Vorlesung „Mathematik für Physiker IV “

Inhaltsverzeichnis:

Kapitel 1
Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

§1. Holomorphe Funktionen

Der Begriff der komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$, der offenen, der abgeschlossenen und der kompakten Menge in $\mathbb{C}$ wird als bekannt vorausgesetzt. Zwischen den Punkten (x, y) des $\mathbb{R}^2$ und den komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$ besteht vermöge

$$z = x + iy,\ i^2 = -1$$

topologische Isomorphie.

Sei $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = |z|$, $\overline{z} = x - iy$, $z = re^i\varphi$, $r = |z| > 0$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Wir schreiben für $r > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$U_r(z_0) = K_r(z_0) = \{z||z - z_0| < r\}.$$

Definition I.1.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, die Stetigkeit von f ist wie üblich erklärt. Sei $K_r(z_0) \subset \mathcal{D}$. f heißt in z_0 komplex differenzierbar, wenn es eine Zahl $f'(z_0)$ gibt mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit*

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \text{ für } 0 < |z - z_0| < \delta, z \in \mathcal{D}$$

Definition I.1.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ sei in jedem $z_0 \in \mathcal{D}$ komplex differenzierbar. $f' : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann heißt f holomorph in $\mathcal{D}$.*

Wenn $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen ist und $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph in $\mathcal{D}$ sind, dann sind

$$\text{(I.1.1)} \quad \left[\begin{array}{l} f + g, f \cdot g \text{ holomorph in } \mathcal{D}, \\ (f+g)' = f' + g', f + g \text{ holomorph in } \mathcal{D}, \\ (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', f \cdot g \text{ holomorph in } \mathcal{D}. \end{array}\right.$$

Wenn $\mathcal{D}, \widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{C}$ offen sind, wenn $f : \mathcal{D} \to \widetilde{\mathcal{D}}$, $g : \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}$ holomorph sind, so ist $f \circ g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\text{(I.1.2)} \quad (g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Beispiel I.1.1:
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{z+\overline{z}}{2} = x$. Sei

$$z_n = \frac{i}{n},\ \text{also}\ \frac{f(z_n) - f(0)}{z_n - 0} = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\widetilde{z}_n = \frac{1}{n}, \text{ also } \frac{f(\widetilde{z}_n) - f(0)}{\widetilde{z}_n - 0} = 1, \; n \in \mathbb{N}$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(0)}{z_n - 0} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(\widetilde{z}_n) - f(0)}{\widetilde{z}_n - 0}, \text{ obwohl}$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \widetilde{z}_n \text{ ist.}$$

Also ist f in 0 **nicht** komplex differenzierbar. Dagegen ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto z$ holomorph mit $f'(z) = 1$. Insbesondere ist dann nach (I.1.1) jedes Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$z \longmapsto \sum_{\nu=0}^{n} a_n z^n, \; a_0, \ldots, a_n \text{ komplexe Konstanten,}$$

holomorph.

Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{D}$. Man sagt, es sei

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c \in \mathbb{C}$$

dann und nur dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß

$$|f(z) - c| < \varepsilon$$

ist für $z \in \mathcal{D}$, $0 < |z - z_0| < \delta$. Also ist $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in \mathcal{D}$ holomorph, wenn $K_r(z_0) \subset \mathcal{D}$ für ein $r > 0$ und für die Funktion $g : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$z \longmapsto \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

gilt: $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Hilfssatz I.1.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{D}$. f ist in z_0 komplex differenzierbar dann und nur dann, wenn*

$K_r(z_0) \subset \mathcal{D}$ für ein $r > 0$,
es existiert eine Funktion
$\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, die in z_0 stetig ist, derart, daß
$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\eta(z)$, $z \in \mathcal{D}$, ist.

Beweis: Sei f in z_0 komplex differenzierbar. Sei

$$\eta(z) = \left[\begin{array}{lll} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für} & z \neq z_0, \\ f'(z_0) & \text{für} & z = z_0. \end{array} \right.$$

Dann ist η stetig in z_0. Nun existiere umgekehrt η. Dann ist

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\eta(z)=\eta(z_0)=f'(z_0).$$

$\square$

Hilfssatz I.1.4: *Sei $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ in $z_0\in\mathcal{D}$ komplex differenzierbar. Dann existieren eine Funktion $\varphi:\mathcal{D}-\{z_0\}\to\mathbb{C}$ und ein $c\in\mathbb{C}$ derart, daß $c=f'(z_0)$,*

$$f(z)=f(z_0)+c(z-z_0)+(z-z_0)\varphi(z)$$

und $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$ sind. Sei umgekehrt $f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$, $z_0\in\mathcal{D}$, $K_r(z_0)\subset\mathcal{D}$ für ein $r>0$, und es mögen φ, c wie oben existieren. Dann ist f in z_0 komplex differenzierbar und $f'(z_0)=c$.

Beweis: 2. Richtung. Es ist

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-c\right)=0,\ \text{d. h.}$$

$$f \text{ ist in } z_0 \text{ komplex differenzierbar mit } f'(z_0)=c.$$

1. Richtung: Sei $\eta(z):=\varphi(z)+c$, $z\in\mathcal{D}-\{z_0\}$, $\eta(z_0)=:c(\Rightarrow c\overset{Bew.HSI.1.3}{=}f'(z_0))$, also $\eta(z_0)=c=\lim\limits_{z\to z_0}\eta(z)$, $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$. Der Hilfssatz ist bewiesen.

$\square$

Für $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, ist $\mathcal{O}(\mathcal{D})=\{f|f:\mathcal{D}\to\mathbb{C}\text{ holomorph}\}$ der Ring der in $\mathcal{D}$ holomorphen Fuktionen.

Der **Unterschied** zwischen komplexer und reeller partieller Differentiation besteht darin, daß der Differenzenquotient $(f(z)-f(z_0))|(z-z_0)$ bei Annäherung von z_0 durch z aus beliebiger Richtung stets denselben Wert liefert. Dies hat weitreichende Konsequenzen. Eine holomorphe Funktion ist im Großen bereits durch ihr Verhalten auf beliebig kleinen offenen Mengen vollständig bestimmt wie wir noch sehen werden. Dies steht in völligem Gegensatz zur Verhalten reell (beliebig oft stetig) differenzierbarer Funktionen.

