Vorlesung Funktionalanalysis III
III. Lineare Elliptische Systeme

§1. Sobolev-Räume

Ein n-tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen heißt Multiindex des $\mathbb{R}^n$. Wir setzen $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Unter D^α verstehen wir den Operator

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}},$$

der zunächst auf alle genügend oft in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbaren Funktionen angewendet werden kann, später auch auf Funktionen, die nur verallgemeinerte Ableitungen (sogenannte Distributionsableitungen) besitzen.

Wir benutzen im folgenden ferner den Satz von der Teilung der 1:
Satz III.1.1: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $\{\Omega_i | i = 1, 2, \ldots\}$ eine abzählbare Überdeckung von Ω, d.h.*

$$\Omega_i \text{ offen}, \; i = 1, 2, \ldots,$$
$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

Dann gibt es Funktionen α_i, $i \in \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

(III.1.1) $\alpha_i \in C_0^\infty(\Omega_j)$ *für ein* $j = j(i), \; i \in \mathbb{N}$,

(III.1.2) $\alpha_i \geq 0$, *insbesondere* $\alpha_i(x) \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$,

(III.1.3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(x) = 1, \; x \in \Omega$,

(III.1.4) *jede kompakte Teilmenge K von Ω hat nur mit endlich vielen der Mengen $\operatorname{supp} \alpha_i$ nichtleeren Durchschnitt.*

Wenn jede Menge $\overline{\Omega}_i$ kompakte Teilmenge von Ω, oder wenn $\overline{\Omega}$ kompakt ist und

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$$

ist, dann kann man $j(i) = i$ in (III.1.1) wählen.

Man sagt, daß die $\alpha_i, i \in \mathbb{N}$, eine der Überdeckung $\{\Omega_i | i \in \mathbb{N}\}$ untergeordnete Teilung der 1 bilden. Eine Referenz für diesen Satz ist [Friedman, A.: Generalized Functions and Partial Differential Equations, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice, Hall, Inc. 1963].

Wir führen den Begriff der Mollifizierung einer Funktion u ein.

Definition III.1.1: *Sei $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, sei $supp\, \rho \subset \overline{K_1(0)}$, sei $\rho \geq 0$, sei $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$. Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $u \in L^p(\Omega)$ für ein $p > 1$.*

Dann setzt man

$$I_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \rho \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) u(y)dy, \ \varepsilon > 0.$$

$I_\varepsilon u$ heißt die (ε-)Mollifizierung von u.

Bezüglich der Mollifizierung gilt der folgende
Satz III.1.2: *Sei $I_\varepsilon u$ die ε-Mollifizierung einer Funktion $u \in L^p(\Omega)$ wie in Definition III.1.1. Dann gilt: $supp\, \rho \left(\frac{x-.}{\varepsilon}\right) \subset K_\varepsilon(x)$,*

$$I_\varepsilon u \in \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$$

Ist $supp\, u \subset K \subset \Omega$, K ein Kompaktum, so ist

$$I_\varepsilon u(x) = 0, \ dist(x, \partial\Omega) < \varepsilon < \frac{1}{2} dist(K, \Omega).$$

Ist $u \in C^k(\overline{\Omega})$ für ein $k \in \mathbb{N}$ und $supp\, u \subset K \subset \Omega$, K ein Kompaktum, so ist

$$D^\alpha I_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \rho \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) D^\alpha u(y)dy, \ |\alpha| \leq k.$$

Es gilt für $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < +\infty$,

$$||I_\varepsilon u - u||_{L^p(\Omega)} \to 0, \ \varepsilon \to 0.$$

Ist $u \in C^0(\overline{\Omega})$, $supp\, u \subset K \subset \Omega$, K ein Kompaktum, so ist

$$||I_\varepsilon u - u||_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Ist Ω beschränkt, $u \in C(\overline{\Omega})$, so gilt ebenfalls

$$||I_\varepsilon u - u||_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0,\ \varepsilon \to 0.$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen sind klar. Zur dritten Aussage: Es ist

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^u} \int_K \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)dy.$$

Ist $dist(x, \partial\Omega) < \varepsilon < \frac{1}{3} dist(K, \partial\Omega)$, so ist $\frac{1}{\varepsilon}|x-y| \geq \frac{1}{\varepsilon}(dist(K, \partial\Omega) - |x - x_0|)$, $x_0 \in \partial\Omega$, $y \in K$. Wählen wir $x_0 \in \partial\Omega$ geeignet, so folgt

$$\frac{1}{\varepsilon}|x-y| \geq \frac{1}{\varepsilon}(3\varepsilon - 2\varepsilon) \geq 1,$$

also $I_\varepsilon(x) = 0$. Die vierte Aussage zeigt man, indem man u durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortsetzt und den Satz von Gauß anwendet. Zum Beweis der fünften Aussage verfährt man wie folgt: Wir haben

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon u(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)dy, \\
&= \int_{|z|\leq 1} \rho(z) u(x - \varepsilon z) dz, \\
|I_\varepsilon u(x)| &\leq \int_{|z|\leq 1} \rho(z) |u(x - \varepsilon z)| dz, \\
|I_\varepsilon u(x)|^p &\leq (\int_{|z|\leq 1} \rho(z) dz)^{p-1} \int_{|z|\leq 1} \rho(z) |u(x-\varepsilon z)|^p dz, \\
&= \int_{|z|\leq 1} \rho(z) |u(x - \varepsilon z)|^p dz,
\end{aligned}$$

wobei wir die Höldersche Ungleichung angewendet haben. Also ist

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |I_\varepsilon u(x)|^p dx &\leq \int_{|z|\leq 1} [\int_\Omega |u(x-\varepsilon z)|^p dx] \rho(z) dz, \\
&= ||u||^p_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

wobei wir u durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt haben. Nun wählen wir zu u eine Funktion $v \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $supp\, v \subset K \subset \Omega$, K ein Kompaktum, derart, daß $||u - v||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$ ist. Dann ist (v wird durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt)

$$\begin{aligned}
||I_\varepsilon u - u||_{L^p(\Omega)} &\leq ||I_\varepsilon u - I_\varepsilon v||_{L^p(\Omega)} + ||I_\varepsilon v - v||_{L^p(\Omega)} + ||v - u||_{L^p(\Omega)}, \\
&\leq (2/3)\varepsilon + ||I_\varepsilon v - v||_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die obigen Rechnungen zeigen, daß

$$||I_\varepsilon v - v||^p_{L^p(\Omega)} \le \int_{\mathbb{R}^n} |v(x-\varepsilon z) - v(x)|^p dx \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

nach dem Satz von Lebesgue. Die sechste Aussage haben wir mitbewiesen. Zur Existenz von v s. [Forster, Analysis 3, S. 120]. Nun zur Siebenten Aussage. Für alle $x \in \Omega$, $|z| \le 1$, für die $x - \varepsilon z \in \overline{\Omega}$ ist, folgt

$$|I_\varepsilon u(x) - u(x)| \le \sup_{z, |z|\le 1, x-\varepsilon z \in \overline{\Omega}} |u(x-\varepsilon z) - u(x)|.$$

Insbesondere gilt für jedes

$$|I_\varepsilon u(x) - u(x)| \le \sup_{\substack{y,w\in\overline{\Omega} \\ |y-w|\le\varepsilon}} |u(y) - u(w)|,\ \text{also}$$

$$||I_\varepsilon u - u||_{C^0(\overline{\Omega})} \le \sup_{\substack{y,w\in\overline{\Omega}, \\ |y-w|\le\varepsilon}} |u(y) - u(w)|.$$

□

Für ρ in Definition III.1.1 kann man zum Beispiel die Funktion ρ mit $\rho(x) = 0$, $|x| \ge 1$, $\rho(x) = c\exp(1/(|x|^2-1))$, $|x| < 1$, wählen, wobei die Konstante c so anzusetzen ist, daß $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx = 1$ ist. Für beliebige offene Mengen hatten wir die Vektorräume $C^k(\Omega)$, $C^k_0(\Omega)$ bereits eingeführt. $C^k(\overline{\Omega})$ war nur für beschränkte offene Mengen eingeführt worden. Für beliebige offene Mengen Ω des $\mathbb{R}^n$ definieren wir $C^k(\overline{\Omega})$ als den Vektorraum aller Abbildungen $u \in C^k(\Omega)$, für die sich 1. jedes $D^\alpha u$, $|\alpha| \le k$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen läßt. Die Fortsetzung ist eindeutig bestimmt und wird auch mit $D^\alpha u$ bezeichnet. 2. verlagen wir, daß

$$\begin{aligned} ||u||_{C^k(\overline{\Omega})} &= \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha u(x)|, \\ &= \sum_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| < +\infty \end{aligned}$$

ist. Es ist leicht zu sehen, daß mit der eben eingeführten Norm der Vektorraum $C^k(\overline{\Omega})$ zu einem Banachraum wird.

Sind $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_N$, so ist $\mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_N$ ($\mathcal{V}^N$, falls $\mathcal{V}_1 = \dots = \mathcal{V}_N = \mathcal{V}$) ihr cartesisches Produkt. Sind $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_N$ normierte Vektorräume mit den Normen $||.||_{\mathcal{N}_1}, \dots, ||.||_{\mathcal{N}_N}$, so ist auch $\mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_N$ normierter Vektorraum mit der Norm

$$||v||_{\mathcal{N}_1\times\ldots\times\mathcal{N}_N} = (\sum_{i=1}^{N} ||v_i||^2_{\mathcal{N}_i})^{1/2},$$
$$v = (v_1,\ldots,v_N) \in \mathcal{N}_1 \times \ldots \times \mathcal{N}_N$$

Sind $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_N$ Banachräume, so wird mit der eben eingeführten Norm auch $\mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_N$ zu einem Banachraum. Sind $\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_N$ Prähilbert- oder Hilberträume, so ist auch $\mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_N$ Prähilbert- oder Hilbertraum, wenn wir die Norm wie oben und das Skalarprodukt durch

$$(u,v)_{\mathcal{H}_1\times\ldots\times\mathcal{H}_N} = \sum_{i=1}^{N} (u_1,v_i)_{\mathcal{H}_i},$$

$$u = (u_1,\ldots,u_N) \in \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_N,$$
$$v = (v_1,\ldots,v_N) \in \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_N,$$

einführen. Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir statt $\mathcal{V}^N$, $\mathcal{N}^N$, $\mathcal{B}^N$, $\mathcal{H}^N$ auch $\mathcal{V},\mathcal{N},\mathcal{B},\mathcal{H}$; entsprechendes gibt bei den Normen und Skalarprodukten.

Definition III.1.2: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten den Vektorraum $(C_0^m(\Omega))^N$ für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Für $u,v \in (C_0^m(\Omega))^N$ definieren wir ein Skalarprodukt*

$$(u,v)_{(H^m(\Omega))^N} = (u,v)_m = \sum_{\substack{1\le 1\le N\\ 0\le|\beta|\le m}} (D^\beta u_i, D^\beta v_i),$$
$$= \sum_{\substack{1\le 1\le N\\ 0\le|\beta|\le m}} \int_\Omega D^\beta u_i D^\beta \overline{v}_i dx,$$

und eine Norm

$$||u||_{(H^m(\Omega))^N} = ||u||_m = (\sum_{\substack{1\le i\le N,\\ 0\le|\beta|\le m}} ||D^\beta u_i||^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Damit wird $C_0^m(\Omega)$ zu einem Prähilbertraum. Seine Komplettierung wird mit $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ oder $\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ bezeichnet. Offenbar kann man die Norm $||.||_m$ auch für Elemente $u \in (C^m(\Omega))^N$ definieren. Sind $u,v \in (C^m(\Omega))^N$ und $||u||_m$, $||v||_m < +\infty$, so ist auch das Skalarprodukt $(u,v)_m$ erklärt, wenn wir die obige Definition zu Grunde legen. Die Vervollständigung des Prähilbertraums $\{u|u \in (C^m(\Omega))^N, ||u||_m < +\infty\}$ bezeichnen wir mit $(H_m(\Omega))^N$ oder $H^m(\Omega)$.

Für $m = 0$ haben wir offenbar $(\overset{\circ}{H}{}^{o}(\Omega))^N = (H^0(\Omega))^N = (L^2(\Omega))^N$. Im allgemeinen Fall ($m > 0$ gehört ein Vektorfeld u dann und nur dann zu $\overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega)(H^m(\Omega))$ wenn es eine Folge (v_k) aus $C_0^m(\Omega)(C^m(\Omega)$ mit $||v_k||_m < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$) gibt derart, daß

1. $||v_k - u||_{L^2(\Omega)} \to 0$, $k \to \infty$
2. Es Vektorfelder φ^β aus $(L^2(\Omega))^N$ gibt, $0 \leq |\beta| \leq m$, mit $||D^\beta v_k - \varphi^\beta||_{L^2(\Omega)} \to 0, k \to \infty, 0 \leq |\beta| \leq m$. Hierbei ist $D^\beta v_k = (D^\beta v_{1,k}, \ldots, D^\beta v_{N,k})$, und $v_{1,k}, \ldots, v_{N,k}$ sind die Komponenten von v_k.

Das Vektorfeld φ^β, von dem man leicht zeigt, daß es von der Auswahl der Folge (v_k) unabhängig ist, heißt die β- Ableitung von u (manchmal auch starke Ableitung der Ordnung β von u). Wir schreiben $D^\beta u = \varphi^\beta$.

Problem III.1.1: Seien $u \in (\overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega))^N$, $v \in (H^m(\Omega))^N$. Sei $< .,. >$ das Skalarprodukt im unitären Raum $\mathbb{C}^N$. Zeige, daß die Formel der partiellen Integration gilt:

$$\int_\Omega < u, D^\beta w > dx = (-1)^{|\beta|} \int_\Omega < D^\beta u, w > dx,\ 0 \leq |\beta| \leq m.$$

Problem III.1.2: Von zwei Multiindizes α, β des $\mathbb{R}^n$ sagt man: $\alpha \leq \beta$, wenn $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, und $\alpha < b$, wenn $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Falls $\alpha \leq \beta$ ist, setzen wir

$$\binom{\beta}{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} \binom{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Zeige: Wenn $u \in (H^m(\Omega))^N$, $\zeta \in C^m(\overline{\Omega})$, so ist $\zeta u \in (H^m(\Omega))^N$, und es gilt die Formel

$$D^\beta(\zeta u) = \sum_{\alpha \leq \beta} \binom{\beta}{\alpha} D^\alpha \zeta D^{\beta - \alpha} u,\ 0 \leq |\beta| \leq m.$$

$(\overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega))^N$, $(H^m(\Omega))^N$ werden auch als Sobolev-Räume der Ordnung m bezeichnet. Genauer: $(\overset{\circ}{H}{}^{m}(\Omega))^N$, $(H^m(\Omega))^N$ sind die Sobolev-Räume der Ordnung m zum Integrationsexponenten 2.

Bis auf weiteres sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Wir nehmen in diesem Fall an, daß $\overline{\Omega}$ im Quader $Q = \{x|\, |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$ enthalten ist. Dies ist keine Einschränkung, da dieser Fall durch eine Koordinatentransformation stets hergestellt werden kann. Aus der Vorlesung Funktionalanalysis I, Kap. II ist bekannt, daß die Funktionen $(\sqrt{2\pi})^{-n} e^{i<\kappa,x>} =$

$(\sqrt{2\pi})^{-n}e^{i\kappa\cdot x}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\Omega)$ und damit in $L^2(\Omega)$ bilden. Demnach können wir jedes n aus $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ in eine Fourier-Reihe entwickeln, nämlich

$$u = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} c_\kappa e^{i\kappa\cdot x}$$

mit $c_\kappa = (\sqrt{2\pi})^{-n}\int_\Omega u\cdot e^{-i\kappa\cdot x}dx$. Die Reihe konvergiert in $(L^2(\Omega))^n$. Für $D^\beta u$, $0 \le |\beta| \le m$, ergibt sich die Reihenentwicklung

$$D^\beta u = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}(\int_\Omega D^\beta u e^{-i\kappa\cdot x}dx)e^{i\kappa\cdot x}$$

Nach Problem III.1.1 haben wir

$$(\sqrt{2\pi})^{-n}\int_\Omega D^\beta u e^{-i\kappa\cdot x}dx = (\sqrt{2\pi})^{-n} i^{|\beta|}\kappa^\beta\int_\Omega u e^{-i\kappa\cdot x}dx \text{ mit}$$

$$\kappa^\beta = \prod_{i=1}^{u}\kappa_i^{\beta_i}, \kappa = (\kappa_1,\ldots,\kappa_n), \beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n), \text{ also}$$

$$(\sqrt{2\pi})^{-n}\int_\Omega D^\beta u e^{-i\kappa\cdot x}dx = i^{|\beta|}\kappa^\beta c_\kappa,$$

$$D^\beta u = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} i^{|\beta|}\kappa^\beta c_\kappa e^{i\kappa\cdot x},$$

und die letzte Reihe konvergiert in $(L^2(\Omega))^N$. Demnach kann für $u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ die Fourier-Reihe für n gliedweise differenziert werden, sofern die Ordnung der Differentiation m nicht überschreitet. Aus der Vollständigkeit des Systems $(\sqrt{2\pi})^{-n}e^{i\kappa\cdot x}$ folgt

$$\text{(III.1.5)} \qquad ||D^\beta u||^2_{L^2(\Omega))^n} = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}(\kappa^\beta)^2|c_\kappa|^2.$$

Hilfssatz III.1.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Sei $u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. Dann gibt es zwei positive Zahlen $\widetilde{c}_0, \widetilde{c}_1$ mit $\widetilde{c}_0 = \widetilde{c}_0(m)$, $\widetilde{c}_1 = \widetilde{c}_1(m)$,*

$$\widetilde{c}_0\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2\nu}|c_\kappa|^2 \le \sum_{\substack{|\beta|=\nu,\\ 1\le i\le N}}\int_\Omega |D^\beta u_i|^2 dx \le \widetilde{c}_1\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2\nu}|c_\kappa|^2,\ 0\le\nu\le m,$$

wobei $|\kappa| = (\kappa_1^2 + \ldots + \kappa_n^2)^{1/2}$ ist.

Beweis: Der Beweis ist einfach eine Konsequenz aus (III.1.5) und der Ungleichung

$$\widetilde{c}_0|\kappa|^{2\nu} \leq \sum_{|\beta|=\nu} (\kappa^\beta)^2 \leq \widetilde{c}_1|\kappa|^{2\nu},\ 0 \leq \nu \leq m.$$

$\square$

Der nächste Satz heißt in der Literatur auch Poincaré-Ungleichung.

Satz III.1.2: *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränkt und offen. Sei* $u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. *Dann ist*

$$||u||_m^2 \leq c(n,\Omega) \sum_{\substack{|\beta|=m,\\ 1\leq i\leq N}} \int_\Omega |D^\beta u_i|^2 dx$$

mit einer nur von u, Ω *abhängigen Konstante* $c(u,\Omega)$.

Beweis: Wir brauchen die Poincaré-Ungleichung nur im Fall $m = 1$ zu beweisen, da die anderen Fälle durch Iteration folgen. Zunächst sei

$$Du = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq k\leq n}}$$

so daß Du eine $N \times n$-Matrix ist. Wir haben

$$\begin{aligned} |c_0|^2 &= (2\pi)^{-n} |\int_\Omega u dx|^2, \\ &= (2\pi)^{-n} n^{-2} |\int_\Omega Du \cdot x dx|^2, \end{aligned}$$

wobei x als Spalte geschrieben und $Du \cdot x$ das Matrixprodukt aus Du und x ist. Nach Problem III.1.1 ist nämlich

$$\int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot x_k dx = -n \int_\Omega u_i dx,\ 1 \leq i \leq N,$$

also

$$\frac{1}{n^2} |\int_\Omega Du \cdot x dx|^2 = |\int_\Omega u dx|^2,$$

womit die Formel für $|c_0|^2$ gerechtfertigt ist. Mit Cauchy-Schwarz folgt

$$|c_0|^2 \leq (2\pi)^{-n} n^{-2} \int_\Omega |Du|^2 dx \int_\Omega |x|^2 dx.$$

Es ergibt sich mit Hilfssatz III.1.1

$$
\begin{aligned}
||u||_1^2 &= \int_\Omega |u|^2 dx + \int_\Omega |Du|^2 dx, \\
&\leq \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |c_\kappa|^2 + \widetilde{c}_1 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^2 |c_\kappa|^2, \\
&\leq |c_0|^2 + (1+\widetilde{c}_1) \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} |\kappa|^2 |c_\kappa|^2, \\
&\leq \left((\sqrt{2\pi})^{-n} \frac{1}{n^2} \int_\Omega |x|^2 dx + (1+\widetilde{c}_1)/\widetilde{c}_0 \right) \int_\Omega |Du|^2 dx, \\
&\leq c(n,\Omega) \int_\Omega |Du|^2 dx.
\end{aligned}
$$

□

Eine unmittelbare Konsequenz aus dem vorhergehenden Satz ist die Ungleichung des nächsten Satzes.

Satz III.1.3: *Sei Ω eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt: $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ ist äquivalent normiert durch $||u||_m$ und*

$$(\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2m} |c_\kappa|^2)^{1/2}.$$

Definition III.1.3: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Die Abbildung*

$$\overset{\circ}{I}_{m,l}\colon (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N \to (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N,\ \overset{\circ}{I}_{m,l}\, u = u,\ u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N,$$

für $0 \leq l \leq m$ heißt die Einbettung von $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ in $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$.

Offenbar ist $\overset{\circ}{I}_{m,l} \in \mathcal{L}((\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N, (\overset{\circ}{H}{}^l(\Omega))^N)$. Doch gilt darüber hinaus

Satz III.1.4: *Sei Ω eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\overset{\circ}{I}_{m,l}$ kompakt, wenn $0 \leq l < m$ ist.*

Beweis: Sei (u_ν) eine Folge in $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ mit

$$||u_\nu||_m \leq L,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2m} |c_\kappa^{(\nu)}|^2 < L, \text{ also auch}$$
$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2l} |c_\kappa^{(\nu)}|^2 < L,$$

wobei $c_\kappa^{(\nu)} = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_\Omega u_\nu e^{-i\kappa\cdot x} dx$ ist. Es gibt eine Teilfolge (u_{ν_j}) von (u_ν) mit $u_{\nu_j} \to u$ in $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$, $j \to \infty$. Es ist

$$\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2m} |c_\kappa|^2 \leq L,$$

wobei $c_\kappa = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_\Omega u e^{-i\kappa\cdot x} dx$. Wir haben weiter

$$||u_{\nu_j} - u||_l^2 \leq c(n,\Omega)(\sum_{\substack{\kappa \in \mathbb{Z}^n \\ \kappa_i \leq M,\ 1 \leq i \leq n}} |\kappa|^{2l} |c_\kappa^{\nu_j} - c_\kappa|^2 + M^{-(2m-2l)} \sum_{\substack{\kappa \in \mathbb{Z}^n, \\ |\kappa| \geq M}} |\kappa|^{2m} (|c_\kappa^{(\nu_j)}|^2 + |c_\kappa|^2)),$$

$$\leq c(n,\Omega)(M^{-(2m-2l)} L + \sum_{\substack{\kappa \in \mathbb{Z}^n \\ \kappa_i \leq M,\ 1 \leq i \leq n}} |\kappa|^{2l} |c_\kappa^{(v_j)} - c_\kappa|^2).$$

Wählen wir M hinreichend groß und berücksichtigen wir, daß $c_\kappa^{(\nu_j)} \to c_\kappa$, $j \to \infty$, so folgt die Behauptung des Satzes. $\square$

Wir gehen jetzt kurz auf den Begriff des glatten Randes und den Satz von Gauß ein.

Definition III.1.4: *Sei Ω eine offene Punktmenge des $\mathbb{R}^n$. Man sagt, Ω habe einen Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^m (m \in \mathbb{N})$, wenn folgendes gilt: Zu jedem $a \in \partial\Omega$ gibt es eine offene Umgebung U von a und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften*

1. $\Omega \cap U = \{x | x \in \Omega,\ \psi(x) \leq 0\}$,
2. $grad\psi(x) \neq 0,\ x \in U$,
3. $\psi \in C^m(U)$.

