach Hilfssatz V.2.3 ist mit $v(t)=e^{-tA}\varphi$, $t\geq 0$, jedenfalls

$$v(t)\in\mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,T)$$
$$\int_0^t ||Av(\sigma)||^r d\sigma \leq ||A^{1-1/r}\varphi||^r.$$

Offenbar ist in $(0,T]$ sogar v stetig differenzierbar, $v'+Av=0$ und

$$\int_0^t ||v'(\sigma)||^r d\sigma \leq ||A^{1-1/r}\varphi||^r.$$

Insgesamt folgt mit $v_\nu = e^{-\cdot A}\varphi_\nu$:

$$Av\in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$v'\in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$A^{1-1/r}v\in C^0([0,T],\mathcal{H}),$$
$$||A^{1-1/r}v||^r+\int_0^t ||v'(\sigma)||^r d\sigma+\int_0^t ||Av(\sigma)||^r d\sigma \leq 3||A^{1-1/r}\varphi||^r,\ 0\leq t\leq T,$$
$$\sup_{0\leq t\leq T} ||A^{1-1/r}(v(t)-v_\nu(t)||^r+\int_0^T ||v'(t)-v_\nu'(t)||^r dt+\int_0^T ||Av(t)-Av_\nu(t)||^r dt\to 0,\ \nu\to\infty.$$

Sei

$$w_\nu(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A-\frac{1}{\nu}A}f_\nu(s)ds,\ 0\leq t\leq T,\ \nu\in\mathbb{N},$$
$$w(t)=\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)ds,\ 0\leq t\leq T.$$

Aus Satz V.9.3 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“ folgt in Verbindung mit Hilfssatz V.2.5 und Satz V.2.1, der die Gültigkeit der Voraussetzung des Satzes V.9.3 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“ für $r=2$ garantiert,

$$\int_0^t ||w_\nu'(\sigma)||^r d\sigma+\int_0^t ||Aw_\nu(\sigma)||^r d\sigma\leq c(r)\int_0^t ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma,$$
$$\int_0^t ||(w_\nu'-w_\nu')(\sigma)||^r d\sigma+\int_0^t ||(Aw_\nu-Aw_\mu)(\sigma)||^r d\sigma\leq c(r)\int_0^t ||(f_\nu-f_\mu)(\sigma)||^r d\sigma,$$

$\nu,\mu\in\mathbb{N}$, $0\leq t\leq T$. Natürlich können wir auch Satz V.9.5 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“ anwenden, wobei gemäß Satz V.2.1 und Hilfssatz V.2.5 die Konstanten $c_1(T),c_2(T)$ in Satz V.9.5 unabhängig von T gewählt werden können. Offenbar gilt:

$$w_\nu\to w \text{ in } C^0([0,T],\mathcal{H}).$$

Somit folgt

$$w'\in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$w(t)\in\mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,T),$$
$$Aw\in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$

$$\int_0^t ||w'(\sigma)||^r d\sigma+\int_0^t ||Aw(\sigma)||^r d\sigma\leq c(r)\int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma,$$

$$\int_0^t ||w'(\sigma)-w_\nu'(\sigma)||^r d\sigma+\int_0^t ||Aw(\sigma)-Aw_\nu(\sigma)||^r d\sigma\leq c(r)\int_0^t ||f(\sigma)-f_\nu(\sigma)||^r d\sigma,\ 0\leq t\leq T,\ \nu\in\mathbb{N}.$$

Sei nun $u=v+w$. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
&u' \in L^r((0,T),\mathcal{H})\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,T),\\
&Au \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u' + Au = f \text{ fast überall in } (0,T),\\
&u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} f(\sigma)d\sigma \text{ in } [0,T],
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^t ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Au(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Au(\sigma)||^r d\sigma \le c(r)(\int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma + ||A^{1-1/r}\varphi||^r),
$$

$$
A^{1/2}u \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\ u(0) = \varphi.
$$

Die Eindeutigkeit ist wegen $r > 2$ eine Konsequenz aus Satz V.2.1. Damit sind nur noch die in Satz V.2.2 angegebenen Stetigkeitseigenschaften von u offen. Wir haben für ε, $0 < \varepsilon \le 1/2 - 1/r$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t ||A^{1-1/r-\varepsilon}e^{-(t-s)A}f(s)||ds\\
&\le \int_0^t ||A^{1-1/r-\varepsilon}e^{-(t-s)A}|| \cdot ||f(s)||ds,\\
&\le \int_0^t c(r)e^{-\widehat{c}/4(t-s)}/(t-s)^{1-1/r-\varepsilon}||f(s)||ds,\\
&\le (\int_0^t ||f(s)||^r ds)^{1/r} \cdot (\int_0^t c(r)e^{-(r/(r-1))(\widehat{c}/4)/(t-s)} \cdot \frac{1}{(t-s)^{1-\varepsilon r/(r-1)}} \cdot ds)^{1-1/r}\\
&\le c(\widehat{c},r)(\frac{1}{\varepsilon r/(r-1)} + 1)^{(r-1)/r} \cdot (\int_0^t ||f(s)||^r ds)^{1/r}\\
&= c(\widehat{c},r,\varepsilon)(\int_0^t ||f(s)||^r ds)^{1/r},\ 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

Ebenso ist für $0 \le t \le T$

$$
\int_0^t ||A^{1-1/r-\varepsilon}e^{-(t-s)A}(f(s) - f_\nu(s))||ds \le c(\widehat{c},r,\varepsilon)(\int_0^T ||f(s) - f_\nu(s)||^r ds)^{1/r}.
$$

Hieraus folgt wegen

$$
w(t) = A^{-(1-1/r-\varepsilon)} \int_0^t A^{1-1/r-\varepsilon}e^{-(t-s)A}f(s)ds,
$$

daß

$$
w(t) \in \bigcap_{0<\varepsilon\le 1/2-1/r} \mathcal{D}(A^{1-1/r-\varepsilon}),\ 0 \le t \le T,
$$

$$
A^{1-1/r-\varepsilon}w \in C^0([0,T],\mathcal{H})
$$

sind. Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz V.2.2 bezieht sich nur auf $r > 2$. Für $1 < r \le 2$ ist unser Resultat zwar in Hinsicht auf die Stetigkeitseigenschaften des inhomogenen Terms w vollständiger, doch muß dafür eine vergleichsweise stärkere Voraussetzung an den Anfangswert gestellt werden.

Satz V.2.3: *Sei A ein strikt positiver selbstadjungierter Operator A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei $1 < r < 2$. Sei $T > 0$, sei $f \in L^r((0,T),\mathcal{H})$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(A^{1-1/r+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften: u ist eine Abbildung von $[0,T]$ in $\mathcal{D}(A^{1-1/r})$ mit*

$$
\begin{aligned}
&A^{1-1/r}u \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),\\
&Au \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u' \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u' + Au = f \text{ fast überall in } (0,T),\\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}
$$

Es gilt in $[0,T]$ die Ungleichung

$$||A^{1-1/r}u(t)||^r + \int_0^t ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Au(\sigma)||^r d\sigma \le c(\widehat{c},r,\varepsilon)(||A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi||^r + \int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma)$$

mit einer von $\widehat{c},r,\varepsilon$ abhängigen Konstante $c(\widehat{c},r,\varepsilon)$. Weiter ist $(c(r)$ hängt nur von r ab) im Fall $\varphi = 0$

$$\int_0^T ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^T ||Au(\sigma)||^r d\sigma + \sup_{0\le\sigma\le T} ||A^{1-1/r}u(\sigma)||^r \le c(r) \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma.$$

Beweis: (f_ν) wird wie im Beweis des vorigen Satzes gewählt. Die Folge (φ_ν) wählen wir so, daß

$$\varphi_\nu \in \mathcal{D}(A),\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi_\nu \to A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

u_ν ist wieder die Lösung von $u' + Au = e^{-\frac{1}{\nu}A}f_\nu$, $u(0) = \varphi_\nu$ gemäß Satz V.1.1, für die die Darstellungsformel

$$u_\nu(t) = e^{-tA}\varphi_\nu + \int_0^t e^{-(t-s)A-\frac{1}{r}A} f_\nu(s)ds$$

gilt. Wir haben

$$A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi_\nu \to A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi$$

in $C^0([0,T],\mathcal{H})$. Natürlich ist $A^{1-1/r}e^{-\cdot A}\varphi \in C^0([0,T],\mathcal{H})$. Mit $v(t) = e^{-tA}\varphi$, $t \ge 0$ ist jedenfalls $v' + Au = 0$, $t > 0$, $v(0) = \varphi$, $v \in C^1((0,T],\mathcal{H})$, $Av \in C^0((0,T],\mathcal{H})$. Weiter ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^t ||Ae^{-\sigma A}\varphi||^r d\sigma &\le \int_0^t ||A^{1-1/r-\varepsilon}e^{-\sigma A}||^r ||A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi||^r d\sigma,\\
&\le \int_0^t e^{-(\widehat{c}/4)\sigma} c(\widehat{c},r)\sigma^{-(r-1-r\varepsilon)} \cdot ||A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi||^r d\sigma,\\
&\le c(\widehat{c},r,\varepsilon)||A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi||^r.
\end{aligned}
$$

Also ist

$$||A^{1-\frac{1}{r}}v(t)||^r + \int_0^t ||v'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Av(\sigma)||^r d\sigma \le c(\widehat{c},r,\varepsilon) \cdot ||A^{1-1/r+\varepsilon}\varphi||^r.$$

Sei

$$
\begin{aligned}
w_\nu(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A-\frac{1}{\nu}A} f_\nu(s)ds,\\
w(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds,\ 0 \le t \le T,\ \nu \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Wie im Beweis des Satzes V.2.2 folgt

$$\int_0^t ||w_\nu'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Aw_\nu(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^t ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma,$$

$$\int_0^t ||(w_\nu' - w_\mu')(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||(Aw_\nu - Aw_\mu)(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^t ||(f_\nu - f_\mu)(\sigma)||^r d\sigma,$$

$\nu, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \le t \le T$. Daraus folgt wie auf S. 49 - 50:

$$\begin{aligned} &w' \in L^r((0,T),\mathcal{H}), \\ &w(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,T), \\ &Aw \in L^r((0,T),\mathcal{H}) \end{aligned}$$

$$\int_0^t ||w'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Aw(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma,$$

$$\int_0^t ||w'(\sigma) - w'_\nu(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^t ||Aw(\sigma) - Aw_\nu(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^t ||f(\sigma) - f_\nu(\sigma)||^r d\sigma,\ 0 \le t \le T,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Aus Hilfssatz V.2.4 folgt wegen $1 < r < 2$ daß $w(t) \in \mathcal{D}(A^{1-1/r})$ ist und, daß

$$||A^{1-1/r}(w(t) - w_\nu(t))||^r \le \int_0^t ||f(\sigma) - f_\nu(\sigma)||^r d\sigma$$

ist, $0 \le t \le T$, $\nu \in \mathbb{N}$. Also ist $A^{1-1/r}w \in C^0([0,T],\mathcal{H})$. Erneute Anwendung von Hilfssatz V.2.4 zeigt

$$||A^{1-1/r}w(t)||^r \le \int_0^t ||f(\sigma)||^r d\sigma.$$

Setzen wir $u = v + w$, so hat u alle im zu beweisenden Satz angeführten Eigenschaften. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen: Seien u_1, u_2 zwei Lösungen mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Dann ist

$$(u_1 - u_2)' + A(u_1 - u_2) = 0 \text{ fast überall in } (0,T),$$
$$(u_1 - u_2)(0) = 0.$$

Skalarmultiplikation der obigen Gleichung mit $u_1 - u_2$ liefert

$$2Re((u_1 - u_2)', u_1 - u_2) + 2||A^{1/2}(u_1 - u_2)||^2 = 0$$

fast überall in $(0,T)$. Gemäß Satz V.5.1 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“ können wir eine Folge (ψ_ν), $\psi_\nu \in C^1([0,T],\mathcal{H})$, $\nu \in \mathbb{N}$ finden mit

$$\begin{aligned} &\psi_\nu \to u_1 - u_2 \text{ in } L^r((0,T),\mathcal{H}),\ \nu \to \infty \\ &\psi'_\nu \to (u_1 - u_2)' \text{ in } L^r((0,T),\mathcal{H}), ; \nu \to \infty \\ &\psi_\nu(0) = 0. \end{aligned}$$

Insbesondere haben wir dann

$$\psi_\nu \to u_1 - u_2 \text{ in } C^0([0,T],\mathcal{H}),\ \nu \to \infty,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^t (\psi'_\nu, \psi_\nu) d\sigma = \int_0^t ((u_1 - u_2)', u_1 - u_2) d\sigma$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^t 2Re(\psi'_\nu, \psi_\nu) d\sigma = \lim_{\nu\to\infty} ||\psi_0(t)||^2 = ||(u_1 - u_2)(t)||^2 = 2Re \int_0^t ((u_1 - u_2)', u_1 - u_2) d\sigma,$$

$t \ge 0$. Damit folgt

$$||(u_1 - u_2)(t)||^2 + \int_0^t ||A^{\frac{1}{2}}(u_1 - u_2)(\sigma)||^2 d\sigma = 0,\ t \ge 0,$$

also $u_1 = u_2$. □

Das Problem der zulässigen Anfangswerte und, damit zusammenhängend, die Frage nach dem Stetigkeitsverhalten von u, sind in den Sätzen V.2.3 und V.2.2 unbefriedigendend gelöst. Hiermit beschäftigen sich die folgenden Ausführungen. Wir führen zunächst einen neuen Banachraum ein.

Definition V.2.1: *Sei $r > 1$, sei $J_{1-1/r,r}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum, der aus allen Elementen $u \in \mathcal{H}$ besteht, für die*

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^r}||(e^{-tA} - I)u||^r dt < +\infty$$

ausfällt. $J_{1-1/r,r}$ wird mit der Norm

$$||u||_{1-1/r,r} = (\int_0^\infty \frac{1}{t_r}||(e^{-tA} - I)u||^r dt + ||u||^r)^{1/r}$$

zu einem normierten Vektorraum.

Es ist klar, daß $J_{1-1/r-r}$ mit der obigen Norm tatsächlich zu einem normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum wird. $I - e^{-tA}$ ist für $t > 0$ sogar beschränkt invertierbar! Weiter ist $J_{1-1/r,r}$ mit der obigen Norm sogar ein Banachraum. Dazu sei (u_ν) eine Folge mit

$$u_\nu \in \mathcal{I}_{1-1/r,r},\ \nu \in \mathbb{N}$$

$$||u_\nu - u_\mu||_{1-1/r,r} \to 0,\ \nu, \mu \to \infty.$$

Dann haben wir zunächst

$$u_\nu \to u \text{ in } \mathcal{H},\ \nu \to \infty,$$

$$\frac{1}{t^r}||(e^{-tA} - I)u_\nu||^r \to \frac{1}{t^r}||(e^{-tA} - I)u||^r,\ \nu \to \infty,\ t > 0,$$

$$||u_\nu||_{1-1/r,r} \leq M,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Nach dem Lemma von Faton ist $u \in J_{1-1/r,r}$. Für eine Teilfolge (u_{ν_k}) von (u_ν) haben wir

$$||u_{\nu_{k+1}} - u_{\nu_k}|| \leq 2^{-k},\ k = 1, 2, \ldots.$$

Sei

$$g_k = u_{\nu_{k+1}} - u_{\nu_k},$$

$$\widetilde{g}(t) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)g_k||,\ t > 0,\ \text{also}$$

$$||\widetilde{g}||_{L^r((0,+\infty))} \leq \sum_{k=1}^\infty (\int_0^\infty \frac{1}{t^r}||(e^{-tA} - I)g_k||^r dt)^{1/r}$$

Also ist $\widetilde{g} \in L^r((0, +\infty))$ und insbesondere fast überall in $(0, +\infty)$ endlich. Also konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)g_k||$$

fast überall in $(0, +\infty)$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)u_{\nu_{k+1}}|| &\leq \\
&\leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)_{g_k}|| + \frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)u_{\nu_1}|| \\
&\leq \widetilde{g}(t) + \frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)u_{\nu_1}||,
\end{aligned}$$

$$(\frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)u_{\nu_{k+1}}||)^r \leq c(r)(\widetilde{g}(t)^r + (\frac{1}{t}||(e^{-tA} - I)u_{\nu_1}|^||)^r.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt $||u_{\nu_k} - u||_{1-1/r,r} \to 0,\ k \to \infty$. Damit schliet man sofort $||u_\nu - u||_{1-1/r,r} \to 0,\ \nu \to \infty$. Also ist $J_{1-1/r,r}$ Banachraum. In der Literatur erscheint $J_{1-1/r,r}$ als (reeller) Interpolationsraum $(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))_{1-1/r,r}$. Es sei dem Leser überlassen zu zeigen, daß

$$\mathcal{D}(A^{1-\frac{1}{r}+\varepsilon}) \subset J_{1-1/r,r} \subset \mathcal{D}(A^{1-\frac{1}{r}-\varepsilon}),\ \varepsilon > 0$$

$$||A^{1-\frac{1}{r}-\varepsilon}u|| \le c(r,\widehat{c},\varepsilon)||u||_{1-1/r,r},\ 0<\varepsilon,\ u \in J_{1-1/r,r},$$

$$||u||_{1-1/r,r} \le c(r,\widehat{c},\varepsilon)||A^{1-\frac{1}{r}+\varepsilon}u||,\ 0<\varepsilon, u \in \mathcal{D}(A^{1-1/r+\varepsilon}),$$

mit von $r,\widehat{c},\varepsilon$ abhängigen positiven Konstanten ist.