Beispiel I.1.2:

1.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen}\\
&f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \text{ holomorph}\\
&\mathcal{D}' \subset \mathcal{D},\ \mathcal{D}' \text{ offen}\\
&f = g \text{ in } \mathcal{D}' \overset{\text{Beweis später}}{\Rightarrow} f = g \text{ in } \mathcal{D}
\end{aligned}$$

2. Sei

$$\begin{aligned}
f(z) = f(x,y) &= f(x_1, x_2), |x| = (x^2 + y^2)^{1/2}\\
&= \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)}, |x| < 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

f beliebig oft stetig diffbar in $\mathbb{R}^2$, aber nicht holomorph.

§2. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ irgendeine Funktion. Dann betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \longmapsto Re\, f(x+iy), \\ v : \mathcal{D} \to \mathbb{R}, &\quad (x,y) \longmapsto Im\, f(x+iy), \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y), \text{ kurz} \\ f &= u + iv \end{aligned}$$

ist. Es gilt

Satz I.2.1 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen): *$f = u + iv : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, ist genau dann holomorph, wenn u, v total differenzierbar in $\mathcal{D}$ nach x, y sind und, wenn gilt: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Beweis: Sei f ohne Einschränkung in $z_0 = 0 \in \mathcal{D}$ komplex differenzierbar. Dann folgt mit Hilfssatz I.1.4

$$f(z) = f(0) + c \cdot z + z\varphi(z), \varphi(z) \to 0 \text{ für } z \to 0.$$

Mit $z = x + iy$, $f = u + iv$, $\varphi = \alpha + i\beta$, $c = a + ib$ folgt

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + iv(x,y), \\ &= u(0) + iv(0) + (a+ib)(x+iy) + (x+iy)(\alpha+i\beta). \end{aligned}$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(0) + (ax - by) + (x\alpha - y\beta) \\ v(0) + (bx + ay) + (x\beta + y\alpha) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x\alpha - y\beta \\ x\beta + y\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\Phi(x,y) = \frac{x\alpha - y\beta}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Wegen $|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1$, $|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1$ ist $|\Phi(x,y)| \leq |\alpha| + |\beta|$, so daß wir mit $\varphi(z) \to 0$ für $z \to 0$ erhalten:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Phi(x,y) = 0.$$

Ebenso folgt mit
$$\Psi(x,y) = \frac{x\beta + y\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
die Aussage
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Psi(x,y) = 0.$$
Daher sind
$$\begin{aligned} u(x,y) &= u(0,0) + (ax - by) + \sqrt{x^2+y^2}\cdot\phi(x,y) \\ v(x,y) &= v(0,0) + (bx + ay) + \sqrt{x^2+y^2}\cdot\Psi(x,y) \end{aligned}$$
total differenzierbar in $(0,0)$ mit
$$\begin{array}{rclrcl} \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) &=& a, & \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) &=& -b, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) &=& b, & \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) &=& a \end{array}$$
und nach Hilfssatz I.1.4

(I.2.1) $\quad f'(0) = a + ib = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(0,0),$

(I.2.2) $\quad = \frac{1}{i}\left(i\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)\right).$

Seien umgekehrt u, v total differenzierbar in $z_0 = 0$. Es mögen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} a: &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0), \\ b: &= -\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0,0) \end{aligned}$$
gelten. Dann ist
$$u(x,y) = u(0,0) + ax - by + \sqrt{x^2+y^2}\varphi_1(x,y),$$
$$v(x,y) = v(0,0) + bx + ay + \sqrt{x^2+y^2}\varphi_2(x,y)$$
mit $\varphi_1 : \mathcal{D} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi_2 : \mathcal{D} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $\varphi_i(x,y) \to 0$ für $(x,y) \to 0$, $i = 1, 2$. Also ist mit
$$\begin{aligned} f &= u + iv, \\ \text{gerade } f(x+iy) &= f(0) + (a+ib)(x+iy) + \sqrt{x^2+y^2}(\varphi_1 + i\varphi_2)(x,y), \\ f(z) &= f(0) + c\cdot z + z\frac{|z|}{z}\varphi_z(z) \text{ mit} \\ c &= a + ib,\ \varphi_3(z) = (\varphi_1 + i\varphi_2)(z). \end{aligned}$$

Sei $\varphi(z) = \frac{|z|}{z}\varphi_3(z)$. Dann ist φ eine Abbildung von $\mathcal{D} - \{0\}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{z\to 0}\varphi(z) = 0$. Nach Hilfssatz I.1.4 ist f in 0 komplex differenzierbar. $\square$

Wie bereits betont, bedeutet die komplexe Differenzierbarkeit gerade, daß man bei der Bildung des Differenzenquotienten $(f(z) - f(z_0))|(z - z_0)$ und anschließendem Grenzübergang $z \to z_0$ unabhängig davon, aus welcher Richtung z gegen z_0 strebt, stets dasselbe Ergebnis erhält. Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen stellt sich dieser Sachverhalt wie folgt dar: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $0 \in \mathcal{D}$.

Sei $z = x + i \cdot 0$; es ist dann

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z} &= \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} + i\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x},\\ &= u_x(0,0) + iv_x(0,0) = f'(0).\end{aligned}$$

Sei $z = 0 + iy$; es ist dann

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z} &= \lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{iy} + i\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{iy},\\ &= \frac{1}{i}(u_y(0,0) + iv_y(0,0)),\\ &= f'(0),\end{aligned}$$

und wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist in der Tat

$$u_x(0,0) + iv_x(0,0) = \frac{1}{i}(u_y(0,0) + iv_y(0,0)).$$

Beispiele I.2.1:

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{z+\overline{z}}{2} = x,$

$$\begin{aligned}u(x,y) &= x,\ v(x,y) = 0,\ \text{also}\\ u_x(x,y) &= 1,\ v_y(x,y) = 0,\end{aligned}$$

   so daß die Cauchy-Riemannschen DGLen nirgends erfüllt und f nirgends komplex differenzierbar ist.

2. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$\begin{aligned}u(x,y) &= x^2 - y^2,\\ v(x,y) &= 2xy,\\ f(z) &= f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x+iy \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

   Dann ist $u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y)$.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, u, v sind stetig differenzierbar, also total differenzierbar in $\mathbb{R}^2$, also ist f holomorph. Es ist $f(z) = z^2$.

3. Sei $z = x + iy$. Wir setzen

$$e^z := e^x(\cos y + i \sin y),\ z \in \mathbb{C}.$$

Mit

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y, \\ v(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned}$$

folgt: $u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y)$, $u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y)$. Also ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \to z \longmapsto e^z$ holomorph. Wir haben übrigens

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y,\ y \in \mathbb{R}, \\ |e^{iy}| &= 1,\ (e^{\cdot})'(z) = e^z \end{aligned}$$

Wir sehen jetzt, daß der folgende Satz gilt, für den übrigens die komplexe Differenzierbarkeit ausreicht (S. II.8).