Man kann dann beweisen, daß

$$\partial\Omega \cap U = \{x | \psi(x) = 0\}$$

ist. Siehe hierzu [Forster, Analysis 3, §15]. Außerdem kann man die äußere Normale $\nu(a)$ an $\partial\Omega$ in a (bezüglich Ω) erklären. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt (s. [Forster, Analysis 3, §15])

$$\nu_a = \frac{grad\psi(a)}{|grad\psi(a)|}.$$

Wir formulieren nun den Gauß'schen Integralsatz:
Satz III.1.5: *Sei Ω eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$, sei $\partial\Omega$ von der*

Klasse C^1. Sei $F \in (C^1(\Omega))^n$, sei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld. Sei zusätzlich

$$div\, F \in L^1(\Omega).$$

Dann ist

$$\int_\Omega div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} < F, \nu > d\Omega.$$

Hierzu einige Hinweise: Bezüglich der Regularität (Differenzierbarkeitsstufe und Verhalten der Ableitungen von F) arbeiten wir in Satz III.1.5 mit geringeren Voraussetzungen als [F., An. 3, §15]. Auch die Voraussetzungen an $\partial\Omega$ lassen sich noch abschwächen. S. hierzu [F. An. 3, §15]. $d\Omega$ ist folgendermaßen erklärt: $\partial\Omega$ ist eine kompakte $(u-1)$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Sei $\varphi : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ ($\widetilde{U}$ offen in $\mathbb{R}^{\ltimes - \nVdash}$, $\widetilde{V}$ offen in $\partial\Omega$) eine Karte. Sei g die zugehörige Gramsche Determinante, also (s [F., An. 3, §14)

$$g(t) = \sum_{1 \le i < \ldots < i_{n-1} \le n} \left(\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{n-1}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}(t) \right)^2, \; t \in \widetilde{U}$$

wobei $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ die Variablen in $\widetilde{U}$ bezeichnet, $\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{n-1}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}$ aus den Zeilen $i_1, \ldots, i_{n-1}$ der Funktionalmatrix $\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{n-1}})}{\partial(t_1, \ldots, t_{n-1})}$ besteht. $d\Omega$ ist dann die Differentialform $\sqrt{g(t)}dt_1 \ldots dt_{n-1}$.

Wir wollen im folgenden annehmen, daß in Definition III.1.4 gilt $\Psi(U) = K_1(0)$, $\Psi(\overline{U}) = \overline{K_1(0)}$, $\Psi(\Omega \cap U) = \{y | |y| < 1, yn < 0\}$, $\Psi(\partial\Omega \cap U) = \{y | |y| < 1, yn = 0\}$. Dabei ist $\Psi(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x_1, \ldots, x_n)) = (y_1, \ldots, y_n)$. Ψ ist dann ein Homöomophismus von U bzw. $\overline{U}$ auf $K_1(0)$ bzw. $\overline{K}_1(0)$, $\det \frac{\partial(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$. ist in $\overline{U}$ positiv oder negativ, Ψ^{-1} existiert in $\overline{K_1(0)}$ und ist stetig differenzierbar m-Mal stetig differenzierbar, wenn ψ m-Mal stetig differenzierbar ist), sofern nur U hinreichend klein ist. Ohne Einschränkung sei $\det \frac{\partial(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \ge \lambda_0 > 0$ in $\overline{U}$.

Satz III.1.6: *Sei Ω eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^m für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $l < m$. Dann ist die Einbettung*

$$I_{ml} : (H^m(\Omega))^N \to (H^l(\Omega))^N, \; I_{m,l}u = u, \; u \in (H^m(\Omega))^N.$$

kompakt.

Beweis: Seien $U_1, \dots, U_q$ endlich viele Umgebungen von Randpunkten $a_1, \dots, a_q$ wie eben beschrieben mit

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{q} U_j = U.$$

Sei $\Omega - U \neq \phi$ (sonst ist der Beweis einfacher). Sei $\Omega - U \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset \Omega$, U_0 offen. Dann bilden die offenen Mengen $U_0, U_1, \dots, U_q$ eine Überdeckung von $\overline{\Omega}$. Seien $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q$ eine Teilung der 1, die der Überdeckung $U_0, U_1 \dots, U_q$ untergeordnet ist. Wie in Zusammenhang mit Definition III.1.1 bemerkt, können wir $supp\varphi_j \subset U_j$ annehmen. Wir zeigen den Satz für $m = 1, l = 0$. Sei $u \in H^1(\Omega)$. Dann ist in Ω

$$u = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j u,$$

$$||\varphi_j u||_1^2 = \int_\Omega |\varphi_j u|^2 dx + \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} u + \varphi_j \frac{\partial n}{\partial x_k}|^2 dx$$

nach Problem III.1.2. Cauchy-Schwarz liefert sofort $||\varphi_j u||_1^2 \leq c||u||_1^2$. Wenn (u_ν) eine beschränkte Folge in $H^1(\Omega)$ ist, so ist $(\varphi_j u_\nu)$ eine beschränkte Folge in $H^1(U_j \cap \Omega)$. Nehmen wir an, wir können aus jeder Folge $(\varphi_j u_\nu)$ eine Teilfolge $\varphi_j u_{\nu_k})$ auswählen, die in $(L^2(U_j \cap \Omega))^N$ konvergiert. Die Teilfolge hängt zunächst von j ab, doch kann man dann leicht erreichen, daß für jedes j dieselbe Teilfolge (u_{ν_k}) von (u_ν) die Eigenschaft besitzt, daß $(\varphi_j u_{\nu_k})$ in $(L^2(U_j \cap \Omega))^N$ konvergiert. Dann konvergiert wegen

$$u_{\nu_k} = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j u_{\nu_k}$$

die Folge (u_{ν_k}) in $(L^2(\Omega))^N$. Für $j = 0$ ist $\varphi_0 u_\nu \in (\overset{\circ}{H}{}^1(U_0))^N$, so daß es nach Satz III.1.4 eine in $(L^2(U_0))^N$ konvergente Teilfolge gibt. Für $1 \leq j \leq q$ verfahren wir wie folgt: Sei $u \in H^1(Uj \cap \Omega)$, sei

$$\widetilde{u}(y) = u(\Psi^{-1}(y)),\ y \in \Psi(U_j \cap \Omega).$$

Man überlegt sich leich, daß fast überall in $U_j \cap \Omega$

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_j}(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}(\Psi^{-1}(y)) \frac{\partial(\Psi^{-1}(y))k}{\partial yj},\ 1 \leq j \leq n,$$

gilt, wobei $\widetilde{u} \in (H^1(K_1^-(0)))^N$ liegt $(K_1^\pm(0) = \{y||y| < 1,\ y_n \overset{>}{<} 0\})$. Insbesondere ist

$$||\widetilde{u}||_{(H^1(K_1^-(0)))} \leq c||u||_{(H^1(U_j\cap\Omega))^N}.$$

Sei $\widetilde{\widetilde{u}}\,(y) = \varphi_j(\Psi^{-1}(y))\widetilde{u}(y)$, $y \in K_1^-$. Wir setzen

$$\widetilde{\widetilde{u}}^*\ (y) = \left[\begin{array}{l} \widetilde{\widetilde{u}}\,(y),\ y_n \leq 0, \\ \\ \widetilde{\widetilde{u}}\,(y_1,\ldots,y_{n-1},-y_n),\ y_n > 0. \end{array}\right.$$

Es gilt $\widetilde{\widetilde{u}}^* \in (H^1(K^-(0)))^N$, $\widetilde{\widetilde{u}}^* \in (H^1(K^+(0)))^N$, wobei wir die entsprechenden Restriktionen von $\widetilde{\widetilde{u}}^*$ meinen. $\widetilde{\widetilde{u}}$ hat kompakten Träger in $K_1(0)$. Für $\widetilde{\widetilde{u}}^*$ eingeschränkt auf $K^-(0)$ können wir, wie gleich gezeigt wird, eine Folge (g_r) finden.

$$g_r \in (C^1(K^-(0)))^N \cap (H^1(K^-(0)))^N \cap (C^0(\overline{K^-(0)}))^N,$$

$$supp\, g_r \subset K^-(0) \cap \{y||y| \leq 1-\widetilde{\varepsilon}\} \text{ für ein } \widetilde{\varepsilon} > 0 \text{ und alle } r \in \mathbb{N},$$

$$g_r \to \widetilde{\widetilde{u}}^*\ \text{ in } (H^1(K^-(0)))^N,\ r \to \infty.$$

Wir setzen g_r ebenso wie $\widetilde{\widetilde{u}}^*$ auf $K^+(0)$ fort. Dann ist $supp\, g_r \subset K_{1-\widetilde{\varepsilon}}(0)$, $r \in \mathbb{N}$, $g_r \to \widetilde{\widetilde{u}}^*$ in $(L^2(K_1(0))^N$, $r \to \infty$. Wir haben also auch $I_{1/r}g_r \to \widetilde{\widetilde{u}}^*$ in $(L^2(K_1(0)))^N$. Nun ist $(0 < \rho \leq \frac{1}{2})$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} I_{1/r}g_r = r^n \int_{\substack{K_1^-(0),\\ z_n\leq -\rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(r(y-z))g_r(z)dz + r^n \int_{\substack{K_1^+(0),\\ z_n\geq \rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(r(y-z))g_r(z)dz +$$
$$+ r^n \int_{\substack{K_1(0),\\ |z_n|\leq \rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(r(y-z))g_r(z)dz,\ 1 \leq k \leq n.$$

Der Satz von Gauß liefert

$$\int_{\substack{K_1^-(0)\\ z_n\leq -\rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(r(y-z))g_r(z)dz = \int_{\substack{K_1^-(0)\\ z_n\leq -\rho}} \varphi(r(y-z))\frac{\partial g_r}{\partial z_k}(z)dz +$$

$$+ \int_{\substack{K_1^-(0),\\ z_n=-\rho}} \varphi(r(y-(z_1,\ldots,z_{n-1},-\rho))(+1)g_r((z_1,\ldots,z_{n-1},-\rho))dz_1\ldots dz_{n-1},$$

$$\int_{\substack{K_1^+(0),\\ z_n\geq \rho}} \frac{\partial}{\partial y_k}\varphi(r(y-z))g_r(z)dz = \int_{\substack{K_1^+(0),\\ z_n\geq \rho}} \varphi(r(y-z))\frac{\partial}{\partial z_k}g_r(z)dz$$
$$+ \int_{\substack{K_1^+(0)\\ z_n=\rho}} \varphi(r(y-(z_1,\ldots,z_{n-1},\rho))(-1)g_r((z_1,\ldots,z_{n-1},\rho))dz_1\ldots dz_{n-1}.$$

Auf Grund der Konstruktion von g_r heben sich für $\rho \to 0$ die beiden Randintegrale rechts bei Addition der Volumenintegrale links in den beiden letzten Gleichungen weg. Dies liefert nach Grenzübergang $\rho \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial y_k} I_{1/r} g_r(y) = r^n \int_{K_1(0)} \varphi(r(y-z)) \frac{\partial}{\partial z_k} g_r(z) dz.$$

Setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \stackrel{\approx}{u}^* (y) = \left[\begin{array}{ll} \frac{\partial \stackrel{\approx}{u}}{\partial y_k}(y), & y_n < 0, \\ \frac{\partial \stackrel{\approx}{u}}{\partial y_k}(y), & y_n > 0,\ 1 \le k \le n-1. \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial}{\partial y_n} \stackrel{\approx}{u}^* (y) = \frac{\partial \stackrel{\approx}{u}}{\partial y_n}(y),\ y_n < 0,\ \frac{\partial}{\partial y_n} \stackrel{\approx}{u}^* (y) = -\frac{\partial \stackrel{\approx}{u}}{\partial y_n}(y_1, \ldots, y_{n-1}, -y_n),\ y_n > 0,$$

so folgt

$$\frac{\partial}{\partial y_k} I_{1/r} g_r \to \frac{\partial}{\partial y_k} \stackrel{\approx}{u}^*,\ r \to \infty,\ \text{in } (L^2(K_1(0))^N.$$

Da für hinreichend großes r die Funktionen $I_{1/r} g_r$ in $C_0^\infty(K_1(0))$ liegen, folgt: $\stackrel{\approx}{u}^* \in (\stackrel{\circ}{H}{}^1 (K_1(0)))^N$. Gleichzeitig haben wir gezeigt, daß die eben eingeführten Ausdrücke $\partial \stackrel{\approx}{u}^* / \partial y_k$ die starken Ableitungen von $\stackrel{\approx}{u}^*$ sind. Daher ist

$$\begin{aligned} || \stackrel{\approx}{u}^* ||_{H^1(K_1(0)))^N} &\le 2 || \stackrel{\approx}{u} ||_{(H^1(K_1^-(0)))^N}, \\ &\le c ||u||_{(H^1(U_j \cap \Omega))^N}. \end{aligned}$$

Nach Satz III.1.4 enthält $\left(\stackrel{\approx}{u}_v^*\right)$ eine Teilfolge $\left(\stackrel{\approx}{u}_{\nu_i}^*\right)$, die in $(L^2(K_1(0)))^N$ konvergiert, wobei

$$\begin{aligned} \stackrel{\approx}{u}_\nu (y) &= \varphi_j(\Psi^{-1}(y)) \widetilde{u}_\nu(y) \\ \widetilde{u}_\nu(y) &= u_\nu(\Psi^{-1}(y)) \end{aligned}$$

ist. Daher konvergiert $\varphi_j u_{\nu_i}$ in $(L^2(U_j \cap \Omega))^N$. Der noch fehlende Beweisschritt bezüglich der g_r wird im folgenden Hilfssatz nachgetragen. $\square$

Hilfssatz III.1.2: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit zwei disjunkten Mengen Γ_1, Γ_2. Sei Γ_2 eine offene beschränkte Teilmenge der Hyperebene $x_n = D$. Sei $u \in (H^m(\Omega))^N$. Dann existiert für jede beschränkte offene Menge A des $\mathbb{R}^n$ mit*

$$
\begin{aligned}
&A \subset \Omega, \\
&\overline{A} \subset \Omega \cup \Gamma_2
\end{aligned}
$$

eine Folge (u_l) *mit* $u_l \in (C^m(\overline{A}))^N$, $||u - u_l||_{(H^m(A))^N} \to 0,\ l \to \infty.$

Beweis: Der interessante Teil der Aussage des Hilfssatzes liegt in der Feststellung, daß man mit Funktionen $u_l \in (C^m(\overline{A}))^N$ approximieren kann (statt $(C^m(A))^N \cap (H^m(A))^N$. Sei B offen, beschränkt und

$$
\begin{aligned}
&A \subset B \subset \Omega, \\
&\partial B \subset \Omega \cup \Gamma_2, \\
&\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2, \\
&\partial B_1 \cap \partial B_2 = \emptyset, \\
&\partial B_2 \text{ offen in } x_n = 0, \\
&B \subset \{x_n < 0\}.
\end{aligned}
$$

Wir können annehmen, daß auch $\partial A = \partial A_1 \cup \partial A_2$ ist mit $\partial A_1 \cap \partial A_2 = \emptyset$, ∂A_2 offen in $x_n = 0$, $\overline{\partial A_2} \subset \partial B_2$, $\overline{\partial A_1} \cap \overline{\partial B_1} = \emptyset$. Wir setzen

$$
(I'_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \rho(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}) u(y) dy,
$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $x_\varepsilon = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n - 2\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0/8$, $\varepsilon_0 = dist(\partial A_1, \partial B_1)$. Wie beim Beweis von Satz III.1.2 zeigt man, daß

$$
||I'_\varepsilon u - u||_{(L^2(A))^N} \to 0,\ \varepsilon \to 0
$$

Sei $x \in A$ fest. Falls ε hinreichend klein ist, ist $\rho(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}) \in C_0^\infty(B)$. Nach Problem III.1.1 ist

$$
(D^\alpha I'_\varepsilon u)(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_\Omega \rho(\frac{x_\varepsilon - y}{\varepsilon}) D^\alpha u(y) dy,\ |\alpha| \leq m.
$$

Für jedes $x \in A$ können wir ein und dasselbe ε wählen. Setzen wir wie oben an

$$
0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0/8,\ \varepsilon_0 = dist(\partial A_1, \partial B_1),
$$

so erhalten wir

$$
||D^\alpha I'_\varepsilon u - D^\alpha u||_{(L^2(A))^N} \leq ||I'_\varepsilon D^\alpha u - D^\alpha u||_{L^2(B))^N},\ |\alpha| \leq m,
$$

also

$$D^\alpha I'_\varepsilon u \to D^\alpha u \text{ in } (L^2(A))^N,\ \varepsilon \to 0.$$

Wir können also $u_l = I'_{1/l}u$, $l \in \mathbb{N}$, setzen. $\square$

Hilfssatz III.1.3: *Sei Ω eine offene Punktmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $\overline{\Omega}$ kompakt. Seien $U_1, \dots, U_q$ offen mit*

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{q} U_i = U$$

Sei U_0 offen, $\Omega \supset \overline{U}_0 \supset U_0 \supset \Omega - U$. Dann ist

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{q} U_i.$$

In dieser Situation gilt: Sei $u : \Omega \to \mathbb{C}^N$ meßbar. Wenn $u \in (H^m(U_i \cap \Omega))^N$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und für alle $i = 0, \dots, q$, dann ist $u \in (H^m(\Omega))^N$.

Beweis: Wir wählen eine Teilung der 1, etwa $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q$, die der Überdeckung $U_0, U_1, \dots, U_q$ untergeordnet ist. Sei

$$supp\varphi_i \subset U_{j(i)},\ i = 0, 1, \dots, q.$$

Da $u \in (H^m(U_i \cap \Omega))^N$ ist, gibt es eine Folge $(u_{i,l})$ mit

$$u_{i,l} \in (C^m(U_i \cap \Omega))^N \cap (H^m(U_i \cap \Omega))^N$$

$$||u_{i,l} - u||_{(H^m(U_i \cap \Omega))^N} \to 0,\ l \to \infty$$

Sei

$$u_l = \sum_{i=0}^{q} \varphi_i u_{i,l}.$$

Dann ist

$$D^\alpha(u_l - u_k) = \sum_{i=0}^{q} D^\alpha(\varphi_i(u_{i,l} - u_{i,k})),\ 0 \le |\alpha| \le m.$$

Zunächst folgt $||u_l - u||_{(L^2(\Omega))^N} \to 0,\ l \to \infty$, und dann mit Problem III.1.2, daß

$$||u_l - u_k||_{(H^m(\Omega))^N} \le c \cdot \sum_{i=0}^{q} \sum_{|\alpha| \le m} ||D^\alpha(u_{i,l} - u_{i,k})||_{(L^2(U_i\Omega))^N} \to 0,\ l, k \to \infty.$$

Demnach ist $u \in (H^m(\Omega))^N$. $\square$

Problem III.1.3: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\overline{\Omega}$ kompakt. Sei $u \in (H^m(\Omega))^N$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Wenn $\partial\Omega$ von der Klasse C^m ist, so beweise man: Es gibt eine Folge (u_l) mit

$$u_l \in (C^m(\overline{\Omega}))^N,$$
$$||u_l - u||_{(H^m(\Omega))^N} \to 0, \; l \to \infty.$$

Anleitung: Man verwende Hilfssatz III.1.3, sodann die Beweistechnik aus dem Beweis des Satzes III.1.6 unter Heranziehung des Hilfssatzes III.1.2.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $u \in (L^2_{loc}(\Omega))^N$. Für einen Multiindex α des $\mathbb{R}^n$ sagen wir, daß u die schwache Ableitung $D^\alpha u = v \in (L^2_{loc}(\Omega))^N$ hat, wenn

$$\int_\Omega \langle u, D^\alpha \varphi \rangle dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \langle v, \varphi \rangle dx, \; \varphi \in (C_0^\infty(\Omega))^N,$$

ist. Man zeigt sofort: Die schwache Ableitung $D^\alpha u$ ist eindeutig bestimmt, wenn u die schwache Ableitung $D^\alpha u$, $D^\alpha u$ die schwache Ableitung $D^\beta u$ hat, so hat u die schwache Ableitung $D^{\beta+\alpha} u = D^\beta(D^\alpha u)$. $D^\alpha u$ heißt auch Distributionsableitung der Ordnung α von u in Ω.

Definition III.1.5: *Sei $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $(W^j(\Omega))^N$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller $u \in (L^2(\Omega))^N$ mit folgender Eigenschaft: u hat eine schwache Ableitung $D^\alpha u \in (L^2(\Omega))^N$ für alle Multiindizes α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leq j$. Wir setzen*

$$(u, v)_j^\Omega = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \int_\Omega \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle dx,$$
$$||u||_j^\Omega = [\sum_{0 \leq |\alpha| \leq j} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx]^{1/2},$$

$u, v \in (W^j(\Omega))^N$.

Es ist leicht zu sehen, daß mit dieser Definition eines Skalarprodukts und einer Norm der Raum $(W^j(\Omega))^N$ zu einem Hilbertraum wird.

Problem III.1.4: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige $(H^j(\Omega))^N \subset (W^j(\Omega))^N$.

Wir werden später beweisen, daß $H^j(\mathbb{R}^n) = W^j(\mathbb{R}^n)$ und damit $(H^j(\mathbb{R}^n))^N =$

$(W^j(\mathbb{R}^n))^N$ ist. Hieraus kann man folgern: $(H^j(\Omega))^N = (W^j(\Omega))^N$, jedenfalls, wenn $\partial\Omega$ von der Klasse C^j ist und Ω beschränkt ist, doch gilt die letzte Gleichheit auch allgemein.

§2. Der Spur-Operator. Die Formeln von Gauß-Green. Sobolev-Lemma und Ehrling-Lemma

Sei Ω eine offene Punktmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $\overline{\Omega}$ kompakt, sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^m. Jedem $u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N$ ordnen wir seine Randwerte τu auf $\partial\Omega$ zu, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$||\tau u||^2_{m-1,\partial\Omega} = \sum_{|\alpha|=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} |D^\alpha u|^2 d\Omega.$$

Hinsichtlich der Abbildung τ zeigen wir nun

Hilfssatz III.2.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^m für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N$ die Abschätzung*

$$||\tau u||^2_{m-1,\partial\Omega} \le c||u||^2_m.$$

Beweis: Wir gehen von der offenen Überdeckung $U_0, U_1, \dots, U_q$ von $\overline{\Omega}$ aus, die wir im Beweis des Satzes III.1.6 eingeführt hatten, mit einer zugehörigen Teilung der 1, nämlich $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q$, wie sie ebenfalls im Beweis des Satzes eingeführt worden war. Ψ ist der Homöomorphismus, der ebenfalls im Beweis des Satzes III.1.6 benutzt worden war. Statt der neuen Variablen $y_1, \dots, y_{n-1}, y_n$ schreiben wir $y_1, \dots, y_{n-1}, t$. Sei $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$,

$$\widetilde{u}(y,t) = \varphi_j(\Psi^{-1}(y,t))u(\Psi^{-1}(y,t))$$

für ein j, $1 \le j \le q$. Dann ist $\widetilde{u}(y,t) = 0$, $t < 0$, $|y|^2 \ge 1$. Für $t < 0$ ist

$$\widetilde{u}(y,0) = \widetilde{u}(y,t) + \int_t^0 \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma}(y,\sigma) d\sigma.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\int_{|y|\le 1} |\widetilde{u}(y,0)|^2 dy &\le 2\int_{|y|\le 1} |\widetilde{u}(y,t)|^2 dy + 2\int_{-1}^0 \int_{|y|\le 1} |\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma}(y,\sigma)|^2 d\sigma dy, \\
\int_{|y|\le 1} |\widetilde{u}(y,0)|^2 dy &\le 2\int_{-1}^0 \int_{|y|\le 1} |\widetilde{u}(y,\sigma)|^2 d\sigma + 2\int_{-1}^0 \int_{|y|\le 1} |\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \sigma}(y,\sigma)|^2 d\sigma dy,
\end{aligned}$$

wobei wir die vorletzte Ungleichung einfach bezüglich σ von -1 bis 0 integriert haben. Transformationsformel und Invarianz des Oberflächenelements $d\Omega$, d.h. der Form $d\Omega$ gegen Parameterftransformationen, liefern

$$\int_{U_j \cap \partial\Omega} |\varphi_j u|^2 d\Omega \le c||u||_{(H^1(U_j \cap \Omega))^N}.$$

Summation über j zeigt, daß die Behauptung des Hilfssatzes für $m = 1$ richtig ist. Für $m \geq 2$ kann man analog verfahren. $\square$

Nun folgt

Satz III.2.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{\Omega}$ kompakt, $\partial\Omega$ von der Klasse C^m für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei s_{m-1} die Anzahl der Multiindizes α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leq m-1$. Seien wie üblich $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$. Jedem $u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N$ wird das s_{m-1}-Tupel von auf $\partial\Omega$ definierten vektorwertigen Funktionen mit N Komponenten*

$$(u|\partial\Omega, D^{e_1}u|\partial\Omega, \ldots, D^{(m-1)e_n}u|\partial\Omega)$$

zugeordnet. Die so erklärte lineare Abbildung von $(C^m(\overline{\Omega}))^N$ in $(C^0(\partial\Omega))^{s_{m-1}\cdot N}$ wird mit τ bezeichnet. τ genügt der Abschätzung

$$||\tau u||_{L^2(\partial\Omega))^{s_{m-1}\cdot N}} \leq c||u||_m, \ u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N$$

mit einer von u unabhängigen Konstante c. τ hat eine Fortsetzung zu einem ebenfalls mit τ bezeichneten Operator

$$\tau \in \mathcal{L}((H^m(\Omega))^N, (L^2(\partial\Omega))^{s_{m-1}\cdot N})$$

durch Abschließung. Dieser Operator heißt der Spur-Operator auf $(H^m(\Omega))^N$.