Im folgenden soll das Problem $u' + Au = f$, $u(0) = \varphi$ mit Anfangswerten φ aus $J_{1-1/r,r}$ studiert werden. Wir beginnen mit dem homogenen Anteil $e^{-tA}\varphi$.

Hilfssatz V.2.6: *Sei $\rho \in \mathbb{N}$. Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho$ positive Zahlen mit $\widehat{c}/2 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_\rho$. Dann ist*

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\rho}\left(\frac{1-e^{-\lambda it}}{\lambda_i t}\right)^2 dt \ge c(\rho)\frac{1}{A\rho(\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho)}$$

mit der positiven Konstante $c(\rho) = 1/2\rho$. Hierbei ist $A_\rho(\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho)$ das arithmetrische Mittel der $\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho$, nämlich $(\lambda_1+\ldots+\lambda_\rho)(1/\rho)$. c hängt nicht von $\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho$ ab.

Beweis: Zunächst gilt die Abschätzung $e^x \ge x+1$, $x \ge 0$, also $\frac{1}{x+1} \ge e^{-x}$, $1-e^{-x} \ge \frac{x}{x+1}$. Damit folgt

$$\int_0^\infty \prod_{i=1}^{\rho}((1-e^{-\lambda_i t})/(\lambda_i t))^2 dt \ge \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\rho}(\frac{1}{1+\lambda_i t})^2 dt$$

$$\ge \int_0^\infty \prod_{i=1}^{\rho} e^{-2\lambda_i t}dt = \frac{1}{2(\lambda_1+\ldots+\lambda_\rho)} = \frac{1}{2\rho A\rho(\lambda_1,\ldots,\lambda_\rho)}$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Im folgenden Hilfssatz handelt es sich darum, die Lösung des homogenen Problems $u'+Au=0$, $u(0)=\varphi$ durch $||\varphi||_{1-1/r,r}$ abzuschätzen.

Hilfssatz V.2.7: *Sei $r>1$, $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. Dann ist*

(V.2.1)
$$Ae^{-\cdot A}\varphi \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H})$$
$$\int_0^{+\infty} ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt \le ||\varphi||^r_{1-1/r,r}$$

Für $t \ge 0$ haben wir

$$||e^{-tA}\varphi||_{1-1/r,r} \le ||\varphi||_{1-1/r,r.}$$

Beweis: Wir beschränken uns bei der ersten Aussage zunächst auf den Fall $r \in 2\mathbb{N}$ und geben später einen allgemeineren Beweis mittels des Spektralsatzes und Satzes II.8.4 an. Sei $\rho = r/2$, also $\rho \in \mathbb{N}$. Wir verfahren wie im Beweis des Hilfssatzes V.2.2. Dann ist

$$||E([\widehat{c}/2,b])\varphi||^r_{1-1/r,r} \ge \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \prod_{j=1}^{\rho}$$

$$\left(\frac{1-e^{-\lambda i_j t}}{t}\right)^2 ||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2 dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \prod_{j=1}^{\rho}$$

$$\left(\frac{1-e^{-\lambda i_j t}}{\lambda_{i_j} t}\right)^2 \lambda^2_{i_j} ||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta_{i_\rho})\varphi||^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n}$$

$$\int_0^{+\infty} \prod_{j=1}^{\rho}\left(\frac{1-e^{-\lambda i_j t}}{\lambda_{i_j} t}\right)^2 dt \lambda^2_{i_1} \cdot \ldots \cdot \lambda^2_{i_\rho} ||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta i_\rho)\varphi||^2$$

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz,

$$\geq 2\rho c(\rho) lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^2 \cdot \frac{1}{2(\lambda_{i_1}+\ldots+\lambda_{i_\rho})} ||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta i_\rho)\varphi||^2 \text{ nach Hilfssatz V.2.6,}$$

$$= 2\rho c(\rho) \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^2 \int_0^\infty e^{-2(\lambda i_1+\ldots+\lambda i_\rho)t} dt ||E(\Delta_{i_1})\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta i_\rho)\varphi||^2,$$

$$= 2\rho c(\rho) \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_\rho=1}^{n} \lambda_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \lambda_{i_\rho}^2 e^{-2(\lambda i_1+\ldots+\lambda i_\rho)t} ||E(\Delta i_1)\varphi||^2 \cdot \ldots \cdot ||E(\Delta i_\rho)\varphi||^2,$$

$$= 2\rho c(\rho) \int_0^{+\infty} ||Ae^{-tA}E([\widehat{c}/2,b])\varphi||^r dt.$$

Grenzübergang $b \to +\infty$ liefert die erste Behauptung des Hilfssatzes fr $r \in 2\mathbb{N}$. Die zweite Behauptung ist für alle $r > 1$ sehr einfach zu sehen. Wir haben

$$\begin{aligned}
||e^{-tA}\varphi||_{1-1/r,r}(||\varphi||^r + \int_0^{+\infty} ||\frac{(e^{-\sigma A}-I)e^{-tA}}{\sigma}\varphi||^r d\sigma)^{1/r} &= (||\varphi||^r + \int_0^{+\infty} ||\frac{e^{-tA}(e^{-\sigma A}-I)\varphi}{\sigma}||^r d\sigma)^{1/r}, \\
&\leq (||\varphi||^r + \int_0^{\infty} ||\frac{e^{-\sigma A}-I}{\sigma}\varphi||^r ds)^{1/r}, \\
&= ||\varphi||_{1-1/r,r}.
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz V.2.8 (Ungleichung von Hardy): *Sei $g \in L^r((0,+\infty))$ für ein $p \geq 1$. Sei $\alpha < 1 - 1/p$. Dann ist die durch*

$$t^\alpha \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(\sigma)d\sigma\right), \ t > 0$$

gegebene FUnktion auch aus $L^r((0,+\infty))$, und es gilt die Abschätzung

$$||t^\alpha \left(\frac{1}{t}\int_0^t g(\sigma)d\sigma\right)||_{L^p((0,+\infty))} \leq \frac{1}{1-1/p-\alpha}||t^\alpha g||_{L^p((0,+\infty))}.$$

Beweis: Seien $t,\sigma > 0$, $t = e^x$, $\sigma = e^y$, also $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)x}$, $-\infty < x,y < +\infty$ bzw. lnt. Für die Differentialform $d\sigma$ erhält man $d\sigma = e^y dy$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{p}x}t^{\alpha-1}\int_0^t g(\sigma)d\sigma &= e^{(\alpha-1+1/p)x}\int_{-\infty}^x g(e^y)\cdot e^y dy \\
&= \int_{-\infty}^x e^{(\alpha-1+1/p)x+(1-1/p-\alpha)y}e^{(1/p+\alpha)y}g(e^y)dy \\
&= \int_{-\infty}^x e^{(\alpha-1+1/p)x+(1-1/p-\alpha)y}\widetilde{g}(y)dy
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{g}(y) = e^{(1/p+\alpha)y}g(e^y)$. Wir haben $\alpha < 1-1/p$ für $p \geq 1$ und somit $\alpha - 1 + 1/p < 0$ für $p \geq 1$. Also ist $e^{\frac{1}{p}x}t^{\alpha-1}\int_0^t g(\sigma)d\sigma = \int_{-\alpha}^x e^{(\alpha-1+1/p)(x-y)}\widetilde{g}(y)dy$ mit $e^{(\alpha-1+1/p)x} \in L^1((0,+\infty)$. Also setzen wir

$$K(w) = \left[\begin{array}{ll} e^{(\alpha-1+1/p)w}, & w \geq 0, \\ 0, & w < 0, \end{array}\right.$$

so daß mit der Youngschen Ungleichung

$$e^{\frac{1}{p}x}t^{\alpha-1}\int_0^t g(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\widetilde{g}(y)dy$$

$$e^{\frac{1}{p}x}e^{(\alpha-1)x}\int_{-\infty}^x g(e^y)e^y dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\widetilde{g}(y)dy,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{(\alpha-1)x} \int_0^x g(e^y)e^y dy|^r e^x dx \quad \le \quad ||K||^p_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |g(e^y)|^p e^{(1+\alpha p)y} dy,$$
$$= \quad ||K||^p_{L^1(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{\alpha y} g(e^y)|^p e^y dy,$$

$$\int_0^\infty |t^\alpha (\frac{1}{t} g(\sigma) d\sigma)|^p dt \le ||K||^p_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \int_0^\infty |t^\alpha g(t)|^p dt$$

entsteht. Nun ist

$$||K||_{L^1(\mathbb{R})} \le \frac{1}{1 - 1/p - \alpha}.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Zur Youngschen Ungleichung s. Satz V.6.3 aus meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I".

Hilfssatz V.2.9: *Sei $r > 1$. Sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. Sei $t_0 \ge 0$, sei*

$$f \in \bigcup_{T>0} C^1([t_0, T], \mathcal{H}) \cap L^r((t_0, +\infty), \mathcal{H}),$$

$$u' \in L^r((t_0, +\infty), \mathcal{H}),$$

$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t > t_0$$
$$u' + Au = f \text{ fast überall in } (t_0, +\infty),$$

$$u(t_0) = \varphi.$$

Dann ist

$$||\varphi||_{1-1/r,r} \le \frac{1}{1-1/r}[(\int_{t_0}^{+\infty} ||u'(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r} + (\int_{t_0}^{+\infty} ||f(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}] + ||\varphi||.$$

Beweis: Zunächst haben wir nach Satz V.1.1 bzw. seinem Beweis die Darstellung

$$u(t) = e^{-(t-t_0)A}\varphi + \int_{t_0}^t e^{-(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma, \ t \ge t_0,$$

also

$$e^{-(t-t_0)A}\varphi - \varphi = u(t) - u(t_0) - \int_{t_0}^t e^{-(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma,$$

$$\frac{1}{t-t_0}(e^{-(t-t_0)A}\varphi - \varphi) = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t u'(\sigma) ds - \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t e^{-(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma, \ t > t_0,$$

nach Lemmata V.5.2,3 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I",

$$||\frac{e^{-(t-t_0)A} - I}{t-t_0}\varphi|| \le \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t ||u'(\sigma)|| d\sigma + \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t ||f(\sigma)|| d\sigma$$

Einführung der Variablentransformation $s = \sigma - t_0$ und Anwendung des Hilfssatzes V.2.8 mit $\alpha = 0$ liefert

$$(\int_{t_0}^\infty ||\frac{e^{-(t-t_0)A} - I}{t-t_0}\varphi||^r dt)^{1/r} \le \frac{1}{1-1/r}[(\int_{t_0}^{+\infty} ||u'(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r} + (\int_{t_0}^{+\infty} ||f(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}]$$

Erneute Benutzung der Variablentransformation $s = \sigma - t_0$ zeigt, daß in der letzten Ungleichung links gerade $||\varphi||_{1-1/r,r} - ||\varphi||$ steht.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Unser Hauptergebnis hinsichtlich der maximalen Regularität lautet nun wie folgt:
Satz V.2.4: *Sei $T > 0$, sei $r > 1$. Sei $f \in L^r((0,T), \mathcal{H})$, sei*

$$\varphi \in J_{1-1/r,r}.$$

Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0,T], J_{1-1/r,r}),\\
&u' \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),\\
&Au \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u' + Au = f \text{ fast überall in } (0,T),\\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^T ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^T ||Au(\sigma)||^r d\sigma + \sup_{0\le t\le T} ||u(t)||^r_{1-1/r,r} \le c(\widehat{c},r)(||\varphi||^r_{1-1/r,r} + \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma)$$

mit einer von $\widehat{c}, r$ abhängigen, aber von T unabhängigen positiven Konstante $c(r)$.

Beweis: f wird durch Nullsetzen auf $(0,+\infty)$ fortgesetzt. Sei (f_ν) eine Folge mit

$$f_\nu \in \bigcap_{\widetilde{T}>0} C^1([0,\widetilde{T}],\mathcal{H}) \cap L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),\ \nu \in \mathbb{N},$$

$$f_\nu \to f \text{ in } L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),\ \nu \to \infty.$$

Wir untersuchen die in Satz V.1.1 konstruierten Lösungen von $u' + Au = f_\nu$. Diese haben die Darstellung

$$\begin{aligned}
u(t) &= e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} f_\nu(\sigma) d\sigma,\\
v(t) &= e^{-tA}\varphi,\\
w_\nu(t) &= \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} f_\nu(\sigma) d\sigma,\ \nu \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Die Beweise von Satz V.2.2 und Satz V.2.3 zeigen sofort, daß für $1 < r < 2$ und $r > 2$ jedenfalls

$$\begin{aligned}
&w'_\nu \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0\\
&w_\nu(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,+\infty), \nu \in \mathbb{N},\\
&Aw_\nu \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0,\ \nu \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\widetilde{T}} ||w'_\nu(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^{\widetilde{T}} ||Aw_\nu(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^{\widetilde{T}} ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma,\ \nu \in \mathbb{N},\ T > 0$$

mit einer nur von r abhängigen Konstante $c(r) > 0$. Insbesondere gibt es ein w mit

$$\begin{aligned}
&w' \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0,\\
&w(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ fast überall in } (0,+\infty),\ \nu \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

$$Aw \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),\ \widetilde{T} > 0$$

$$\int_0^{\widetilde{T}} ||w'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^{\widetilde{T}} ||Aw(\sigma)||^r d\sigma \le c(r) \int_0^{\widetilde{T}} ||f(\sigma)||^r d\sigma,\ \widetilde{T} > 0,$$

mit einer nur von r abhängigen Konstante $c(r) > 0$, und

$$\begin{aligned}
&w'_\nu \to w \text{ in } L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),\\
&Aw_\nu \to Aw \text{ in } L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),\ \nu \to \infty,
\end{aligned}$$

und infolgedessen

$$w(t) = \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} f(\sigma) d\sigma.$$

Für $r = 2$ entnimmt man diese Aussagen unmittelbar dem Satz V.2.1. Außerdem folgt $w' + Aw = 0$ fast überall in $(0, +\infty)$, $w(0) = 0$ Hilfssatz V.2.7 zeigt für den homogenen Anteil v die Beziehung

$$\begin{aligned} v' &\in L^r((0,+\infty), \mathcal{H}), \\ Av &\in L^r((0,+\infty), \mathcal{H}) \\ v' + Av &= 0 \text{ in } t > 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\widetilde{T}} ||v'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^{\widetilde{T}} ||Av(\sigma)||^r d\sigma \leq 2||\varphi||^r_{1-1/r,r}$$

$$||v(t)||_{1-1/r,r} \leq ||\varphi||_{1-1/r,r}, \ t \geq 0.$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt sofort

$$v \in \bigcap_{\widetilde{T}>0} C^0([0, \widetilde{T}], J_{1-1/r,r}).$$

Sei $u(t) = v(t) + w(t)$, $t \geq 0$. Dann hat u alle im Satz angegebenen Eigenschaften; zum Beweis dessen ist noch zu zeigen, daß es höchstens eine Lösung u mit den im Satz angegebenen Eigenschaften gibt und, daß für das eben konstruierte u gilt: $u \in C^0([0,T], J_{1-1/r,r})$. Offenbar ist es für das letzte ausreichend, wenn wir beweisen:

$$w \in \bigcap_{\widetilde{T}>0} C^0([0, \widetilde{T}], J_{1-1/r,r})$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ||w(t)||^r_{1-1/r,r} \leq c(\widehat{c}, r) \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma.$$

Die bisherigen Erörterungen liefern insbesondere im Fall $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} u'_\nu &\in L^r((0,+\infty), \mathcal{H}) \\ Au_\nu &\in L^r((0,+\infty), \mathcal{H}). \end{aligned}$$

Sei $t_0 \geq 0$. Dann zeigt Hilfssatz V.2.9 mit $u_\nu(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-(t-\sigma)A} f_\nu(\sigma) d\sigma$, daß

$$\begin{aligned} ||w_\nu(t_0)||_{1-1/r,r} &\leq \frac{1}{1-1/r}[(\int_{t_0}^{+\infty} ||w'_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r} + (\int_{t_0}^{+\infty} ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}] + ||w_\nu(t_0)||, \\ &\leq \frac{2c(r)}{1-1/r}(\int_0^{+\infty} ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r} + ||w_\nu(t_0)||. \end{aligned}$$

Anwendung der Hölderschen Ungleichung und Ausnutzung der Eigenschaft $||e^{-tA}|| \leq e^{-(\widehat{c}/2)t}$ liefert sofort

$$||w_\nu(t_0)|| \leq c(\widehat{c}, r)(\int_0^{+\infty} ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}.$$

Insgesamt folgt

$$||w_\nu(t_0)|| \leq c(\widehat{c}, r)(\int_0^{+\infty} ||f_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}.$$

Der Grenzübergang $\nu \to \infty$ zeigt:

$$||w(t_0)||_{1-1/r,r} \leq c(\widehat{c}, r)(\int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}$$

Anwendung derselben Argumentation auf

$$\Delta_\nu(t) = \int_0^t e^{-(t-\sigma)A}(f(\sigma) - f_\nu(\sigma))d\sigma$$

zeigt

$$||w(t) - w_\nu(t)||_{1-1/r,r} \leq c(\widehat{c}, r) \cdot (\int_0^{+\infty} ||f(\sigma) - f_\nu(\sigma)||^r d\sigma)^{1/r}.$$

Es ist klar, daß gilt (s. Seite 54)

$$\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{D}(A^{1-1/r+\varepsilon}) \subset \mathcal{I}_{1-1/r,r},$$

$$||\widetilde{u}||_{1-1/r,r} \leq c(r, \widehat{c}, \varepsilon)||A^{1-1/r+\varepsilon}u||, \ c > 0, \ u \in \mathcal{D}(A^{1-1/r+\varepsilon}$$

mit einer von $r, \widehat{c}, \varepsilon$ abhängigen positiven Konstante. Nach Satz V.1.1 ist jedoch sogar

$$Aw_\nu \in \bigcap_{\widetilde{T}>0} C^0([0, \widetilde{T}], \mathcal{H}),$$

so daß erst recht

$$w \in \bigcap_{\widetilde{T}>0} C^0([0, \widetilde{T}], J_{1-1/r,r}).$$

Die von uns konstruierte Lösung u hat also alle im Satz angegebenen Eigenschaften, da man die Eindeutigkeit wie im Beweis des Satzes V.2.3 folgern kann. □

Wir geben nun, wie angekündigt, den vollständigen Beweis des Hilfssatzes V.2.7. Dazu sei A ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, von dem wir nur noch annehmen wollen, daß

$$(Af, f) \geq 0, \ f \in \mathcal{D}(A),$$

ist. Dann haben wir nach Satz II.8.4:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} ||Ae^{-tA}\varphi||^r dt &= \int_0^\infty (\int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda t} d||E(\lambda)\varphi||^2)^{\frac{r}{2}} dt, \\
&\leq \int_0^\infty (\int_0^\infty \left(\frac{e^{-\lambda t} - 1}{t}\right)^2 d||E(\lambda)\varphi||^2)^{\frac{r}{2}} dt, \\
&= \int_0^\infty ||\frac{e^{-tA} - I}{t}\varphi||^r dt, \\
&\leq ||\varphi||^r_{1-1/r,r}, \ \varphi \in J_{1-1/r,r}, \ r \geq 1.
\end{aligned}$$

da bekanntlich $(e^{-\lambda t} - 1)^2/t^2 = ((e^{-\lambda t} - 1)/\lambda^2 t^2) \cdot \lambda^2 \geq e^{-2\lambda t}\lambda^2$ ist, $\lambda, t > 0$. Dabei ist der Raum $J_{1-1/r,r}$ erklärt wie in Definition V.2.1, und man zeigt wie auf Seite 53-54, daß $J_{1-1/r,r}$ ein Banachraum ist.