Satz I.2.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ in $\mathcal{D}$ stetig ($f = u + iv$).*

Eine Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bezeichnet man bekanntlich als sternförmig (bezüglich p), wenn es einen Punkt $p \in \mathcal{D}$ gibt derart, daß mit $q \in \mathcal{D}$ auch die Strecke $\overline{pq}$ in $\mathcal{D}$ liegt. Es gilt

Satz I.2.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $f = u + iv$. Dann besitzen die in $\mathcal{D}$ erklärten Vektorfelder*

$$(v, u) \text{ und } (u, -v)$$

jeweils ein Potential.

Beweis: Zum Vektorfeld (v, u): Es ist $v_y = u_x$ wegen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Zum Vektorfeld $(u, -v)$: Es ist $u_y = -v_x$ ebenfalls nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Die Behauptungen folgen aus dem Poincaré-Lemma 12.4, Mathematik für Physiker III. $\square$

Für den letzten Satz reicht es aus, $\mathcal{D}$ als einfach zusammenhängend vorauszusetzen.

Satz I.2.4: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ mit*

$$F' = f.$$

Beweis: Sei U ein Potential von $(u, -v)$, V ein Potential von (v, u), sei

$$F = U + iV$$

(s. Satz I.2.3). Dann sind U, V stetig differenzierbar in $\mathcal{D}$, also insbesondere total differenzierbar. Es ist

$$\begin{aligned} U_x &= u, & V_x &= v, \\ U_y &= -v & V_y &= u, \end{aligned}$$

so daß die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Also ist nach Satz I.2.1 die Funktion F holomorph. Es ist nach (I.2.1)

$$F' = U_x + iV_x = u + iv = f.$$

$\square$

Hinweis: In Satz I.2.3 und Satz I.2.4 wurde die stetige Differenzierbarkeit von u, v benutzt, nicht nur die totale Differenzierbarkeit.

§3. Konforme Abbildungen

Seien zwei Kurven α, β in $\mathbb{C}$ gegeben, d.h. zwei Abbildungen α, β eines offenen oder abgeschlossenen Intervalls I in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^2$, die nach $t \in I$ stetig differenzierbar sind. α, β mögen sich in $z_0 = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ schneiden, $t_0 \in I$. Es sei $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$, $\dot{\beta}(t_0) \neq 0$, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t_0) &= re^{i\varphi} \\ \dot{\beta}(t_0) &= se^{i\psi}, \end{aligned}$$

$\psi - \varphi$ ist der Winkel, unter dem sich α, β schneiden.

Satz I.3.1 (Winkeltreue oder konforme Abbildung): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $f'(z_0) \neq 0$. Sind $\alpha, \beta : I \to \mathbb{C}$ Kurven wie oben durch $z_0 = \alpha(t_0) = \beta(t_0)$ mit $t_0 \in \overset{\circ}{I}$, $\dot{\alpha}(t_0) \neq 0$, $\dot{\beta}(t_0) \neq 0$, so gilt für die Bildkurven $f \circ \alpha$, $f \circ \beta$:*

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{f \circ \alpha}}(t_0) &\neq 0, \\ \dot{\overbrace{f \circ \beta}}(t_0) &\neq 0, \end{aligned}$$

$f \circ \alpha$, $f \circ \beta$ schneiden sich in $f(z_0)$ unter demselben Winkel wie α, β in z_0.

Beweis: Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $\widetilde{\alpha}(t) = f \circ \alpha(t) = (\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$. Wegen $f'(z_0) \neq 0$ haben wir

$$f'(z_0) = Re^{i\gamma} \text{ mit } R > 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\alpha}}(t) &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)), \\ &= \frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) + i \frac{d}{dt} v(x(t), y(t)), \\ &= u_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) + \\ &\quad + i v_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + i v_y(x(t), y(t))\dot{y}(t), \\ &= u_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v_x(x(t), y(t))\dot{y}(t) + \\ &\quad + i(v_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + u_x(x(t), y(t))\dot{y}(t)) \\ &\quad \text{nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen} \\ &= (u_x(x(t), y(t)) + i v_x(x(t), y(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)) \\ &= f'(x(t) + iy(t))\dot{\alpha}(t). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also $\dot{\overbrace{f \circ \alpha}}(t_0) \neq 0$ und

$$\dot{\overbrace{f \circ \alpha}}(t_0) = Rre^{i(\gamma+\varphi)}(\dot{\alpha}(t_0) = re^{i\varphi}).$$

Ebenso folgt $\dot{\overbrace{f \circ \beta}}(t_0) \neq 0$ und

$$\dot{\overbrace{f \circ \beta}} = Rse^{i(\gamma+\psi)}(\dot{\beta}(t_0) = se^{i\psi})$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Aus dem Beweis von Satz I.3.1 folgt, daß die Kurve α bei Übergang zu $f \circ \alpha$ in z_0 um den Winkel γ gedreht wird.

Beispiele I.3.1: Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $z \longmapsto e^z$. Es ist $f'(z) = f(z) = e^z$ nach Formel (I.2.1) für z statt $(0,0)$, also $f'(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

1. x sei fest, $0 \leq y < 2\pi$.
   $y = 0 \perp$ zu $x = -1$, $x = +1$, $x = 0$
   $f(y = 0) = \{\xi > 0\} \perp$ zu $f(x = -1)$, $f(x = +1)$, $f(x = 0)$.
2. y sei fest, $x \in \mathbb{R}$. Für $y = 3\pi/4$ haben wir

$$\begin{aligned} e^z &= e^x(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)), \\ &= e^x(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}), \end{aligned}$$

$$f(y = \frac{3\pi}{4}) = \{\eta = -\xi, \xi < 0\}.$$

   Für $y = \pi/2$ haben wir
   $e^z = ie^x$, $f(y = \pi/2) = \{\eta > 0\}$.

   Für $y = \pi/4$ haben wir
   $e^z = e^x(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2})$,
   $f(y = \pi/4) = \{\eta = \xi, \xi > 0\}$.

   Für $y = 0$ haben wir
   $f(y = 0) = \{\xi > 0\}$.

   Dies liefert das folgende Bild.