Beweis: Nach Problem III.1.3 ist $(C^m(\overline{\Omega}))^N$ dicht in $(H^m(\Omega))^N$. $\square$

Sei $u \in (H^m(\Omega))^N$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei β ein Multiindex des $\mathbb{R}^n$ mit $0 \leq |\beta| \leq m-1$. Die β-te Komponente φ_β im s_{m-1}-Tubel τu von Funktionen aus $(L^2(\partial\Omega))^N$ bezeichnen wir als die Randwerte $D^\beta u|\partial\Omega$ oder einfach $D^\beta u$ von $D^\beta u$. Mit dieser Bezeichnungsweise gilt:

Satz III.2.2: *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes III.2.1. Seien $u, v \in (H^m(\Omega))^N$. Dann ist*

$$\int_\Omega \langle u, D^\beta v\rangle dx - (-1)^{|\beta|}\int_\Omega \langle D^\beta u, v\rangle dx = \int_{\partial\Omega} M_\beta(u,v) d\Omega, \ 1 \leq |\beta| \leq m.$$

Dabei ist

$$M_\beta(u,v)(\xi) = \sum_{\substack{0 \leq |\gamma| \leq |\beta|-1,\\ 0 \leq |\delta| \leq |\beta|-1,\\ |\gamma|+|\delta| \leq |\beta|-1,\\ j=1,\ldots,n}} c^{(\beta)}_{\gamma\delta,j}(\xi)\langle D^\gamma u(\xi), D^\delta v(\xi)\rangle$$

mit stetigen Funktionen $c^{(\beta)}_{\gamma,\delta,j} : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ von der folgenden Gestalt

$$c^{(\beta)}_{\gamma,\delta,j}(\xi) = c^{(\beta)}_{\gamma\delta} \cdot \nu_j(\xi),\ \xi \in \partial\Omega,$$

$c^{(\beta)}_{\gamma\delta}$ *sind Konstanten,* $\nu_j(\xi,\ 1 \leq j \leq n,$ *sind die Komponenten der äußeren Normalen an* $\partial\Omega$ *in* ξ*.* $D^\gamma u, D^\delta v$ *sind die Randwerte von* $D^\gamma u, D^\delta v$ *wie eben eingeführt.*

Beweis: Es reicht aus, den Fall $N = 1$ zu betrachten. Zur Vereinfachung bezeichnen wir irgendeine Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit D^k, falls $k = 1$ ist, schreiben wir D. Seien zunächst $u, v \in C^m(\overline{\Omega})$. Dann haben wir $(1 \leq k \leq m)$:

$$\begin{aligned} vD^k u &= D(vD^{k-1}u) - Dv \cdot D^{k-1}u, \\ &= D(vD^{k-1}u) - D(Dv \cdot D^{k-2}u) + D^2 v D^{k-2}u, \\ &\ \ \vdots \\ &= D[vD^{k-1}u - Dv \cdot D^{k-2}u + \ldots + (-1)^{k-1}D^{k-2}v \cdot Du] \\ &\quad +(-1)^k D^k v \cdot u \text{ in } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Anwendung des Satzes von Gauß (Satz III.1.5) liefert die gewünschte Formel für $M_\beta(u, v)$ im Fall $u, v \in (C^m(\overline{\Omega}))^N$. Für $u, v \in (H^m(\Omega))^N$ gehen wir folgendermaßen vor: Wir wählen zwei Folgen

$$\begin{aligned} &(u_l), (v_l) \text{ mit } u_l, v_l \in (C^m(\overline{\Omega}))^N,\ l \in \mathbb{N}, \\ &u_l \to u,\ l \to \infty,\ \text{in } (H^m(\Omega))^N, \\ &v_l \to v,\ l \to \infty,\ \text{in } (H^m(\Omega))^N. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle u_l, D^\beta v_l \rangle dx &\to \int_\Omega \langle u, D^\beta v \rangle dx,\ l \to \infty, \\ \int_\Omega \langle D^\beta u_l, v_l \rangle dx &\to \int_\Omega \langle D^\beta u, v \rangle dx,\ l \to \infty \\ \int_{\partial\Omega} M_\beta(u_l, v_l) d\Omega &\to \int_{\partial\Omega} M_\beta(u, v) d\Omega,\ l \to \infty, \ \text{ nach Satz III.2.1.} \end{aligned}$$

Damit ist Satz III.2.2 bewiesen. □

Die folgenden Aussagen sind Konsequenzen aus Satz III.2.1:
Sei $u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. Dann ist $\tau u = 0$. Ist $u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N \cap (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$, so ist $\tau u = 0$ und $D^\beta u = 0$ auf $\partial\Omega$ im klassischen Sinn $(0 \leq |\beta| \leq m)$. Für diese beiden Aussagen muß natürlich Ω den Voraussetzungen des Satzes

III.2.1 genügen.

Definition III.2.1: *Sei* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, sei* $S^{n-1} = \{\xi | \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1\}$*. Sei* $\Gamma \subset S^{n-1}$ *eine Menge mit positivem Flächeninhalt, d.h.* $\int_{S^{n-1}} \chi_\Gamma d\Omega > 0$*, sei* $R > 0$*. Die Menge*

$$C_{x_0}(\Gamma, R) = \{x | x \in \mathbb{R}^n, \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \in \Gamma,\ 0 < |x - x_0| \leq R\},$$

heißt Kegel mit Spitze x_0 *und Basis* Γ*. VOn einer offenen Punktmenge* Ω *des* $\mathbb{R}^n$ *sagt man, sie erfüllt die Kegelbedingung, wenn es zu jedem* $x_0 \in \Omega$ *einen Kegel* $C_{x_0}(\Gamma_{x_0}, R)$ *mit Spitze* x_0 *und Basis* Γ_{x_0} *gibt derart, daß*

$C_{x_0}(\Gamma_{x_0}, R) \subset \Omega$,
R unabhängig von x_0 gewählt werden kann,
Γ_{x_0} für jedes $x_0 \in \Omega$ kongruent zu einer festen Menge
$\Gamma \subset S^{n-1}$mit positivem Flächeninhalt ist.

Ohne Beweis bemerken wir, daß jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für die $\overline{\Omega}$ kompakt ist und $\partial\Omega$ von der Klasse C^m ist für ein $m \geq 1$, der Kegelbedingung genügt. Es gilt:

Satz III.2.3 (1. Sobolev Lemma): *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.* Ω *genüge der Kegelbedingung. Zu* $\varepsilon > 0$ *gebe es ein* $\delta = \gamma(\varepsilon)$ *derart, daß meas* $(C_{x_0}(\Gamma_{x_0}, R) - C_{x_1}(\Gamma_{x-1}, R) \cap (C_{x_0}(\Gamma_{x_0}, R)) < \varepsilon$ *wird, wenn nur* $|x_0 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ *ausfällt. Sei* $m > n/2$ *für ein* $m \in \mathbb{N}$*. Dann ist*

$$(H^m(\Omega))^N \subset (C^0(\overline{\Omega}))^N \text{ mit einer stetigen Einbettung, d.h.}$$

$$||u||_{(C^0(\overline{\Omega}))^N} \leq c||u||_{(H^m(\Omega))^N}.$$

Beweis: Sei $x_0 \in \Omega$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & |x - x_0| \leq R/2, \\ 0, & |x - x_0| \geq R, \end{array} \right.$$

wobei R die positive Zahl aus der Kegelbedingung ist. Einführung von Polarkoordinaten um x_0, die wir mit $\varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ bezeichnen, liefert für $u \in (C^m(\Omega))^N \cap (H^m(\Omega))^N$ die Formel

$$u(x_0) = -\int_0^R \frac{\partial}{\partial\rho}\varphi u(\varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}) d\rho = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^R \rho^{m-1} \frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m} d\rho,$$

wie man durch partielle Integration leicht feststellt. Die letzte Gleichung wird über Γ_{x_0} integriert. Dies ergibt mit meas $\Gamma =$ Flächeninhalt von Γ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
|u(x_0)| &= \frac{1}{meas\Gamma}\frac{1}{(m-1)!}|\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} \rho^{m-n}\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m}dx| \\
&\leq \frac{1}{meas\Gamma}\frac{1}{(m-1)!}(\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} |\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m}|^2 dx)^{1/2} \cdot (\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} \rho^{2(m-n)}dx)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Das letzte Integral ist endlich, weil $2m > n$, also $2(m-n) > -n$, ist. Damit folgt

$$|n(x)| \leq c||u||_m,\ x \in \Omega.$$

Nun zeigt die obige Rechnung außerdem, daß für $x_0, x_1 \in \Omega$ gilt

$$
\begin{aligned}
|u(x_0)-u(x_1)| \leq \frac{1}{meas\Gamma}\frac{1}{(m-1)!}| &\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)-(C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R))} \rho^{m-n}\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m}dx \\
&- \int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)-(C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)\cap C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R))} \rho'^{m-n}\frac{\partial^m \varphi' u}{\partial \rho'^m}dx+ \\
&+ \int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} (\rho^{m-n}\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m} - \rho'^{m-n}\frac{\partial^m \varphi' u}{\partial \rho'^m})dx|,
\end{aligned}
$$

wobei $\rho', \vartheta'_1, \ldots, \vartheta'_{n-1}$ Polarkoordinaten um x_1 sind. Wir können annehmen, daß φ, φ' Funktionen von ρ bzw. ρ' sind und schreiben $\varphi(\rho) = \varphi(x)$, $\varphi'(\rho') = \varphi'(x')$, wobei φ' analog zu φ erklärt ist, nur ersetzen wir $|x - x_0|$ durch $|x - x_1|$. Für $0 \leq l \leq m$ haben wir

$$\frac{\partial^l u}{\partial \rho^l}(x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l} D^\alpha u(x) P_\alpha(\sin\vartheta_1, \ldots, \sin\vartheta_{n-1}, \cos\vartheta_1, \ldots, \cos\vartheta_{n-1}),$$

$$\frac{\partial^l u}{\partial \rho'^l}(x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l} D^\alpha u(x) P_\alpha(\sin\vartheta'_1, \ldots, \sin\vartheta'_{n-1}, \cos\vartheta'_1, \ldots, \cos\vartheta'_{n-1}),$$

mit Polynomen P_α in $\sin\vartheta_1, \ldots, \cos\vartheta_{n-1}$ bzw. $\sin\vartheta'_1, \ldots, \cos\vartheta'_{n-1}$. Demnach ist

$$(\rho^{m-n}\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m} - \rho'^{m-n}\frac{\partial^m \varphi' u}{\partial \rho'^m}(x) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} D^\alpha u(x)\cdot$$

$$\cdot \sum_{l=0}^{m} (\rho^{m-n} \frac{\partial^l}{\partial \rho^l} \varphi P_{\alpha l}(\sin \vartheta_1, \ldots, \cos \vartheta_{n-1}) - \rho'^{m-n} \frac{\partial^l}{\partial \rho'^l} \varphi' \cdot P_{\alpha l}(\sin \vartheta'_1, \ldots, \cos \vartheta'_{n-1}))(x)$$

mit Polynom $P_{\alpha l}$ in $\sin \vartheta_1, \ldots, \cos \vartheta_{n-1}$ bzw. $\sin \vartheta'_1, \ldots, \cos \vartheta'_{n-1}$. Die letzte innere Summe wird mit $\Delta_\alpha(x_0, x_1, x)$ bezeichnet. Dann folgt

$$\int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} |\rho^{m-n} \frac{\partial^m \varphi n}{\partial \rho^m} - \rho'^{m-n} \frac{\partial^m \varphi' n}{\partial \rho'^m}| dx$$

$$\leq c(\int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} \sum_{|\alpha| \leq m} |\Delta_\alpha(x_0, x_1, x)|^2 dx)^{1/2} ||u||_m.$$

Das erste Integral ist für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ kleiner als ε^2, wenn $|x_0 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ ausfällt. Wie vorher erhält man

$$\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)-(C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} |\rho^{m-n} \frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho^m}| dx$$

$$\leq c(\int_{C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)-(C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)\cap C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)} \rho^{2(m-n)} dx)^{1/2} \cdot ||u||_m,$$

$$(\int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)-(C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)\cap C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)} |\rho'^{m-n} \frac{\partial^m \varphi' u}{\partial \rho'^m}|^2 dx$$

$$\leq c(\int_{C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)-(C_{x_0}(\Gamma_{x_0},R)\cap C_{x_1}(\Gamma_{x_1},R)} \rho'^{2(m-n)} dx)^{1/2} \cdot ||u||_m.$$

Die Integrale links werden ebenfalls kleiner als c^2, wenn $|x_0 - x_1| < \delta(\varepsilon)$ ausfällt. Somit ist jedes $u \in (H^m(\Omega))^N$, $m > \frac{n}{2}$, gleichmäßig stetig in Ω. Also hat n eine und nur eine stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega}$. □

Für das zweite Sobolev-Lemma benötigen wir einen Hilfssatz, der auf eine Ungleichung von Hardy und Littlewood zurückgeht.

Hilfssatz III.2.2: *Sei* $1 < q < +\infty$. *Sei* $\lambda \in (0, n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{n} - 1 > 0.$$

Sei $u \in L^q(\mathbb{R}^n$. *Dann ist mit* $r^{-\lambda} * u(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |y - x|^{-\lambda} u(y) dy$:

$$||r^{-\lambda} * u||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} \leq c(\lambda, n, q) ||u||_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis: Zum Beweis muß man von einer Ungleichung von Hardy und Littlewood ausgehen. Diese Ungleichung besagt, daß für $f \in L^q(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varepsilon-t|^{-\mu}f(s)g(t)dsdt \leq c(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^q ds)^{1/q}\cdot(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^p dt)^{1/p},$$

sofern $q > 1$, $p > 1$, $1/p + 1/q > 1$, $\mu = 2 - \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ist. Zum Beweis des Hilfssatzes ist es offenbar hinreichend zu zeigen, daß mit $q_1' = q_1/(q_1 - 1)$ gilt:

$$|(r^{-\lambda} * u, v)| \leq c||u||_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}||v||_{L^{q_1'}(\mathbb{R}^n)}$$

für alle $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach der Ungleichung von arithmetischen und gemetrischen Mittel ist

$$\prod_{j=1}^{n}|x_j|^{2/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^2,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

und weiter gilt dann

$$|x|^{-\lambda} \leq c\prod_{j=1}^{n}|xj|^{-\lambda/n},\ x \neq 0,$$

$$|(r^{-\lambda} * u, v)| \leq c\int_{(\mathbb{R}^n)^2}\prod_{j=1}^{n}|x_j - y_j|^{-\lambda/n}|u(x)||(v(y)|dxdy.$$

Wir setzen $\mu = \lambda/n$, $\varphi = q_1'$, $\frac{1}{q} = 2 - \frac{\lambda}{n} - \frac{1}{q_1'}$. Anwendung der Ungleichung von Hardy und Littlewood liefert

$$\begin{aligned}
|(r^{-\lambda} * u, v)| \ &\leq\ c\int_{(\mathbb{R}^{n-1})^2}\prod_{j=2}^{n}|x_j - y_j|^{-\lambda/n}\cdot(\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2,\ldots,x_n)|^q dx_1)^{1/q}\cdot \\
&\quad \cdot(\int_{-\infty}^{+\infty}|v(y_1,y_2,\ldots,y_n^)|^p dy_1)^{1/p}dy_2\ldots dy_n dx_2\ldots dx_n \\
&\leq\ c\int_{(\mathbb{R}^{n-2})^2}\prod_{j=3}^{n}|x_j - y_j|^{-\lambda/n}\cdot \\
&\quad \cdot(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x_1,x_2,\ldots,x_n)|^q dx_1dx_2)^{1/q}\cdot \\
&\quad \cdot(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|v(y_1,y_2,\ldots,y_n)|^p dy_1dy_2)^{1/p}dy_3\ldots dy_n\,dx_3\ldots dx_n.
\end{aligned}$$

Indem man dieses Verfahren wiederholt, erhält man nach insgesamt n Schritten die Aussage des Hilfssatzes, da gerade $1/q_1 = 1/q + \lambda/n - 1$ ist. $\square$

Satz II.2.4. (2. Sobolev-Lemma): *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen.* Ω *genüge der Kegelbedingung. Dann ist* $(H^m(\Omega))^N \subset (L^p(\Omega))^N$*, falls* $m \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} > \frac{m}{n}$, $p \geq 2$ *und*

$$\frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$$

ist. Es gilt dann

$$||u||_{(L^p(\Omega)|^N} \leq c||u||_m,\ u \in (H^m(\Omega))^N.$$

Ist darüber hinaus $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, *so haben wir die schärfere Abschätzung*

$$||u||_{(L^{p^*}(\Omega))^N} \leq c \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{(L^2(\Omega))^N} =: ||u||_m^*,$$

falls $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{m}{n}$.

Beweis: Der Beweis geht aus von der Formel

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^R \rho^{m-1} \frac{\partial^m \varphi^n}{\partial \rho^m} d\rho, \text{ also} \\ u(x) &= \frac{(-1)^m}{meas\Gamma \cdot (m-1)!} \int_{C_x(\Gamma_x,R)} \rho^{m-n} \frac{2^m \varphi u}{\partial \rho^m} dx' \end{aligned}$$

mit $\rho = |x - x'|$, $n \in (C^m(\Omega))^N \cap (H^m(\Omega))^N$, die im Beweis des Satzes III.2.3 verwendet wurde. Wegen

$$|\frac{\partial^m \varphi u}{\partial \rho}(x')| \leq c \cdot \sum_{|\alpha|=0}^{m} |D^\alpha u(x')|$$

Also ist, wenn $H^\alpha(x)$ die Fortsetzung von $|D^\alpha n(x)|$ auf $\mathbb{R}^n$ durch Nullsetzen bedeutet, $0 \leq |\alpha| \leq m$,

$$|n(x)| \leq (c(m,\Omega) \int_{\mathbb{R}^n} |x-x'|^{-(n-m)} \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} H_\alpha(x')dx',$$

$$H_0(x) = |H_0(x)| \leq c(m,\Omega) \int_{\mathbb{R}^n} |x-x'|^{-(n-m)} \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} H_\alpha(x')dx'$$

Hilfssatz III.2.2 liefert mit $q_1 = p^* = 2n/(n-2m)$, $q = 2$, $\lambda = n - m$ die Ungleichung

(III.2.1) $$||u||_{L^{p^*}(\Omega} \leq c||u||_m$$

und insbesondere $u \in L^{p^*}(\Omega)$. Da $(C^m(\Omega))^N \cap (H^m(\Omega))^N$ dicht in $(H^m(\Omega))^N$ liegt, folgt die erste Behauptung des Satzes für $p = p^*$. Ist $2 \leq p < p^*$, so verfährt man wie folgt: Sei $q = 2(p^* - p)/(p^* - 2)$. Anwendung der Hölderschen Ungleichung mit $q_1 = 2/(2-q)$, $q_2 = 2/q$ liefert mit

$$\begin{aligned}
(\int_\Omega |u|^p dx)^{1/p} &= (\int_\Omega |u|^{p-q}|u|^q dx)^{1/p} \\
&\leq (\int_\Omega |u|^{p^*} dx)^{1/p\cdot(1-q/2)}(\int_\Omega |u|^2 dx)^{1/p\cdot q/2} \\
&\leq c||u||_m^{p^*/p\cdot(1-q/2)}||u||_m^{q/p}.
\end{aligned}$$

Nun ist $p^*/p \cdot (1 - q/2) + q/p = p^*/p(1 - (p^* - p)/(p^* - 2)) + 2/p \cdot (p^* - p)/(p^* - 2) = p^*/p \cdot (p-2)/(p^* - 2) + (2/p) \cdot (p^* - p)/(p^* - 2) = 1$, so daß sich schließlich ergibt:

$$\begin{gathered}
||u||_{L^p(\Omega)} \leq c||u||_m, \text{ insbesondere} \\
u \in (L^p(\Omega))^N
\end{gathered}$$

Zum Beweis der letzten Aussage des Satzes gehen wir von $u \in (C_0^m(\Omega))^N$ aus. u wird druch Nullsetzen auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Dann ist die Fortsetzung, die auch mit u bezeichnet wird, aus $(C_0^m(\mathbb{R}^n))^N$. Wir haben dann die Formel

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{meas\, S^{n-1} \cdot (m-1)!} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^{m-n} \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} dx',$$

$\rho = |x - x'|$. Weil die Polarkoordinaten um x linear von ρ abhängen, ist

$$|\frac{\partial^m u}{\partial \rho^m}(x')| \leq c \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x')|, \ x' \in \mathbb{R}^n.$$

Anwendung des Hilfssatzes III.2.2 liefert die Abschätzung

$$||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha u||_{L^2(\Omega)} = c||u||_m^*.$$

□

Der Beweis des Satzes III.2.4 zeigt, daß die letzte Aussage für beliebige offene Mengen Ω gilt. Wir kommen nun zu den Ehrlingschen Lemmata.

Satz III.2.5 (1. Ehrlingsches Lemmata): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien* $0 < l < m, \quad l, m \in \mathbb{N}$. *Dann gilt für alle $u \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ die Ungleichung*

$$||u||_l^* \leq c||u||_m^{*\,l/m}||u||_0^{1-l/m}$$

Insbesondere ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$||u||_l^* \leq \varepsilon||u||_m^* + c\varepsilon^{-l/(m-l)}||u||_0.$$

Wir erinnern daran, daß

$$||u||_l^* = \sum_{|\alpha|=l} ||D^\alpha u||_0$$

gesetzt war.