In Satz V.2.4 wird weiter die $\widehat{c}$-Abhängigkeit der Konstante nur für die T-unabhängige Anbschätzung von $\sup_{0\leq t\leq T} ||u(t)||^r_{1-1/r,r}$ gebraucht. Dies liefert, da Hilfssatz V.2.5 auch im Fall $(Af, f) \geq 0, \ f \in \mathcal{D}(A)$, gilt (siehe wieder Satz II.8.4), das folgende Resultat:

Satz V.2.5: *Sei $T > 0$, sei $r > 1$. Sei $f \in L^r((0, T), \mathcal{H})$. Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$, es sei $(Af, f) \geq 0, \ f \in \mathcal{D}(A)$. Sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0, T], J_{1-1/r,r}) \\
&u' \in L^r((0, T), \mathcal{H}) \\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0, T) \\
&Au \in L^r((0, T), \mathcal{H}), \\
&u' + Au = f \text{ fast überall in } (0, T), \\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^T ||u'(\sigma)||^r d\sigma + \int_0^T ||Au(\sigma)||^r d\sigma \le c(r)(||\varphi||^r_{1-1/r,r} + \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma)$$

mit einer nur von r abhängigen, aber von T unabhängigen positiven Konstante $c(r)$.

Beweis: Man beachte, daß Satz V.2.1 auch im Fall $(Af, f) \ge 0$, $f \in \mathcal{D}(A)$, gilt, da man die auf Seite .... verwendete strikte positive Definitheit von A, die zur Konvergenz $u_\nu \to u$ in $C^0([0,T],\mathcal{H})$ führte, leicht dadurch ersetzen kann, daß die Folge (u'_ν) eine Cauchy-Folge in $L^2((0,T),\mathcal{H})$ ist. Auch beim Eindeutigkeitsbeweis braucht man die strikte positivie Definitheit von A nicht. □

Unsere folgenden Untersuchungen knüpfen an Satz V.1.1 an und beschäftigen sich mit maximaler Regularität in $C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$. Es gilt

Satz V.2.6: *Sei $T > 0$, sei $0 < \alpha < 1$. Sei A ein strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $(Af, f) \ge \widehat{c}||f||^2$, $f \in \mathcal{D}(A)$, mit einer positiven Konstante $\widehat{c}$. Seien $\varphi \in \mathcal{D}(A)$, $f, e^{-\cdot A}(f(0) - A\varphi) \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$. Dann gibt es genau ein u mit*

$$\begin{aligned}
&u \in C^1([0,T],\mathcal{H}),\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \le t \le T,\\
&Au \in C^0([0,T],\mathcal{H})\\
&u' + Au = f \text{ in } [0,T],\\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Wenn wir für $v \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ die Halbnorm

$$[v]_{\alpha,\mathrm{T}} = \sup_{\substack{t,s\in[0,T],\\ t\ne s}} \frac{||v(t) - v(s)||}{|t-s|^\alpha}$$

einführen, so erhalten wir

$$u', Au \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$$

$$[u']_{\alpha,T} + [Au(.)]_{\alpha,T} \le c(\alpha)([e^{-\cdot A}(f(0) - A\varphi]_{\alpha,T} + [f]_{\alpha,T})$$

mit einer von α, aber von T unabhängigen Konstante.

Beweis: Wir beziehen uns auf den Beweis des Satzes V.1.1. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sind bis auf die beiden letzten Aussagen gemäß Satz V.1.1 klar. Für die beiden letzten Aussagen müssen wir den inhomogenen Anteil

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\\
&= \widetilde{v}_1(t) + A^{-1}f(t) - e^{-tA}A^{-1}f(t)
\end{aligned}$$

mit

$$\widetilde{v}_1(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}(f(s) - f(t))ds$$

analysieren.

Wir untersuchen zunächst $A\widetilde{v}_1(t)$. Nach Seite 34 ist $(h > 0)$

$$A(\widetilde{v}_1(t+h) - \widetilde{v}_1(t)) = (e^{-hA} - I) \cdot \int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s) - f(t))ds + [e^{-(t+h-s)A}(f(t) - f(t+h))]_0^t +$$

$$+ \int_t^{t+h} Ae^{-(t+h-s)A}(f(s) - f(t+h))ds.$$

Alle Terme werden einzeln abgeschätzt. Für $t > s$ haben wir

$$||(e^{-hA}-I)Ae^{-(t-s)A}x||^2 = \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty}(e^{-h\lambda}-1)^2\lambda^2 e^{-2(t-s)\lambda}d||E(\lambda)x||^2$$

$$\leq \int_{\widehat{c}/2}^{+\infty} h^2\lambda^4 e^{-2(t-s)\lambda}d||E(\lambda)x||^2 \leq \frac{ch^2}{(t-s)^4}||x||^2.$$

Dies liefert für $t \geq h$

$$\begin{aligned} ||(e^{-hA}-I)\int_0^t Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds|| &\leq ||(e^{-hA}-I)\int_0^{t-h} Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds|| + \\ &\quad +||(e^{-hA}-I)\int_{t-h}^{t} Ae^{-(t-s)A}(f(s)-f(t))ds||, \\ &\leq \int_0^{t-h}\frac{ch}{(t-s)^{2-\alpha}}ds[f]_{\alpha T} + \int_{t-h}^{t}\frac{c}{(t-s)^{1-\alpha}}ds[f]_{\alpha,T}, \\ &\leq c(\alpha)h^\alpha[f]_{\alpha,T}. \end{aligned}$$

Für $t < h$ ist diese Abschätzung offenbar ebenfalls richtig. Gemäß unserer Voraussetzungen an f ist

$$||[e^{-(t+h-s)A}(f(t)-f(t+h))]_0^t|| \leq 2[f]_{\alpha T}\mathfrak{h}^\alpha$$

Endlich haben wir

$$||\int_t^{t+h} Ae^{-(t+h-s)A}(f(s)-f(t+h))ds|| \leq \int_t^{t+h}\frac{1}{(t+h-s)^{1-\alpha}}ds[f]_{\alpha,T} \leq c(\alpha)h^\alpha[f]_{\alpha,T}.$$

Damit folgt

$$||A(\widetilde{v}_1(t+h)-\widetilde{v}_1(t))|| \leq c(\alpha)h^\alpha[f]_{\alpha,T}.$$

Offenbar ist

$$||AA^{-1}(f(t+h)-f(t))|| \leq h^\alpha[f]_{\alpha,T}.$$

Nun ist

$$Au(t) = e^{-tA}(A\varphi - f(.)) + A\widetilde{v}_1(t) + f(t).$$

Da wir $||A(\widetilde{v}_1(t+h)-v(t))|| + ||f(t+h)-f(t)||$ bereits wie gewünscht abgeschätzt haben, und nach Voraussetzung

$$e^{-\cdot A}(A\varphi - f(0)) \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$$

ist, ist der Satz bewiesen. □

Die Forderung $e^{-\cdot A}(f(0)-A\varphi) \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$ führt auf die Forderung, daß $f(0)-A\varphi$ in einem geeigneten Interpolationsraum liegt. Dies können wir hier nicht weiter studieren. Offensichtlich ist $f(0)-A\varphi = u'(0)$, wenn u die Lösung aus Satz V.2.6 ist. Dies führt auf eine andere Aussage, nämlich

Lemma V.2.3: *Sei u die in Satz V.2.6 konstruierte Lösung von $u' + Au = f$ mit $u(0) = \varphi$. Insbesondere ist also $e^{-\cdot A}(f(0)-A\varphi) \in C^\alpha([0,T],\mathcal{H})$. Dann gilt für jedes $t_1 \in (0,T)$*

$$e^{-(.-t_1)}(f(t_1)-Au(t_1)) \in C^\alpha([t_1,T],\mathcal{H}),$$

$$[e^{-(.-t_1)}(f(t_1)-Au(t_1))]_{\alpha,[t_1,T]} \leq c(\alpha)([f]_{\alpha,[0,t_1]} + [e^{-\cdot A}(f(t_1)-A\varphi)_{\alpha,[t_1,T]})$$

mit einer positiven, nur von α, nicht aber von T abhängigen Konstante.

Beweis: Wir haben

$$e^{-(t-t_1)A}(Au(t_1)-f(t_1)) = e^{-(t-t_1)A}A\widetilde{v}_1(t_1) + e^{-tA}(A\varphi - f(t_1)),\ 0 < t_1 \leq t < T.$$

Nun ist $(h > 0)$

$$(e^{-(t+h-t_1)A} - e^{-(t-t_1)A})A\widetilde{v}_1(t_1) = e^{-(t-t_1)A}(e^{-hA}-I)A\widetilde{v}_1(t_1)$$

$$= e^{-(t-t_1)A}(e^{-hA} - I)\int_0^{t_1} Ae^{-(t_1-s)A} \cdot (f(s) - f(t_1))ds.$$

Wie wir im Beweis des Satzes V.2.6 gezeigt haben, ist jedoch

$$||(e^{-hA} - I)\int_0^{t_1} Ae^{-(t_1-s)A}(f(s) - f(t_1))ds|| \leq c(\alpha)h^\alpha [f]_{\alpha,[0,t_1]}.$$

Damit folgt das Lemma. $\square$

§3. Anwendungen des abstrakten Resultats aus §2.

Wir studieren hier parabolische Gleichungen der Form $u' + Au = f$ über einem zylindrischen Gebiet $[0,T] \times \Omega$ des $\mathbb{R}^{n+1}$. Dabei ist A ein elliptischer Operator (elliptisches System) der Ordnung $2m$, auf $[0,T] \times \partial\Omega$ bzw. in $\{0\} \times \Omega$ sind gewisse Rand- bzw. Randanfangswerte vorgeschrieben. Die Randwerte können allerdings erst bei einer gewissen Regularität des Randes im Sinne des Spuroperators interpretiert werden, während man sich für beliebiges offenes Ω auf die Aussage $u(t) \in V$, $0 < t \leq T$ bzw. $0 \leq t \leq T$, beschränken muß. V ist dabei im Sinn von III.4 zu verstehen. Wir präzisieren zunächst unsere Voraussetzungen bezüglich A.

Voraussetzung V.3.1: *Ω sei eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ($\Omega = \mathbb{R}^n$ ist zugelassen). Seien $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$. Zu $x \in \Omega$ und zu je zwei Multiindizes α, β des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq m$ sei eine $N \times N$-Matrix $a_{\alpha\beta}(x)$ gegeben. Die Abbildung $a_{\alpha\beta}$ von Ω in die $N \times N$-Matrizen besitze folgende Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
&a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega),\\
&D^\gamma a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega),\ |\gamma| \leq |\alpha|,\ |\alpha|, |\beta| \leq m,\\
&a_{\alpha,\beta}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}(x),\ x \in \Omega,\ |\alpha|, |\beta| \leq m.
\end{aligned}$$

Sei V ein abgeschlossener Unterraum von $H^m(\Omega)$ mit $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \subset V$; für alle $u, v \in V$ sei wie in III.4

$$B(u,v) = (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha| \leq m,\\ |\beta| \leq m}} (-1)^{|\alpha|-m}$$

$$\int_\Omega \langle a_{\alpha\beta}(.) D^\beta u,\, D^\alpha v \rangle dx$$

gesetzt (Erinnerung: Wir schreiben zur Vereinfachung $H^m(\Omega)$ statt $(H^m(\Omega))^N$ usw. $\langle .,. \rangle$ ist das $\mathbb{C}^N$ Skalarprodukt). Von der Sequilinearform $B : V \times V \to \mathbb{C}$ verlangen wir

$$B(v,v) \geq c||v||_m^2 = c||v||_V^2,\ v \in V, \tag{V.3.1}$$

mit einer positiven Konstante c.

Endlich sei für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$

$$|\det \sum_{\substack{|\alpha|=m,\\ |\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta| \geq (1/c_E(K)) |\xi|^{2m \cdot N},\ x \in K,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{V.3.2}$$

mit einer positiven Konstante $(1/c_E(K))$.

Satz III.4.4 $\Rightarrow$

$$Au = \mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m,\\ |\beta| \leq m}} D^\alpha(a_{\alpha,\beta}(.) D^\beta u),\ u \in H^{2m}_{loc}(\Omega),$$

eingeschränkt auf $\mathcal{D}(A) = \{u | u \in V \cap H^{2m}_{loc}(\Omega),\ Au \in L^2(\Omega),\ B(u,v) = (Au, v),\ v \in V\}$ ist strikt positiv definiter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Es ist

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) = V$$

$$(1/c)||u||_V = (1/c)||u||_m \leq ||A^{1/2}u|| \leq c||u||_m = ||u||_V.$$

Problem III.4.1 $\Rightarrow$ $\quad a_{\alpha\beta} \in L^{2m}(\Omega)$

Vorlesung „Klass. Randwertprobl. … “, Probl. IV.4.1 $\Rightarrow$ $\quad a_{\alpha\beta} \in C^m(\Omega)$

sind hinr. Vorauss. hierfür.

Setze $\widehat{c} = c \Rightarrow$

$$(Af, f) = B(f, f) \geq c||f||$$

nach Voraussetzung. Damit ist die Anwendbarkeit des Apparats aus §2 (Maximale Regularität) gegeben. Dies liefert das folgende Resultat:

Satz V.3.1: *Sei A wie eben in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Sei $T > 0$, $r > 1$, sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}$ (siehe Definition V.2.1). Sei*

$$f \in L^r((0,T), L^2(\Omega)).$$

Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0,T], J_{1-1/r,r}),\\
&u' \in L^r((0,T), L^2(\Omega))\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),\\
&Au \in L^r((0,T), L^2(\Omega)),\\
&u' + Au = f \text{ f. ü. in } (0,T),\ u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^T ||u'(\sigma)||^2 d\sigma + \int_0^T ||Au(\sigma)||^r d\sigma + \sup_{0\leq t\leq T} ||u(t)||^r_{1-1/r,r} \leq c(\widehat{c}, r) \cdot (||\varphi||_{1-1/r,r} + \int_0^T ||f(\sigma)||^r d\sigma).$$

Sei $0 < \alpha < 1$. Sei $\varphi \in \mathcal{D}(A)$,

$$\begin{aligned}
f &\in C^\alpha([0,T], L^2(\Omega)),\\
e^{-\cdot A}(f(0) - A\varphi) &\in C^\alpha([0,T], L^2(\Omega))
\end{aligned}$$

Dann gibt es genau ein u mit

$$\begin{aligned}
&u \in C^{1+\alpha}([0,T], L^2(\Omega)),\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A),\ 0 \leq t \leq T,\\
&Au \in C^\alpha([0,T], L^2(\Omega)),\\
&u' + Au = f,\\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Es gilt die Abschätzung

$$||u||_{C^{1+\alpha}([0,T],L^2(\Omega))} + ||Au||_{C^\alpha([0,T],L^2(\Omega))} \leq c(\widehat{c}, \alpha)(||A\varphi|| + [e^{-\cdot A}(f(0) - A\varphi)]_{\alpha,T} + ||f||_{C^\alpha([0,T],L^2(\Omega))}).$$

Wegen $\mathcal{D}(A) \subset H^{2m}_{loc}(\Omega)$ gilt im ersten Fall

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u(.,.))(t,x) = f(t,x)$$

f. ü. in $(0,T) \times \Omega$, im zweiten Fall

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u(.,.))(t,x) = f(t,x)$$

für jedes $t \in [0,T]$ und fast alle $x \in \Omega$. $\partial./\partial t$, $D^\alpha.$, $D^\beta.$ sind die Distributionsableitungen in $(0,T) \times \Omega$, die sich bei D^α, D^β nur auf die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ beziehen.