Satz I.3.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. In $z_0 \in \mathcal{D}$ sei $f'(z_0) \neq 0$. Die Kurven*

$$\begin{aligned} u(x,y) &= c_1 \\ v(x,y) &= c_2 \end{aligned}$$

$(f = u + iv)$ zu reellen Konstanten c_1, c_2 mögen sich im Punkt (x_0, y_0), $z_0 = x_0 + iy_0$, schneiden. Dann schneiden sie sich orthogonal.

Beweis: Nach Satz I.2.2 ist $f'(z) \neq 0$ in einer Umgebung $U_r(z_0)$. Sei etwa $u_y(x,y) \neq 0$ in $U_r(z_0)$. Ohne Einschränkunkung können wir dann annehmen, daß sich in $U_r(z_0)$ die Punktmenge $u(x,y) = c_1$ als eine nach x parametrisierte Kurve $(x, y(x))$ darstellen läßt. Es folgt aus $u(x, y(x)) = c_1$ die Beziehung

$$u_x \cdot 1 + u_y \cdot y' = 0, \text{ also}$$
$$y' = -\frac{u_x}{u_y}.$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist $v_y = u_x$. Sei nun $v_y \neq 0$ in $U_r(z_0)$. Dann ist dort auch $u_x \neq 0$. Parametrisierung von $v(x,y) = c_2$ nach x in $U_r(z_0)$ liefert mit den Cauchy-Riemannschen Dglen.

$$v_x \cdot 1 + v_y \cdot y' = 0, \text{ also}$$
$$y' = -\frac{v_x}{v_y} = \frac{u_y}{u_x}.$$

Im gemeinsamen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ haben demnach die Kurven $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$ die Steigung

$$y'(x_0) = -\frac{u_x(x_0,y_0)}{u_y(x_0,y_0)} \text{ bzw. } y'(x_0) = \frac{u_y(x_0,y_0)}{u_x(x_0,y_0)}.$$

Sie schneiden sich also senkrecht. Falls $u_x \neq 0$ ist in $U_r(z_0)$, parametrisieren wir $u(x,y) = c_1$ nach y und erhalten für die Steigung der Tangente in (x_0, y_0)

$$x'(y_0) = -\frac{u_y(x_0,y_0)}{u_x(x_0,y_0)}.$$

Ist $v_x \neq 0$ in $U_r(z_0)$, parametrisieren wir auch $v(x,y) = c_2$ nach y und erhalten mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Steigung der Tangente in (x_0, y_0)

$$x'(y_0) = \frac{u_x(x_0,y_0)}{u_y(x_0,y_0)},$$

insbesondere ist dann auch $u_y(x_0, y_0) \neq 0$ in $U_r(z_0)$. Die beiden Tangenten stehen in (x_0, y_0) wieder senkrecht aufeinander. Nun sei $u_y(x,y) \neq 0$ in

$U_r(z_0)$, jedoch $v_y(x_0,y_0) = 0$, also auch $u_x(x_0,y_0) = 0$. Dann ist die Tangente an $u(x,y) = c_1$ in (x_0,y_0) waagerecht (parallel zur x-Achse). Wegen $v_x(x,y) \neq 0$ in $U_r(z_0)$ (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen) folgt bei Parametisierung nach y für die Tangente $v(x,y) = c_2$ in (x_0,y_0):

$$x'(y_0) = -\frac{v_y(x_0,y_0)}{v_x(x_0,y_0)} = 0,$$

so daß die Tangente senkrecht (parallel zur y-Achse) verläuft. Der Fall $u_x(x,y) \neq 0$ in $U_r(z_0)$, $v_x(x_0,y_0) = 0$ wird analog behandelt. □

Beispiele I.3.2:

1. **Das Geschwindigkeitsfeld einer ebenen Strömung** ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld

$$\overrightarrow{v} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^2, (x,y) \longmapsto (p(x,y), q(x,y)),$$

das auf einer offenen Menge $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ erklärt ist. Es ist

$$\begin{array}{rl} \text{quellenfrei:} & p_x + q_y = 0, \\ \text{wirbelfrei:} & p_y = q_x = 0. \end{array}$$

Die Funktion $p - iq$ ist dann, da die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $p_x = (-q)_y$, $p_y = -(-q_x)$ gelten, nach Satz I.2.1 holomorph. Sei zusätzlich $\mathcal{D}$ sternförmig. Nach Satz I.2.3 haben (p,q) und $(-q,p)$ ein Potential. Es existieren Funktionen

$$\begin{array}{rcl} u : \mathcal{D} & \to & \mathbb{R}, \\ v : \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rl} u_x = p, & u_y = q, \\ v_x = -q, & v_y = p. \end{array}$$

$f = u + iv$ ist in $\mathcal{D}$ holomorph, weil die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind. Wir haben

$$\begin{array}{rcl} f' & = & u_x + iv_x, \text{ also} \\ \overline{f'} & = & u_x - iv_x = p + iq = \overline{v} \end{array}$$

in komplexer Schreibweise. Das **Potential des Geschwindigkeitsfeldes** ist wegen $u_x = p$, $u_y = q$ gerade u. Die **Potentiallinien** sind demnach

$$u(x,y) = c, \ c \text{ konstant.}$$

Die **Stromlinien** sind die dazu senkrechten Kurven

$$v(x,y) = \widetilde{c}, \ \widetilde{c} \text{ konstant.}$$

Die Potentiallinien und Stromlinien betrachten wir natürlich in den Punkten aus $\mathcal{D}$, in denen $f' \neq 0$ ist. Sei $\widetilde{\mathcal{D}}$ offen, $\overline{\widetilde{\mathcal{D}}} \subset \mathcal{D}$. Man kann zeigen, daß für $f' \not\equiv 0$ der Fall $f' = 0$ in jedem $\widetilde{\mathcal{D}}$ höchstens in abzählbar vielen isolierten Punkten (für unbeschränktes $\mathcal{D}$) oder höchstens in endlich vielen Punkten (für beschränktes $\mathcal{D}$ eintritt. Im ersten Fall häufen sich die Nullstellen von f' nirgends in $\overline{\widetilde{\mathcal{D}}}$. Sei konkret

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \text{ also} \\ f'(z) &= 2z, \text{ und } \mathcal{D} = \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Außerhalb von $x \leq 0$, d.h. in $\mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} - \{(x,0)|x \leq 0\}$ sind die Potentiallinien gegeben durch

$$x^2 - y^2 = c,$$

die Stromlinien durch

$$xy = \widetilde{c}.$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist $\overline{f'}(z) = 2\overline{z}$.