Beweis des Satzes III.2.5: Sei Du die Matrix $(\frac{\partial u_i}{\partial x_k})_{\substack{1\leq i\leq N,\\ 1\leq k\leq n}}$, D^2u die Matrix $(\frac{\partial^2 n_i}{\partial x_k \partial x_j})_{\substack{1\leq i\leq N\\ 1\leq k,j\leq n}}$. Durch partielle Integration erhält man im Fall $l = 1, m = 2$

$$\begin{aligned} ||D^{e_k}u||_0^2 &= |\int_\Omega < D^{e_k}u, D^{e_k}\overline{u} > dx) \\ &= |\int_\Omega < D^{2e_k}u, \overline{u} > dx| \\ &\leq ||D^{2e_k}u||_0||u||_0,\ 1 \leq k \leq n, \end{aligned}$$

also

$$||u||_1^* \leq c||u||_2^{*1/2}||u||_0^{1/2} \tag{III.2.2}$$

Im Fall $l = 1, m = 3$ schließt man folgt: Aus (III.2.2) folgt

$$||u||_2^* \leq c||u||_3^{*1/2}||u||_1^{*1/2},$$

also nach (III.2.2)

$$\begin{aligned} ||u||_1^* &\leq c||u||_3^{*1/4}||u||_1^{*1/4}||u||_0^{1/2}, \\ ||u||_1^* &\leq c||u||_3^{*1/3}||u||_0^{2/3}. \end{aligned}$$

Fortführung dieser Methode liefert das gewünschte Ergebnis. Die zweite Ungleichung des Satzes ist eine Konsequenz der ersten und der Hölderschen Ungleichung $a^{1/p}b^{1/q} \leq \varepsilon a + \varepsilon^{-q/p}b$, $\varepsilon > 0$, $a, b \geq 0$, $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, für reelle Zahlen, die wir mit $a = ||u||_m^*$, $b = ||u||_0$, $1/p = l/m$, $1/q = 1-l/m$ anwenden. □

Zum Beweis des zweiten Ehrlingschen Lemmas ist es zweckmäßig, den Fortsetzungsoperator einzuführen.

Satz III.2.6: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ kompakt. Sei $m \in \mathbb{N}$, sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^m, sei $\partial\Omega \neq \emptyset$. Dann gibt es eine offene Menge Ω' mit*

$$\Omega' > \overline{\Omega}$$

und einen linearen Operator $T_m : (H^m(\Omega))^N \to (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega'))^N$ mit folgender Eigenschaft:

$$T_m u(x) = u(x),\ x \in \Omega,\ u \in (H^m(\Omega))^N$$

$$\frac{1}{c(m,\Omega)}||T_m u||_{(H^m(\Omega'))^N} \leq ||u||_{(H^m(\Omega))^N} \leq c(m,\Omega)||T_m u||_{(H^m(\Omega'))^N}.$$

Falls $0 \leq k < m$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist, so hat T_m eine Fortsetzung auf $(H^k(\Omega))^N$ mit folgenden Eigenschaften:

$$T_m : (H^k(\Omega))^N \to (\overset{\circ}{H}{}^k(\Omega'))^N$$

$$\frac{1}{c(k,m,\Omega)}||T_m u||_{(H^k(\Omega'))^N} \leq ||u||_{(H^m(\Omega))^N} \leq c(k,m,\Omega)||T_m u||_{(H^k(\Omega))^N}.$$

T_m heißt C^m- Fortsetzungsoperator.

Beweis: Sei

$$\partial\Omega \subset \overline{\overline{\Omega}} \subset \bigcup_{j=1}^{q} U_j$$

wobei $\overline{\Omega}$ eine beschränkte offene Menge ist, die U_j offene Umgebungen von Punkten $a_j \in \partial\Omega$ sind und wir die U_j so wie im Beweis von Satz III.1.6 gewählt haben. Sei $u \in (C^m(\overline{\Omega}))^N \cap (H^m(\Omega))^N$ Sei j fest,

$$\widetilde{u}(y) = u(\Psi^{-1}(y)),\ y \in \Psi(\overline{U_j \cap \Omega}) = \overline{K_1^-(0)}$$

(Vgl. Beweis von Satz III.1.6) Dann ist $\widetilde{u} \in C^m(\overline{K_1^-(0)})$. Wir setzen nun $\widetilde{u}$ durch Reflektion an $y_n = 0$ auf $\overline{K_1^+(0)}$ fort. Sei

$$\widetilde{u}(y_1,\ldots,y_{n-1},y_n) = \sum_{j=1}^{m+1} c_j \widetilde{u}(y_1,\ldots,y_{n-1},-\frac{y_n}{j}),\ y_n > 0,$$

wobei die c_j die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\sum_{j=1}^{m+1}(-\frac{1}{j})^{\widetilde{k}} cj = 1,\ 0 \leq \widetilde{k} \leq m.$$

Da die Vandermondesche Determinante $\det((-\frac{1}{j})^{\widetilde{k}})_{\substack{0\leq\widetilde{k}\leq m,\\ 1\leq j\leq m+1}}$ nicht verschwindet, sind $c_1,\ldots,c_{m+1}$ eindeutig bestimmt. Es ist leicht zu sehen, daß $\widetilde{u}\in(C^m(\overline{K_1(0)}))^N$

$$\frac{1}{c(m,\Omega)}||\widetilde{u}||_{(H^m(K_1(0)))^N}\leq||\widetilde{u}||_{(H^m(K_1^-(0)))^N}\leq c(m,\Omega)||\widetilde{u}||_{(H^m(K_1(0)))^N}$$

und

$$\frac{1}{c(k,m,\Omega)}||\widetilde{u}||_{(H^k(K_1(0)))^N}\leq||\widetilde{u}||_{(H^k(K_1^-(0)))^N}\leq c(k,m,\Omega)||\widetilde{u}||_{(H^k(K_1(0)))^N}$$

ist. Wir wählen eine Teilung der 1, d.h. Funktionen $\varphi_1,\ldots,\varphi_q$ mit $0\leq\varphi_i\leq 1$, $\varphi_i\in C_0^\infty(U_i)$, $1\leq i\leq q$, und

$$\sum_{i=1}^q\varphi_i(x)=1 \text{ in } \widetilde{\Omega},$$

und setzen

$$T_mu(x)=\sum_{i=1}^q\widetilde{u}(\Psi_i(x))\varphi_i(x),\ x\in\bigcup_{i=1}^qU_i\cap\complement\Omega,$$

$$T_mu(x)=u(x),\ x\in\overline{\Omega}.$$

Sei Ω für einen Augenblick beschränkt. Dann ist

$$T_mu:(\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}))^N\to(C_0^m(\Omega'))^N$$

mit

$$\Omega'=\Omega\cup\bigcup_{i=1}^qU_i$$

ein linearer Operator mit

$$\frac{1}{c(m,\Omega)}||T_mu||_{(H^m(\Omega'))^N}\leq||u||_{(H^m(\Omega))^N}\leq c(m,\Omega)||T_mu||_{(H^m(\Omega'))^N},$$

$$\frac{1}{c(k,m,\Omega)}||T_mu||_{(H^k(\Omega))^N}\leq||u||_{(H^k(\Omega))^N}\leq c(k,m,\Omega)||T_mu||_{(H^k(\Omega'))^N},$$

$$0\leq k\leq m,\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Da $(C^m(\overline{\Omega}))^N$ dicht in $(H^m(\Omega))^N$ ist gestattet T_m eine auch mit T_m bezeichnete Fortsetzung auf $(H^m(\Omega))^N$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Nun ist, wie man sich leicht entsprechend zum Beweis von Hilfssatz III.1.2 überlegt, auch $(C^m(\overline{\Omega}))^N$ dicht in $(H^k(\Omega))^N$, $0 \leq k < m$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Daher hat T_m auch eine, ebenfalls mit T_m bezeichnete, Fortsetzung auf $(H^k(\Omega))^N$ mit den gewünschten Eigenschaften. Falls Ω unbeschränkt ist, können wir grundsätzlich ebenso verfahren, wir haben nur zu zeigen, daß jedes Element $u \in (H^m(\Omega'))^N$ mit $u(x) = 0$, $x \in \stackrel{\approx}{\Omega}$, auf einer offenen Menge $\stackrel{\approx}{\Omega}$ mit

$$\partial\Omega' \subset \overline{\stackrel{\approx}{\Omega}} \subset \overline{\Omega'}$$

gilt: $u \in (\stackrel{\circ}{H}{}^m(\Omega'))^N$. Dazu wählen wir eine Folge (ζ_ν) mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\zeta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\\
&0 \leq \zeta_\nu \leq 1,\\
&\zeta_\nu \to 1 \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n,\ \nu \to \infty,\\
&D^\alpha \zeta_\nu \to 0 \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \nu \to \infty,\ 1 \leq |\alpha| \leq m.
\end{aligned}$$

Dann ist $\zeta_\nu u \in (\stackrel{\circ}{H}{}^m(\Omega'))^N$, $\nu \in \mathbb{N}$, wie man durch Bildung von $J_\varepsilon \zeta_\nu u$ leicht erkennt. Außerdem gilt $\zeta_\nu u \to u$ in $(H^m(\Omega'))^N$, $\nu \to \infty$, also $u \in (\stackrel{\circ}{H}{}^m(\Omega'))^N$.

Nach dieser Vorbereitung können wir das zweite Ehrlingsche Lemma beweisen, nämlich

Satz III.2.7 (2. Ehrlingsches Lemma): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\partial\Omega$ von der Klasse C^m für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $0 \leq l < m$, $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann gilt*

$$||u||_l^* \leq c||u||_m^{l/m}||u||_0^{1-l/m},\ u \in (H^m(\Omega))^N.$$

Insbesondere ist für jedes $\varepsilon > 0$

$$||u||_l^* \leq \varepsilon||u||_m + c\varepsilon^{-l/(m-l)}||u||_0$$

Beweis: Anwendung von Satz III.2.5 auf $T_m u$ zeigt

$$\begin{aligned}
||u||_l^* = ||u||^*_{(H^l(\Omega))^N} &\leq ||T_m u||^*_{(H^l(\Omega'))^N},\\
&\leq e||T_m u||^{*l/m}_{(H^m(\Omega'))^N}||T_m u||^{1-l/m}_{(L^2(\Omega'))^N},\\
&\leq c||u||_m^{l/m}||u||_0^{1-l/m},
\end{aligned}$$

womit die erste Ungleichung des Satzes bewiesen ist. Die zweite folgt wie im Beweis des Satzes III.2.5. $\square$

§3. Elliptische Systeme. Innere Regularität. Elliptische Systeme im $\mathbb{R}^n$

Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Mit $(H^m_{loc}(\Omega))^N$ bezeichnen wir den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller fast überall erklärten meßbaren Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{C}^N$ mit $u \in (H^m(\Omega'))^N$ für jede offene Menge Ω', $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\overline{\Omega'}$ kompakt.

Definition III.3.1: *Zu jedem Multiindex α mit $0 \leq |\alpha| \leq M$, M eine fest vorgegebene Zahl aus $\mathbb{N}$, sei eine $N \times N$-Matrix $a_\alpha(x)$ gegeben, die von $x \in \Omega$ abhängt, Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Die Koeffizientenfunktionen der Matrizen $a_\alpha(.)$ seien stetige komplexwertige FUnktionen. Es gelte*

$$\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$$

wobei für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$$\xi^\alpha = \prod_{i=1}^n \xi_i^{\alpha_i}$$

gesetzt ist. Die Abbildung $\mathcal{L} : (H^M_{loc}(\Omega))^N \to (L^2_{loc}(\Omega))^N$, die gegeben ist durch

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(.)D^\alpha u$$

heißt elliptischer Operator der Ordnung M (über Ω). Seien die Koeffizienten Funktionen der $a_\alpha(.)$ von der Klasse $C^{|\alpha|}(\Omega)$. Dann heißt die durch

$$\mathcal{L}^*u = \sum_{|\alpha| \leq M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(a^Q_\alpha(.)u)$$

gegebene Abbildung von $(H^M_{loc}(\Omega))^N$ in $(L^2_{loc}(\Omega))^N$ die formale Adjungierte zu $\mathcal{L}$. $a^*_\alpha(.)$ ist hierbei die zu $a_\alpha(.)$ adjungierte Matrix (bezüglich des $\mathbb{C}^N$-Skalarprodukts $< ., . >$).

Zunächst folgt für einen elliptischen Operator der Ordnung M (über Ω) die Ungleichung

$$\text{(III.3.1)} c_E(\overline{\Omega'})|\xi|^{MN} \geq |\det(\sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha)| \geq \frac{1}{c_E(\overline{\Omega'})}|\zeta|^{MN},\ x \in \Omega',\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

Ω' wie vor Definition III.3.1, $c_E(\Omega')$ eine positive Konstante. Die Definition von $\mathcal{L}^*$ ist die übliche, denn man erhält sofort $(\mathcal{L}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathcal{L}^*\psi)$, $\varphi, \psi \in c(C_0^\infty(\Omega))^N$, vg. hierzu Kapitel I, §1.

Wir bringen einige **Beispiele:** Sei $M = 1$, $N = 1$. Dann ist

$$\mathcal{L}u(x) = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}u(x) + \ldots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}u(x) + a_0(x),\ x \in \Omega,$$

mit stetigen Funktionen $a_1, \ldots, a_n$. Falls $n = 3$ ist, läßt sich stets ein Tripel $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ finden derart, daß für irgendein vorgegebenes $x \in \Omega$ gilt:

$$a_1(x)\xi_1 + a_2(x)\xi_2 + a_3(x)\xi_3 = 0$$

ist, da drei oder mehr komplexe Zahlen, als Elemente des $\mathbb{R}^2$ aufgefaßt, linear abhängig sind. $\mathcal{L}$ kann also nicht elliptisch sein. Entsprechendes gilt natürlich, wenn $n \geq 3$ ist. $\mathcal{L}$ kann also nur dann elliptisch sein, wenn $n \leq 2$ ist. Im Fall $n = 1$ erhält man einfach die Bedingung $a_1(x) \neq 0$, $x \in \Omega$. Im Fall $n = 2$ ergibt sich mit $a_1(x) = a_{11}(x) + ia_{21}(x)$, $a_2(x) = a_{12}(x) + ia_{22}(x)$, $x \in \Omega$, $a_{ik}(x) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, k \leq 2$, die Bedingung

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix} &= a_{11}(x)a_{22}(x) - a_{12}(x)a_{21}(x), \\ &= Im a_1(x)\overline{a_2(x)}, \\ &\neq 0,\ x \in \Omega. \end{aligned}$$

Zum Beispiel sind der Cauchy-Riemann- (oder Wirtinger-)Operator $\mathcal{L}u = \frac{\partial}{\partial x_1}u + i\frac{\partial}{\partial x_2}u (= \frac{\partial}{\partial x_1}u - i\frac{\partial}{\partial x_2}u)$ elliptisch. Im Fall $M = 2$, $N = 1$ haben wir

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x),$$

Sind die a_{ij} reellwertige Funktion, so ist $\mathcal{L}$ elliptisch dann und nur dann, wenn

$$\pm \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c(\Omega')|\xi|^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega', \Omega' \text{ wie in Definition III.3.1,}$$

ist. Ein weiteres, für die Anwendungen wichtiges Beispiel, besteht in den stark elliptischen Operatoren: Es wird vorausgesetzt, daß

$$Re < \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\eta,\ \eta > \neq 0 \text{ ist}, \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ \eta \in \mathbb{C}^N - \{0\},\ x \in \Omega.$$

Dann ist $\mathcal{L}$ elliptisch. Wäre nämlich

$$\det(\sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha) = 0 \text{ für ein } x \in \Omega \text{ und ein } \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

so gibt es ein $\eta \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ derart, daß

$$\sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha \eta = 0,$$

ist, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Wir beweisen nun unseren ersten Regularitätssatz für Lösungen elliptischer Gleichungen $\mathcal{L}u = f$.

Satz III.3.1: *Sei Ω eine offene Punktmenge des $\mathbb{R}^n$. Sei $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sei $\mathcal{L}$ elliptischer Operator über Ω der Ordnung M. Seien $a_\alpha \in C^{|\alpha|+l}(\Omega)$,*

$$f \in (L^2_{loc}(\Omega))^N, \text{ falls } l \leq M-1$$

$$f \in (H^{l+1-M}_{loc}(\Omega))^N, \text{ falls } l \geq M$$

Sei $x_0 \in \Omega$, seien $K_\delta(x_0) \subset K_{2\delta}(x_0) \subset \overline{K_{2\delta}(x_0} \subset \Omega$, δ eine positive Zahl. Sei u schwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$, d.h. $u \in (L^2_{loc}(\Omega))^N$,

$$\int_\Omega < u, \mathcal{L}^*\varphi > dx = \int_\Omega < f, \varphi > dx, \ \varphi \in ((C_0^\infty(\Omega))^N.$$

Dann ist $u \in (H^{l+1}(K_\delta(x_0)))^N$, und es gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} ||u||_{(H^{l+1}(K_\delta(x_0)))^N} &\leq c_1||f||_{(H^{l+1-M}(K_{2\delta}(x_0)))^N} + c_2||u||_{(H^l(K_{2\delta}(x_0)))^N}, l \geq M, \\ ||u||_{(H^{l+1}(K_\delta(x_0)))^N} &\leq c_1||f||_{(L^2(K_{2\delta}(x_0)))^N} + c_2||u||_{(H^l(K_{2\delta}(x_0)))^N}, \ l \leq M-1. \end{aligned}$$

Dabei ist $c_1 = c_1(n, M, l, N, \delta, c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0)}), ||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0))}, w_{2\delta})$, $c_2 = c_2(n, M, l, N, \delta, dist(K_{2\delta}(x_0), \partial\Omega), ||a_\alpha||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{K_{2\delta}(x_0)})}$ mit $w_{2\delta}(r) = sup_{\substack{x,y \in K_{2\delta}(x_0), \\ |x-y| \leq r, \\ |\alpha|=M.}} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)|$, $r \geq 0$. $c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0)})$ ist die Konstante aus (III.3.1).

Beweis: Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $\overline{K_{2\delta}(x_0)} \subset Q = \{x | x \in \mathbb{R}^n, |x_k| \subset \pi, \ k = 1, \ldots, n\}$. Wir führen einige Hilfsoperatoren ein. Sei

$$\mathcal{L}_0 u(x) = \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x) D^\alpha u(x),$$

$$\mathcal{L}_0^* u(x) = \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha^*(x)(-1)^M D^\alpha u(x),$$

und entsprechend

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_0(x_0)u(x) \\ \mathcal{L}_0^*(x_0)u(x) \end{array}\right] = \sum_{|\alpha|=M} \left[\begin{array}{l} a_\alpha(x_0) D^\alpha u(x), \\ a_\alpha^*(x_0)(-1)^M D^\alpha u(x), \end{array}\right.$$

$u \in (H_{loc}^M(\Omega))^N$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(K_{2\delta}(x_0))$ reell, $\varphi(x) = 1$, $x \in \overline{K_\delta(x_0)}$. Sei $\gamma \in \mathbb{C}^N$, $\kappa \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$. Sei

$$v(x) = e^{i\kappa\cdot x}\varphi(x)g.$$

Dann ist

$$\mathcal{L}^* v(x) = \varphi(x)\mathcal{L}_0^*(e^{i\kappa\cdot\cdot}\gamma)(x) + \sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^\alpha e^{i\kappa\cdot x}\cdot\Phi_\alpha(x)\gamma.$$

mit gewissen $N\times N$-Matrizen $\Phi_\alpha(x)$, deren Träger in $K_{2\delta}(x_0)$ liegen. Da $\gamma \in \mathbb{C}^N$ beliebig war, folgt aus

$$\int_\Omega \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle ds = \int_\Omega \langle f, v\rangle dx, \text{ d.h.}$$

$$\int_\Omega \langle u, \mathcal{L}_0^*(x_0)v\rangle dx = \int_\Omega \langle f, v\rangle dx + \int_\Omega \langle u, (\mathcal{L}_0^*(x_0) - \mathcal{L}^*)v\rangle, dx,$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}(\text{III.3.2}) \qquad & \mathcal{L}_0(x_0, i\kappa)\int_\Omega \varphi u e^{-i\kappa\cdot x}dx = \int_\Omega e^{-i\kappa\cdot x}\varphi f dx + \int_\Omega (\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa) \\ & -\mathcal{L}_0(x, i\kappa))\varphi u e^{-i\kappa\cdot x} dx + \mathcal{R}(\kappa)\end{aligned}$$

mit einem Restterm $\mathcal{R}(\kappa)$, der gleich berechnet wird. Hierzu einige Erläuterungen: Es ist

$$\mathcal{L}_0(x, i\kappa) = \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x) i^{|\alpha|}\kappa^\alpha, \ x \in \Omega,$$

insbesondere

$$\mathcal{L}_0^*(x, i\kappa) = \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha^*(x)(-i)^{|\alpha|}\kappa^\alpha, \ x \in \Omega,$$

so daß

$$\mathcal{L}^* v(x) = \varphi(x)\mathcal{L}_0^*(x, i\kappa)e^{i\kappa\cdot x}\gamma + \sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^\alpha e^{i\kappa\cdot x}\Phi_\alpha(x)\gamma,$$

$$\langle u(x), \mathcal{L}_0^*(x_0)v(x)\rangle = \langle \mathcal{L}_0(x_0, i\kappa)\varphi(x)u(x), \gamma\rangle e^{-i\kappa\cdot x} +$$
$$+\langle \sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^\alpha e^{-i\kappa\cdot x}\Phi_{\alpha,0}^*(x)u(x), \gamma\rangle$$

mit gewissen $N \times N$- Matrizen $\Phi_{\alpha,0}^*(x)$, deren Träger in $K_{2\delta}(x_0)$ liegen,

$$\langle f, v\rangle = \langle \varphi f, \gamma\rangle e^{-i\kappa\cdot x},$$

$$\langle u, (\mathcal{L}_0^*(x_0) - \mathcal{L}^*)v\rangle = \langle(\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa) - \mathcal{L}_0(x, i\kappa))\varphi(x)u(x), \gamma\rangle e^{-i\kappa\cdot x}$$
$$+\langle \sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^\alpha e^{-i\kappa\cdot x}(\Phi_{\alpha,0}^* - \Phi_\alpha^*)(x)u(x), \gamma\rangle,$$

so daß

$$\mathcal{R}(\kappa) = -\sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^\alpha \int_\Omega e^{-i\kappa\cdot x}\Phi_\alpha^*(x)u(x)dx$$

wird. Das lineare Gleichungssystem (III.3.2) läßt sich nach dem Vektor $\int_\Omega \varphi u e^{-i\kappa\cdot x}dx$ auflösen, da wegen der Elliptizität von $\mathcal{L}$ jedenfalls $\det \mathcal{L}_0(x_0, i\kappa) \neq 0$ ist. Dies liefert

$$\int_\Omega \varphi u e^{-i\kappa\cdot x}dx = (\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa))^{-1}[\int_\Omega e^{-i\kappa\cdot x}\varphi f dx + \int_\Omega (\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa)$$
$$-\mathcal{L}_0(x, i\kappa))\varphi u e^{-i\kappa\cdot x}dx + \mathcal{R}(\kappa)].$$

Wir setzen

$$\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa) - \mathcal{L}_0(x, i\kappa) = \sum_{|\alpha|=M} A_\alpha \kappa^\alpha$$

$$U = \varphi u.$$

Sei $h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Dann ist

$$\text{(III.3.3)}\frac{e^{i\kappa h} - 1}{|h|}\int_\Omega U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx = (\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa))^{-1}[\frac{e^{i\kappa\cdot h} - 1}{|h|}\cdot\int_\Omega e^{-i\kappa\cdot x}\varphi f dx +$$
$$+\frac{e^{i\kappa\cdot h} - 1}{|h|}\cdot\mathcal{R}(\kappa) + \sum_{|\alpha|=M}\frac{e^{i\kappa\cdot h} - 1}{|h|}\cdot\kappa^\alpha\int_\Omega A_\alpha(x)U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx].$$