Beweis: Der erste Teil folgt aus Satz V.2.4, der zweite aus Satz V.2.6 bis auf die Abschätzung, da wir in Satz V.2.6 nur die Hölderseminormen $[u']_{\alpha,T}$, $[Au(.)]_{\alpha,T}$ abgeschätzt haben. Aus der Formel auf Seite 33 sowie dem exponentiellen Abfall

$$||e^{-tA}|| \leq e^{-\widehat{c}t},\ t \geq 0$$

$$||Ae^{-tA}|| \leq \frac{ce^{-\widehat{c}t}}{t},\ t > 0$$
ist jedoch leicht die Abschätzung

$$||u'(t)|| + ||Au(t)|| \leq c(\alpha)(||A\varphi|| + ||f||_{C^\alpha([0,T],L^2(\Omega))})$$
und damit die im Satz behauptete Abschätzung ersichtlich. Für den letzten Teil: Seite 13, 14, dies ist die punktweise Interpretation unseres Resultats. □

Zur **Positivität des Operators** A**:** Man muß nur verlangen, daß für ein geeignetes $\gamma > 0$ gilt

$$B(v + \gamma v, v) \geq c||v||_m^2 = ||v||_V^2,\ v \in V,$$

c pos. konst. Formal

$$\begin{aligned}
&u' + (A+\gamma)u - \gamma u = f,\ u(0) = \varphi \\
&\widetilde{u}(t) := e^{-\gamma t}u(t) \Rightarrow \\
&\widetilde{u}' + (A+\gamma)\widetilde{u} = e^{-\gamma t}f,\ \widetilde{u}(0) = \varphi
\end{aligned}$$
Dieses Problem ist lösbar nach Satz V.3.1. Setze $u(t) := e^{\gamma t}\widetilde{u}(t)$, u leistet das Gewünschte.

Zur **Bedeutung der Voraussetzung** $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. **Wir greifen auf andere Gebiete über.** $J_{1-1/r,r}$ ist gerade der reelle Interpolationsraum

$$(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))_{1-1/r,r}.$$

Wir haben

$$\overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega) \subset \mathcal{D}(A)$$

mit einer stetigen Einbettung. Also ist

$$(\mathcal{H}, \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega))_{1-1/r,r} \subset (\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))_{1-1/r,r}$$
mit einer stetigen Einbettung. Sei nun Ω beschränkt und von der Klasse C^{3m}. Dann ist auch

$$\mathcal{D}(A) \subset H^{2m}(\Omega)$$

mit einer stetigen Einbettung nach meiner Vorlesung „Klass. Randwertprobleme...“, Satz IV.5.1. Also ist auch

$$(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))_{1-1/r,r} \subset (\mathcal{H}, H^{2m}(\Omega))_{1-1/r,r}$$
mit einer stetigen Einbettung. Nach [Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, S. 327/328 bzw. S. 318/319] ist gerade

$$(\mathcal{H}, H^{2m}(\Omega))_{1-1/r,r} = B_{2,r}^{2m(1-1/r)}(\Omega),$$

$$(\mathcal{H}, \overset{\circ}{H}{}^{2m}(\Omega))_{1-1/r,r} = \overset{\circ}{B}{}^{2m}_{2r}(1-1/r)(\Omega),$$
wobei im letzten Fall $(1 - \frac{1}{r}2m \neq \frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sei muß. Weiter ist

$$B_{2,2}^{(1-1/r)2m}(\Omega) \subset B_{2,r}^{(1-1/r)2m}(\Omega),\ r \geq 2$$
mit einer stetigen Einbettung,

$$B_{2,2}^{(1-1/r)2m}(\Omega) \supset B_{2r}^{(1-1/r)2m}(\Omega),\ 1 < r < 2,$$
mit einer stetigen Einbettung, und

$$B_{2,2}^{(1-1/r)2m}(\Omega) = W^{(1-1/r)2m,2}(\Omega)$$
Die Norm von $J_{1-1/r,r}$ ist also $\geq c\times$ Norm von $B_{2,r}^{(1-1/r)2m}(\Omega)$, c eine positive Konstante, und $\leq c\times$ Norm von $\overset{\circ}{B}{}_{2,r}^{(1-1/r)2m}(\Omega) = c\times$ Norm von $B_{2,r}^{(1-1/r)2m}(\Omega)$, falls $(1 - \frac{1}{r})2m \neq \frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, ist.

Die richtige Norm für die Anfangswerte ist also gerade die Norm von $B_{2r}^{(1-1/r)2m}(\Omega)$. Es ist nun klar, wann wir den Raum der Anfangswerte mit $J_{1-1/r,r}$ bezeichnet haben, also unten doppelt indiziert haben.

§4.Fouriertransformation für Hilbertraumwertige Funktionen

Wir skizzieren in diesem Paragraphen kurz die Einführung Hilbertraumwertiger Funktionen mitsamt der Anwendung der Fouriertransformation auf diese. Sei $\mathcal{H}$ ein **separabler** Hilbertraum. Sei

$$u \in C_0^0((-\infty, +\infty), \mathcal{H})$$

(stetig mit kompaktem Träger, siehe V.1, V.4, „Funktionalanalysis I"). Sei $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Sei

$$u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) e_m$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$u_m(t) = (u(t), e_m).$$

Sei

$$\widehat{u}_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} u_m(t) dt.$$

Nach dem Satz von Fourier-Plancherel (Satz II.8.1, „Funktionalanalysis I") folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}_m(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} |u_m(t)|^2 dt$$

Der Raum $L^2((-\infty, +\infty), \mathcal{H})$ ist bekanntlich ein Hilbertraum. Damit ergibt sich

Hilfssatz V.4.1: *Die Reihe* $(S_n(.))$ *mit*

$$S_n(\lambda) = \sum_{m=1}^{n} \widehat{u}_m(\lambda) e_m, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

konvergiert in $L^2((-\infty, +\infty, \mathcal{H})$ *gegen ein Element* $v, n \to \infty$.

Beweis: Es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} || \sum_{m=n+1}^{n+p} \widehat{u}_m(\lambda) e_m ||^2 d\lambda = \sum_{m=n+1}^{n+p} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{u}_m(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{m=n+1}^{n+p} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_m(t)|^2 dt.$$

Nun ist

$$||u(t)||^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |u_m(t)|^2.$$

Wegen $\int_{-\infty}^{+\infty} ||u(t)||^2 dt < +\infty$ folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||u(t)||^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |u_m(t)|^2 dt,$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u_m(t)|^2 dt$$

und daraus die Behauptung des Hilfssatzes. □

Wir haben die folgende Aussage mitbewiesen. Es ist

$$\text{(V.4.1)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} ||u(t)||^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} ||v(\lambda)||^2 d\lambda.$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} u(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) e_m dt.$$

Nun ist ($n \in \mathbb{N}$)

$$||\sum_{m=1}^{n} u_m(t)e_m|| \leq ||u(t)||,$$

so daß der Satz von Lebesgue die Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}u(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}u_m(t)dt\cdot e_m = \int_{m=1}^{\infty}\widehat{u}_m(\lambda)e_m,$$

$$= v(\lambda) \tag{V.4.2}$$

liefert. v heißt die Fouriertransformierte von u. Wir schreiben auch $\widehat{u}$.

Satz V.4.1: *Druch die Zuordnung*

$$C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H}) \ni \longmapsto \widehat{u} \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$$

ist eine lineare Abbildung $\mathcal{F}$ von

$$C_0^0((-\infty,+\infty,\mathcal{H}) \text{ in } \widehat{H} = L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H}))$$

gegeben. Durch Abschließung entsteht ein Operator $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}},\widehat{\mathcal{H}})$ mit

$$||\mathcal{F}u||_{\widehat{\mathcal{H}}} = ||u||_{\widehat{\mathcal{H}}}$$

$\mathcal{F}$ ist bijektiv, $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$, so daß $\mathcal{F}$ sogar unitär ist.

Beweis: Nach V.1, V.4 in „Funktionalanalysis I"ist $C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$ dicht in $\widehat{\mathcal{H}}$. Damit erhalten wir die Abschließung $\mathcal{F}$ mit $||\mathcal{F}u||_{\widehat{\mathcal{H}}} = ||u||_{\widehat{\mathcal{H}}}$, $u \in \widehat{H}$. Sei

$$\widetilde{F}u(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}u(t)dt,\ u \in C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H}),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wie eben zeigt man: $||\widetilde{F}u||_{\widehat{\mathcal{H}}} = ||u||_{\widehat{\mathcal{H}}}$. Durch Abschließung gewinnt man wie eben ein Element $\widetilde{\mathcal{F}}$ aus $\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H},\mathcal{H}})$. Für $f, g \in \widehat{H}$ folgt

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}f,g) &= \lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}f_n,g_n) \\
&= \lim_{n\to\infty)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}f_n(t)dt, g_n(\lambda))d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(f_n(t),\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}g_n(\lambda)d\lambda)dt, \\
&= \lim_{n\to\infty}(f_n,\widetilde{\mathcal{F}}g_n), \\
&= (f,\widetilde{\mathcal{F}}g)
\end{aligned}$$

mit Folgen $(f_n),(g_n)$ aus $C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$. Also ist $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^*$. Aus dem Treplitz-Kriterium (Satz II.5.1, „Funktionalanalysis I") folgt: $\mathcal{F}$ ist bijektiv. Mit $(f,g)_{\widehat{\mathcal{H}}} = ||\frac{f+g}{2}||^2_{\widehat{\mathcal{H}}} - ||\frac{f-g}{2}||^2_{\widehat{\mathcal{H}}} + i||\frac{f+ig}{2}||^2 - i||\frac{f-ig}{2}||^2$ folgt sofort

$$(f,g)_{\widehat{\mathcal{H}}} = (\mathcal{F}f,\mathcal{F}g)_{\widehat{\mathcal{H}}},\ f,g \in \widehat{\mathcal{H}},$$

und hieraus $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$. □

Für uns ist jetzt der folgende Satz wichtig.

Satz V.4.2: *Sei $u \in \widehat{\mathcal{H}} = L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H}))$. Für die Distributionsableitung u' (siehe V.5 „Funktionalanalysis I") gelte: $u' \in \widehat{\mathcal{H}}$. Dann ist*

$$\widehat{u'}(\lambda) = i\lambda\widehat{u}(\lambda)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Sei A ein abgeschlossener Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei $u \in \widehat{\mathcal{H}}$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $Au \in \widehat{\mathcal{H}}$. Dann gilt

$$\widehat{u}(\lambda) \in \mathcal{D}(A)$$

für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und

$$\widehat{Au} = A\widehat{u}.$$

Beweis: Nach Satz V.5.1 „Funktionalanalysis I", genauer dem Beweis dieses Satzes, existiert eine Folge (u_n) mit

$$\begin{aligned}
&u_n \in C_0^1((-\infty, +\infty), \mathcal{H}) \\
&u_n \to u \text{ in } \widehat{\mathcal{H}},\ n \to \infty, \\
&u_n' \to u' \text{ in } \widehat{\mathcal{H}}, n \to \infty
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}_n \to \widehat{u} \text{ in } \widehat{\mathcal{H}},\ n \to \infty, \\
&\widehat{u_n'} \to \widehat{u'} \text{ in } \widehat{\mathcal{H}},\ n \to \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{u_n'}(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} u_n'(t) dt, \\
&= i\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} u_n(t) dt, \\
&= i\lambda \widehat{u}_n(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

und hieraus die erste Behauptung. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller $u \in \mathcal{D}(A)$, den wir mit der Norm $||u||_{\mathcal{B}} = ||Au||_{\mathcal{H}} + ||u||_{\mathcal{H}}$ zu einem Banachraum $\mathcal{B}$ machen. Unsere Voraussetzung lautet dann:

$$u \in L^2((-\infty, +\infty), \mathcal{B}).$$

Aus dem Beweis von Satz V.5.1, „Funktionalanalysis I", folgt: $\exists (u_n)$ mit

$$\begin{aligned}
&u_n \in C_0^0((-\infty, +\infty), \mathcal{B}),\ n \in \mathbb{N}, \\
&u_n \to u,\ n \to \infty, \text{ in} \\
&L^2((-\infty, +\infty), \mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\widehat{Au}_n(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} Au_n(t) dt \\
&= A\widehat{u}_n(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

nach Lemma VII.1.2, „Funktionalanalysis I", folgt aus

$$\begin{aligned}
\widehat{Au_n} &\to f,\ n \to \infty, \text{ in } \widehat{\mathcal{H}} \\
Au_n &\to Au,\ n \to \infty, \text{ in } \widehat{\mathcal{H}}, \\
f &= \widehat{Au}
\end{aligned}$$

die Beziehung

$$\widehat{Au} = \lim_{n \to \infty} A\widehat{u}_n \text{ in } \widehat{\mathcal{H}}.$$

Nun gibt es eine Teilfolge $(\widehat{u_{nk}})$ von $(\widehat{u}_n)$ derart, daß

$$\widehat{u_{nk}}(\lambda) \to \widehat{u}(\lambda),\ k \to \infty,$$

in $\mathcal{B}$ für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (s. Beweis des Satzes V.4.1, „Funktionalanalysis I"). Dies heißt

$$\widehat{u_{nk}}(\lambda) \to \widehat{u}(\lambda),$$
$$A\widehat{u}_n(\lambda) \to \widehat{Au}(\lambda),$$

$k \to \infty$, in $\mathcal{H}$ für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Also ist $\widehat{u}(\lambda) \in \mathcal{D}(A)$ für fast alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\widehat{Au}(\lambda) = A\widehat{u}(\lambda)$ für diese λ. $\Box$

Satz V.4.2 gestattet eine unmittelbare Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen $u' + Au = f$, A abgeschlossen, in Hilberträumen $\mathcal{H}$, die separabel sind. Es gilt

Satz V.4.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Weiter sei A ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Für alle $i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, sei $i\lambda + A$ eineindeutig, der Wertebereich $\mathcal{R}(i\lambda + A)$ sei $\mathcal{H}$, $(i\lambda + A)^{-1}$ sei aus $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ und genüge der Abschätzung*

$$||(i\lambda + A)^{-1}|| \le \tfrac{M}{|\lambda|},\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \tag{V.4.3}$$

mit einer positiven Konstanten M. Sei $f \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$. Dann hat die Gleichung

$$u' + Au = f$$

genau eine Lösung u mit

$$u \in \bigcap_{T, T>0} C^0([-T,+T],\mathcal{H})$$

$$\begin{aligned}
&u' \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H})\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \textit{ für fast alle}\\
&t \in \mathbb{R}, Au \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||u'(t)||^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} ||Au(t)||^2 dt \le c(M) \int_{-\infty}^{+\infty} ||f(t)||^2 dt \tag{V.4.4}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus (V.4.4). Durch Fouriertransformation erhält man formal aus $u' + Au = f$ die Beziehung

$$i\lambda\widehat{u}(\lambda) + A\widehat{u}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$$

gemäß Satz V.4.2. Die Lösung der letzten Gleichung ist

$$\widehat{u}(\lambda) = (i\lambda + A)^{-1}\widehat{f}(\lambda), \tag{V.4.5}$$

also

$$A\widehat{u}(\lambda) = A(i\lambda + A)^{-1}\widehat{f}(\lambda)$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} ||A\widehat{u}(\lambda)||^2 d\lambda &\le c(M)\int_{-\infty}^{+\infty} ||\widehat{f}(\lambda)||^2 d\lambda,\\
\int_{-\infty}^{+\infty} ||\lambda\widehat{u}(\lambda)||^2 d\lambda &\le c(M)\int_{-\infty}^{+\infty} ||\widehat{f}(\lambda)||^2 d\lambda.
\end{aligned}$$

Sei

$$u(t) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{u})(t),\ t \in \mathbb{R},$$

wobei $\widehat{u}$ durch (V.4.5) erklärt ist. Wie im Beweis von Satz V.4.2 folgt

$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in \mathbb{R},$$

$$Au \in \widehat{\mathcal{H}},$$

$$Au = \mathcal{F}^{-1} A\widehat{u}.$$

Aus $\lambda\widehat{u} \in \mathcal{H}$ folgt: Es gibt eine Folge (w_n), $w_n \in C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$w_n \to \lambda\widehat{u} \text{ in } \widehat{H},\ n \to \infty.$$

Also haben wir

$$\frac{1}{\lambda} w_n \to \widehat{u} \text{ in } L^2((1,+\infty),\mathcal{H}) \text{ und in } L^2((-\infty,-1),\mathcal{H}),\ n \to \infty.$$

Jetzt wählen wir eine Folge (g_n) mit $g_n \in C^0([-1,+1],\mathcal{H})$,

$$\begin{aligned} &g_n(1) = w_n(1),\\ &g_n(-1) = -w_n(-1),\ n \in \mathbb{N},\\ &g_n \to \widehat{u} \text{ in } L^2((-1,+1),\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Sei

$$h_n(\lambda) = \begin{cases} g_n(\lambda),\ |\lambda| < 1,\\ \\ \frac{1}{\lambda} w_n(\lambda),\ |\lambda| \geq 1, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$. Dann liegen die h_n in $C_0^0((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$, es ist

$$\lambda h_n \to \lambda\widehat{u},\ n \to \infty,$$
$$h_n \to \widehat{u},\ n \to \infty,$$

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^{-1} h_n \in C^1((-\infty,+\infty),\mathcal{H}),\\ (\mathcal{F}^{-1} h_n)' = \mathcal{F}^{-1}(i\lambda h_u),\ n \in \mathbb{N},\\ \mathcal{F}^{-1} h_n \to u,\ n \to \infty,\\ (\mathcal{F}^{-1} h_n)' \to u',\ n \to \infty \end{gathered}$$

in $\widehat{\mathcal{H}}$. Also ist

$$u' = \mathcal{F}^{-1}(i\lambda\widehat{u}).$$

Anwendung von $\mathcal{F}^{-1}$ auf die Gleichung $i\lambda\widehat{u}(\lambda) + A\widehat{u}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$ liefert die Behauptung des Satzes. □

Kandidaten für Operatoren A, die (V.4.3) erfüllen sind selbstverständlich Operatoren A vom Typ (Φ, M) wie sie in VII.2 in „Funktionalanalysis I“eingeführt wurden. Also diejenigen Operatoren A, für die $-A$ eine analytische Halbgruppe in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ erzeugt.