2. Wir bleiben bei dem Geschwindigkeitsfeld $\overrightarrow{v}$, den Potentiallinien und Stromlinien wie unter 1. eingeführt. Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{z}$. f ist in der sternförmigen offenen Menge $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} - \{(x,0)|x \leq 0\}$ holomorph. Es ist

$$f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}, \; z = x + iy \in \mathcal{D},$$

also

$$\overrightarrow{v}(x,y) = \overline{f'(z)} = -\frac{1}{\overline{z}^2} = -\frac{1}{r^2}e^{2i\varphi}, \; z = re^{i\varphi}$$

Die Stromlinien sind gegeben durch

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \widetilde{c}, \; \widetilde{c} \text{ konstant, also} \\ \frac{y}{x^2+y^2} &= \widetilde{c}, \; x^2 + y^2 - \frac{y}{\widetilde{c}} = 0 \text{ für } \widetilde{c} \neq 0. \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um die Kreise durch $(0,0)$ mit Mittelpunkt $(0, 1/2\widetilde{c})$ und Radius $1/2|\widetilde{c}|$. Für $\widetilde{c} = 0$ ergibt sich $\{(x,0)|x > 0\}$. Die Potentiallinien sind gegeben durch

$$\frac{x}{x^2+y^2} = c, \; x^2 + y^2 - \frac{x}{c} = 0 \text{ für } c \neq 0.$$

Dies sind die Kreise durch $(0,0)$ mit Mittelpunkt $(1/2c, 0)$ und Radius $1/2|c|$. Für $c = 0$ ergibt sich $\{(0,y)|y \neq 0\}$. Wir erhalten folgendes Bild:

3. Geschwindigkeitsfeld $\overrightarrow{v}$, Potentiallinien und Stromlinien sind wieder wie unter 1. eingeführt. $\mathcal{D}$ sei wieder die sternförmige offene Menge $\mathbb{C}^{**} - \{(x,0)|x \leq 0\}$. $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \text{ also} \\ f'(z) &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2}). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f'(+1) = 0 = \overline{f'(+1)}$. Für $|z| = 1$ wird $z\overline{z} = 1$, also $1/z = \overline{z}$, also $f(z) = x$ für $|z| = 1$. Mit

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ folgt}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

$$\begin{aligned} f(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + \frac{i}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi, \\ u(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi, \\ v(re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi, \ r > 0, \ \pi < \varphi \leq 0 \text{ oder } \pi > \varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Für $|z| = r \neq 1$ überführt f demnach die Kreislinie $|z| = r$ in die Ellipse mit den Halbachsen $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ und $\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})(r > 1)$ bzw. $\frac{1}{2}(\frac{1}{r}-r)(r < 1)$. Durchläuft man $|z| = r \neq 1$ in Richtung wachsender φ (mathematisch positiv), so hat man im Bild von $|z| = r$ unter f denselben Umlaufsinn, falls $r > 1$ ist, jedoch den entgegengesetzten, falls $r < 1$ ist. Für $r = 1$ erhält man als Bild von $|z| = 1$ das Intervall $(-1, 1]$. Es ergibt sich folgendes Bild:

Allgemeines Bild für $r > 1$, Parameter φ.

$r = 100$, fast ein Kreis.

$r = 2$.

$r = 1 + \varepsilon$, die Figur nähert sich der x-Achse an.

$r = \frac{1}{2}$. Gleiches Bild wie $r = 2$, aber entgegengesetzte Umlaufrichtung.

Wir betrachten die Stromlinien $v(x, y) = \widetilde{c}$, $\widetilde{c}$ konstant. Für große r ist $v(x, y) \approx \frac{1}{2}r\sin\varphi$, d. h. $v(x, y) \approx (1/2)y$. Dies bedeutet, daß für große

r die Stromlinien $v(x,y) = \widetilde{c}$ die Gestalt $y = 2\widetilde{c}$ haben. Genauer ist

$$v(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) r \sin\varphi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) y, \text{ so daß}$$

$$y\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = 2\widetilde{c} = 2v(x,y) \text{ bedeutet:}$$

$$y = \frac{2\widetilde{c}}{1 - 1/r^2}.$$

$\widetilde{c} = 0$ heißt $y = 0$ oder $r = 1$. Wir erhalten folgenes Bild:

§4. Der Logarithmus

Wir untersuchen holomorphe Funktionen, deren (komplexe) Ableitung gerade $\frac{1}{z}$ ist. Es gilt

Hilfssatz I.4.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \notin \mathcal{D}$. Sei $L : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und*

$$e^{L(z)} = z, \; z \in \mathcal{D}.$$

Dann ist

$$L'(z) = \frac{1}{z}.$$

Beweis: Nach S. 2, S. 9 ist

$$e^{L(z)} L'(z) = 1,$$

$$L'(z) = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}.$$

□

Hilfssatz I.4.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \notin \mathcal{D}$. Sei $\mathcal{D}$ wegweise zusammenhängend. Sei $G : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und*

$$G'(z) = \frac{1}{z}, \; z \in \mathcal{D}.$$

Dann existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ derart, daß für die Funktion L, $L(z) = G(z) + c$, $z \in \mathcal{D}$, gilt:

$$e^{L(z)} = z, \; z \in \mathcal{D}.$$

Beweis: Sei $h(z) = u + iv = ze^{-G(z)} (e^{-z} := 1/e^z, \, z \in \mathbb{C})$, $z \in \mathcal{D}$. Also ist

$$\begin{aligned} h'(z) &= e^{-G(z)} - zG'(z)e^{-G(z)}, \\ &= e^{-G(z)} - e^{-G(z)} = 0. \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt: ∇u, $\nabla v = 0$ in $\mathcal{D}$. Aus dem wegweisen Zusammenhang von $\mathcal{D}$ und Satz I.2.2 folgt

$$h(z) = \widetilde{c}, \, \widetilde{c} \text{ konstant } \neq 0.$$

Zu $\widetilde{c} \neq 0$ finden wir ein $c \in \mathbb{C}$ mit $e^c = \widetilde{c}$. Also ist

$$e^c = ze^{-G(z)},$$

$$e^{G(z)+c} = z.$$

□

Definition I.4.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $0 \notin \mathcal{D}$. Eine holomorphe Funktion $L : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ heißt ein Zweig des Logarithmus auf $\mathcal{D}$, wenn für alle $z \in \mathcal{D}$ gilt:*

$$e^{L(z)} = z.$$

Satz I.4.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig. Sei $0 \notin \mathcal{D}$. Dann existiert auf $\mathcal{D}$ ein Zweig L des Logarithmus. $\mathcal{D}_1 = L(\mathcal{D})$ ist offen und wegweise zusammenhängend. Es gilt:*

$$L(e^w) = w, \ w \in \mathcal{D}_1.$$

Ist $\widetilde{L}$ auch ein Zweig des Logarithmus auf $\mathcal{D}$, so existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$L(z) - \widetilde{L}(z) = 2\pi i k, \ z \in \mathcal{D}.$$