Sei $|h| < min\{dist(K_{2\delta}(x_0), \partial Q),\ dist(K_{2\delta}(x_0), \partial\Omega), \delta\}$. Dann ist

$$\frac{e^{i\kappa\cdot x} - 1}{|h|}\int_\Omega A_\alpha(x)U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx = \int_Q \frac{A_\alpha(x+h)U(x+h) - A_\alpha(x)U(x)}{|h|}e^{-i\kappa\cdot x}dx,$$

$$= \int_Q A_\alpha(x+h)\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}e^{-i\kappa\cdot x}dx + \int_Q \frac{A_\alpha(x+h)-A_\alpha(x)}{|h|}U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx.$$

Sei c_κ der κ-te Fourierkoeffizient von U und sei $u \in H^l(K_{2\delta}(x_0))$. Dann folgt aus (III.3.3)

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2l}|\frac{e^{i\kappa\cdot h}-1}{|h|}|^2|c_\kappa|^2 \le c_0[\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} |\kappa|^{2l+2}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2\cdot$$

$$\cdot(\int_Q \varphi f e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2+|\mathcal{R}(\kappa)|^2)+\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\},\,|\alpha|=M} |\kappa|^{2l+2\alpha}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2\cdot(|\int_Q A_\alpha(x+h)\cdot$$

$$\cdot\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}e^{-i\kappa\dot{x}}dx|^2+|\int_Q \frac{A_\alpha(x+h)-A_\alpha(x)}{|h|}U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2)],$$

$$c_0 = c_0(n,M,l,N) \text{ (vgl. auch weiter unten)},$$

Nun müssen die einzelnen Summanden ausgewertet werden. Zunächst ist

$$|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2 \le c_0|\kappa|^{-2M},\ c_0 = c_0(n,M,l,N,c_E(K_{2\delta}(x_0)),\ ||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0))})$$

$$|\mathcal{R}(\kappa)|^2 \le c_0 \sum_{0\le|\alpha|\le M-1} \kappa^{2\alpha}|\int_Q \Phi_\alpha^*(x)u(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2,$$

also

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} |\kappa|^{2l+2}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2\int_Q \varphi f e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2$$

$$\le c_0 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} |\kappa|^{2(l+1-M)}|\int_Q \varphi f e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2,$$

$$c_0 = c_0(n,M,l,N,c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0)}),||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0))}),$$

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}} |\kappa|^{2l+2}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2|\mathcal{R}(\kappa)|^2$$

$$\le c_0 \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\},\,0\le|\alpha|\le M-1} |\kappa|^{2(l+1-M)+2\alpha}|\int_Q \Phi_\alpha^*(x)u(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2$$

$$\le c_0 \sum_{\substack{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\},\\ 0\le|\alpha|\le M-1}} |\kappa|^{2l}|\int_Q \Phi_\alpha^*(x)u(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2$$

$$\leq c_2||u||^2_{H^l(K_{2\delta}(x_0))},$$

da die $\Phi_\alpha(x)$ die Gestalt $c_\alpha D^\beta a^*_{\beta'} D^\gamma \varphi(x)$ haben mit $\beta \leq \beta'$, $|\beta|+|\gamma| \leq M$, c_α eine komplexe Konstante. Weiter ist

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\},|\alpha|=M} |\kappa|^{2l+2\alpha}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2|\int_Q \frac{A_\alpha(x+h)-A_\alpha(x)}{|h|}U(x)e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2 \leq$$

$$\leq c_2||u||^2_{H^l(K_{2\delta}(x_0)},$$

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\},\,|\alpha|=M} |\kappa|^{2l+2\alpha}|(\mathcal{L}_0(x_0,i\kappa))^{-1}|^2|\int_\Omega A_\alpha(x+h)\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2$$

$$\text{(III.3.4)} \qquad \leq c_1^{(h)} \max_{|\alpha|=M} ||A_\alpha(.+h)\frac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||^2_{H^l(\Omega)}.$$

Nun ist

$$||A_\alpha(.+h)\frac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||^2_{H^l(Q)} \leq$$

$$\leq c[\sum_{|\beta|=l}\int_\Omega |A_\alpha(x+h)D^\beta\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}|^2dx$$

$$+\sum_{\substack{0\leq|\gamma_1|\leq l\\ 0\leq|\gamma_2|\leq l-1}}\int_Q |D^{\gamma_1}A_\alpha(x+h)D^{\gamma_2}\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}|^2dx$$

$$\text{(III.3.5)} \qquad \leq c\cdot\omega_{2\delta}^{(h)}(2\delta+h)||\tfrac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||_l^{*2} + c_2^{(h)}||\tfrac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||^2_{H^{l-1}(Q)}.$$

In (III.3.4), (III.3.5) ist $c_1^{(h)} = c_1(n,M,l,N,c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0+h)}), ||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0+h))})$, $c_2^{(h)} = (u,M,l,N,||a_\alpha||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{K}_{2\delta}(x_0+h))})$ und $w_{2\delta}^{(h)} = \sup_{\substack{x,y\in K_{2\delta}(x_0+h),\\ |x-y|\leq r,\\ |\alpha|=M}} |a_\alpha(x)-a_\alpha(y)|$,

$r \geq 0$; weiter bezieht sich in (III.3.5) $||.||_l^*$ auf die Grundmenge Q. Aus (III.3.5) folgt

$$||A_\alpha(.+h)\frac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||^2_{H^l(Q)} \leq c\omega_{2\delta}^{(h)}(2\delta+h)\cdot$$

$$\cdot\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2l}|\int_Q\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2+$$

$$+c_2^{(h)}\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2(l-1)}|\int_Q\frac{U(x+h)-U(x)}{|h|}e^{i\kappa\cdot x}dx|^2.$$

Nun ist $\int_Q \frac{U(x+h)-U(x)}{|h|} e^{-i\kappa\cdot x} dx = \frac{1}{|h|}(e^{i\kappa\cdot h}-1)\int_Q e^{-i\kappa\cdot x} U(x)dx$, so daß

$$||A_\alpha(.+h)\frac{U(.+h)-U(.)}{|h|}||^2_{H^l(Q)} \le c\cdot w_{2\delta}^{(h)}(2\delta+h)\cdot\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2l}|\frac{e^{i\kappa\cdot h}-1}{|h|}|^2|c_\kappa|^2+$$

$$+c_2^{(h)}||U||^2_{H^l(Q)}.$$

Insgesamt ergibt sich jetzt

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2l}|\frac{e^{i\kappa\cdot h}-1}{|h|}|^2|c_\kappa|^2 \le c_0\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n-\{0\}}|\kappa|^{2(l+1-M)}|\int_Q \varphi f e^{-i\kappa\cdot x}dx|^2+$$

$$+c_1^{(h)}w_{2\delta}^{(h)}(2\delta+h)\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2l}|\frac{e^{i\kappa\cdot h}-1}{|h|}|^2|c_\kappa|^2+(c_2+c_2^{(h)}||U||^2_{H^l(Q)}.$$

Für δ wählen wir nun eine positive, hinreichend kleine Zahl δ_0, nämlich eine solche, daß $c_1^{(h)}w_{2\delta_0}^{(h)}(2\delta_0+h)\le\frac{1}{2}$ ausfällt. Dann folgt mit $\lambda(l,M)=\max\{0,l+1-M\}$:

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2l}|\frac{e^{i\kappa\cdot h}-1}{|h|}|^2|c_\kappa|^2 \le c_0||\varphi f||^2_{H^{\lambda(l,M)}(K_{2\delta_0}(x_0))}+(c_2+c_2^{(h)})||u||^2_{H^l(K_{2\delta_0}(x_0))}.$$

Für h wählen wir nacheinander die Vektoren $t\cdot e_1,\ldots,t\cdot e_n$, $t\neq 0$, und lassen t gegen Null streben. Dies liefert

$$\text{(III.3.6)}\quad \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n}|\kappa|^{2(l+1)}|c_\kappa|^2 \le c_0||\varphi f||^2_{H^{\lambda(l,M)}(K_{2\delta_0}(x_0))}+c_2||u||^2_{H^l(K_{2\delta_0}(x_0))},$$

also mit Hilfssatz III.1.1

$$||u||^2_{H^{l+1}(K_{\delta_0}(x_0))}\le c_0||\varphi f||^2_{H^{\lambda(l,M)}(K_{2\delta_0}(x_0))}+c_2||u||^2_{H^l(K_{2\delta_0}(x_0))}.$$

Beginnend mit $l=0$ erhält man $u\in(H^1(K_{\delta_0}(x_0)))^N$. Da $x_0\in\Omega$ beliebig war, folgt mit Hilfssatz III.1.3: $u\in H^1_{loc}(\Omega))^N$, hieraus mit (III.3.6): $u\in(H^2_{loc}(\Omega))^N$ usw. bis $u\in(H^{l+1}_{loc}(\Omega))^N$. Betrachten wir nun den Fall einer beliebigen Kugel $K_\delta(x_0)$ wie im Satz beschrieben. Im Fall $\delta\le\delta_0$ ist nichts mehr zu zeigen. Im Fall $\delta>\delta_0$ verfahren wir folgendermaßen: Wir wählen eine Überdeckung $K_{\delta_0}(x_\nu)$, $\nu=1,\ldots,N$, von $\overline{K_\delta(x_0)}$ mit

$$\overline{K_\delta(x_0)}\subset\bigcup K_{\delta_0}(x_\nu)\subset K_{2\delta}(x_0),\ x_1,\ldots,x_N\in K_\delta(x_0)$$

$$\overline{K_{2\delta_0}(x_\nu)} \subset K_{2\delta}(x_0),\ \nu = 1, \dots, N.$$

Die Zahl δ_0 ist dabei für „jede Kugel $K_{\delta_0}(x_\nu)$ dieselbe“, d.h. sie wird so bestimmt, daß mit

$$c_1^{(h)} = c_1(n, M, l, N, c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0+h)}),\ ||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0+h))})$$

die Größe

$$c_1^{(h)} \cdot \sup_{\substack{x \in K_\delta(x_0+h),\\ y \in K_{2\delta}(x_0+h),\\ |x-y| \leq \delta_0,\\ |\alpha|=M}} ||a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \leq \frac{1}{2}$$

ausfällt, sofern $|h| < \frac{1}{2}\min\{dist(K_{2\delta}(x_0), \partial Q), dist(K_{2\delta}(x_0), \partial\Omega), \delta\}$ ist. Nun gilt für alle $f \in L^2(K_{2\delta}(x_0))$ jedenfalls

$$||f||^2_{L^2(K_\delta(x_0))} \leq \sum_{\nu=1}^{N} ||f||^2_{L^2(K_{\delta_0}(x_\nu))},$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} ||f||^2_{L^2(K_{2\delta_0}(x_\nu))} \leq c(\delta, \delta_0)||f||^2_{L^2(K_{2\delta}(x_0))},$$

$$\leq c(\delta, w_\delta)||f||^2_{L^2(K_{2\delta}(x_0))}.$$

Anwendung von III.3.6) $K_{\delta_0)}(x_\nu)$ liefert die Behauptung des Satzes. $\square$

Wir stellen noch einmal die von uns verwendeten Konstanten zusammen und erweitern geringfügig die Zahl der Fälle, in denen im folgenden diese Konstanten Anwendung finden sollen:

$(1/c_E(\overline{\Omega'})=$ **Elliptizitätskonstante,** bezogen auf einen elliptischen Operator $\mathcal{L}$. Ω' darf auch unbeschränkt sein, wir verlangen weiterhin nur noch $\Omega' \subseteq \Omega$, sofern nichts anderes vorausgesetzt ist. Im Fall $\Omega' = \Omega$, müssen die a_α mindestens aus $C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sein. $c_E(\overline{\Omega'})$ ist stets aus $(0, +\infty)$. Es sei darauf hingewiesen, daß sich die obere Schranke in (III.3.1) links in der Form $c_E(||a_\alpha||_{L^\infty(\Omega')})$ ausdrücken läßt.

c_1 = **Abschätzungskonstante vor** $(H^{\lambda(l,M)}(K_{2\delta}(x_0)$ bzw. $\Omega))^N$-Norm von f in Abschätzungen der Lösung von $\mathcal{L}u = f$. Es ist $c_1 = c_1(n, M, l, N, \delta$ bzw. entfallend,
$\begin{matrix} c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0)}) & \text{bzw.} & ||a_\alpha||_{L^\infty(K_{2\delta}(x_0))} & \text{bzw.,} & w_{2\delta} \text{ bzw.} \\ c_E(\overline{\Omega}) & & ||a_\alpha||_{L^\infty(\Omega)} & & w \end{matrix}) > 0$
mit $w(r) = \sup\limits_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}, \\ |x-y|\leq r \\ |\alpha|=M}} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)|$,

c_2 = **Abschätzungskonstanten vor** $(H^l(K_{2\delta}(x_0)$ bzw. $\Omega\ ))^N$-Norm von u, l von niedrigerer Ordnung als die entsprechende Norm auf der linken Seite, in Abschätzungen der Lösung von $\mathcal{L}u = f$. Es ist $c_2 = c_2(n, M, l, N, \delta$ bzw. entfallend, $dist(K_{2\delta}(x_0), \Omega)$ bzw. entfallend, $||a_\alpha||_{c^{l+|\alpha|}\overline{(K_{2\delta}(x_0))}}$ bzw. $||a_\alpha||_{c^{l+|\alpha|}(\overline{\Omega})}) > 0$, und

c_0 = $c_0(n, M, l, N, c_E(\overline{K_{2\delta}(x_0)})$ bzw. $c_E(\overline{\Omega})$, $||a_\alpha||_{(L^\infty(K_{2\delta}(x_0))}$ bzw. $||a_\alpha||_{L^\infty(\Omega)}) > 0$

$$\lambda(l, M) = \max\{0, l + 1 - M\}.$$

Mit diesen Notationen zeigen wir

Satz III.3.2: *Sei $\mathcal{L}$ elliptischer Operator über $\Omega = \mathbb{R}^n$ der Ordnung M. Sei $l \in \mathbb{N} \cap \{0\}$. Seien $a_\alpha \in C^{|\alpha|+l}(\mathbb{R}^n)$, $f \in H^{\lambda(l,M)}(\mathbb{R}^n)$. Sei*

$$c_E(\overline{\mathbb{R}^n})|\xi|^{M\cdot N} \geq |\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha| \geq \frac{1}{c_E(\overline{\mathbb{R}^n})}|\xi|^{M\cdot N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, |x-y|\leq r} \sum_{|\alpha|=M} |a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \leq w(r)$$

mit einer Funktion $w : [0, +\infty \to [0, +\infty)$, für die gilt: $w(r) \to 0$ für $r \to 0$. Sei u schwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$, d.h. $u \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} < u, \mathcal{L}^*\varphi > dx = \int_{\mathbb{R}^n} < f, \varphi > dx,\ \varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^N.$$

Dann ist $u \in (H^{l+1}(\mathbb{R}^n))^N$, und es gilt die Abschätzung

$$||u||_{H^{l+1}(\mathbb{R}^n)} \leq c_1||f||_{H^{\lambda(l,M)}(\mathbb{R}^n)} + c_2||u||_{H^l(\mathbb{R}^n)}.$$

c_1, c_2 sind die eben beschriebenen Konstanten (die Abhängigkeit von δ entfällt, $K_{2\delta}(x_0)$ sind durch $\Omega = \mathbb{R}^n$ ersetzt usw.)

Beweis: Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ können wir eine Kugel von ein und demselben Radius δ_0 wählen derart, daß

$$||u||^2_{H^{l+1}(K_{\delta_0}(x_0))} \leq c_0||\varphi f||^2_{H^{\lambda(l,M)}(K_{2\delta_0}(x_0))} + c_2||u||^2_{H^l(K_{2\delta_0}(x_0))}$$

gilt. Hierbei ist $c_2 = c_2(n, M, l, N, \delta_0, ||a_\alpha||_{C^{l+|\alpha|}(\mathbb{R}^n)}$. δ_0 wird in Abhängigkeit von w bestimmt. Siehe hierzu Beweis des Satzes III.3.1. Wir wählen eine Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ durch Kugeln $K_{\delta_0}(x_1)$, $K_{\delta_0}(x_2), \ldots$ mit

$$\begin{aligned}
||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} ||f||^2_{L^2(K_{\delta_0}(x_\nu))}, \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} ||f||^2_{L^2(K_{2\delta_0}(x_\nu))}, \\
&\leq c(\delta_0)||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\ f \in L^2(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes. Man beachte, daß bei unseren Voraussetzungen man auch δ_0 als durch $\frac{\partial}{\partial x_1}a_\alpha, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}a_\alpha$ bestimmt betrachten kann, so daß im Satz die Abhängigkeit von c_2 von δ_0 fortfallen kann. $\square$

Der vorhergehende Satz läßt sich in der folgenden Weise verbessern: Die Überdeckung des $\mathbb{R}^n$ durch Kugeln $K_{\delta_0}(x_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, läßt sich so einrichten, daß

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} ||f||^2_{L^2(K_{2\delta_0}(x_\nu))} \leq c||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},\ f \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$$

ist mit einer von δ_0 unabhängigen Konstante c. Dies liefert sofort den
Satz III.3.3: *Sei $\mathcal{L}$ ein elliptischer Operator der Ordnung M über $\Omega = \mathbb{R}^n$. Es seien die Voraussetzungen des Satzes III.3.2 erfüllt, insbesondere sei*

$$a_\alpha \in C^{l+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})$$

für ein $l \in \mathbb{N}$. Sei $u \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$ schwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$, $f \in (H^{\lambda(l,M)}(\mathbb{R}^n))^N$. Dann ist $u \in (H^{l+1}(\mathbb{R}^n))^N$ und es gilt die Abschätzung

$$||u||_{l+1} \leq c_0 c(w, \lambda(l, M))||f||_{\lambda(l,M)} + c_2||u||_l,$$

mit einer von $w, \lambda(l, M))$ abhängigen Konstante $c(w, \lambda(l, m))$, für die wir im Fall $\lambda(l, M) = 0$ die Zahl 1 einsetzen können. Also ist

$$||u||_{l+1} \leq c_0 c(w, \lambda(l, M))||f||_{\lambda(l,M)} + c_2||u||_0.$$

Beweis: Die erste Ungleichung ist klar, die zweite folgt aus Satz III.2.5, Problem III.3.2. □

Eine weitere Verbesserung hinsichtlich der Regularitätsanforderungen an die Koeffizientenmatrizen a_α erhält man aus

Satz III.3.4: *Sei $M \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ und jedem Multiindex α des $\mathbb{R}^n$ seien $N \times N$-Matrizen a_α gegeben mit folgenden Eigenschaften: Die Abbildungen*

$$a_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^{N^2}$$

sind stetig und beschränkt, für $|\alpha| = M$ gleichmäßig stetig. Es sei

$$c(\overline{\mathbb{R}^n})|\xi|^{M \cdot N} \geq |\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha| \geq \frac{1}{(\overline{\mathbb{R}^n})}|\xi|^{M \times N}$$

mit einer positiven Konstante $c(\overline{\mathbb{R}^n})$ (Elliptizitätskonstante). Sei

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(.)D^\alpha u, \ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = (H^M(\mathbb{R}^n))^N.$$

Dann ist $\mathcal{L}$ abgeschlossener Operator in $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$. Es gilt die Abschätzung

$$||u||_M \leq c_0||f||_0 + c_1||u||, \text{ wobei } f = \mathcal{L}u \text{ gesetzt ist.}$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$.
$a_\alpha^{(1/\varepsilon)}(x) = J_\varepsilon a_\alpha(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})a_\alpha(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)a_\alpha(x-\varepsilon y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist

$$a_\alpha^{(1/\varepsilon)}(.) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}\cup\{0\}} C^k(\overline{\mathbb{R}}^n),$$

$$|a_\alpha^{(1/\varepsilon)}(x)| \leq ||a_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)},$$

$$|a_\alpha^{(1/\varepsilon}(x) - a_\alpha^{(1/\varepsilon)}(x')| \leq \sup_{\substack{y,y' \in \mathbb{R}^n, \\ |y-y'| \leq |x-x'|}} |a_\alpha(y) - a_\alpha(y')| \leq w(|x - x'|),$$

$$||a_\alpha^{(1/\varepsilon)}||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})} \leq ||a_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \sum_{\gamma, |\gamma| \leq l+|\alpha|} \frac{1}{\varepsilon^{|\gamma|}} ||D_\varphi^\gamma||_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Wir setzen nacheinander $1/\varepsilon = \nu = 1, 2, \ldots$. Sei

$$\mathcal{L}^\nu u = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha^{(\nu)}(.) D^\alpha u,\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}).$$

Da die $a_\alpha^{(\nu)}$ für $\nu \to \infty$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$ gegen a_α konvergieren, wie wir gleich zeigen werden, ist jedenfalls

$$2c(\overline{\mathbb{R}}^n)|\xi|^{M\cdot N} \geq |\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha^{(\nu)}(x)\xi^\alpha| \geq \frac{2}{c(\overline{\mathbb{R}^n})}|\xi|^{M\cdot N},\ \nu \geq \nu_0$$

Nun ist mit $l = M - 1$, Satz III.3.3

$$f = \mathcal{L}u = \mathcal{L}^{(\nu)}u + \mathcal{L}u - \mathcal{L}^{(\nu)}u,$$

$$||f||_0 + ||\mathcal{L}u - \mathcal{L}^{(\nu)}u||_0 \geq ||\mathcal{L}^{(\nu)}u||_0 \geq c_0||u||_M - c_2^{(\nu)}||u||_0$$

Wir fixieren $\nu_1 \geq \nu_0$ derart, daß $||\mathcal{L}u - \mathcal{L}^{(\nu_1)}u||_0 \leq \frac{1}{2}c_0||u||_M$ ist. Dann folgt

$$||f||_0 \geq \frac{1}{2}c_0||u||_M - c_2^{(\nu_1)}||u||_0.$$

$c_2^{(\nu)}$ bzw. $c_2^{(\nu_1)}$ bedeuten hierbei, daß in c_2 der Ausdruck $||a_\alpha||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})}$ durch $||a_\alpha^{(\nu)}||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})}$ bzw. $||a_\alpha^{(\nu_1)}||_{C^{l+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})}$, d.h. $||a_\alpha^{(\nu)}||_{C^{M-1+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})}$, $||a_\alpha^{(\nu_1)}||_{C^{M-1+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})}$, ersetzt wird. Wegen $||a_\alpha^{(\nu_1)}||_{C^{M-1+|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})} \leq c(\varphi) \cdot \nu_1^{M-1+|\alpha|}||a_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$,

$$\begin{aligned}
|a_\alpha^{(\nu)}(x) - a_\alpha^{(\nu')}(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\substack{y', y'' \in \mathbb{R}^n \\ |y'-y''| \leq |\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'}||y|}} |a_\alpha(y') - a_\alpha(y'')| \cdot \varphi(y)dy, \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} w(|\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'}||y|)\varphi(y)dy, \\
&\leq w(|\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu'}| \sup_{y \in supp\varphi} |y|)
\end{aligned}$$

sehen wir, daß ν_1 von w abhängt und daß in der Tat die $a_\alpha^{(\nu)}$ gleichmäßig in $\mathbb{R}^n$ gegen a_α konvergieren. $c_2^{(\nu_1)}$ können wir somit durch $c_2^{(\nu_1)}$ ersetzen. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bezüglich der höheren Regularität von Lösungen von $\mathcal{L}u = f$ auf dem $\mathbb{R}^n$ gilt der folgende Satz:

Satz III.3.5: *Seien die Voraussetzungen von Satz III.3.4 erfüllt. Zusätzlich sei für ein* $l \in \mathbb{N}$

$$a_\alpha \in C^l(\overline{\mathbb{R}^n}).$$

Sei $u \in H^M(\mathbb{R}^n)$, *sei* $f \in H^l(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L}u = f$. *Dann ist* $u \in H^{M+l}(\mathbb{R}^n)$ *und es gilt die Abschätzung*

$$||u||_{M+l} \leq c_0||f||_l + c_2||u||_0$$

mit $c_2 = c_2(n, M, l, N, c_E(\overline{\mathbb{R}^n}), ||a_\alpha||_{C^l(\overline{\mathbb{R}^n})})$.