Hierzu gilt:
Satz V.4.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sei $T > 0$. Sei A ein abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei A vom Typ (Φ, M) im Sinne von VII.2, „Funktionalanalysis I“. Sei $f \in L^2((0,T),\mathcal{H})$. Dann hat das Problem*

$$\begin{aligned} u' + Au &= f\\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung u mit

$$\begin{aligned} &u \in C^0([0,T],\mathcal{H})\\ &u' \in L^2((0,T),\mathcal{H})\\ &u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),\\ &Au \in L^2((0,T),\mathcal{H}) \end{aligned}$$

$$\text{(V.4.6)} \qquad \int_0^T ||u'(t)||^2 dt + \int_0^T ||Au(t)||^2 dt \le c(M) \int_0^T ||f(t)||^2 dt.$$

Es ist

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds, \ 0 \le t \le T.$$

Beweis: Da $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist können wir eine Folge (f_n) wählen mit

$$\begin{aligned}
&f_n \in C_0^0([0,T],\mathcal{H}),\\
&f_n(t) \in \mathcal{D}(A), \ t \in [0,T],\\
&Af_n \in C_0^0([0,T],\mathcal{H}), \ n \in \mathbb{N},\\
&f_n \to f, \ n \to \infty, \ \text{in } L^2((0,T),\mathcal{H}).
\end{aligned}$$

f und die f_n denken wir uns durch 0 auf die reelle Achse fortgesetzt. Das Problem

$$\begin{aligned}
u' + Au &= f_n \text{ in } (0,+\infty)\\
u(0) &= 0
\end{aligned}$$

hat eine Lösung u_n mit

$$\begin{aligned}
&u_n(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f_n(s) ds,\\
&u_n \in C^1([0,+\infty),\mathcal{H}),\\
&u_n(0) = 0,\\
&u_n(t) \in \mathcal{D}(A), \ t \in [0,+\infty),\\
&Au_n \in C^0([0,+\infty),\mathcal{H}), \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Dies folgt mit den Resultaten aus VII.2, „Funktionalanalysis I“, ebenso wie im Beweis des Satzes V.1.1. Mit $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)(A+\varepsilon)} e^{\varepsilon(t-s)} f_n(s) ds,\\
e^{-\varepsilon t} u_n(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)(A+\varepsilon)} e^{-\varepsilon s} f_n(s) ds, \ t \ge 0.
\end{aligned}$$

Sei $k_\varepsilon(t) = e^{-t(A+\varepsilon)}$, $t \ge 0$, und $k_\varepsilon(t) = 0, \ t < 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
e^{-\varepsilon t} u_n(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_\varepsilon(t-s) e^{-\varepsilon s} \cdot f_n(s) ds,\\
e^{-\varepsilon t} Au_n(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k_\varepsilon(t-s) e^{-\varepsilon s} \cdot Af_n(s) ds.
\end{aligned}$$

u_n wird durch Null stetig auf die negative reelle Halbachse fortgesetzt. Mit

$$||e^{-(t-s)(A+\varepsilon)}|| \le Ce^{-\varepsilon(t-s)}$$

(s. VII.2.3, „Funktionalanalysis I“) folgt sofort

$$Ae^{-\varepsilon t} u_n \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H})$$

Für $e^{-\varepsilon t} u_n$ erhalten wir die Gleichung $e^{-\varepsilon t} u_n' + Ae^{-st} u_n = e^{-\varepsilon t} f$, also

$$\text{(V.4.7)} \qquad (e^{-\varepsilon t} u_n)' + (A+\varepsilon)(e^{-\varepsilon t} u_n) = e^{-\varepsilon t} f_n.$$

Insbesondere ist auch

$$(e^{-\varepsilon t} u_n)' \in L^2((-\infty,+\infty),\mathcal{H}).$$

Man beachte, daß wegen der stetigen Fortsetzung von $e^{-\varepsilon t}u_n$ durch Null auf die negative reelle Achse jedenfalls der im Sinne der vektorwertigen Distributionen gebildete Ausdruck $(e^{-\varepsilon t}u_n)'$ die Eigenschaft

$$(e^{-\varepsilon t}u_n)'(t) = \left[\begin{array}{l} 0, t < 0 \\ \\ (e^{-\varepsilon t}u_n)'(t), t \geq 0 \end{array}\right.$$

hat. Anwendung der Fouriertransformation auf (V.4.7) liefert wie im Beweis des Satzes V.4.3 die Abschätzung ($A + \varepsilon$ ist auch vom Typ (Φ, M), s. VII.2, „Funktionalanalysis I“)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||(e^{-\varepsilon t}u_n)'(t)||^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} ||(A+\varepsilon)e^{-\varepsilon t}u_n(t)||^2 dt \leq c(M) \int_{-\infty}^{+\infty} ||e^{-\varepsilon t} f u(t)||^2 dt$$

Nun lassen wir ε gegen 0 streben. Bei festem $n \in \mathbb{N}$ und festem $\widetilde{T} > 0$ folgt

$$\int_{-\widetilde{T}}^{+\widetilde{T}} ||u_n'(t)||^2 dt + \int_{-\widetilde{T}}^{\widetilde{T}} ||Au_n(t)||^2 dt \leq c(M) \int_{-\infty}^{+\infty} ||f_n(t)||^2 dt,$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ||u_n'(t)||^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} ||Au_n(t)||^2 dt \leq c(M) \int_{-\infty}^{+\infty} ||f_n(t)||^2 dt,$$

wobei bezüglich der Distributionsableitung u_n' das für $(e^{-\varepsilon t}u_n)'$ gesagte gilt. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert ein u mit

$$\begin{gathered} u' \in L^2((0,T), \mathcal{H}), \\ u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T), \\ Au \in L^2((0,T), \mathcal{H}) \end{gathered}$$

(Man beachte, daß (u_n) in $C^0([0,T], \mathcal{H})$ konvergiert),

$$\begin{gathered} u \in C^0([0,T], \mathcal{H}), \\ u' + Au = f \\ u(0) = 0, \end{gathered}$$

das der Abschätzung (V.4.6) genügt. Die Eindeutigkeit ist wegen (V.4.6) klar. Aus der Formel

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f_n(s) ds, \ t \geq 0.$$

folgt druch Grenzübergang $n \to \infty$ sofort

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s) ds, \ 0 \leq t \leq T.$$

□

§5. Maximale Regularität für Gleichungen $u'+A(t)u = f$ in einem Hilbertraum mit Operatoren vom Typ (Φ, M) und zeitlich konstantem Definitionsbereich

Wir wollen jetzt das Problem $u' + Au = f$, $u(0) = \varphi$, in Räumen $L^r((0,T),\mathcal{H})$, $r > 1$, untersuchen. Dazu zeigen wir zunächst:

Hilfssatz V.5.1: *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum. Sei A ein abgeschlossener dicht definierter Operator in $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Sei A vom Typ (Φ, M). Sei*

$$k(t) = \left[\begin{array}{l} Ae^{-tA},\ t > 0 \\ \\ 0,\ t \leq 0 \end{array}\right.$$

Für alle $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ ist

$$\int_{|s|>4|t|} ||k(s-t) - k(s)||ds \leq \widetilde{c},$$

$$\int_{|s|>4|t|} ||k^*(t-s) - k^*(-s)||ds \leq \widetilde{c}$$

mit einer von t unabhängigen Konstante $\widetilde{c} > 0$.

Beweis: Die zweite Aussage ist eine Konsequenz der ersten. Wir haben. Die Kurve Γ hat die Gestalt aus VII.2, d.h.

Wir haben für $t > 0$ jedenfalls

$$Ae^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}A(\lambda + A)^{-1}d\lambda.$$

Daraus folgt für $0 < 4t < s$

$$||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}|| \leq \frac{M+1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{-\lambda(s-t)} - e^{\lambda s}|d|\lambda|$$

$$\leq \frac{M+1}{2\pi}\int_\Gamma |e^{\lambda(s-t)} - e^{\lambda s}|d|\lambda|$$

$$\leq \frac{M+1}{2\pi}\int_\Gamma |(e^{Re\lambda(s-t)} - e^{Re\lambda s})\cdot e^{iIm\lambda(s-t)} + e^{Re\lambda s}\cdot(e^{iIm\lambda(s-t)} - e^{iIm\lambda s})|d|\lambda|$$

$$\leq \frac{M+1}{2\pi}\int_\Gamma (|(e^{Re\lambda\tau}(Re\lambda)^2 t| + |e^{Re\lambda s}(Im\lambda)^2 t|)d|\lambda|$$

mit einem $\tau = \tau(\lambda)$, für das $s - t < \tau < s$ gilt. Also folgt

$$||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}|| \leq \frac{M+1}{2\pi}t\int_\Gamma e^{Re\lambda(s-t)}|\lambda|^2 d|\lambda|,$$

$$\leq \frac{c(\Gamma)(M+1)}{2\pi}\frac{t}{(s-t)^2}.$$

Dies liefert

$$\int_{s>4t>0}^t ||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}||ds \leq \widetilde{c}t\int_{4t}^{+\infty}(s-t)^{-2}ds \leq \widetilde{c},\ 0 < 4t < s$$

mit $\widetilde{c} = \widetilde{c}(\Gamma, M)$. Nun sind noch die folgenden Fälle zu behandeln: Zunächst sei $s > 0 > t$, $s > 4|t|$. Dann ist $s - t = s + |t|$; bei Durchführung der obigen Rechnung können wir τ so wählen, daß $s < \tau < s + |t|$. Damit erhält man wie oben

$$\int_{s>4|t|} ||Ae^{-(s-t)A} - Ae^{-sA}||ds \leq \widetilde{c}(\Gamma, M).$$

In den Fällen $t > 0 > s$ und $0 > 4t > s$ ist die Behauptung des Hilfssatzes wieder trivial. Man vergleiche den Beweis des Hilfssatzes V.2.5. □

Hilfssatz V.5.1 ist die Grundlage für die folgende Erweiterung der Resultate aus V.4:

Satz V.5.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sei $r > 1$. Sei $T > 0$. Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. A sei vom Typ (Φ, M). Sei $f \in L^r((0,T),\mathcal{H})$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften*

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0,T],\mathcal{H}),\\
&u' \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,\mathrm{T}),\\
&Au \in L^r((0,T),\mathcal{H}),\\
&u' + Au = f \text{ f. ü. in } (0,T),\\
&u(0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\text{(V.5.1)} \qquad \int_0^T ||u'(t)||^r dt + \int_0^T ||Au(t)||^r dt \leq c(M,r,\Phi) \int_0^T ||f(t)||^r dt.$$

Für u gilt die Formel

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds,\ 0 \leq t \leq \mathrm{T}.$$

Beweis: Wir wählen eine Folge (f_n) mit

$$\begin{aligned}
&f_n \in C_0^0([0,\mathrm{T}],\mathcal{H}),\\
&f_n(t) \in \mathcal{D}(A),\ t \in [0,T],\\
&Af_n \in C_0^0([0,T],\mathcal{H}),\ u \in \mathbb{N}\\
&f_n \to f,\ n \to \infty,\ \text{in } L^r((0,T),\mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz V.4.4 lösen wir

$$u' + Au = f_n \text{ in } (0,+\infty)$$

$$u(0) = 0$$

durch

$$\text{(V.5.2)} \qquad u_n(t) = \textstyle\int_0^t e^{-(t-s)A} f_n(s)ds.$$

Mit $\varepsilon > 0$ erhalten wir

$$(e^{-\varepsilon t}u_n)' + (A+\varepsilon)(e^{-\varepsilon t}u_n) = e^{-\varepsilon t} fu$$

Für

$$k_\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} (A+\varepsilon)e^{-(t+\varepsilon)A},\ t > 0, \\ \\ 0,\ t \leq 0 \end{bmatrix}$$

entnehmen wir Satz V.4.4 die Abschätzung

$$\int_0^{+\infty} || \int_0^{+\infty} k_\varepsilon(t-s)f(s)ds||^2 dt \leq c(M) \int_0^T ||f(t)||^2 dt,\ f \in L^2((0,T),\mathcal{H}).$$

Der Hilfssatz V.5.1 gilt natürlich auch für k_ε statt k, $\widetilde{c}$ ist von ε unabhängig. Mit Satz V.9.3 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I"folgt

$$\int_0^{+\infty} ||\int_0^{+\infty} k_\varepsilon(t-s)e^{-\varepsilon s} f_n(s)ds||^r dt \leq c(M,r,\widetilde{c}) \int_0^T ||e^{-\varepsilon t} f_n(t)||^r dt,$$

$$\leq c(M,r,\Phi) \int_0^T ||e^{-\varepsilon t} f_n(t)||^r dt,$$

da nach dem Beweis von Hilfssatz V.5.1 jedenfalls $\widetilde{c}$ nur von Φ, M abhängt. Mit der Gleichung $(e^{-\varepsilon t}u_n)' + (A+\varepsilon)(e^{-\varepsilon t}u_n) = e^{-\varepsilon t} f_n$ folgt

$$\int_0^T ||(e^{-\varepsilon t}u_n)'(t)||^r dt + \int_0^T ||(A+\varepsilon)e^{-\varepsilon t}u_n(t)||^r dt \leq c(M,r,\Phi) \int_0^T ||e^{-\varepsilon t} f_n(t)||^r dt.$$

Lassen wir ε gegen Null streben, so folgt

$$\int_0^T ||u_n'(t)||^r dt + \int_0^T ||Au_n(t)||^r dt \leq c(M,r,\Phi) \int_0^T ||fu(t)||^r dt.$$

Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert ein u mit

$$u' \in L^r((0,T),\mathcal{H}),$$
$$u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),$$
$$Au \in L^r((0,T),\mathcal{H})$$

(Man beachte wieder, daß (u_n) in $C^0([0,T],\mathcal{H})$ konvergiert),

$$u \in C^0([0,T],\mathcal{H})$$
$$u' + Au = f,$$
$$u(0) = 0,$$

das der Abschätzung (V.5.1) genügt. Die Eindeutigkeit ist wegen (V.5.1) klar. Aus der Formel (V.5.2) folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ sofort

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds, \; 0 \leq t \leq \text{T}.$$

□

Wir wenden uns nun der Frage nach den zulässigen nichtverschwinden Anfangswerten zu. Diese Frage ist, wie wir aus V.2 wissen, mit der Frage nach dem Stetigkeitsverhalten der in Satz V.5.1 gewonnen Lösungen verknüpft. Da uns die analytische Halbgruppe e^{-tA} zur Verfügung steht, können wir zunächst die Definition von $J_{1-1/r,r}$ übernehmen. Demnach ist $J_{1-1/r,r}$ ein Banachraum (Beweis siehe Seite 53-54), die Norm ist

$$||u||_{1-1/r,r} = (\int_0^\infty \frac{1}{t^r} ||(e^{-tA} - I)u||^r dt + ||u||^r)^{1/r}$$

Wir zeigen zunächst
Hilfssatz V.5.2: *Sei $\varphi \in \mathcal{I}_{1-1/r,r}$. Dann gibt es ein $\widetilde{u}$ mit*

$$\widetilde{u} \in \bigcap_{T, T>0} C^0([0,T],\mathcal{H}),$$

$$\widetilde{u}(0) = \varphi,$$
$$\widetilde{u}' \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H})$$
$$\widetilde{u}(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t > 0,$$
$$\widetilde{u} \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),$$
$$A\widetilde{u} \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H}).$$

Beweis: Sei

$$\widetilde{u}(t) = q(t)\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\sigma A}\varphi d\sigma$$

mit einer Funktion q, die auf $t \geq 0$ reellwertig, lipschitzstetig mit $|q(t)| \leq 1$, $|q'(t)| \leq 1$, $q(t) = 0$ für $t \geq 1$ ist und für die gilt: $q(0) = 1$. Dann ist $\widetilde{u}(0) = \varphi$,

$$\widetilde{u} \in \bigcap_{T, T>0} C^0([0,T], \mathcal{H}).$$

Zunächst ist ($\varepsilon > 0$)

$$(A+\varepsilon) \int_0^t e^{-\sigma(A+\varepsilon)} \varphi d\sigma = (A+\varepsilon[-(A+\varepsilon)^{-1} \cdot e^{-\sigma(A+\varepsilon)} \varphi]_0^t = (A+\varepsilon)(-(A+\varepsilon)^{-1} e^{-t(A+\varepsilon)} \varphi + (A+\varepsilon)^{-1} \varphi) =$$

$$= \varphi - e^{-t(A+\varepsilon)} \varphi$$

Nun ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\varphi - e^{-t(A+\varepsilon)} \varphi) = \varphi - e^{-tA} \varphi,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \int_0^t e^{-\sigma(A+\varepsilon)} \varphi d\sigma = 0$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t e^{-\sigma(A+\varepsilon)} \varphi d\sigma = \int_0^t e^{-\sigma A} d\sigma.$$