Beweis: Gemäß Satz I.2.4 wählen wir eine Stammfunktion G zu $z \longmapsto \frac{1}{z}$. Sei $L = G + c$, wobei c die Konstante aus Hilfssatz I.4.2 ist. Nach Hilfssatz I.4.2 ist

$$e^{L(z)} = z, \ z \in \mathcal{D}.$$

Wir zeigen später, daß $\mathcal{D}_1$ offen und wegweise zusammenhängend ist. Sei $w \in \mathcal{D}_1$, $z \in \mathcal{D}$, $w = L(z)$. Dann ist

$$L(e^w) = L(e^{L(z)}) = L(z) = w.$$

Es sei

$$\begin{aligned} k(z) &= \frac{1}{2\pi i}(L(z) - \widetilde{L}(z)), \ \text{also} \\ 2\pi i k(z) &= L(z) - \widetilde{L}(z), \\ e^{2\pi i k(z)} &= e^{L(z)} e^{-\widetilde{L}(z)} = z \cdot (1/z) = 1, \ z \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Die 1-Stellen von e^z sind, wie aus der Definition von e^z auf S. 9 folgt, gerade die Punkte $z = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $2\pi i k(z) \in 2\pi i \mathbb{Z}$. $k(.)$ ist in $\mathcal{D}$ stetig, $\mathcal{D}$ ist wegweise zusammenhängend, also ist $k(z)$ konstant gleich einem $k \in \mathbb{Z}$ in $\mathcal{D}$. $\square$

Wir kommen zur Existenz stetiger Polarkoordinaten.

Satz I.4.4: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, sei $0 \notin \mathcal{D}$. Sei $L : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf $\mathcal{D}$. Dann gibt es eine stetige Funktion*

$$\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

mit

$$z = |z| e^{i\varphi(z)}, \ z \in \mathcal{D},$$

und

$$L(z) = \log |z| + i\varphi(z), \ z \in \mathcal{D}.$$

Beweis: Sei
$$L(z) = u(z) + i\varphi(z),\ z \in \mathcal{D},$$
mit $u(z) \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) \in \mathbb{R}$, $z \in \mathcal{D}$. Dann ist $z = e^{L(z)} = e^{u(z)}e^{i\varphi(z)}$, also
$$\begin{aligned} |z| &= e^{u(z)}, \\ \log|z| &= u(z) \text{ und} \\ z &= e^{u(z)}e^{i\varphi(z)} = |z|e^{i\varphi(z)}. \end{aligned}$$
φ ist nach I.2 sogar stetig differenzierbar. $\square$

Aus Satz I.4.4 folgt sofort

Satz I.4.5: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ sternförmig und offen, sei $0 \notin \mathcal{D}$. Sei L ein Zweig des Logarithmus auf $\mathcal{D}$. Dann gilt:*
$$ReL(z) = \log|z|.$$

Beispiele I.4.1:

1. Sei $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} - \{x \leq 0\}$.
$z = |z|e^{i\varphi(z)}$ mit $\varphi = \varphi(z)$, $-\pi < \varphi < \pi$,
$\downarrow L$, $L(z) = \log|z| + i\varphi(z)$
$\downarrow e^{L(.)}$

2. Sei $\mathcal{D}$ wie in 1. Sei $f(z) = L(z) = \log|z| + i\varphi(z)$ in $\mathcal{D}$. Das Geschwindigkeitsfeld $\overrightarrow{v}$, die Potentiallinien und Stromlinien sind wie in I.3 erklärt. Es ist also
$$\overrightarrow{v}(z) = \overline{f'(z)} = \frac{1}{\overline{z}},$$
die Potentiallinien sind
$$\begin{aligned} u(x,y) &= c, \ \text{ d.h. } \log|z| = c, \ \text{ d.h.} \\ |z| &= e^c, \end{aligned}$$
die Stromlinien sind
$$\varphi(z) = v(x,y) = \widetilde{c}.$$
Bei $\varphi(z)$ können wir uns wie in 1. auf das eindeutig bestimmte $\varphi(z)$ mit $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ mit $-\pi < \varphi(z) < \pi$ beschränken. Wir erhalten das folgende Bild:

Die Stromlinien gehen also vom Nullpunkt aus. Man sagt, daß $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$, eine Quellströmung beschreibt.

3. $\mathcal{D}$ ist wie in 1., $L(z) = \log|z| + i\varphi(z)$ ist wie in 1. Die Strömung mit dem Geschwindigkeitsfeld $\overrightarrow{v}(z) = \overline{1} = 1$, d.h. das zu f, $f(z) = z$, $z \in \mathcal{D}$, gehörige Geschwindigkeitsfeld, wird man als Geschwindigkeitsfeld einer Parallelströmung bezeichnen, die Stromlinien sind dann nämlich die Geraden $y = \widetilde{c}$, $\widetilde{c}$ konstant. Diese Parallelströmung findet man z.B. bei einem mit konstanter Geschwindigkeit strömenden Fluß realisiert. Wir kombinieren sie mit einer Quellströmung nach 2. und betrachten die sich ergebenden Stromlinien als Modell für die Einleitung eines Schadstoffs in einem Fluß. Sei also

$$\begin{aligned} f(z) &= z + L(z), \\ \overrightarrow{v}(z) &= \overline{f'(z)} = 1 + \frac{1}{\overline{z}}, \end{aligned}$$

Potentiallinien: $n(x,y) = x + \log|z| = c$, c konstant,
Stromlinien: $v(x,y) = y + \varphi(z) = \widetilde{c}$, $\widetilde{c}$ konstant.