Beweis: Unter der Annahme $u \in H^{M+l}(\mathbb{R}^n)$ beweisen wir zunächst die im Satz behauptete Abschätzung. Wegen der Sätze III.2.7, III.3.4 ist es hinreichend, die Abschätzung in der Form

$$||D^\gamma u||_M \leq c_0||f||_l + c_2||u||_0$$

für irgendeinen Multiindex γ des $\mathbb{R}^n$ mit $|\gamma| = l$ zu zeigen. Aus $\mathcal{L}u = f$ folgt mit Problem III.1.2 die Beziehung

$$\mathcal{L}D^\gamma u = D^\gamma f + \mathcal{R},$$

$$\mathcal{R} = -\sum_{0 \leq \widetilde{\gamma} < \gamma} (D^{\widetilde{\gamma}} a_\alpha)(.)D^{\widetilde{\gamma}+\alpha}u.$$

Anwendung des Satzes III.3.4 liefert die gewünschte Abschätzung. Wir approximieren nun u durch $J_{1/\nu}u$. Sei $F_\nu = \mathcal{L}J_{1/\nu}u$. Die eben bewiesene Abschätzung liefert im Fall $l = 1$

$$||J_{1/\nu}u||_{M+1} \leq c_0||F_\nu||_1 + c_2||J_{1/\nu}u||_0,$$

denn $J_{1/\nu}u \in H^{M+1}(\mathbb{R}^n)$. Zunächst ist nämlich

$$J_{1/\nu}u \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\overline{\mathbb{R}^n}).$$

Für einen Multiindex $\widetilde{\gamma} \neq 0$ des $\mathbb{R}^n$ ist sodann

$$|D^{\widetilde{\gamma}} J_{1/\nu}u(x)| \leq \nu^{n+|\widetilde{\gamma}|} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\gamma \varphi)(\frac{x-y}{1/\nu})u(y)dy$$

Hieraus folgt wie im Beweis von Satz III.1.2, daß $D^{\widetilde{\gamma}} J_{1/\nu}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Nun gilt für F_ν die folgende Formel

$$\mathcal{L}J_{1/\nu}u(x) = \frac{1}{(1/\nu)^n}\sum_{|\alpha|\le M}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{x-y}{1/\nu})(a_\alpha(x)-a_\alpha(y))D^\alpha u(y)dy+$$

$$+\frac{1}{(1/\nu)^n}\sum_{|\alpha|\le M}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{x-y}{1/\nu})a_\alpha(y)D^\alpha u(y)dy,$$

$$=\frac{1}{(1/\nu)^u}\sum_{|\alpha|\le M}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{x-y}{1/\nu})(a_\alpha(x)-a_\alpha(y))D^\alpha u(y)dy+J_{1/\nu}f(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{L}J_{1/\nu}u(x) = \frac{1}{(1/\nu)^n}\sum_{|\alpha|\le M}[\int_{\mathbb{R}^n}\nu(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi)(\frac{x-y}{1/\nu})(a_\alpha(x)-a_\alpha(y))\cdot$$

$$\cdot D^\alpha u(y)dy+\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{x-1}{1/\nu})\frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\mu}(x)D^\alpha u(y)dy]+J_{1/\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}f(x).$$

Wegen $a_\alpha \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n})$ ist $|a_\alpha(x)-a_\alpha(y)|\le c_2|x-y|$, $x,y\in\mathbb{R}^n$. Daraus folgt

$$|\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathcal{L}J_{1/\nu}u(x)| \le \frac{c_2}{(1/\nu)^n}\sum_{|\alpha|\le M}[\int_{\mathbb{R}^n}|(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\varphi)(\frac{x-y}{1/\nu})|\cdot$$

$$\cdot\frac{|x-y|}{1/\nu}|D^\alpha u(y)|dy+\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\frac{x-y}{1/\nu})|D^\alpha u(y)|dy]+|J_{1/\nu}\frac{\partial}{\partial x_\mu}f(x)|$$

Wie im Beweis von Satz III.1.2 folgt

$$||\mathcal{L}J_{1/\nu}u||_1 \le ||f||_1 + c_2||u||_M, \text{ also}$$

$$||F_\nu||_1 \le ||f||_1 + c_2||u||_M, \text{ also}$$

$$||J_{1/\nu}u||_{M+1} \le c_0||f||_1 + c_2||u||_M.$$

Da $H^{M+1}(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum ist, konvergiert eine Teilfolge von $(J_{1/\nu}u)$ schwach in $H^{M+1}(\mathbb{R}^n)$ gegen ein Element $v\in H^{M+1}(\mathbb{R}^n)$. Da gleichzeitig $J_{1/\nu}u\to u$, $\nu\to\infty$, in $L^2(\mathbb{R}^n)$, folgt $u=v$, $u\in H^{M+1}(\mathbb{R}^n)$. □

Wir wollen nun die Resolvente eines elliptischen Systems in $L^2(\mathbb{R}^n)$ studieren.

Satz III.3.6: *Die Matrizenfunktionen a_α, $|\alpha|\le M$ seien aus $C^0(\overline{\mathbb{R}^n})$. Die a_α, $|\alpha|=M$ seien gleichmäßig stetig, es sei $M=2m$ für ein $m\in\mathbb{N}$,*

$$a_\alpha(x)=a_\alpha(x)^*,\ x\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|=M.$$

Mit $\widetilde{\varepsilon}=1$ oder $\widetilde{\varepsilon}=-1$, je nachdem ob m gerade oder ungerade ist, sei

$$\widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^n})|\xi|^M|\eta|^2 \geq \langle\widetilde{\varepsilon} \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\eta, \eta\rangle \geq (\widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^n}))^{-1}|\xi|^M|\eta|^2,$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\widetilde{c}_E(\mathbb{R}^n)$ eine positive Konstante ist. Die Konsequenzen sind: Dann ist der Operator

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|\leq M} a_\alpha(.)D^\alpha u,\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = H^M(\mathbb{R}^n),$$

elliptisch in dem Sinn, daß

$$c_E(\overline{\mathbb{R}^n})|\xi|^{M\cdot N} \geq |\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha| \geq (c_E(\overline{\mathbb{R}^n}))^{-1}\cdot|\xi|^{M\cdot N},\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

ist. Weiter existieren $R_0 > 0$, ein $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ derart, daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$-\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 < arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \vartheta_0,$$

$$|\lambda| \geq R_0 = R_0(n, M, N, c_E(\overline{\mathbb{R}^n}), ||a_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, w),$$

gilt:

$$\sum_{j=0}^{M} |\lambda|^{1-j/M}||u||_j \leq c_0||(\mathcal{L}+\lambda)u||_0.$$

Für diese λ gilt: $\mathcal{R}(\mathcal{L}+\lambda) = L^2(\mathbb{R}^n)$, die inverse Abbildung $(\mathcal{L}+\lambda)^{-1}$ ist aus $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ und genügt der Abschätzung

$$||(\mathcal{L}+\lambda)^{-1}|| \leq \frac{c_0}{|\lambda|}.$$

Beweis: Die erste Aussage des Satzes wird in einer allgemeineren Form bewiesen. Es wird nur angenommen, daß $a_\alpha(x) \in \mathbb{C}^{N^2}$ ist, $x \in \mathbb{R}^n$, und, daß

$$|\langle \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\eta,\ \eta\rangle| \geq (\widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^n}))^{-1}|\xi|^M|\eta|^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{C}^N,$$

mit einer positiven Konstante $\widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^n})$. Wie wir gleich sehen werden, ist die Forderung, daß η in $\mathbb{C}^N$ variiert, in unserem Fall keine Einschränkung. Sei

$$g(x) = \inf_{|\xi|=1} |\frac{1}{|\xi|^{M\cdot N}} \det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha|,$$

$$= \inf_{|\xi|=1} |\det \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha|, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir nehmen nun an, daß es eine Folge (x_ν) aus $\mathbb{R}^n$ gibt mit $g(x_\nu) \to 0$, $\nu \to \infty$. Dann können wir voraussetzen, daß

$$a_\alpha(x_\nu) \to \widehat{a}_\alpha \text{ in } \mathbb{C}^{N^2}, \; \nu \to \infty,$$

$$\xi_\nu \to \widehat{\xi_0} \text{ in } |\xi| = 1, \; \nu \to \infty,$$

wobei $\xi_\nu = \xi_\nu(x_\nu)$ diejenigen Punkte sind, in denen das letzte Infimum bei festem $x = x_\nu$ angenommen wird. Man erhält

$$\det \sum_{|\alpha|=M} \widehat{a}_\alpha \widehat{\xi_0^\alpha} = 0$$

und gleichzeitig $(\widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^n}) > 0)$

$$|\langle \sum_{|\alpha|=M} \widehat{a}_\alpha \widehat{\xi_0^\alpha} \eta, \eta \rangle| \geq \widetilde{c}_E(\overline{\mathbb{R}^N})|\eta|^2, \; \eta \in \mathbb{C}^N.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, da es ein $\eta_0 \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ gibt mit

$$\sum_{|\alpha|=M} \widehat{a}_\alpha \widehat{\xi_0^\alpha} \eta_0 = 0.$$

Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta \geq 0$, $\zeta(t) = 1$, $|t| = 1$, $\zeta(t) = 0$, $|t| \geq 2$. Sei $\mu \in \mathbb{R}$, $u \in H^M(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\widetilde{w} = \zeta(.)e^{i\mu \cdot} u$ aus $H^M(\mathbb{R}^{n+1})$. Wir führen einen Hilfsoperator

$$\widetilde{\mathcal{L}}u = \sum_{|\alpha| \leq M = 2m} a_\alpha(.)D^\alpha w + \widetilde{\varepsilon} e^{i\vartheta} I \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} w,$$

$$w \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = H^M(\mathbb{R}^{n+1}),$$

ein. Die Ableitungen unter dem Summenzeichen beziehen sich auf die Variablen $x_1, \ldots, x_n$. ϑ ist aus $[0, \pi/2 + \vartheta_0] \cup [-\pi/2 - \vartheta_0, 0]$ mit einem $\vartheta_0 \in (0, \pi/2)$, das wir noch bestimmen werden. I ist die $N \times N$-Einheitsmatrix. Wir setzen

$$A(x,\xi) = \widetilde{\varepsilon} \sum_{|\alpha|=M=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \; x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $< A(x,\xi)\eta, \eta >$ reell, nämlich gleich $< A(x,\xi)\eta_1, \eta_1 > +$ $< A(x,\xi)\eta_2, \eta_2 >$, wenn $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ ist mit $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^N$, da wir $a_\alpha(x) =$

$a_\alpha^*(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ vorausgesetzt hatten: Es folgt nicht nur die Elliptizität von $\mathcal{L}$ im angegebenen Sinn, sondern auch

$$| < A(x,\xi)\eta + e^{i\vartheta} I \tau^{2m}\eta, \eta > | \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} | < A(x,\xi)\eta, \eta > + \cos\vartheta \tau^{2m} |\eta|^2 | + \frac{1}{\sqrt{2}} |\sin\vartheta| \tau^{2m} |\eta|^2,$$

$$\geq \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\widetilde{c_E}(\mathbb{R}^n)|\xi|^M|\eta|^2 - |\cos\vartheta|\tau^{2m}|\eta|^2 + \frac{1}{2}|\sin\vartheta|\tau^{2m}|\eta|^2, \ \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi, \ -\pi \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \\ \frac{1}{2}\widetilde{c_E}(\mathbb{R}^n)|\xi|^M|\eta|^2 + \frac{1}{2}\tau^{2m}|\eta|^2, \ |\vartheta| \leq \frac{\pi}{2}. \end{bmatrix}$$

Für $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \vartheta_0 < \pi$, $-\pi < -\vartheta_0 \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2}$ mit $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$ ist jedenfalls $|\sin\vartheta| - |\cos|\vartheta \geq 1/6$, $|\vartheta| \leq \pi/2 + \vartheta_0$, so daß wir endlich erhalten:

$$| < A(x,\xi)\eta + e^{i\vartheta} I \tau^{2m}\eta, \eta > | \geq \widetilde{c_E}(\mathbb{R}^{n+1})|(\xi,\tau)|^M|\eta|^2, \ (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{C}^N.$$

Für $\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \vartheta_0 < \pi$, $-\pi < -\vartheta_0 \leq \vartheta \leq -\frac{\pi}{2}$ mit $\vartheta_0 = \frac{\pi}{6}$ ist jedenfalls $|\sin\vartheta| - |\cos\vartheta| \geq 1/6$, $|\vartheta| \leq \pi/2 + \vartheta_0$, so daß wir endlich erhalten:

$$| < A(x,\xi)\eta + e^{i\vartheta} I \tau^{2m}\eta, \eta > | \geq \widetilde{c}_E(\mathbb{R}^{n+1})|(\xi,\tau)|^M|\eta|^2, \ (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^n \tau \mathbb{R}, \ \eta \in \mathbb{C}^N.$$

Also ist $\widetilde{\mathcal{L}}$ elliptisch in $\mathbb{R}^{n+1}$ und gestattet die Anwendung von Satz III.3.4, wie eben gezeigt. Dieser Satz liefert:

$$||\widetilde{w}||_{2m} \leq c_0 ||\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{w}||_0 + c_1 ||\widetilde{w}||_0, \ \widetilde{w} \in H^M(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Speziell für $\widetilde{w}(t,x) = \zeta(t)e^{i\mu t}u(x)$, $u \in H^M(\mathbb{R}^n)$, folgt

$$||\widetilde{w}||_{2m} \geq c \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} ||u||_{(H^j(\mathbb{R}^n))^N}, \ |\mu| \geq 1$$

und $(\widetilde{\varepsilon} = (-1)^m!)$

$$||\widetilde{\mathcal{L}}w||_0 \leq c(||\zeta(.)e^{i\mu\cdot}(\mathcal{L}u + \widetilde{\varepsilon}^2 e^{i\vartheta}\mu^{2m\cdot}u)||_0 + ||e^{i\mu\cdot}\zeta(.)u||_0),$$

$$\leq c||(\mathcal{L} + e^{i\vartheta}\mu^{2m})u||_{(L^2(\mathbb{R}^n))^N} + c||u||_{(L^2(\mathbb{R}^n))^N}.$$

Dabei hängt c nur von n, N, M ab. Sei nun $\lambda = e^{i\vartheta}\mu^{2m}$, $|\lambda| = \mu^{2m} \geq R :$ $0 = R_0(c_1)$. Dann folgt in der Tat

(III.3.7) $\sum_{j=0}^M |\lambda|^{\lambda - j/M} ||u||_j \leq c_0 ||(\mathcal{L} + \lambda)u||_0,$

$$\lambda \in \sum(R_0, \vartheta_0) = \{z | z \in \mathbb{C}, \ |z| \geq R_0 = R_0(c_1), \ |arg z| \leq \pi/2 + \vartheta_0\}.$$

Man beachte, daß nur R_0 von c_1 abhängt. Wir approximieren nun die Matrizen $a_\alpha(.)$ durch Matrizen $a_\alpha^{(\nu)}(.)$ wie im Beweis des Satzes III.3.4. Für $\nu \geq \nu_0$ ist $\mathcal{L}_\nu$,

$$\mathcal{L}_\nu u = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha^{(\nu)}(.) D^\alpha u,\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\nu) = H^M(\mathbb{R}^n),$$

wir haben $a_\alpha^{(\nu)}(x) = a_\alpha^{(\nu)*}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, und es gilt, daß $\mathcal{L}_\nu$ denselben Abschätzungen wie $\mathcal{L}$ genügt. Wir wollen zeigen, daß die Adjungierte zu $\mathcal{L}_\nu$ im Sinn der Hilbertraumtheorie gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^* u &= \sum_{|\alpha| \leq M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha^{(\nu)*}(.) u), \\ &= \sum_{|\alpha| \leq M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha^{(\nu)}(.) u),\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\nu^*) = H^M(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

sofern $\nu \geq \nu_0$ ist. Zunächst sind die $a_\alpha^{(\nu)}$ aus $\cap_{k=1}^\infty C^k(\overline{\mathbb{R}^n})$, $\mathcal{L}_\nu^*$ ist elliptisch im selben Sinn wie d_ν bzw. $\mathcal{L}$. Also haben wir für ein $u \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$, für das

$$(u, \mathcal{L}_\nu \varphi) = (f^*, \varphi),\ \varphi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))^N,$$

gilt mit einem $f^* \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$, nach Satz III.3.2: $u \in (H^M(\mathbb{R}^n))^N = \mathcal{D}(\mathcal{L}_\nu^*)$, $f^* = \mathcal{L}_\nu^* u$. Damit haben wir die Adjungierte zu $\mathcal{L}_\nu$ charakterisiert. Weiter ist

$$|\lambda| ||u||_0 \leq ||(\mathcal{L}_\nu^* + \lambda) u||_0,\ \lambda \in \sum (R_0^{(\nu)}, \vartheta_0) = \{z | z \in \mathbb{C},\ |z| \geq R_0^{(\nu)} =$$

$$= R_0(n, M, N, c_E(\overline{\mathbb{R}^n}),\ ||a_\alpha^\nu||_{C^{|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})})\},$$

so daß für $\lambda \in \sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0)$ gilt: $\mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \lambda) = \{u | u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_\nu^*),\ (\mathcal{L}_\nu^* + \lambda) u = 0\} = \{0\}$. Mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ in $\sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0)$. Wegen

$$\text{(III.3.8)} \qquad \sum_{j=0}^M |\lambda|^{1-j/M} ||u||_j \leq c_0 ||(\mathcal{L}_\nu + \lambda) u||_0,\ \lambda \in \sum (R_0, \vartheta_0),$$

ist $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda)$ abgeschlossener Teilraum von $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$. Also ist $(\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda)$. Man sieht leicht: $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda) \subset (\mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \overline{\lambda}))^\perp$. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \overline{\lambda}) \subset (\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda))^\perp$. Umgekehrt ist $(\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda))^\perp \subset \mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \overline{\lambda})$, so daß $\mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \overline{\lambda}) = (\mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda))^\perp$,

$$(L^2(\mathbb{R}^n))^N = (\mathcal{N}(\mathcal{L}_\nu^* + \overline{\lambda}))^\perp = \mathcal{R}(\mathcal{L}_\nu + \lambda)$$

folgt; hierbei ist $\lambda \in \sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0)$ und wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $\sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0) \subset \sum(R_0, \vartheta_0)$ ist. Für $\lambda \in \sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0)$ ist $(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}((L^2(\mathbb{R}^n))^N, (L^2(\mathbb{R}^n))^N)$ und

$$||(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1}|| \leq \frac{c_0}{|\lambda|}$$

wobei c_0 nicht von ν abhängt. Sei λ_0 irgendein Punkt aus $\sum(R_0^{(\nu)}, \vartheta_0)$. Dann betrachten wir den Operator

$$R_\lambda(\mathcal{L}_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{L}_\nu + \lambda_0)^{-(u+1)} (\lambda_0 - \lambda)^n.$$

Die Reihe ist konvergent in $\mathcal{L}((L^2(\mathbb{R}^n))^N, (L^2(\mathbb{R}^n))^N)$, wenn nur $|\lambda_0 - \lambda| \leq R_0/2c_0 < \frac{1}{2}||(\mathcal{L}_\nu + \lambda_0)^{-1}||^{-1}$ ist. Wie in Kapitel II. zeigt man, daß für alle λ mit $|\lambda_0 - \lambda| \leq R_0/2c_0$ gilt: $(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}((L^2(\mathbb{R}^n))^N, (L^2(\mathbb{R}^n))^N)$, $R_\lambda(\mathcal{L}_\nu) = (\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1}$. Man beachte, daß R_0 nicht von ν abhängt. Das aus der Funktionentheorie einer Variablen bekannte Kreiskettenverfahren liefert mit der Abschätzung (III.3.8) die Beziehungen

$$(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}((L^2(\mathbb{R}^n))^N,\ (L^2(\mathbb{R}^n))^N),\ \lambda \in \sum(R_0, \vartheta_0),$$

$$||(\mathcal{L}_\nu + \lambda)^{-1}|| \leq c_0/|\lambda|,\ \lambda \in \sum(R_0, \vartheta_0).$$

Sei nun $f \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N$, sei $(\mathcal{L}_\nu + \lambda)u_\nu = f$, wobei λ irgendein Element aus $\sum(R_0, \vartheta_0)$ ist und u_ν in $\mathcal{D}(\mathcal{L}_\nu) = \mathcal{D}(\mathcal{L}) = H^M(\mathbb{R}^n)$ liegt. Nach (III.3.8) ist

$$||u_\nu||_M \leq c_0||f||_0.$$

Eine Teilfolge (u_{ν_j}) von (u_ν) konvergiert schwach gegen ein Element u aus $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = (H^M(\mathbb{R}^n))^N$ und es ist

$$(\mathcal{L} + \lambda)u = f.$$

Mit (III.3.7) folgt der zu beweisende Satz. Hinweis: Wir haben ohne Einschränkung angenommen, daß (III.3.7) und (III.3.8) in demselben Sektor $\sum(R_0, \vartheta_0)$ gelten, wobei R_0 nicht von ν abhängt. $\square$

Wir fügen einige **Schlußbemerkungen** an: Ist in Satz III.3.1 die positive ganze Zahl $l + 1 > \frac{n}{2} + M$, so ist $u \in (C^M(K_\delta(x_0)))^N$. Entsprechend gilt in Satz III.3.5: Ist $l + M > \frac{n}{2} + M$, d.h. $l > \frac{n}{2}$, so ist ebenfalls $u \in (C^M(\overline{\mathbb{R}^n}))^N$. Diese Resultate ergeben sich aus einer leicht abgewandelten Version des Satzes III.2.3 (1. Sobolev Lemma), die wir in der Form eines Problems einführen:

Problem III.3.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, Ω genüge der Kegelbedingung. Seien $l, k \in \mathbb{N}$ gegeben mit

$$l > \frac{n}{2} + k.$$

Dann ist

$$(H^l(\Omega))^N \subset (C^k(\Omega))^N,\ D^{k'}u \in (L^\infty(\Omega))^N,\ u \in H^l(\Omega),$$

$$||D^{k'}u||_{(L^\infty(\Omega))^N} \leq c||u||_l,\ u \in H^l(\Omega),$$

wobei $D^{k'}$ für eine beliebige Ableitung der Ordnung k' steht, $k' \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $k' \leq k$.

Problem III.3.2: Zeige, daß $\overset{\circ}{H}{}^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ ist, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Anleitung: Konstruiere eine Folge (ζ_ν) mit $\zeta_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $\zeta_\nu | K_\nu(0) \equiv 1$, $\zeta_\nu | (\mathbb{R}^n - K_{2\nu}(0)) \equiv 0$, $\zeta_\nu \to 1$, $\nu \to \infty$ f. ü. in $\mathbb{R}^n$, $|\zeta_\nu| \leq 1$, $\nu \in \mathbb{N}$, $D^\alpha \zeta_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle α mit $1 \leq |\alpha| \leq m$. Zeige, daß für $u \in H^m(\Omega)$ gilt: $\zeta_\nu u \to u$, $\nu \to \infty$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$. Auf $\zeta_\nu u$ wende man J_ε an.