Mit der Abgeschlossenheit von A folgt

$$\int_0^t e^{-\sigma A} \varphi d\sigma \in \mathcal{D}(A)$$

$$A \int_0^t e^{-\sigma A} \varphi d\sigma = \varphi - e^{-tA} \varphi.$$

Also ist

$$A\widetilde{u}(t) = q(t) \frac{1}{t} (\varphi - e^{-tA} \varphi) \in L^r((0, +\infty), \mathcal{H}.$$

Weiter ist ($t > 0$)

$$\widetilde{u}'(t) = q'(t) \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\sigma A} \varphi d\sigma + q(t) v'(t) \text{ mit}$$

$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t e^{-\sigma A} \varphi d\sigma$. Nun haben wir ($t > 0$)

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{1}{t} e^{-tA} \varphi - \frac{1}{t^2} \int_0^t e^{-\sigma A} \varphi d\sigma \\ &= \frac{1}{t} (e^{-tA} \varphi - \varphi) - \frac{1}{t^2} \int_0^t (e^{-\sigma A} \varphi - \varphi) d\sigma. \end{aligned}$$

Sei $w(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t (e^{-\sigma A} \varphi - \varphi) d\sigma$, sei $e^{-\sigma A} \varphi - \varphi = \sigma \varphi(\sigma)$. Dann ist $\varphi \in L^r((0, +\infty), \mathcal{H})$. Also folgt

$$w(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t \sigma \varphi(\sigma) d\sigma,$$

$$||w(t)|| \leq \frac{1}{t} \int_0^t ||\varphi(\sigma)|| d\sigma,$$

also mit Hilfssatz V.2.8 ($\alpha = 0$)

$$\left(\int_0^{+\infty} ||w(t)||^r dt\right)^{1/r} \leq ||\frac{1}{t} \int_0^t ||\varphi(\sigma)|| d\sigma||_{L^r((0,+\infty))},$$

$$\leq \frac{1}{1 - 1/r} \left(\int_0^{+\infty} ||\varphi(\sigma)||^r d\sigma\right)^{1/r}$$

$$\leq \frac{1}{1 - 1/r} ||\varphi||_{1-1/r, r}, \text{ also}$$

$$(\int_0^{+\infty} ||qv'(t)||^r dt)^{1/r} \leq (1 + \frac{1}{1-1/r}) \cdot ||\varphi||_{1-1/r,r};$$

Weiter ist

$$(\int_0^{\infty} ||q'(t)\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\sigma A}\varphi d\sigma||^r)^{1/r} \leq c(\Phi, M)||\varphi||.$$

□

Insgesamt haben wir gezeigt

$$(\int_0^T ||\widetilde{u}'(t)||^r dt)^{1/r} + (\int_0^T ||A\widetilde{u}(t)||^r dt)^{1/r} \leq (2 + \frac{1}{1-1/r})(\int_0^{+\infty} ||\frac{e^{-tA}\varphi - \varphi}{t}||^r dt)^{1/r} + c(\Phi, M)||\varphi||.$$

Damit können wir jetzt zeigen:
Hilfssatz V.5.3: *Sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. Dann gibt es ein und nur ein u mit*

$$\begin{aligned}
&u \in \bigcap_{T,T>0} C^0([0,T], \mathcal{H})\\
&u' \in L^r((0,+\infty), \mathcal{H})\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t > 0,\\
&u' + Au = 0,\\
&u(0) = \varphi,
\end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} ||u'(t)||^r dt + \int_0^{+\infty} ||Au(t)||^r dt \leq c(\Phi, M, r)||\varphi||_{1-1/r,r}$$

u genügt der Formel

$$u(t) = e^{-tA}\varphi,\ t \geq 0.$$

Darüberhinaus ist

$$u \in \bigcap_{T,T>0} C^0([0,T],\ J_{1-1/r,r}).$$

Beweis: Zunächst liegt $\mathcal{D}(A)$ in $\mathcal{I}_{1-1/r,r}$. Die Folge (φ_ν) mit

$$\varphi_\nu = e^{-\frac{1}{\nu}A}\varphi,\ \nu \in \mathbb{N}$$

hat die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned}
&\varphi_\nu \in \mathcal{D}(A),\ \nu \in \mathbb{N},\\
&\varphi_\nu \to \varphi,\ \nu \to \infty,\ \text{in } J_{1-1/r,r}.
\end{aligned}$$

Sei $\widetilde{u}_\nu$ die in Hilfssatz V.5.2 konstruierte Abbildung zum Anfangswert φ_ν. Sei w_ν die Lösung von

$$\begin{aligned}
w' + Aw &= -\widetilde{u}_\nu' - A\widetilde{u}_\nu,\\
w(0) &= 0
\end{aligned}$$

gemäß Satz V.5.1. Sei $u_\nu = w_\nu + \widetilde{u}_\nu$. Dann ist

$$\begin{aligned}
u_\nu' + Au_\nu &= 0,\\
u_\nu|0| &= \varphi,
\end{aligned}$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||u_\nu(t)||^r_{1-1/r,r} + \int_0^{+\infty} ||u_\nu'(t)||^r dt + \int_0^{+\infty} ||Au_\nu(t)||^r dt \leq c(\Phi, r, M)||\varphi_\nu||^r_{1-1/r,r} +$$

$$+c(\mathrm{T}, r)\int_0^T ||u_\nu'(t)||^r dt \leq c(\Phi, r, M)||\varphi_\nu||^r_{1-1/r,r} + c(T, \Phi, r, M)||\varphi_\nu||^r_{1-1/r,r}$$

nach dem Beweis von Hilfssatz V.5.2. Setzen wir

$$||\varphi||^*_{1-1/r,r} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{||e^{-tA}\varphi - \varphi||^r}{t^r} dt\right)^{1/r}, \ \varphi \in J_{1-1/r,r},$$

was man auch als den homogenen Anteil der Norm von $J_{1-1/r,r}$ bezeichnet, so folgt

$$\text{(V.5.3)} \qquad \sup_{0\le t\le T} ||u_\nu(t)||^{*r}_{1-1/r,r} + \int_0^{+\infty} ||u'_\nu(t)||^r dt + \int_0^{+\infty} ||Au_\nu(t)||^r dt \le c(\Phi, r, M)||\varphi\nu||^r_{1-1/r,r},$$

also mit einer Konstante, die nicht von T abhängt. Anwendung der letzten Abschätzung auf $u_\nu - u_\mu$ und Grenzübergang $\nu \to \infty$ liefert zunächst ein u mit den im zu beweisenden Hilfssatz angegebenen Eigenschaften bis auf die letzten beiden. Die Eindeutigkeit ist klar. Jetzt folgt aus dem Beweis des Hilfssatzes V.5.2 (Definition von $\widetilde{u}$) und $\varphi_\nu \in \mathcal{D}(A)$ sofort

$$\begin{aligned}
&\widetilde{u}_\nu \in \bigcap_{T, T>0} C^1([0,T], \mathcal{H}),\\
&\widetilde{u}_\nu(t) \in \mathcal{D}(A), \ t \ge 0,\\
&A\widetilde{u}_\nu \in \bigcap_{T,T>0} C^0([0,T], \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Nun ist $u_\nu = w_\nu + \widetilde{u}_\nu$ und die Formel aus Satz V.5.1 zeigt

$$u_\nu(t) = \widetilde{u}_\nu(t) - \int_0^t e^{-(t-s)A}(\widetilde{u}'_\nu + A\widetilde{u}_\nu)(s)ds,$$

woraus man durch partielle Integration entnimmt, daß

$$u_\nu(t) = e^{-tA}\varphi\nu, \ t \ge 0, \ \nu \in \mathbb{N}$$

ist. Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
&u_\nu \in \bigcap_{T, T>0} C^1([0,T], \mathcal{H}),\\
&u_\nu(t) \in \mathcal{D}(A), \ t \ge 0,\\
&Au_\nu \in \bigcap_{T,T>0} C^0([0,T], \mathcal{H}).
\end{aligned}$$

Wegen $||\widetilde{\varphi}||_{1-1/r,r} \le c(||A\widetilde{\varphi}|| + ||\widetilde{\varphi}||)$, $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{D}(A)$, folgt

$$u_\nu \in \bigcap_{T,T>0} C^0([0,T], J_{1-1/r,r})$$

und der Grenzübergang $\nu \to \infty$ liefert auch die beiden letzten Behauptungen des Hilfssatzes. □

Das Hauptergebnis dieses Paragraphen besteht in

Satz V.5.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sei $r > 1$. Sei $T > 0$. Sei A ein abgeschlossener, dicht definierter Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. A sei vom Typ (Φ, M). Sei $f \in L^r((0,T), \mathcal{H})$, sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}$. Dann gibt es ein und nur ein u mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned}
&u \in C^0([0,T], \mathcal{I}_{1-1/r,r})\\
&u' \in L^r((0,T), \mathcal{H})\\
&u(t) \in \mathcal{D}(A) \text{ für fast alle } t \in (0,T),\\
&Au \in L^r((0,T), \mathcal{H}),\\
&u' + Au = f \text{ f. ü. in } (0,T),\\
&u(0) = \varphi
\end{aligned}$$

$$\sup_{0\le t\le T} ||u(t)||^r_{1-1/r,r} + \int_0^T ||u'(t)||^r dt + \int_0^T ||Au(t)||^r dt \le c(\Phi, r, M)\cdot$$

$$\cdot(\int_0^T ||f(t)||^r dt + ||\varphi||_{1-1/r,r}) + c(T,\Phi,r,M)||\varphi||_{1-1/r,r},$$

$$\sup_{0\le t\le T} ||u(t)||^{*r}_{1-1/r,r} + \int_0^T ||u'(t)||^r dt + \int_0^T ||Au(t)||^r dt \le c(\Phi,r,M)\cdot(\int_0^T ||f(t)||^r dt + ||\varphi||_{1-1/r,r}),$$

wobei $||\varphi||^*_{1-1/r,r} = (\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tA}\varphi-\varphi||^r}{t^r} dt)^{1/r}$. *ist. Es ist in* $[0,T]$,

$$u(t) = e^{-tA}\varphi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds.$$

Beweis: Im Fall $f \equiv 0$ folgt die Behauptung des Satzes aus Hilfssatz V.5.3 und seinem Beweis. Es bleibt nur noch der Fall $\varphi = 0$, $f \not\equiv 0$ zu untersuchen. Satz V.5.1 liefert in diesem Fall die Behauptung des Satzes bis auf die $J_{1-1/r,r}$ betreffenden Aussagen. Dieser Teil kann so bewiesen werden wie der entsprechende Teil im Beweis des Satzes V.2.4: Wir konstruieren w_ν wie im Beweis des Satzes V.2.4 und wissen schon aus Satz V.5.1, daß

$$w'_\nu \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H}),$$
$$Aw_\nu \in L^r((0,+\infty),\mathcal{H})$$

ist. Mit Hilfssatz V.2.9, dessen Beweis wir übernehmen können, folgt

$$||w_\nu(t_0)||^r_{1-1/r,r} \le c(\Phi,M,r)\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt + ||w_\nu(t_0)||^r,$$

$$\le c(r)\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt + (\int_0^{t_0} ||w'_\nu(t)||dt)^r,\ t_0 \ge 0,\ \nu \in \mathbb{R},$$

weil $w_\nu(0) = 0$ ist. Außerdem ist

$$||w_\nu(t_0)||^{*r}_{1-1/r,r} \le c(\Phi,M,r)\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt.$$

Nun folgt

$$||w_\nu(t_0)||^r_{1-1/r,r} \le c(\Phi,M,r)\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt + c(r,T)\int_0^{+\infty} ||w'_\nu(t)||^r dt \le c(\Phi,M,r)\cdot$$

$$\cdot\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt + c(\Phi,M,r,T)\int_0^{+\infty} ||f_\nu(t)||^r dt,\ 0 \le t_0 \le T.$$

Durch Grenzübergang $\nu \to \infty$ folgt auch im Fall $\varphi = 0$, $f \neq 0$ der $J_{1-1/r,r}$ betreffende Teil des Satzes. u ist die Summe aus der Lösung im Fall $f = 0$ und im Fall $\varphi = 0$, $f \neq 0$. Die Eindeutigkeit ist klar, die Formel für u gilt wegen Hilfssatz V.5.3 und der Formel $w_\nu(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f_\nu(s)ds$. □

Wir betrachten jetzt eine Schar von Operatoren $A(t)$, $0 \le t \le T$, für die wir folgendes voraussetzen: Sei $T > 0$. Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei eine Schar abgeschlossener Operatoren $A(t)$, $0 \le t \le T$, gegeben mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(A(t)) = \mathcal{D}(A(0)).$$

Jeder Oparator $A(t)$ sei vom Typ (Φ, M) mit denselben Φ, M für alle $t \in [0,T]$. Zusätzlich sei $A(t)$ für jedes $t \in [0,T]$ beschränkt invertierbar. Dann ist $A(t)A^{-1}(s)$ in $\mathcal{H}$ erklärt und abgeschlossen, also beschränkt, $0 \le t,s \le T$. Nun sei auch noch

$$||(A(t) - A(r))A^{-1}(s)|| \le \omega(\rho)$$

für alle $r,t,s \in [0,T]$, $|t-r| \le \rho$ mit einer beschränkten meßbaren Funktion $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die gilt:

$$\lim_{\rho\to 0} \omega(\rho) = 0.$$

Insbesondere ist dann

$$||A(t)A^{-1}(s)|| \le c,\ 0 \le t,\ s \le T.$$

Nun gilt

Satz V.5.3: *Die Operatorenschar $A(t)$, $0 \le t \le T$, möge den eben angegebenen Voraussetzungen genügen. Sei $r > 1$, $J_{1-1/r,r}(t)$ der zum Operator $A(t)$ gehörige Interpolationsraum. Dann ist*

$$J_{1-1/r,r}(t) = J_{1-1/r,r}(0),\ 0 \le t \le T$$

im Sinn der Gleichheit zwischen Mengen. Weiter gibt es ein $c > 0$ derart, daß

$$\frac{1}{c}||.||_{J_{1-1/r,r}(0)} \le ||.||_{J_{1-1/r,r}(t)} \le c||.||_{J_{1-1/r,r}(0)},\ 0 \le t \le T.$$

Beweis: Sei $\varphi \in J_{1-1/r,r}(0)$. Sei $\widetilde{t} \in [0,T]$. Wir betrachten das Problem

$$u' + A(\widetilde{t})u = 0,\ u(0) = \varphi, \tag{V.5.4}$$

und schreiben es nun in

$$\begin{aligned} &u + A(0)u = (A(0) - A(\widetilde{t}))u,\\ &u(0) = \varphi. \end{aligned} \tag{V.5.5}$$

Wegen der Stetigkeitsvoraussetzung an die $A(t)$ können wir (V.5.5) mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes so lösen, daß

$$\begin{aligned} &u' \in L^r((0,\delta_0),\mathcal{H})\\ &A(0)u \in L^r((0,\delta_0),\mathcal{H}) \text{ und damit}\\ &A(\widetilde{t})u \in L^r((0,\delta_0),\mathcal{H}) \end{aligned}$$

ist. δ_0 ist dabei eine hinreichend kleine positive Zahl. Man wählt dabei die konvexe Menge

$$\mathfrak{M}_{\widetilde{T}} = \{w|w' \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}), A(0)w \in L^r((0,\widetilde{T}),\mathcal{H}),\ w(0) = \varphi$$

mit der Metrik

$$\mu_{\widetilde{T}}(w_2,w_1) = (\int_0^{\widetilde{T}} ||w_2' - w_1'||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^T ||A(0)w_2 - A(0)w_1||^r dt)^{\frac{1}{r}},$$

wendet Satz V.5.2 an und macht $\widetilde{T}$ hinreichend klein ($\widetilde{T} = \delta_0$). Offenbar ist

$$u(t) = e^{-tA(\widetilde{t})}\varphi$$

(vgl. (V.5.4)), so daß wir genau

$$\int_0^{\delta_0} ||A(\widetilde{t})e^{-tA(\widetilde{t})}\varphi||^r dt < +\infty$$

erhalten. Wegen $e^{-\delta_0 A(\widetilde{t})}\varphi \in \mathcal{D}(A(\widetilde{t})) = \mathcal{D}(A(0))$ folgt aus Satz V.5.2 gerade

$$\int_{\delta_0}^{+\infty} ||A(\widetilde{t})e^{-(t-\delta_0)A(\widetilde{t})}e^{-\delta_0 A(\widetilde{t})}\varphi||^r dt < +\infty,$$

also

$$\int_0^{+\infty} ||A(\widetilde{t})e^{-tA(\widetilde{t})}\varphi||^r dt < +\infty$$

und damit (Hardy'sche Ungleichung!)

$$\varphi \in J_{1-1/r,r}(\widetilde{t}).$$

Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen. Die Einbettung $E(\widetilde{t}) : J_{1-1/r,r}(\widetilde{t}) \to J_{1-1/r,r}(0)$ ist offenbar abgeschlossen, da die Norm von $J_{1-1/r,r}(\widetilde{t})$ immer auch die Norm von $\mathcal{H}$ enthält. Daher ist $E(\widetilde{t})$ beschränkt und

$$||E(\widetilde{t})u||_{J_{1-1/r,r}(0)} \le c(\widetilde{t}) \cdot ||u||_{J_{1-1/r,r}}(\widetilde{t})$$

mit einer möglicherweise noch von $\widetilde{t} \in [0,T]$ abhängigen Konstante $c(\widetilde{t}) > 0$. Betrachten wir die Probleme

$$u_1' + A(0)u_1 = 0, \qquad u_1(0) = u,$$
$$u_2' + A(\widetilde{t})u_2 = 0, \qquad u_2(0) = u,$$

so daß

$$u' - 1 - u_2' + A(0)(u_1 - u_2) = (A(\widetilde{t}) - A(0))u_2.$$

Mit der Hardy'schen Ungleichung und Satz V.5.2 entsteht

$$\begin{aligned}
||E(\widetilde{t})u||^{*r}_{J_{1-1/r,r}(0)} &\leq \int_0^{+\infty} ||A(0)u_1(t)||^r dt, \\
&\leq c\int_0^{+\infty} ||A(\widetilde{t})u_2(t)||^r dt, \\
&\leq c||u||^r_{J_{1-1/r,r}(\widetilde{t})}, \\
&\quad c = c(\Phi, r, M).
\end{aligned}$$

Da man die Rollen von 0 und $\widetilde{t}$ vertauschen kann, ist alles bewiesen. □

§6. Quasilineare Parabolische Systeme unter Null-Dirichlet-Bedingungen

Wir betrachten zunächst lineare parabolische Systeme

$$u' + \mathcal{L}(t)u = f$$
$$u(0) = \varphi$$

mit elliptischen Operatoren $\mathcal{L}(t) = a_{\alpha\beta}(t,x)D^{\alpha+\beta}u(|\alpha| \leq m,\ |\beta| \leq m)$. Es ist keine Einschränkung anzunehmen, daß

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \tag{V.6.1}$$

ist.