Für die Potentiallinien erhalten wir demnach

$$\begin{aligned} |z| &= e^{c-x}, \\ y^2 &= e^{2(c-x)} - x^2. \end{aligned}$$

Für die Stromlinien gilt

$$\varphi(z) = \widetilde{c} - y.$$

Wegen $\tan\frac{1}{2}\varphi(z) = \sin\frac{\varphi(z)}{2} / \cos\frac{\varphi(z)}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= 2\,arc\,\tan \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi(z)}{1+\cos\varphi(z)}}, \\ &= 2\,arc\,\tan \pm\sqrt{\frac{+\sqrt{x^2+y^2}-x}{+\sqrt{x^2+y^2}+x}}, \ z \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

so daß die Stromlinien gegeben sind durch

$$y + 2\,arc\,\tan\sqrt{\frac{+\sqrt{x^2+y^2}-x}{+\sqrt{x^2+y^2}+x}} = \widetilde{c}.$$

Für $x = 0, |\widetilde{c}| \geq \frac{\pi}{2}$, erhält man $y = \widetilde{c} + \frac{\pi}{2}$, $y \leq 0$ für $x = -1$ folgt $y + 2\,arc\,\tan \pm\sqrt{\frac{\sqrt{1+y^2}+1}{\sqrt{1+y^2}-1}} = \widetilde{c}$. Für $\widetilde{c} = \pm\pi$ treffen sich die zugehörigen Stromlinien also in $(-1,0)$. Insgesamt ergibt sich folgendes Bild:

Wir haben $\overrightarrow{v}(-1,0) = \overline{f'(-1,0)} = 0$. Man sagt, daß in $(-1,0)$ ein Staupunkt vorliegt.

Zur vorstehenden Figur und Interpretation des Beispiels s. [Triebel, Analysis und mathematische Physik, S. 177]. Hier finden sich auch andere interessante Beispiele.

§5. Harmonische Funktionen

Wir beginnen mit

Definition I.5.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ offen. $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn h zweimal stetig differenzierbar ist und in $\mathcal{D}$ der Differentialgleichung*

$$\Delta h = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

genügt.

Hilfssatz I.5.1: *Wenn $f = u + iv$ in $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, holomorph ist, dann sind u, v in $\mathcal{D}$ harmonisch.*

Beweis: Wir zeigen später: u, v sind in $\mathcal{D}$ beliebig of stetig differenzierbar. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

folgt $u_{xx} = v_{yx}$, $u_{yy} = -v_{xy}$, also $\Delta u = 0$ in $\mathcal{D}$. Für v ist der Beweis analog. $\square$

Satz I.5.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig. Sei u in $\mathcal{D}$ harmonisch. Dann existiert eine in $\mathcal{D}$ holomorphe Funktion f mit*

$$Re f = u.$$

Beweis: Es existiere ein in $\mathcal{D}$ holomorphes $f = u + iv$. Dann folgt aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y), \\ &= u_x(x,y) - iu_y(x,y),\ z = x + iy. \end{aligned}$$

Wir setzen daher, bei vorgegebenem harmonischem u: $g(z) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$. Aus $\Delta u = 0$ folgt $u_{xx} = -u_{yy}$, allgemein gilt, $u_{xy} = u_{yx}$. Also erfüllen u_x, $-u_y$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und sind in $\mathcal{D}$ total differenzierbar. Also ist g holomorph in $\mathcal{D}$. Daher existiert nach Satz I.2.4 ein holomorphes $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $f = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$ mit

$$f'(z) = g(z),\ z \in \mathcal{D}.$$

Wir wählen ein $z_0 \in \mathcal{D}$ und f so, daß

$$\widetilde{u}(z_0) = u(z_0)$$

Dies ist möglich, da mit $f' = g$ auch $(f+c)' = g$ ist, c eine Konstante. Also ist $(\widetilde{u} - u)_x = 0$ und $(\widetilde{u} - u)_y = 0$ in $\mathcal{D}$. Wegen $\widetilde{u}(z_0) = u(z_0)$ und der Eigenschaft von $\mathcal{D}$, zusammenhängend zu sein, folgt $\widetilde{u} = u$ in $\mathcal{D}$. $\square$

Beispiel I.5.1: Sei $\overset{\circ}{E} = \{z | z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe. Wir geben auf $\partial \overset{\circ}{E}$ eine stetige reellwertige Funktion g vor, indem wir setzen

$$g(z) = 100(Rez)^2 = 100x^2, \; z = x + iy$$

Gesucht ist eine stetige Funktion $T : \overline{\overset{\circ}{E}} \to \mathbb{R}$, so , daß T in $\overset{\circ}{E}$ harmonisch ist und der Gleichung $T|\partial \overset{\circ}{E} = g$ genügt. Wir haben mit $z = |z|e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \neq 0$ die Beziehung

$$g(x,y) = 100 \cos^2 \varphi = 50 + 50 \cos 2\varphi$$

wegen $\cos^2 \varphi = 1/2 + 1/2 \cos 2\varphi$. Wir suchen ein holomorphes f mit $Ref = g$ auf $\partial \overset{\circ}{E}$. Auf $\partial \overset{\circ}{E}$ ist $x^2 + y^2 = 1$, also $x^2 = 1 - y^2$, $x^2 - y^2 + 1 = 2x^2$. Nun ist $x^2 - y^2 + 1$ genau der Realteil von $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^2 + 1$. Wir setzen also an

$$\begin{aligned} f(z) &= 50(z^2 + 1) \\ &= 50(x^2 - y^2 + 1) + 100ixy \end{aligned}$$

mit $u(x,y) = 50(x^2 - y^2 + 1)$, $v(x,y) = 100xy$. Dann ist u harmonisch in $\overset{\circ}{E}$ und auf $\partial \overset{\circ}{E}$ ist $u(x,y) = 100x^2$.

Hilfssatz I.5.2: *Seien $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{C}$ offen. Sei $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C}$ holomorph, $f(\mathcal{D}_1) \subset \mathcal{D}_2$, sei $h : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist $h \circ f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ harmonisch.*

Beweis: Übung. $\square$

Mit Hilfssatz I.5.2 können wir ein weiteres interessantes Beispiel behandeln, nämlich

Beispiel I.5.2: Gesucht ist ein Potential ϕ für ein elektrisches Feld in $\{(x,y) | x > 0, y > 0\}$, das in $\{(0,y) | y \geq 0\}$ sowie $\{(x,0) | x \geq 0\}$ ein und denselben konstanten Wert b annimmt. Wir suchen also ein in $x > 0$, $y > 0$ harmonisches ϕ mit $\phi = const.$ auf $x = 0$, $y \geq 0$ und $y = 0$, $x \geq 0$.

Zunächst behandeln wir das entsprechende Problem für den Winkel π, d.h. wir suchen ein in $y > 0$ harmonisches ϕ mit $\phi = const.$ in $y = 0$.