Von Satz III.3.6 läßt sich noch eine weitere Verallgemeinerung angeben, nämlich

Satz III.3.7: *Die Matrizenfunktionen a_α, $|\alpha| \leq M$, seien aus $C^0(\overline{\mathbb{R}^n})$. Die a_α, $|\alpha| = M$, seien gleichmäßig stetig, es sei $M = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Es sei für ein $\vartheta_0 \in (0, \pi/2)$*

$$c_E(\overline{\mathbb{R}^n})(|\xi| + |r|)^{M \cdot N} \geq |\det(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)\xi^\alpha + (-1)^m r^{2m} e^{i\vartheta} I)|$$

$$\geq \frac{1}{c_E(\overline{\mathbb{R}^n})}(|\xi| + |r|)^{M \cdot N},\ \vartheta \in [-\vartheta_0 - \frac{\pi}{2}, \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}],\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R},$$

mit einer positiven Konstante $c_E(\overline{\mathbb{R}^n})$. Insbesondere ist der Operator

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(.)D^\alpha u,\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = H^{2m}(\mathbb{R}^n)$$

dann elliptisch, und darüberhinaus gilt folgendes: Es existiert ein $R_0 > 0$ derart, daß für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$-\frac{\pi}{2} + \vartheta_0 \leq arg\lambda \leq \frac{\pi}{2} + \vartheta_0$$

$$|\lambda| \geq R_0 = R_0(n, M = 2m, N, c_E(\overline{\mathbb{R}^n}), ||a_\alpha||_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, w)$$

gilt:

$$\sum_{j=1}^{2m} |\alpha|^{1-j/2m} ||u||_j \leq c_0 ||(\mathcal{L} + \lambda)u||_0.$$

Für diese λ gilt: $\mathcal{R}(\mathcal{L} + \lambda) = L^2(\mathbb{R}^n)$, die inverse Abbildung $(\mathcal{L} + \lambda)^{-1}$ ist aus $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^N))$ und genügt der Abschätzung

$$||(\mathcal{L} + \lambda)^{-1}|| \leq \frac{c_0}{|\lambda|}.$$

Beweis: Die erste Aussage des Satzes (Elliptizität von $\mathcal{L}$) ist klar. Man muß nur $r = 0$ setzen. $\widetilde{\mathcal{L}}$ wird wie im Beweis von Satz III.3.6 eingeführt. In $\widetilde{\mathcal{L}}w$, $w \in H^{2m}(\mathbb{R}^{n+1})$, setzen wir wieder das spezielle $w = \zeta(.)e^{i\mu \cdot}u$ aus $H^{2m}(\mathbb{R}^{n+1})$ ein. $\widetilde{\mathcal{L}}$ gestattet gemäß Voraussetzung wieder die Anwendung von Satz III.3.4 und dies liefert wie im Beweis des Satzes III.3.6 die behauptete Abschätzung von $||(\mathcal{L} + \lambda)u||_0$ nach unten. Nun führen wir $\mathcal{L}_\nu$ wie im Beweis von Satz III.3.6 ein. Es ist zu zeigen, daß $\mathcal{L}_\nu^*$ die vorher angegebene Gestalt hat. Für $\nu \geq \nu_0$ ist zunächst

$$2c_E(\overline{\mathbb{R}^n})(|\xi| + |r|)^{M \cdot N} \geq |\det(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^{(\nu)}(x)\xi^\alpha + (-1)^m r^{2m} e^{i\vartheta} I)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2c_E(\overline{\mathbb{R}^n})}(|\xi| + |r|)^{M \cdot N}, \text{ also}$$

$$2c_E(\overline{\mathbb{R}^n})(|\xi| + |r|)^{M \cdot N} \geq |\det(\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^{(\nu)*}\xi^\alpha + (-1)^m r^{2m} e^{i\vartheta} I)| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2c_E(\overline{\mathbb{R}^n})}(|\xi|+|r|)^{M \cdot N},\ \vartheta \in [-\vartheta_0 - \pi/2, \vartheta_0 + \pi/2],\ x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ r \in \mathbb{R}.$$

Es ist nun klar, daß man so fortfahren kann wie im Beweis des Satzes III.3.6. □

Eine Konsequenz aus Satz III.3.7 ist die folgende:

Ist $\mathcal{L}$ von der Gestalt

$$\mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m, \\ |\beta| \leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) \in H^{2m}(\mathbb{R}^n),$$

mit $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|}(\overline{\mathbb{R}^n})$, $a_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}$ und genügt $\mathcal{L}$ (in ausdifferenzierter Form) den Voraussetzungen des Satzes III.3.7, so ist $\mathcal{L}$ selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

§4. Halbschwache Lösungen elliptischer Systeme. Erzeugung selbstadjungierter Operatoren

Wir beginnen mit einigen Spezialisierungen früherer Begriffe bzw. neuen Begriffen. Es sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}$ sei ein elliptischer Operator der Ordnung $M = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, der in folgender Form gegeben ist:

$$((\text{III.4.1}) \qquad \mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$$

mit $N \times N$-Matrizen. $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $D^k a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $0 \le k \le |\alpha|$, D^k ist eine beliebige Ableitung der Ordnung k. Wir setzen natürlich

$$(\text{III.4.2}) \qquad \mathcal{L}^* u = \sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^\beta(a^*_{\alpha\beta}(.)D^\alpha u), u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$$

Die Elliptizitätsbedingung liest sich wie folgt:

$$(\text{III.4.3}) \qquad \det \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \ne 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

Mit dem Operator $\mathcal{L}$ assoziieren wir eine Sesquilinearform

$$\begin{aligned}(\text{III.4.4})\quad B(u,v) &= (-1)^m \textstyle\sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|-m} < a_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha v > dx,\\ &= (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha|\le m,\\ |\beta|\le m}} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|-m} < D^\beta u, a^*_{\alpha\beta} D^\alpha v > dx,\\ &\quad u, v \in (H^m(\Omega))^N.\end{aligned}$$

Offenbar ist $|B(u,v)| \le c||u||_m||v||_m$, $u, v \in (H^m(\Omega))^N$.

Definition III.4.1: *Seien $m, \Omega, \mathcal{L}$ wie oben. Sei V ein abgeschlossener Teilraum von $(H^m(\Omega))^N$ mit*

$$(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N \subset V \subset (H^m(\Omega))^N.$$

Sei $f \in (L^2(\Omega))^N$. u heißt halbschwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$ in V dann und nur dann, wenn

$$B(u,v) = \int_\Omega < f, v > dx$$

ist für alle $v \in V$.

Der Raum V repräsentiert im allgemeinen eine Randbedingung. Im Fall

$V = (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ wird man gemäß III.2 von einer halbschwachen Lösung des Problems $\mathcal{L}u = f$, $D^\alpha u|\partial\Omega = 0$, $|\alpha| \leq m-1$, sprechen (sogenannte Dirichlet-Nullbedingungen). Im Fall $m = 1$, $V = (H^1(\Omega))^N$ erhält man ein sogenanntes Neumann-Problem, darauf wird noch einzugehen sein. Zur Frage der Existenz von halbschwachen Lösungen zeigen wir

Satz III.4.1: *Seien $m, \Omega, \mathcal{L}, V$ wie in Definition III.4.1. Sei*

$$B(u,v) = (-1)^m \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|-m} < a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v > -dx,\ u, v \in V.$$

Sei

$$|B(u,u)| \geq c||u||_m^2,\ u \in V,$$

mit einer positiven Konstante c. Sei $f \in (L^2(\Omega))^N$. Es gilt dann eine und nur eine halbschwache Lösung $u \in V$ von $\mathcal{L}u = f$.

Beweis: Wir wollen den Satz von Lax-Milgram anwenden (Satz II.7.4 aus meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I"). Sei $\mathcal{H} = V$, dies ist zulässig, da V ein Hilbertraum mit dem $(H^m(\Omega))^N$-Skalarprodukt ist. Durch $L(v) = \int_\Omega < f, v > dx$ ist ein beschränktes lineares Funktional in V gegeben. Also gibt es nach dem eben zitierten Satz von Lax-Milgram ein und nur ein $u \in V$ mit $(\widetilde{B}(v,u) = \overline{B(u,v)})$

$$\begin{aligned}
\widetilde{B}(v,u) &= L(v),\ v \in V,\ \text{d. h.}\\
\overline{B(u,v)} &= \overline{L(v)},\ v \in V,\\
B(u,v) &= \int_\Omega < f, v > dx, v \in V.
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz III.4.1: *Seien $m, \Omega, \mathcal{L}$ wie in Definition III.4.1. Sei V wie vorher eingeführt. Sei $f \in (L^2(\Omega))^N$, sei $a_{\alpha\beta} \in (C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega))^{N^2}$, sei*

$$B(u,v) = \int_\Omega < f, v > dx,\ v \in V$$

für ein $u \in V$. Dann ist $u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$,

$$\mathcal{L}u = f,$$

wobei $\mathcal{L}u$ im Sinne von (III.4.1) zu vertehen ist.

Beweis: Wegen $(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N \subset V$ ist der Hilfssatz eine Konsequenz aus Satz III.3.1, Hilfssatz III.1.3. □

Dieser Hilfssatz legt die folgende Einführung von $\mathcal{L}$ als (unbeschränktem) Operator in $(L^2(\Omega))^N$ unter der durch V repräsentierten Randbedingung nahe: Für $m, \Omega, \mathcal{L}, V$ wie vorher setzen wir

$$\mathcal{D}_V(\mathcal{L}) = \{u | u \in V \cap (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N,\ \mathcal{L}u \in (L^2(\Omega))^N, B(u,v) = (\mathcal{L}u, v),\ v \in V\},$$

$$\text{(III.4.5)} \qquad \mathcal{L}u = \sum_{\substack{|\alpha|\leq m,\\ |\beta|\leq m}} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in \mathcal{D}_v(\mathcal{L}).$$

Dann gilt:

Satz III.4.2: *Sei $\mathcal{L}$ der durch (III.4.5) gegebene elliptische Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ in $(L^2(\Omega))^N$. Seien zusätzlich $a_{\alpha\beta} \in (C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega))^{N^2}$,*

$$|B(u,u)| \geq c||u||^2_m,\ u \in V.$$

mit einer positiven Konstante c. Dann ist $\mathcal{L}$ surjektiv und injektiv. Der inverse Operator (die inverse Abbildung) $\mathcal{L}^{-1}$ ist aus $\mathcal{L}((L^2(\Omega))^N, V)$. Falls Ω beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^m ist, ist $\mathcal{L}^{-1}$ kompakt. In diesen Fällen besitzt die Menge der Eigenwerte von $\mathcal{L}$, d.h. der Zahlen $\lambda \in \mathbb{C}$, zu denen ein $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}) - \{0\}$ existiert mit $\mathcal{L}u = \lambda u$, keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$. Es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte.

Beweis: Die Surjektivität folgt aus Satz III.4.1 und Hilfssatz III.4.1. Sei $\mathcal{L}u = 0$ für ein $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$. Dann ist

$$B(u, \varphi) = 0, \varphi \in V.$$

Mit dem Satz von Lax-Milgram folgt $u = 0$. Der inverse Operator $\mathcal{L}^{-1}$ bildet also $(L^2(\Omega))^N$ in $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ ab. Wegen $B(u,v) = (f,v)$, $v \in V$, $f = \mathcal{L}u$ für ein $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$, folgt

$$\begin{aligned} c||u||^2_m &\leq ||f||_0||u||_0 \leq ||\mathcal{L}u||_0||u||_m, \\ ||u||_m &\leq \frac{1}{c}||\mathcal{L}u||_0. \end{aligned}$$

Setzt man $u = \mathcal{L}^{-1}g$, so entsteht $||\mathcal{L}^{-1}g||_m \leq \frac{1}{c}||g||_0$. Die Kompaktheitseigenschaften von $\mathcal{L}^{-1}$ folgen aus Satz III.1.4 bzw. Satz III.1.6. $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von $\mathcal{L}$. Der Rest folgt aus Satz IV.7.5 in meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“. □

Satz III.4.3: *Sei $\mathcal{L}$ der durch (III.4.5) gegebene elliptische Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ in $(L^2(\Omega))^N$. Seien zusätzlich $a_{\alpha\beta} \in (C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega))^N$,*

$$|B(u,u)| \geq c||u||_m^2, \ u \in V$$

mit einer positiven Konstante c, und

$$a_{\alpha\beta}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}(x), \ x \in \Omega.$$

Dann ist $\mathcal{L}$ selbstadjungiert. Im Falle der Kompaktheit von $\mathcal{L}^{-1}$ hat $\mathcal{L}$ abzählbar unendlich viele reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$. Die Bedingungen, unter denen $\mathcal{L}^{-1}$ kompakt ist, können aus Satz III.4.2 ersehen werden.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$, $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ folgt

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\varphi, u) &= B(\varphi, u), \\ (\mathcal{L}u, \varphi) &= B(u, \varphi), \text{ also} \\ (\varphi, \mathcal{L}u) &= \overline{B(u, \varphi)} \end{aligned}$$

Wegen unserer Voraussetzung $a_{\alpha\beta}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}(x)$, $x \in \Omega$, ist $\overline{B(u,\varphi)} = B(\varphi, u)$. Damit ergibt sich

$$(\mathcal{L}\varphi, u) = (\varphi, \mathcal{L}u), \ \varphi, u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}).$$

Also ist $\mathcal{L}$ hermitesch. Mit Satz I.3.4, Satz III.4.2 folgt in der Tat die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{L}$. Der Rest ergibt sich aus Abschnitt III.6 meiner Vorlesung „Funktionalanalysis I“. $\square$

Wenn $\mathcal{L}$ strikt positiv ist (s. Definition II.8.1) kann man den Definitionsbereich von $\mathcal{L}^{1/2}$ charakterisieren. Es gilt:

Satz III.4.4: *Sei $\mathcal{L}$ der druch (III.4.5) gegebene elliptische Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ in $(L^2(\Omega))^N$. Seien zusätzlich $a_{\alpha\beta} \in (C^{|\alpha|+2m-1}(\Omega))^{N^2}$,*

$$a_{\alpha\beta}(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} a^*_{\beta\alpha}(x), \ x \in \Omega.$$

Dann ist $B(u,u)$ reell. Falls

$$B(u,u) \geq c||u||_m^2, \ u \in V$$

ist mit einer positiven Konstante, ist $\mathcal{L}$ selbstadjungiert und $\geq c > 0$. Für $\mathcal{L}^{1/2}$ gilt: Der Definitionsbereich $\mathcal{D}_V(\mathcal{L}^{1/2})$ von $\mathcal{L}^{1/2}$ ist gerade V. Die „Graphennorm“$||\mathcal{L}^{1/2}.||$ und die Norm $||.||m$ sind äquivalent.

Beweis: Die Selbstadjungiertheit von $\mathcal{L}$ folgt aus dem vorigen Satz. Aus $(\mathcal{L}u, u) = B(u, u) \geq c||u||_m^2 \geq c||u||_0^2$ folgt $\mathcal{L} \geq c > 0 (u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}))$.
Gleichzeitig haben wir

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, u) &= ||\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u||^2 \geq c||u||_V^2,\ u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})\\ (\mathcal{L}u, u) &\leq c'||u||_m^2 = c'||u||_V^2,\ u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c' (Die Norm von V ist natürlich die $||.||_m$-Norm). Sei nun $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}^{1/2})$. Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei

$$u_\nu = (I + \frac{1}{\nu}\mathcal{L})^{-1}u$$

Dann ist $u_\nu \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$. Wenn $\{E(\lambda)|\lambda \in \mathbb{R}\}$ die Spektralschar ist, die zu $\mathcal{L}$ gehört, so hat man

$$(I + \frac{1}{\nu}\mathcal{L})^{-1}u = \int_{c/2}^{+\infty} \frac{1}{(1 + (1/\nu)\lambda)} dE(\lambda)u,$$

$$||(I + \frac{1}{\nu}\mathcal{L})^{-1}u - u||^2 = \int_{c/2}^{+\infty} |\frac{1}{(1 + (1/\nu)\lambda)} - 1|^2 d(E(\lambda)u, u) \to 0,\ \nu \to \infty,$$

$$\mathcal{L}^{1/2}(I + \frac{1}{\nu}\mathcal{L})^{-1}u = (I + \frac{1}{\nu}\mathcal{L})^{-1}\mathcal{L}^{1/2}u \to \mathcal{L}^{1/2}u,\ \nu \to \infty$$

Weiter ist $c||u_\nu - u_\mu||_V^2 \leq ||\mathcal{L}^{1/2}(u_\nu - u_\mu)||^2$, so daß die u_ν eine Cauchy-Folge im Hilbertraum V bilden. Da insbesondere $u_\nu \to u$ in $(L^2(\Omega))^N$ folgt $u \in V$. Also ist $\mathcal{D}_V(\mathcal{L}^{1/2} \subset V$. Außerdem folgt aus $||\mathcal{L}^{1/2}u_\nu||^2 \geq c||u_\nu||_V^2$, daß $||\mathcal{L}^{1/2}u||^2 \geq c||u||_V^2$. Sei nun u aus V. Wir zeigen, daß $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ dicht in V ist. Wir haben

$$B(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (\mathcal{L}\widetilde{u}, \widetilde{v}), \widetilde{u} \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}),\ \widetilde{v} \in V.$$

Sei $\widetilde{\widetilde{v}} \in V$ und $B(\widetilde{u}, \widetilde{\widetilde{v}}) = 0$, $\widetilde{u} \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$. Dann ist $(\mathcal{L}\widetilde{u}, \widetilde{\widetilde{v}}) = 0$, $\widetilde{u} \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$. Wegen $\mathcal{R}(\mathcal{L}) = (L^2(\Omega))^N$ folgt: $\widetilde{\widetilde{v}} = 0$. Nun ist durch $B(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in V$ ein Skalarprodukt in V gegeben, das zu einer V-Norm äquivalenten Norm führt. Daher ist $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ in der Tat dicht in V. Demnach existiert eine Folge (u_ν), $u_\nu \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$, $\nu \in \mathbb{N}$, mit

$$||u - u_\nu||_V \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Nun ist

$$||\mathcal{L}^{1/2}(u_\nu - u_\mu)||_0^2 \leq c'||u_\nu - u_\mu||_V^2,$$

so daß mit der Abgeschlossenheit von $\mathcal{L}^{1/2}$ folgt: $u \in \mathcal{D}_V(\mathcal{L}^{1/2})$. Da $||\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u_\nu||^2 \leq c'||u_\nu||_V^2$ ist, erhalten wir $||\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}u||^2 \leq c'||u||_V^2$. $\square$

Nun soll der Zusammenhang zwischen Elliptizität und einer Ungleichung der Form $B(u,u) \geq c||u||_m^2$ studiert werden. Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht die Gardingsche Ungleichung.

Definition III.4.2: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Seien $M, N \in \mathbb{N}$. Zu jedem $x \in \Omega$ und zu jedem Multiindex α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leq M$ sei eine $N \times N$-Matrix $a_\alpha(x)$ gegeben mit $a_\alpha \in C^0(\Omega)$. Der durch*

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(.)D^\alpha u,\ u \in (H_{loc}^M(\Omega))^N$$

gegebene Operator $\mathcal{L}$ heißt stark elliptisch (in Ω), wenn

$$\mathcal{R}e < \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\eta, \eta > \neq 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ \eta \in \mathbb{C}^N - \{0\}$$

$\mathcal{L}$ heißt gleichmäßig stark elliptisch, (in Ω), wenn $\mathcal{L}$ stark elliptisch ist (in Ω ist) und, wenn mit $\widetilde{\varepsilon} = +1$ oder $\widetilde{\varepsilon} = -1$ gilt:

$$a_\alpha \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ |\alpha| \leq M,$$

$$Q(x,\xi,\eta) = \widetilde{\varepsilon}\mathcal{R}e < \sum_{|\alpha|=M} a_\alpha(x)\xi^\alpha\eta, \eta >$$

$$\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})|\xi|^M|\eta|^2,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{C}^n$$

mit einer Konstanten $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) > 0$. Für Operatoren $\mathcal{L}$, gegeben durch

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in (H_{loc}^{2m}(\Omega))^N,$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, $D^{k'}a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$, $0 \leq k' \leq |\alpha|$, $k' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, lesen sich die Bedingungen wie folgt:

$$(-1)^m\mathcal{R}e < \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\eta, \eta > \neq 0,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ \eta \in \mathbb{C}^N - \{0\},$$

bzw.

$$Q(x,\xi,\eta) = (-1)^m\mathcal{R}e < \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\eta, \eta >$$

$$\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})|\xi|^{2m}|\eta|^2,\ x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{C}^N$$
mit einer Konstanten $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) > 0.$

Es ist klar, daß jeder stark elliptische Operator auch elliptisch ist. Zum Beweis verweisen wir auf den Beweis von Satz III.3.6. Wichtig ist für uns

Satz III.4.5 (Gardingsche Ungleichung): *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen. Sei* $\mathcal{L}$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N.$$

Sei $\mathcal{L}$ *gleichmäßig stark elliptisch in* Ω*. Zusätzlich seien*

$$a_{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega}),\ |\alpha| = |\beta| = m,\ \textit{und}$$
$$a_{\alpha\beta}\ \textit{seien gleichmäßig stetig in}\ \overline{\Omega},\ |\alpha| = |\beta| = m.$$

Dann ist

$$\mathcal{R}e\, B(v,v) \geq c_0||v||^2_m - c_1||u||^2_0,\ v \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N.$$

c_0, c_1 *haben die vor Satz III.3.2 erklärte Bedeutung.*

Vor Beginn des Beweises bemerken wir folgendes: $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega})$ wird auch als Elliptizitätskonstante bezeichnet (anstelle von $c_E(\overline{\Omega})$); c_0 in Satz III.4.5 hängt von $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega})$ (statt $c_E(\overline{\Omega})$) ab. Weiter erinnern wir an die Bedeutung der in c_1 eingehenden Funktion w. Es ist

$$w(r) = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega},\\ |x-y|\leq r}} \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} |a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(y)|,\ r \geq 0.$$

Ferner setzen wir

$$b_{\lambda\sigma}(x) = (-1)^{|\lambda|} \cdot a_{\lambda\sigma}(x),\ x \in \Omega, |\lambda| + |\sigma| < 2m.$$

Infolgedessen haben wir $(u, v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))$

$$B(u,v) = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(.)D^\beta_u, D^\alpha v > dx +$$
$$+ \sum_{|\alpha|+|\sigma|\leq 2m-1} \int_\Omega < b_{\lambda\sigma}(.)D^\sigma u, D^\lambda v > dx.$$

Beweis des Satzes III.4.5: Wir unterscheiden 3 Fälle. 1. Fall: $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta} = const., x \in \overline{\Omega}$. $|\alpha| = |\beta| = m$, $\overline{\Omega}$ beschränkt. Ohne Einschränkung sei

$\overline{\Omega} \subset \{x|x \in \mathbb{R}^n,\ |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\}$. Die Entwicklung von $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ in eine Fourierreihe liefert gemäß III.1 die Formel

$$D^\alpha v = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} i^{|\alpha|} \kappa^\alpha c_\kappa e^{i\kappa \cdot x},$$

$$a_{\alpha\beta} D^\beta v = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} i^{|\beta|} \kappa^\beta a_{\alpha\beta} c_\kappa e^{i\kappa \cdot x}$$