Definition V.6.1: *Sei $T > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt offen, $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^∞ (der Einfachheit halber). Sei $m \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}$, $T > 0$. Sei $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ meßbar, beschränkt und*

$$w(r) \to 0,\ r \to 0.$$

Sei $M > 0$, $c_E > 0$. Zu jedem $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}$, zu jedem Paar (α,β) mit $|\alpha| \leq m$, $|\beta| \leq m$ seien Matrizen $a_{\alpha\beta} : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}^{N^2}$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen gegeben. Es gelte

$$Re(-1)^m a_{\alpha\beta}(t,x)\xi^\alpha\xi^\beta\zeta\zeta^*|_{|\alpha|=|\beta|=m} \geq \widetilde{c}_E|\xi|^{2m}|\zeta|^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \zeta \in \mathbb{C}^N,\ (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega}. \tag{V.6.2}$$

$\widetilde{c}_E$ ist eine positive Konstante mit

$$\frac{1}{c_E} \leq \widetilde{c}_E \leq c_E.$$

Es sei weiter

$$\sup_{\substack{|t-s|+|x-y|\leq r\\ t,s\in[0,T],\\ x,y\in\overline{\Omega}\\ |\alpha|,|\beta|=m}} |a_{\alpha\beta}(t,x) - a_{\alpha\beta}(s,y)| \leq w(r),\ r \in \mathbb{R}^+,$$

$$||a_{\alpha\beta}||_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq M,$$

$$a_{\alpha\beta} = a^*_{\beta\alpha} = a^*_{\alpha\beta}. \tag{V.6.3}$$

Dies impliziert $(-1)^m a_{\alpha\beta}(t,x)\xi^\alpha\xi^\beta\zeta\zeta^*|_{|\alpha|=|\beta|=m} \in \mathbb{R}$ in (V.6.2) (Vgl. (V.6.1). Dann sagen wir, daß die elliptischen Operatoren $\mathcal{L}(t)$ zur Klasse $\mathcal{E}(c_E, w, M)$ gehören, $0 \leq t \leq T$.

Es gilt:
Satz V.6.1: *Die elliptischen Operatoren $\mathcal{L}(t)$ mögen in $[0,T]$ zur Klasse $\mathcal{E}(c_E, w, M)$ gehören. Sei $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$,*

$$\mathcal{L}(t)u = a_{\alpha\beta}(t,x)D^{\alpha+\beta}u,$$
$$u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}(t)) = H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega).$$

Dann sind die $\mathcal{L}(t)$ in $[0,T]$ vom Typ $(\wedge_0, \Phi_0, M_0)$, d.h.: Es gibt Zahlen

$$\begin{aligned}
&\wedge_0 = \wedge_0(c_E, w, M) \in \mathbb{R},\\
&\Phi_0 = \Phi_0(c_E, w, M),\\
&0 < \Phi_0 < \frac{\pi}{2},\\
&M_0 = M_0(c_E, w, M) > 0
\end{aligned}$$

derart, daß gilt: $\mathcal{L}(t) + \lambda$ it im Sektor $\lambda \in \sum_0(\wedge_0, \Phi_0)$ in $\mathcal{H}$ beschränkt invertierbar, es ist

$$||(\mathcal{L}(t)+\lambda)u|| \geq M_0 \cdot \sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{1-\frac{j}{2m}} ||u||_{H^{j,2}}$$

$0 \leq t \leq T$. Insbesondere gilt in $[0,T]$ die Abschätzung

$$||(\mathcal{L}(t)+\lambda)^{-1}|| \leq \tfrac{M_0}{|\lambda|},\ \lambda \in \textstyle\sum_0 .$$

Beweis: [Vorlesungsmanuskript: „Die klassischen Randwertprobleme der Mathematischen Physik“, Sätze IV.5.2, IV.5.3, insbesondere Beweis dieses Satzes S. IV.55/390, und Satz III.3.6]. □

Mit Hilfe von Satz V.6.1 lassen sich lineare parabolische Systeme wie folgt behandeln:

Satz V.6.2: *Sei $r > 1$. Die elliptischen Operatoren $\mathcal{L}(t)$ seien in $[0,T]$ aus der Klasse $\mathcal{E}(c_E, w, M)$. Es sei wie in Satz V.6.1 jeder Operator $\mathcal{L}(t)$ in $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\mathcal{L}(t)) = H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)$ erklärt. Dann sind die Räume*

$$J_{1-1/r,r}(e) = \{u | u \in L^2(\Omega), \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^r} ||(e^{-t(\mathcal{L}(\tau)+\wedge_0+1)} - I)u||^r dt < \infty\},\ 0 \leq \tau \leq T,$$

als Mengen gleich und durch

$$||u|| + (\int_0^t \frac{1}{t^r} ||(e^{-t(\mathcal{L}(\tau)+\wedge_0+1)} - I)u||^r dt)^{1/r}$$

äquivalent normiert derart, daß die Abschätzungskonstanten nicht von $\tau \in [0,T]$ abhängen. Wir setzen

$$J_{1-1/r,r} = J_{1-1/r,r}(0).$$

Zu jedem $\varphi \in J_{1-1/r,r}$, $f \in L^r((0,T), L^2(\Omega))$ gibt es genau ein u mit

$$\begin{aligned}
&u' \in L^r((0,T), L^2(\Omega)),\\
&u \in L^r((0,T), \mathcal{D}(\mathcal{L}(0))),\\
&u \in C^0([0,T], J_{1-1/r,r}),\\
&u' + \mathcal{L}(t)u = f,\\
&u(0) = \varphi.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\sup_{0\leq t\leq T} ||u(t)||^r_{1-1/r,r} + \int_0^T ||u'(t)|^r dt + \int_0^T ||u(t)||^r_{2m} dt \leq c(\Phi_0, \wedge_0, M_0, c_E, w, M, r, T) \cdot (\int_0^T ||f(t)||^r dt + ||\varphi||^r_{1-1/r,r}).$$

$c = c(\Phi_0, \wedge_0, M_0, c_E, w, M, r, T)$ ist dabei eine Konstante > 0, die beschränkt bleibt, falls T in deiner beschränkten Menge des $\mathbb{R}^+$ variiert.

Beweis: Der Operator $\mathcal{L}(t) + \wedge_0 + 1$ ist vom Typ (Φ_0, M_0) in $[0,T]$ und genügt den Voraussetzungen, die wir an die Operatorenschar $A(t)$ in Satz V.5.3 gestellt hatten. Damit folgt die erste Aussage des Satzes. Zur zweiten betrachten wir zunächst das Problem

$$u' + (\mathcal{L}(t) + \wedge_0 + 1)u = f,\ u(0) = \varphi. \tag{V.6.4}$$

Wir lösen es zunächst auf $[0, \delta_0]$ in der Form

$$u' + (\mathcal{L}(0) + \wedge_0 + 1)u = (\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t))u + f,\ u(0) = \varphi,$$

wobei δ_0 nur von c_E, w, M abhängt. In δ_0 beginnen wir das Verfahren wieder mit Anfangswert $u(\delta_0)$ usw. Wir legen dabei den Banachschen Fixpunktsatz zu Grunde und gehen so vor wie beim Beweis des Satzes V.5.3. Da wir immer eine Lösung auf einem Intervall der Länge δ_0 erhalten, schöpfen wir schließlich ganz $[0,T]$ aus. Die Lösung u von (V.6.4) genügt der im Satz angegebenen Abschätzung. Dies folgt, indem wir bei dem schrittweisen Konstruktionsverfahren jeweils in $[0, \delta_0]$, $[\delta_0, 2\delta_0], \ldots$ die Abschätzungen aus Satz V.5.2 anwenden. Zur Lösung des eigentlichen Problems

$$u' + \mathcal{L}(t)u = f$$

bedenken wir, daß

$$u' + (\mathcal{L}(t) + \wedge_0 + 1)u - (\wedge_0 + 1)u = f,$$

$$w' + (\mathcal{L}(t) + \wedge_0 + 1)w = e^{-(\wedge_0+1)t} f,$$

$$w(0) = \varphi$$

ist mit $w(t) = e^{-(\wedge_0+1)t}u(t)$. Auf w wenden wir das vorher Gesagte an. $\square$

Wir studieren jetzt zu einem gegebenen stetigen Vektorfeld $w \in C^0([0,T] \times \overline{\Omega})$ das semilineare Problem

$$u' + \mathcal{L}(t,w)u = f(t,u,D^1 u,\ldots,D^{2m-1}u).$$

Dabei ist

$$f : [0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{NS_1} \times \ldots \times C^{NS_{2m-1}} \to \mathbb{C}^N$$

eine stetige Abbildung mit S_ν = Anzahl der Multiindizes des $\mathbb{R}^n$ mit Betrag $= \nu$.

$D^\nu u$ ist der Vektor aus $\mathbb{C}^{NS_\nu}$, der aus allen Ableitungen der Ordnung ν der Komponenten $u_1,\ldots,u_N$ von u besteht. f genüge den folgenden Lipschitz- bzw. Beschränktheitsbedingungen:

$$|f(t,x,u_2(x),D^1u_2(x),\ldots,D^{2m-1}u_2(x)) - f(t,x,u_1(x),D^1u_1(x),\ldots,D^{2m-1}u_1(x))|$$

$$(\text{V.6.5})\leq \sup_{|z|\leq|u_1(x)|+|u_2(x)|} |g(t,x,z)|[\sum_{\nu=0}^{m-1}(|D^{m-\nu}u_2(x)||D^{m+\nu}u_2(x)| + |D^{m-\nu}u_1(x)|\cdot$$
$$\cdot|D^{m+\nu}u_1(x)|)|u_2(x)-u_1(x)| + \textstyle\sum_{\nu=0}^{m-1}(|D^{m+\nu}u_1(x)| + |D^{m+\nu}u_2(x)|)|D^{m-\nu}(u_2-u_1)(x)|+$$
$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(|D^{m-\nu}u_1(x)| + |D^{m-\nu}u_2(x)|)|D^{m+\nu}(u_2-u_1)(x)|],$$
$$|f(t,x,u(x),Du(x),\ldots,D^{2m-1}u(x))| \leq$$
$$(\text{V.6.6})\leq \sup_{|z|\leq|u(x)|} g(t,x,z)| \sum_{\nu=0}^{m-1} |D^{m-\nu}u(x)||D^{m+\nu}u(x)|,\ u_1,u_2,u \in C^{2m,2}(\Omega),\ t\in[0,T], x\in\overline{\Omega} \text{ bzw. } \Omega.$$

g ist in (V.6.5,6) eine stetige Abbildung von $[0,T] \times \overline{\Omega} \times \mathbb{C}^N$ in $\mathbb{C}$. Bezüglich des elliptischen Hauptteils setzen wir voraus, daß er von der Form

$$\mathcal{L}(t,w) = a_{\alpha,\beta}(t,x,w(t,x))D^{\alpha+\beta}u$$

$(|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m)$ ist. Die $a_{\alpha\beta}$ sind dabei stetige, auf $[0,T]\times\overline{\Omega}\times\mathbb{C}^N$ definierte $N\times N$ Matrizen. Zu jedem $\widetilde{w} \in C^0([0,T] \times \overline{\Omega})$ gebe es Funktionen $w(.,w) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sowie Konstanten $M, c_E : C^0([0,T] \times \overline{\Omega}) \to \mathbb{R}^+ - \{0\}$ derart, daß $L(t,w)$ zur Klasse $\mathcal{E}(c_E(\widetilde{w}), w(.,\widetilde{w}), M(\widetilde{w}))$ gehört. Variieren die Funktionen $\widetilde{w}$ in einer Menge $\mathcal{M}(\delta, D)$:

$$|\widetilde{w}(t,x) - \widetilde{w}(s,y)| \leq \delta(r),\ |t-s| + |x-y| \leq r,\ |\widetilde{w}(t,x)| \leq D$$

mit einer festen meßbaren, beschränkten Funktion $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die gilt: $\delta(r) \to 0$, $r \to 0$, und Konstanten $D > 0$, so soll es Funktionen $\widehat{w} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sowie Konstanten $\widehat{c}_E > 0$, $\widehat{M} > 0$ geben derart, daß

$$\mathcal{L}(t,\widetilde{w}) \in \mathcal{E}(\widehat{c}_E, \widehat{w}, \widehat{M}),\ \widetilde{w} \in \mathcal{M}(\delta, D)$$

ist. Wir zeigen nun zunächst den lokalen
Satz V.6.3: *Sei*

$$2m > \frac{n}{2}.$$

Die Nichtlinearität f und der elliptische Operator $\mathcal{L}(t,w)$ mögen den soeben gemachten Voraussetzungen ($\widetilde{w} \in C^0([0,T] \times \overline{\Omega})$ genügen. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m,n) > 1$ derart, daß folgendes gilt:

Sei $r \geq r_0$. Sei $\widetilde{w} \in C^0([0,T] \times \overline{\Omega}$. Sei $J_{1-1/r,r}$ der zu $\mathcal{L}(0,\widetilde{w}(0,.))u$, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}(0,\widetilde{w}(0,.)) = \mathcal{D}(\mathcal{L}(t,\widetilde{w})) = H^{2m,2}(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)$ genörige Interpolationsraum. Sei

$$\varphi \in J_{1-1/r,r}.$$

Dann gibt es eine Zahl $T(\varphi)$, $0 < T(\varphi) \leq T$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt genau ein u mit

$$u \in \bigcap_{\widetilde{T}, \widetilde{T} < T(\varphi)} C^0([0, \widetilde{T}], J_{1-1/r,r}),$$
$$u' \in \bigcap_{\widetilde{T}, \widetilde{T} < T(\varphi)} L^r((0, \widetilde{T}), L^2(\Omega)).$$
$$u \in \bigcap_{\widetilde{T}, \widetilde{T} < T(\varphi)} L^r((0, \widetilde{T}) H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)).$$

$$u' + \mathcal{L}(t, \widetilde{w})u = f(t, u, D^1 u, \ldots D^{2m-1} u)$$

in $(0, T(\varphi))$,

$$u(0) = \varphi.$$

Für $T(\varphi)$ unterscheiden wir zwei Fälle:

1. *„Lokaler Fall“:*

$$||u(t)||_{1-1/r,r} \uparrow +\infty, \text{ falls } t \uparrow T(\varphi).$$

2. *„Globaler Fall“: $T(\varphi) = T$,*

$$||u(t)||_{1-1/r,r} \text{ bleibt beschränkt für } t \uparrow T(\varphi) = T.$$

In diesem Fall ist

$$u \in C^0([0, T], J_{1-1/r,r}),$$
$$u' \in L^r((0, T), L^2(\Omega)),$$
$$u \in L^r((0, T), H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)).$$

Beweis: Zunächst wird $r_0 = r_0(m, n)$ so groß gewählt, daß

$$J_{1-1/r,r} \subset H^{2\sigma m,2}(\Omega)$$

mit $\sigma \in (0, 1)$,

$$2\sigma m > 2m - 1,$$
$$4\sigma m > \frac{n}{2} + 2m$$

die Einbettung von $J_{1-1/r,r}$ in $H^{2\sigma m,2}(\Omega)$ ist kompakt.