Hieraus folgt wegen der Orthonormalität der $e^{i\kappa \cdot x}/(\sqrt{2\pi})^n$

$$\mathcal{R}e B_0(v, v) = \sum_{\substack{\kappa \in \mathbb{Z}^n, \\ |\alpha|=m, |\beta=m|}} \mathcal{R}e < a_{\alpha\beta} \kappa^\alpha \kappa^\beta c_\kappa, c_\kappa > \cdot (-1)^m,$$

$$= \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{R}e < \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} \kappa^\alpha \kappa^\beta c_\kappa, c_\kappa > \cdot (-1)^m,$$

$$\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2m} |c_\kappa|^2,$$

$$\geq c_0 ||v||_m^2,$$

wobei wir Hilfssatz III.1.1 und Satz III.1.2 benutzt haben. 2. Fall: Ω wie im Satz jedoch

$$supp\, v \subset \{x|x \in \mathbb{R}^n,\ |x_i| < \pi,\ i = 1, \ldots, n\},$$

$$diam\, supp\, v \leq \delta_0$$

mit einer hinreichend kleinen Zahl $\delta_0 > 0$, die wir gleich bestimmen werden. Es folgt

$$c_0 ||v||_m^2 \leq \mathcal{R}e(-1)^m \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(x_0) D^\beta v, D^\alpha v > dx$$

$$= \mathcal{R}e(-1)^m \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(.) D^\beta v, D^\alpha v > dx +$$

$$+ \mathcal{R}e \sum_{|\lambda|+|\sigma| \leq 2m-1} \int_\Omega < b_{\lambda\sigma}(.) D^\sigma v, D^\lambda v > dx +$$

$$+ \mathcal{R}e(-1)^m \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} \int_\Omega < (a_{\alpha\beta}(x_0) - a_{\alpha\beta}(.)) D^\beta v, D^\alpha v > dx -$$

$$- \mathcal{R}e \sum_{|\lambda|+|\lambda| \leq 2m-1} \int_\Omega < b_{\lambda\sigma}(.) D^\sigma v, D^\lambda v > dx,$$

$$\leq \mathcal{R}eB(v,v)+c_0||v||_{m-1}||v||_m+c\max_{x\in supp\,v}\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m}|a_{\alpha\beta}(x_0)-a_{\alpha\beta}(x)|\cdot||v||_m^2,$$

wobei x_0 irgendein Punkt aus $supp\,v$ ist. Wird δ_0 hinreichend klein gewählt, so ist

$$c\max_{x\in supp\,v}\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m}|a_{\alpha\beta}(x_0)-a_{\alpha\beta}(x)|\leq\frac{1}{2}c_0,$$

und wir erhalten

$$c_0||v||_m^2\leq \mathcal{R}eB(v,v)+c_0||v||_{m-1}^2,$$

also mit Satz III.2.5

$$c_0||v||_m^2\leq \mathcal{R}eB(v,v)+c_0||v||_0^2.$$

Wir bemerken, daß die auftretenden Konstanten nicht von δ_0 abhängen. Man erhält dasselbe Ergebnis, wenn

$$suppv\subset\{x|x\in\mathbb{R}^n,\ |x_i-\widehat{x}_i|<\pi,\ i=1,\ldots,n\}$$

ist für ein festes aber beliebiges $\widehat{x}=(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)$, d.h. die auftretenden Konstanten hängen nicht von $\widehat{x}$ ab. Zum Beweis benutze man, daß die **Konstante $c(n,\Omega)$ im Satz III.1.2 nur von $diam\Omega$ abhängt,** d.h. $c(n,\Omega)=c(n,diam\Omega)$; dies ergibt sich aus dem Beweis von Satz III.1.2 da man x durch $x-\widehat{x}$, $\widehat{x}$ fest, aber beliebig, ersetzen kann. Weiter beachte man: Durch Fortsetzen durch Null erhält man

$$v\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\{x|x\in\mathbb{R}^n,\ |x_i|<\pi,i=1,\ldots n\}))^N \text{ bzw.}$$
$$v\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\{x|x\in\mathbb{R}^n,\ |x_i-\widehat{x}_i|<\pi,i=1,\ldots n\}))^N.$$

Wir behandeln nun den **dritten Fall.** Dies ist der allgemeine Fall. $v\in(\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ wird durch Nullsetzen zu einem Element aus $(\overset{\circ}{H}{}^m(\mathbb{R}^n))^N=(H^m(\mathbb{R}^n))^N$ fortgesetzt. Wir wählen eine Überdeckung

$$\mathbb{R}^n\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}Q_i$$

durch achsenparallele offen Quader Q_i mit $diam\,Q_i\leq\delta_0$. Höchstens K der Q_i haben nichtleeren Durchschnitt. Ohne Beweis bemerken wir, daß wir eine untergeordnete Teilung der 1 finden können, die aus Funktion $\alpha_i=\varphi_i^2$ mit $\varphi_i\in C_0^\infty(Q_i)$, φ_i reell, $i\in\mathbb{N}$ besteht. Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}eB(v,v) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|} \mathcal{R}e \int_\Omega < \varphi_i^2 a_{\alpha\beta}(.) D^\beta v, D^\alpha v > dx, \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} (-1)^{m} \mathcal{R}e \int_\Omega < \varphi_i^2 a_{\alpha\beta}(.) D^\beta v, D^\alpha v > dx + \\
&\quad + \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|+|\sigma|\leq 2m-1} \int_\Omega < b_{\lambda\sigma}(.) D^\sigma v, D^\alpha v > dx, \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=m, |\beta=m|} (-1)^{m} \mathcal{R}e \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(.) D^\beta (\varphi_i v), D^\alpha (\varphi_i v) > dx - \\
&\quad - c_1 \sum_{i=1}^{\infty} ||v||_{(H^m(Q_i))^N} ||v||_{(H^{m-1}(Q_i))^N} - c_0 ||v||_{m-1} ||v||_m .
\end{aligned}
$$

Aus unseren Überlegungen zum zweiten Fall folgt

$$
c_0 ||\varphi_i v||_m^2 \leq (-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|-m} < a_{\alpha\beta}(.) D^\beta(\varphi_i v), D^\alpha(\varphi_i v) > dx +
$$
$$
+ c_0 ||\varphi_i v||_0^2 .
$$

Also ist

$$
\mathcal{R}eB(v,v) \geq 1/(c_0+1) \sum_{i=1}^{\infty} (||\varphi_i v||_m^2 - (c_0+1)^2 ||\varphi_i v||_0^2) -
$$
$$
- c_1 \sum_{i=1}^{\infty} ||v||_{(H^m(Q_i))^N} ||v||_{(H^{m-1}(Q_i))^N} - c_0 ||v||_{m-1} ||v||_m .
$$

Nun ist

$$
\sum_{i=1}^{\infty} ||\varphi_i v||_m^2 \geq \sum_{\substack{i=1, \\ |\alpha|\leq m}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_i^2 |D^\alpha v|^2 dx - c_1 \sum_{i=1}^{\infty} ||v||_{(H^m(Q_i))^N} ||v||_{(H^{m-1}(Q_i))^N} ,
$$

$$
\sum_{i=1}^{\infty} ||v||_{(H^m(Q_i))^N} ||v||_{(H^{m-1}(Q_i))^N} \leq \delta ||v||_m + c(\delta) ||v||_0 , \ \delta > 0,
$$

wie aus Satz III.2.5 folgt. Ebenfalls mit Satz III.2.5 erhalten wir $||v||_m ||v||_{m-1} \leq \delta ||v||_m^2 + c(\delta) ||v||_0$, $\delta > 0$. Damit ergibt sich, indem wir δ in Abhängigkeit von c_1, c_0 hinreichend klein wählen,

$$
\mathcal{R}eB(v,v) \geq c_0 ||v||_m^2 - c_1 ||v||_0^2 ,
$$

was zu beweisen war. $\square$

Daß durch die Gültigkeit der G$\mathring{a}$rdingschen Ungleichung die starke Elliptizität impliziert wird, zeigt der folgende Satz. Es gilt:
Satz III.4.6: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zu allen Multiindizes α, β des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha|, |\beta| \leq m$ un zu jedem $x \in \Omega$ seien $N \times N$-Matrizen $a_{\alpha\beta}(x)$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:*

$$a_{\alpha\beta} \in C^{|\alpha|}(\Omega), D^k a_{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega),\ 0 \leq k \leq |\alpha|,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$a_{\alpha\beta} \in C^0(\overline{\Omega}),\ |\alpha| = |\beta| = m,$$

$$\mathcal{R}eB(v,v) \geq c_0||v||_m^2 - c_1||v||_0^2,\ v \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N,$$
mit Konstanten $c_0, c_1 > 0$.

Hierbei ist

$$B(v,v) = (-1)^m \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} \int_\Omega (-1)^{|\alpha|-m} < a_{\alpha\beta}(.)D^\beta v, D^\alpha v > dx,$$
und $\mathcal{L}$ ist der durch

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta v)$$
gegebene Differentialoperator mit $v \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$ bzw. $u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$. Dann ist $\mathcal{L}$ gleichmäßig stark elliptisch in Ω, d.h.

$$\Omega(x,\xi,\eta) = (-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} < a_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha \xi^\beta \eta, \eta >$$

$$\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})|\xi|^{2m}|\eta|^2,\ x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{C}^N,$$
wobei $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega})$ eine positive Konstante ist.

Beweis: Angenommen, die Aussage des Satzes ist falsch. Dann existiert ein $x_0 \in \overline{\Omega}$, und es existieren $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $\eta \in \mathbb{C}^N - \{0\}$ mit

$$(-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m, |\beta|=m} < a_{\alpha\beta}(x_0)\xi^\alpha \xi^\beta \eta, \eta >= 0.$$

Sei $v \in (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N$. Dann folgt

$$c_0||v||_m^2 \leq \mathcal{R}eB(v,v) + c_1||v||_0^2 \leq (-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m}$$

$$\int_\Omega < a_{\alpha\beta}(x_0)D^\beta v, D^\alpha v > dx +$$

$$+(-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} \int_\Omega < (a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(x_0))D^\beta v, D^\alpha v > dx +$$

$$+c||v||_m||v||_{m-1}$$

Wir wählen ein so kleines $\delta_0 > 0$, daß für $0 \leq r \leq \delta_0$ der Ausdruck $w(r) \leq \frac{1}{2}c_0$ wird. Falls $supp\, v \subset \overline{\Omega} \cup \overline{K_{\delta_0}(x_0)}$ ist, dann folgt mit Satz III.2.5 die Ungleichung

$$\frac{1}{2}c_0||v||_m^2 \leq (-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(x_0)D^\beta v, D^\alpha v > dx + c||v||_{m-1}||v||_m,$$

$$||v||_m^2 \leq c(-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(x_0)D^\beta v, D^\alpha v > dx + c||v||_0^2.$$

Nun sei φ eine reelle Funktion aus $C_0^\infty(\Omega \cap K_{\delta_0}(x_0))$ mit $\varphi(x) \equiv 1$ auf einer hinreichend kleinen Kugel von positivem Radius, die mit ihrem Abschluß in $\Omega \cap K_{\delta_0}(x_0)$ liegt. Sei

$$v(x) = \varphi(x)e^{i\lambda\xi\cdot x}\eta \in (C_0^\infty(\Omega))^N \subset (\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega))^N,$$

wobei $\lambda \geq 1$, insbesondere reell, und ξ, η die festen Elemente aus $\mathbb{R}^n - \{0\}$ bzw. $\mathbb{C}^N - \{0\}$ sind mit $Q(x_0, \xi, \eta) = 0$. Wir haben

$$||v||_m^2 \geq \lambda^{2m}|\eta|^2 \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2 ||\varphi||_0^2 - \lambda^{2m-1}c(||\varphi||_m, \xi, \eta, u, m)$$

und andererseits

$$(-1)^m \mathcal{R}e \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} \int_\Omega < a_{\alpha\beta}(x_0)D^\beta v, D^\alpha v > dx \leq$$

$$\leq (-1)^m \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m} < a_{\alpha\beta}(x_0)\xi^\alpha\xi^\beta\eta, \eta > ||\varphi||_0^2 + \lambda^{2m-1}c(||\varphi||_m, \xi, \eta, u, m),$$

$$\leq \lambda^{2m-1}c(||\varphi||_m, \xi, \eta, u, m),$$

wobei die Konstanten $c(||\varphi||_m, \xi, \eta, u, m)$ positiv sind und nicht von λ abhängen. Somit ergibt sich

$$\lambda^{2m}|\eta|^2 \sum_{|\alpha|=m} (\xi^\alpha)^2||\varphi||_0^2 \leq \lambda^{2m-1}c(||\varphi||_m, \xi, \eta, , m).$$

Der Faktor von λ^{2m} ist wegen $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $||\varphi||_0^2 \neq 0$ sicher positiv. Die letzte Ungleichung wird durch λ^{2m-1} dividiert, anschließend lassen wir λ gegen $+\infty$ streben und erhalten einen Widerspruch. $\square$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Problemen.

Problem III.4.1: Wenn in Satz III.3.1 der elliptische Operator $\mathcal{L}$ in der Form

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N.$$

gegeben ist nur mit $a_{\alpha\beta} \in C^{2m}(\Omega)$, wenn $f \in (L^2_{loc}(\Omega))^N$, wenn u schwache Lösung von $\mathcal{L}u = f$ ist mit $u \in (H^m_{loc}(\Omega))^N$, so ist $u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$,

$$||u||_{(H^{2m}(K_\delta(x_0)))^N} \leq c_0||f||_{(L^2(K_{2\delta}(x_0)))^N} + c_2||u||_{(H^{2m-1}(K_{2\delta}(x_0)))^N},$$

und c_2 hängt neben den in Satz III.3.1 angegebenen Größen nur von den $||a_{\alpha\beta}||_{C^{2m}(K_{2\delta}(x_0))}$ statt den $||a_\alpha||_{C^{|\alpha|+2m-1}(K_{2\delta}(x_0))}$ ab.

Lösungshinweis: Man muß nur davon Gebrauch machen, daß wegen

$$a_{\alpha\beta} \in C^{\max(|\alpha|,|\beta|)}(\Omega)$$

jedenfalls

$$a^*_{\alpha\beta} \in C^{|\beta|}(\Omega)$$

und somit

$$\mathcal{L}^*u = \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^\beta(a^*_{\alpha\beta}(.)D^\alpha u),$$

$u \in (H^{2m}_{loc}(\Omega))^N$. ist. Offenbar kommt es nur auf die Abschätzung der $\mathcal{R}(\kappa)$ an. Man sieht leicht, daß im Beweis von Satz III.3.1. gilt:

$$\mathcal{L}^*v(x) = \varphi(x)\mathcal{L}^*_0(x, i\kappa)e^{i\kappa\cdot x}\gamma + \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\leq m,\\ \alpha=\alpha'+\alpha'',\\ |\beta|+|\alpha'|\leq 2m-1}} D^\beta(a^*_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha'}e^{i\kappa\cdot x}D^{\alpha''}\varphi(x))\gamma$$

Infolgedessen ist

$$\mathcal{R}(\kappa) = \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le m,\\ \alpha=\alpha'+\alpha'',\\ |\beta|+|\alpha'|\le 2m-1}} \int_\Omega [D^\beta(a^*_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha'}e^{i\kappa\cdot x}D^{\alpha''}\varphi(x))]^* u(x)dx$$

$$= \sum_{\substack{|\alpha|,|\beta|\le m,\\ \alpha=\alpha'+\alpha'',\\ |\beta|+|\alpha'|\le 2m-1}} \int_\Omega (a^*_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha'}e^{i\kappa\cdot x}D^{\alpha''}\varphi(x)))^*(-1)^{|\beta|}D^\beta u(x)dx.$$

Unter der Annahme $u \in H^m(K_{2\delta}(x_0))$ folgere man hieraus

$$\sum_{\kappa\in\mathbb{Z}^n} |\kappa|^{2(m+1)}|(\mathcal{L}_0(x_0, i\kappa))^{-1}|^2 \cdot |\mathcal{R}(\kappa)|^2 \le c_2||u||^2_{H^m(K_{2\delta}(x_0))},$$

hieraus schließe man wie im Beweis des Satzes III.3.1, daß $u \in H^{m+1}(K_\delta(x_0))$ ist. Auf diese Weise erhält man mit der obigen Methode sukzessive $u \in H^{2m}(K_\delta(x_0))$, ohne mehr als $2m$-malige stetige Differenzierbarkeit der Koeffizientenmatrizen $a^*_{\alpha\beta}$ zu verbrauchen.

Problem III.4.2: Man zeige, daß in Satz III.3.6 jedes $\vartheta_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ gewählt werden kann. Erläutere, warum man damit rechnen muß, daß $R_0 \to +\infty$, wenn $\vartheta_0 \to \pi/2$. Zeige, daß Resolventenmenge und Spektrum (Definition!) von $-\mathcal{L}$ wie in nachfolgender Figur erläutert liegen:

§5. Die klassischen Randwertprobleme der Mathematischen Physik: Dirichlet- und Neumann-Problem für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seien $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $1 \leq i, j \leq n$ reellwertig, seien $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \in L^\infty(\Omega)$, $1 \leq i, j, k \leq n$. Mit einer positiven Konstante $\widetilde{c}_E(\overline{\Omega})$ sei

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})|\xi|^2,\ x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Seien $b_i \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $c \in C^0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zur Abkürzung setzen wir

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial b_j}{\partial x_j} - c.$$

Wir setzen

$$\text{(III.5.1)}\mathcal{L}u = -\sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(.)\frac{\partial u}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i(.)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(.)u,\ u \in H^2_{loc}(\Omega),$$

$$\text{(III.5.2)}= \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1, \\ |\beta| \leq 1}} D^\alpha(\widetilde{a}_{\alpha\beta}(.)D^\beta u),\ u \in H^2_{loc}(\Omega),$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{\alpha\beta}(x) &= -a_{ij}(x),\ x \in \Omega,\ \alpha = e_i,\ \beta = e_j,\ 1 \leq i, j \leq n, \\
\widetilde{a}_{0\beta}(x) &= -b_j(x),\ x \in \Omega,\ \beta = ej,\ 1 \leq j \leq n, \\
\widetilde{a}_{\alpha 0}(x) &= 0,\ x \in \Omega,\ \alpha = e_i,\ 1 \leq i \leq u, \\
\widetilde{a}_{00}(x) &= c(x), x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Weiter ist wegen a_{ij} reell

$$\mathcal{R}e \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}(x)\zeta_i\overline{\zeta}_j \geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})|\zeta|^2,\ \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Nun gilt:

Satz III.5.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der durch (III.5.1) bzw. (III.5.2) gegebene Operator $\mathcal{L}$ ist gleichmäßig stark elliptisch. Falls*

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leq i \leq n,\ b_i(x) \in \mathbb{R},\ x \in \Omega,\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\mathcal{R}e\beta(x) \leq -\varepsilon_0 < 0,\ x \in \Omega,$$

so hat das Problem $\mathcal{L}u = f$ *zu jedem* $f \in L^2(\Omega)$ *genau eine Lösung* $u \in H^2_{loc}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap \{\widetilde{u} | \widetilde{u} \in H^2_{loc}(\Omega), \mathcal{L}\widetilde{u} \in L^2(\Omega)\} = \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ *mit* $V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. *Falls* Ω *beschränkt ist, falls*

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \leq i \leq n,$$

$$\mathcal{R}e\beta(x) \leq 0,\ x \in \Omega,$$

so hat das Problem $\mathcal{L}u = f$ *zu jedem* $f \in L^2(\Omega)$ *genau eine Lösung* $u \in H^2_{loc}(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap \{\widetilde{u} | \widetilde{u} \in H^2_{loc}(\Omega),\ \mathcal{L}\widetilde{u} \in L^2(\Omega)\} = \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ *mit* $V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

Beweis: Die erste Behauptung des Satzes ist wegen $N = 1$ trivial. Für jedes $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}eB(v,v) &= \mathcal{R}e[\sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} dx + \int_\Omega c|v|^2 dx + \sum_{j=1}^n \int_\Omega b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \overline{v} dx], \\
&\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) ||\Delta v||_0^2 + \mathcal{R}e[\int_\Omega c|v|^2 dx - \sum_{j=1}^n \int \frac{1}{2} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} |v|^2 dx], \\
&\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) ||\Delta v||_0^2 - \int_\Omega \mathcal{R}e\beta |v|^2 dx \\
&\geq \min(\varepsilon_0, \widetilde{c}_E(\overline{\Omega})) ||v||_1^2.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der vorvorletzten Zeile argumentiert man wie folgt: Für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist offenbar

$$\mathcal{R}e \int_\Omega b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} \overline{v} dx = - \int \frac{\partial b_j}{\partial x_j} |v|^2 dx,$$

wie durch partielle Integration folgt (Satz von Gauß). Durch Grenzübergang bestätigt man leicht die Richtigkeit der obigen Formel für alle $v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Damit ist wegen Satz III.4.2 der Satz für allgemeines Ω bewiesen. Für beschränktes Ω erhält man

$$\mathcal{R}eB(v,v) \geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) ||\Delta v||_0^2.$$

Mit Satz III.1.2 folgt die Behauptung des Satzes auch in diesem Fall aus Satz III.4.2. $\square$

u bezeichnet man als Lösung der Dirichletproblems $\mathcal{L}u = f$, $u|\partial\Omega = 0$. Man kann noch folgendes beweisen: Sind die a_{ij}, b_j, c und f sowie $\partial\Omega$ hinreichend glatt, insbesondere Ω beschränkt, so hat das Divichletproblem $\mathcal{L}u = f$, $u|\partial\Omega = 0$, genau eine Lösung aus $\mathcal{D}_v(\mathcal{L})$, die dann in $C^2(\overline{\Omega})$ liegt, wenn nur

$$c(x) \geq 0, \; x \in \overline{\Omega},$$

ist. Die Beweismethode ist analog der aus dem Beweis von Satz III.5.1, doch benötigen wir zusätzliche Regularitätsaussagen über die Elemente aus $\mathcal{D}_V(\mathcal{L})$, die wir hier nicht beweisen können. In gewisser Weise werden diese Aussagen zur Interpretation des folgenden Resultats präzisiert.

Satz III.5.2: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\mathcal{L}$ der durch (III.5.1) bzw. (III.5.2) gegebene gleichmäßig stark elliptische Operator $\mathcal{L}$. Falls*

$$b_i(x) = 0, \; x \in \Omega$$

$$\mathcal{R}e c(x) \geq \varepsilon_0 > 0, \; x \in \Omega,$$

so hat das Problem $\mathcal{L}u = f$ zu jedem $f \in L^2(\Omega)$ genau eine Lösung $u \in \{\widetilde{u} | \widetilde{u} \in H^2_{loc}(\Omega) \cap V, \; \mathcal{L}\widetilde{u} \in L^2(\Omega), B(u,v) = (\mathcal{L}u, v), \, v \in V\} = \mathcal{D}_V(\mathcal{L})$ mit $V = H^1(\Omega)$, B wie im Beweis des Satzes III.5.1.

Beweis: Wir haben für $v \in H^1(\Omega)$

$$\mathcal{R}eB(v,v) = \mathcal{R}e[\sum_{1 \leq i,j \leq n} \int_\Omega a_{ij}(.) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} dx + \int_\Omega c(.)|v|^2 dx],$$

$$\geq \widetilde{c}_E(\overline{\Omega}) ||\nabla v||_0^2 + \varepsilon_0 ||v||_0^2,$$

$$\geq \min(\widetilde{c}_E(\overline{\Omega}), \varepsilon_0) ||v||_1^2$$

Damit folgt der Satz. □

Das gewonnene Resultat wird nun in der folgenden Weise interpretiert. Sei Ω beschränkt und von der Klasse C^2. Dann kann man zeigen, daß die in Satz III.5.2 gewonnene Lösung aus $H^2(\Omega)$ ist. Insbesondere hat jede Ableitung $\partial u / \partial x_i$, $1 \leq i \leq n$, eine Spur auf $\partial\Omega$ im Sinne von III.2. Nach Satz III.2.2 ist, wenn man die M_β ausrechnet,

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \sum_{1\le i,j\le u} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} dx + \int_\Omega c u \overline{v} dx, \\ &= (\mathcal{L}u, v) + \sum_{1\le i,j\le u} \int_{\partial\Omega} a_{ij}(\xi)\nu_i(\xi) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\xi) \cdot \overline{v}(\xi) d\Omega, \\ &= (f,v),\ v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{L}u = f$ folgt

$$\sum_{1\le i,j\le u} \int_{\partial\Omega} a_{ij}(\xi)\nu_i(\xi) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\xi)\overline{v}(\xi) d\Omega = 0,\ v \in H^1(\Omega).$$

Aus der Tatsache, daß diese Beziehung für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt, kann man folgern, daß die für alle stetigen Abbildungen $v : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ gilt. Hieraus kann man folgern

$$\sum_{ij=1}^{u} a_{ij}(\xi)\nu_i(\xi) \frac{\partial u}{\partial x_j}(\xi) = 0 \text{ fast überall in } \partial\Omega,$$

präziser

$$\sum_{ij=1}^{u} a_{ij}\nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

als Element von $L^2(\partial\Omega)$. Man sagt, u löst das Neumann Problem

$$\mathcal{L}u = f,$$

$$\sum_{i,j=1}^{u} a_{ij}\nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$