Seien $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in J_{1-1/r,r}$. Seien $+\infty > p_\nu, q_\nu > 1$, $1/p_\nu + 1/q_\nu = 1$, $\frac{1}{2p_\nu} \geq \frac{1}{2} - \frac{2m\sigma - (m+\nu)}{u}$, $\frac{1}{2q_\nu} \geq \frac{1}{2} - \frac{2m\sigma - (m-\nu)}{u}$, $0 \leq \nu \leq m - 1$. Nach Wahl von σ wie oben ist dies möglich. Dann ist

$$|||D^{m-nu}\widetilde{w}_1||D^{m+\nu}\widetilde{w}_2||| \leq c||\widetilde{w}_1||_{1-1/r,r}||\widetilde{w}_2||_{1-1/r,r}.$$

Nun seien $\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2 \in H^{2m,2}(\Omega)$. Dann ist $(0 \leq \nu \leq m - 1)$

$$|||D^{m-\nu}\widetilde{w}_1||D^{m+\nu}\widetilde{w}_2||| \leq ||D^{m+\nu}\widetilde{w}_1||_{L^{2p_\nu}(\Omega)} \cdot ||D^{m+\nu}\widetilde{w}_2||_{L^{2q_\nu}(\Omega)},$$

$$\leq c||\widetilde{w}_1||^{a_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)}||\widetilde{w}_2||^{b_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)}||\widetilde{w}_1||^{1-a_\nu}_{L^\infty(\Omega)}||\widetilde{w}_2||^{1-b_\nu}_{L^\infty(\Omega)}$$

mit $+\infty > p_\nu, q_\nu > 1$,

$$\frac{1}{2p_\nu} = \frac{m-\nu}{n} + a_\nu(\frac{1}{2} - \frac{2m}{n}),$$

$$\frac{1}{2q_\nu} = \frac{m+\nu}{n} + b_\nu(\frac{1}{2} - \frac{2m}{n}),$$

insbesondere können wir

$$a_\nu + b_\nu = 1,$$

$$a_\nu = \frac{m-\nu}{2m},$$

$$b_\nu = \frac{m+\nu}{2m}$$

erreichen. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^{\widetilde{T}} ||f(t,u_2,\ldots) - f(t,u_1,\ldots)||^r dt \\ &\le G(\sup_{0\le t\le \widetilde{T}} (||u_1(t)||_{1-1/r,r} + ||u_2(t)||_{1-1/r,r})) \end{aligned} \tag{V.6.7}$$

$$\Big[\sum_{\substack{\nu=0\\ i=1,2}}^{\infty} \int_0^{\widetilde{T}} (||u_i(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} ||u_i(t)||^r_{L^\infty(\Omega)} ||u_2(t)-u_1(t)||^r_{L^\infty(\Omega)} dt + \sum_{\substack{\nu=0,\\ i=1,2}}^{\infty} \int_0^{\widetilde{T}} (||u_i(t)||^{rb_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)}$$

$$\cdot ||u_i(t)||^{r(1-b_\nu)}_{L^\infty(\Omega)} ||u_2(t)-u_1(t)||^{ra_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)} \cdot ||u_2(t)-u_1(t)||^{r(1-a_\nu)}_{L^\infty(\Omega)} +$$

$$+ ||u_i(t)||^{ra_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)} ||u_i(t)||^{r(1-a_\nu)}_{L^\infty(\Omega)} \cdot ||u_2(t)-u_1(t)||^{rb_\nu}_{H^{2m,2}(\Omega)} \cdot ||u_2(t)-u_1(t)||^{r(1-b_\nu)}_{L^\infty(\Omega)})dt,$$

$$\int_0^{\widetilde{T}} ||f(t,u,\ldots)||^r dt \le G(\sup_{0\le t\le\widetilde{T}} ||u(t)||_{1-\frac{1}{r},r}) \cdot \int_0^{\widetilde{T}} ||u(t)||^{2r}_{1-1/r,r} dt,\ 0<\widetilde{T}\le T, \tag{V.6.8}$$

$$u_1, u_2, u \in L^r((0,\widetilde{T}), H^{2m,2}(\Omega)) \cap L^\infty((0,\widetilde{T}), L^\infty(\Omega)).$$

Hierbei ist G eine monoton wachsende stetige Abbildung von $\mathbb{R}^+$ in sich. Nun ordnen wir jedem $\widetilde{u} \in L^r((0,\widetilde{T}), H^{2m,2}(\Omega)) \cap C^0([0,\widetilde{T}], J_{1-1/r,r})$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$u = \mathcal{T}_w \widetilde{u}$$

des Problems

$$\begin{aligned} u' + \mathcal{L}(t,w)u &= f(t,\widetilde{u},\ldots) \\ u(0) &= \varphi \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} &u' \in L^r((0,\widetilde{T}), L^2(\Omega)) \\ &u \in L^r((0,\widetilde{T}), \mathcal{D}(\mathcal{L}(0))), \\ &u \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{I}_{1-1/r,r}) \end{aligned}$$

zu (Satz V.6.2). In der Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\widetilde{T}} = \{\widetilde{u}| \quad &\widetilde{u} \in L^r((0,\widetilde{T}), \mathcal{D}(\mathcal{L}(0)) \\ &\widetilde{u}' \in L^r((0,\widetilde{T}), L^2(\Omega)) \\ &\widetilde{u} \in C^0([0,\widetilde{T}], J_{1-1/r,r}), \\ &\widetilde{u}(0) = \varphi, \end{aligned}$$

$$\sup_{0\le t\le\widetilde{T}} ||\widetilde{u}(t)||^r_{1-1/r,r} + \int_0^{\widetilde{T}} ||\widetilde{u}'(t)||^r dt + \int_0^{\widetilde{T}} ||\widetilde{u}(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt \le$$

$$\le \sup_{0\le t\le\widetilde{T}} ||u_0(t)||^r_{1-1/r,r} + \int_0^{\widetilde{T}} ||u_0'(t)||^r dt + \int_0^{\widetilde{T}} ||u_0(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt + 1$$

$$u_0 \text{ löst } u' + \mathcal{L}(t,w)u = 0,\ u(0) = \varphi \text{ gemäß Satz V.6.2 } \}$$

führen wir vermöge

$$\mu_{\widetilde{T}}(u_2,u_1) = \sup_{0\le t\le\widetilde{T}} ||u_2(t)-u_1(t)|| + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_2'(t)-u_1'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_2(t)-u_1(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{\frac{1}{r}}.$$

eine Metrik ein, relativ zu der $\mathcal{M}_{\widetilde{T}}$ ein vollständiger metrischer Raum wird. In Hilfssatz V.6.1 am Ende dieses Paragraphen zeigne wir, daß $(0 \le t \le \widetilde{T})$

$$\text{(V.6.9)} \qquad ||u_2(t)-u_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} \le c\widetilde{T}^\delta \mu_{\widetilde{T}}(u_2,u_1)$$

ist mit einer nur von n,m,Ω abhängigen Konstante c und einem ebenfalls nur von n,m abhängigen Exponenten $\delta > 0$. Mit Satz V.6.2 und den Abschätzungen (V.6.7,8) folgt sofort, daß

$$\mathcal{T}_w : \mathcal{M}_{\widetilde{T}} \to \mathcal{M}_{\widetilde{T}}$$

eine Kontraktion ist, sofern nur $\widetilde{T} > 0$ hinreichen klein ist. Die Größe von $\widetilde{T}$ ist dabei vermöge Satz V.6.2 durch $||\varphi||_{1-1/r,r}$ bestimmt (w ist hier fest!). Fortsetzung dieses Verfahrens liefert in der üblichen Weise die Zahl $T(\varphi)$ des Satzes. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus Satz V.6.2 und (V.6.7). □

Wir geben noch einen Hinweis, von dem wir später Gebrauch machen: Der Faktor $G(...)$ vor den Integraltermen in (V.6.7, 8) lautet ursprünglich

$$\text{(V.6.10)} \qquad G(\sup_{0\le t\le\widetilde{T}}(||u_1(t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||u_2(t)||_{L^\infty(\Omega)}))$$

bzw.

$$\text{(V.6.11)} \qquad G(\sup_{0\le t\le\widetilde{T}} ||u(t)||_{L^\infty(\Omega)}).$$

Vermöge $r \ge r_0 = r_0(m,n)$ ist $||u||_{L^\infty(\Omega)} \le c||u||_{1-1/r,r}$, so daß wir die $L^\infty(\Omega)$-Norm in (V.6.10, 11) durch die $J_{1-1/r,r}$-Norm ersetzen können, dies haben wir im Beweis des Satzes V.6.3 stillschweigend getan.

Wir lösen nun das quasilineare Problem

$$w' + \mathcal{L}(t,u)u = f(t,u,D^1u,\dots,D^{2m-1}u)$$

unter den bisher an $\mathcal{L}, f$ gemachten Annahmen. Hierzu gilt
Satz V.6.4: *Sei*

$$2m > \frac{n}{2}.$$

Die Nichtlinearität f und der elliptische Operator $\mathcal{L}(t,w)$ mögen den in Satz V.6.3 gemachten Voraussetzungen genügen. Dann gibt es ein $r_0 = r_0(m,n) > 1$ derart, daß folgendes gilt: 1. Sei $r \ge r_0$. Sei $J_{1-1/r,r}$ der zu $\mathcal{L}(0,\varphi) + \wedge_0$, $\wedge_0 = \wedge_0(\varphi)$, gehörige Interpolationsraum. Sei

$$\varphi \in J_{1-1/r,r}.$$

Dann gibt es eine Zahl $T(\varphi)$, $0 < T(\varphi) \le T$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt jedenfalls ein u mit

$$u \in \bigcap_{\widetilde{T},\widetilde{T}<T(\varphi)} C^0([0,\widetilde{T}],\mathcal{I}_{1-1/r,r}),$$

$$u' \in \bigcap_{\widetilde{T},\widetilde{T}<T(\varphi)} L^r((0,\widetilde{T}),L^2(\Omega)),$$

$$u \in \bigcap_{\widetilde{T},\widetilde{T}<T(\varphi)} L^r((0,\widetilde{T}),H^{2m,2}(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)),$$

$$u' + \mathcal{L}(t,u)u = f(t,u,D^1u,\dots,D^{2m-1}u) \text{ in } (0,T(\varphi)),$$

$$u(0) = \varphi.$$

Für $T(\varphi)$ unterscheiden wir zwei Fälle:

2. „Lokaler Fall“:

$$\sup_{0 \le s \le t} ||u(s)||_{1-1/r,r} \uparrow +\infty, \text{ falls } t \uparrow T(\varphi).$$

3. „Globaler Fall“: $T(\varphi) = T$,

$$\sup_{0 \le s \le t} ||u(s)||_{1-1/r,r} \text{ bleibt beschränkt für } t \uparrow T(\varphi) = T.$$

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} &u \in C^0([0,T], J_{1-1/r,r}), \\ &u' \in L^r((0,T), L^2(\Omega)) \\ &u \in L^r((0,T), H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega)). \end{aligned}$$

Beweis: Sei r_0 wie im Beweis von Satz V.6.3. Sei u_0 die Lösung von

$$u' + \mathcal{L}(0,\varphi)u = 0, \; u(0) = \varphi$$

im Sinn von Satz V.5.2. Wir betrachten

$$\text{(V.6.12)} \qquad \begin{aligned} &(u-u_0)' + \mathcal{L}(0,\varphi)(u-u_0) = (\mathcal{L}(0,\varphi) - \mathcal{L}(t,w))u + f(t,u,D^1u,\dots,D^{2m-1}u), \\ &u(0) = \varphi \end{aligned}$$

Dabei ist $w \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{I}_{1-1/r,r}) \cap L^r((0,\widetilde{T}), H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega))$, $w' \in L^r((0,\widetilde{T}), L^2(\Omega))$, $w(0) = \varphi$. Sei weiter

$$\text{(V.6.13)} \quad \sup_{0 \le t \le \widetilde{T}} ||w(t)||_{1-1/r,r} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||w'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||w(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{\frac{1}{r}} \le \sup_{0 \le t \le \widetilde{T}} ||u_0(t)||_{1-1/r,r} +$$
$$+ (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_0'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_0(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} (dt)^{\frac{1}{r}} + 1.$$

$\widetilde{T}$ ist aus $(0,T]$. Wir verfügen später über $\widetilde{T}$. Für $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein stellen gemäß der Wahl von r und Hilfssatz V.6.1 (der am Ende dieses Paragraphen folgt) die oben eingeführten Vektorfunktionen w eine praekompakte konvexe Menge $\mathcal{K}_{\widetilde{T}}$ in $\mathcal{B} = C^\varepsilon([0,\widetilde{T}] \times \overline{\Omega})$ dar. Jedem w ordnen wir die gemäß Satz V.6.3 eindeutig bestimmte Lösung

$$u' + \mathcal{L}(t,w)u = f(t,u,D^1u,\dots,D^{2m-1}u),$$
$$u(0) = \varphi$$

mit $u \in C^0([0,\widetilde{T}], \mathcal{I}_{1-1/r,r})$, $u' \in L^r((0,\widetilde{T}), L^2(\Omega))$, $u \in L^r((0,\widetilde{T}), H^{2m,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^{m,2}(\Omega))$ zu. Wir wollen nun zeigen, daß 1. $\widetilde{T}$ so klein gewählt werden kann, daß dadurch eine Abbildung $\mathcal{T}$ von $\mathcal{K}_{\widetilde{T}}$ in sich entsteht, die 2. in der Topologie von $C^\varepsilon([0,\widetilde{T}] \times \overline{\Omega})$ stetig ist. Weiter wollen wir 3. beweisen, daß $\widetilde{T}$ in Abhängigkeit von $||\varphi||_{1-1/r,r}$ und T gewählt werden kann. Dabei ist

$$\widetilde{T} \ge \widetilde{T}_0(D,\widehat{T}) > 0, \text{ wenn } ||\varphi||_{1-1/r,r} \le D, \; T \le \widehat{T}$$

ist. Wir benutzen dazu die Form (V.6.12) und erhalten mit (V.6.8)

$$\sup_{0 \le t \le \widetilde{T}} ||u(t)||_{1-1/r,r} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{1/r} \le$$

$$(\text{V.6.14}) \qquad \sup_{0\le t\le \widetilde{T}} ||u_0(t)||_{1-1/r,r} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_0'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_0(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+c \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega},\\ t\in[0,\widetilde{T}],|\alpha|\le m,|\beta|\le m}} |a_{\alpha\beta}(0,x,\varphi(x)) - a_{\alpha\beta}(t,x,w(t,x)| \cdot (\int_0^{\widetilde{T}} ||u(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+(\int_0^{\widetilde{T}} G(\sup_{0\le t\le \widetilde{T}} ||u(t)||_{1-1/r,r}) \cdot ||u(t)||^{2r}_{1-1/r,r} dt)^{\frac{1}{r}}).$$

Nun ist

$$\sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ t\in[0,\widetilde{T}],\\ |\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} |a_{\alpha\beta}(0,x,\varphi(x)) - a_{\alpha\beta}(t,x,w(t,x))|$$

$$((\text{V.6.15})\le \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ t\in[0,\widetilde{T}],\\ |\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m\\ |\zeta|\le c||\varphi||_{1-1/r,r}}} |a_{\alpha\beta}(0,x,\zeta) - a_{\alpha\beta}(t,x,\zeta)| + \sup_{\substack{x\in\overline{\Omega}\\ t\in[0,\widetilde{T}],\\ |\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m\\ |\zeta-\zeta'|\le c\widetilde{T}^{\delta}(||\varphi||_{1-1/r,r}+1)}} |a_{\alpha\beta}(t,x,\zeta) - a_{\alpha\beta}(t,x,\zeta')|$$

wegen (V.6.7), (V.6.13) und

$$(\text{V.6.16}) \qquad \sup_{0\le t\le \widetilde{T}} ||u_0(t)||_{1-1/r,r} + (\int_0^{\widetilde{T}} ||u_0'(t)||^r dt)^{\frac{1}{r}} + (\int_0^{T} ||u(t)||^r_{H^{2m,2}(\Omega)} dt)^{\frac{1}{r}} \le c||\varphi||_{1-1/r,r}.$$

Alle Konstanten c hängen von T ab in einer Weise, daß c beschränkt ist, wenn T im Kompaktum $[0,\widehat{T}]$ variiert. Damit folgen 1. und 3.. Nun zur Stetigkeit von $\mathcal{T}$ in der Topologie von $C^{\varepsilon}([0,\widetilde{T}]\times\overline{\Omega})$. Sei (w_ν) eine Folge aus $\mathcal{K}_{\widetilde{T}}$ mit

$$w_\nu \to w \text{ in } C^{\varepsilon}([0,\widetilde{T}]\times\overline{\Omega}) \text{ für } \nu\to\infty.$$

Dann folgt mit Satz V.5.2, daß w aus $\mathcal{K}_{\widetilde{T}}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{K}_{\widetilde{T}}$ abgeschlossen. Die Stetigkeit von $\mathcal{T}$ ergibt sich nun leicht aus (V.6.14), (V.6.15), wenn man noch bedenkt, daß in (V.6.15)

$$|\zeta| \le c(||\varphi||_{1-1/r,r}+1),$$
$$|\zeta-\zeta'| \le c\widetilde{T}^{\delta}(||\varphi||_{1-1/r,r}+1)$$

ersetzt werden kann durch

$$|\zeta| \le ||\varphi||_{C^0(\overline{\Omega})},$$
$$|\zeta-\zeta'| \le c\widetilde{T}^{\varepsilon}_{C^{\varepsilon}([0,\widetilde{T}]\times\overline{\Omega})}.$$