Der Ansatz eines nur von y abhängigen ϕ liefert $\phi_{xx} = 0$, also wegen $\Delta\phi = 0 : \phi_{yy} = 0$, also $\phi(x, y) = ay + b$, z.B. $\phi(x, y) = y + b$. Dann ist grad $\phi = (0, 1)$. Die Abbildung $z \longmapsto z^2$ verdoppelt den Winkel $\frac{1}{2}\pi$, d.h. $x > 0$, $y > 0$ geht über in $y > 0$ (keine Winkeltreue in $z = 0$ wegen $f'(0) = 0$ mit $f(z) = z^2$). Der Rand des rechten Winkels, nämlich $x = 0$, $y \geq 0$ und $y = 0$, $x \geq 0$, geht über in $y = 0$. Sei

$$\phi_1 = \phi \circ f \text{ in } x \geq 0, y \geq 0.$$

Dann ist nach Hilfssatz I.5.2 ϕ_1 harmonisch in $x > 0$, $y > 0$, es ist

$$\phi_1 = Imf + b, \text{ also}$$

$$\phi_1(x, y) = 2xy + b$$

und dies ist die gesuchte Lösung. Es ist $grad\phi_1(x, y) = 2\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ und $grad\phi_1(x, y)$ steht senkrecht auf den Linien $\phi_1 = \text{const}$ im Punkt (x, y). Das entsprechende Problem in Winkel $\pi/4$ wird mit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto z^4$ durch $\phi_2(x, y) = \phi \circ f(x, y) = Imz^4 + b = Im(x^4 + 4x^3iy + 6x^2i^2y^2 + 4xi^3y^3 + i^4y^4) + b = 4x^3y - 4xy^3 + b = 4xy(x^2 - y^2) + b = 4xy(x + y)(x - y) + b$ gelöst.

Zur Lösung von Randwertproblemen für $\Delta u = 0$ in offenen Mengen $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ist es also nützlich, diese auf die obere Halbebene $y > 0$ holomorph abzubilden.

Kapitel 2
Integralsätze

§6. Kurvenintegrale

Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Wir führen den Begriff der stückweise stetig differenzierbaren Kurve ein. Sei $a < b$, $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, sei $\gamma : [a, b] \to \mathcal{D}$ stetig. Dann heißt das Tripel $(I, \gamma, \gamma(I))$ stetige Kurve (oder Weg) in $\mathcal{D}$, $\gamma(I)$ heißt die Spur der Kurve $(I, \gamma, \gamma(I))$. Statt der umständlichen aber korrekten Kennzeichnung einer Kurve als Tripel verwenden wir einfach die Bezeichnung γ (Vgl. I.3). Die stetige Kurve $(I, \gamma, \gamma(I))$ heißt stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung ζ von $[a, b]$ gibt, d.h. $n + 1$ Punkte $t_0, \ldots, t_n$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \text{ also}$$

$$[a, b] = \bigcup_{\nu=1}^{n} [t_{\nu-1}, t_\nu]$$

derart, daß $\gamma|[t_{\nu-1}, t_\nu]$ stetig differenzierbar ist, $1 \leq \nu \leq n$. Letzteres heißt, daß mit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ die Funktionen x, y in $[t_{\nu-1}, t_\nu]$ stetig differenzierbar sind. Wir setzen noch $\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t) = \frac{d}{dt}x(t) + i\frac{d}{dt}y(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, $f = u + iv$. Dann setzen wir

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Definition II.6.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig, $(I, \gamma, \gamma(I))$ sei eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathcal{D}$. Dann setzen wir*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt.$$

$\cdot$ bedeutet in dieser Definition die komplexe Multiplikation. Es ist also

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) - v(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t)]dt +$$

$$+ i \int_a^b [u(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) + v(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t)]dt.$$

$\int_\gamma f(z)dz$ heißt auch das (komplexe) Kurvenintegral von f über γ. Unter den Voraussetzungen von Definition II.6.1 können wir die Bogenlänge L_γ einer Kurve γ einführen. Wir setzen

$$L_\gamma := \int_\gamma |dz| := \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt.$$

Hilfssatz II.6.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig, $|f(z)| \leq M$ für $z \in \mathcal{D}$ und $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathcal{D}$. Dann ist*

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq M \cdot L_\gamma.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |\int_\gamma f(z)dz| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\dot\gamma(t)|dt, \\ &\leq M \int_a^b |\dot\gamma(t)|dt = M \cdot L_\gamma. \end{aligned}$$

□

Hilfssatz II.6.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig. f besitze eine Stammfunktion F. $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}$ sei eine stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathcal{D}$. Dann ist*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

und falls γ geschlossen ist, d.h. $\gamma(b) = \gamma(a)$ gilt, ist

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b F'(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)dt, \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}F(\gamma(t))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Beispiel II.6.1: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $t \longmapsto e^{2\pi i t}$. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^1 \frac{2\pi i e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}}dt = 2\pi i$$

Insbesondere besitzt $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{z}$, keine Stammfunktion. Dies liegt natürlich daran, daß $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ nicht sternförmig ist. Ist jedoch $\mathcal{D} = \mathbb{C}^* = \{z | z \in \mathbb{C}, z = x + iy, x > 0 \text{ oder } x \leq 0 \text{ und } y \neq 0\}$ so ist $\mathcal{D}$ sternförmig und $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \frac{1}{z}$ hat eine Stammfunktion F, $F(z) = \log|z| + i\varphi$, $z = |z|e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < \pi$.

Wir erinnern an die Definition von „wegweise zusammenhängend“: $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$

heißt wegweise zusammenhängend, wenn zu je zwei Punkten $p, q \in \mathcal{D}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in $\mathcal{D}$ existiert mit $\gamma : [a, b] \to \mathcal{D}$, $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$

Hilfssatz II.6.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Dann gilt: $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ sei stetig, F, G seien Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ konstant.*

Beweis: Seien $p, q \in \mathcal{D}$. Wir wählen eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in $\mathcal{D}$ von p nach q, so daß

$$\int_\gamma f(z)dz = \left[\begin{array}{l} F(q) - F(p), \\ G(q) - G(p) \end{array} \right. ,$$

also $(F - G)(p) = (F - G)(q)$ ist. $\square$

Eine einfache Konsequenz ist das

Corollar zu Hilfssatz II.6.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und $f'(z) = 0$ für $z \in \mathcal{D}$. Dann ist f konstant.*

Beweis: Wir wenden Hilfssatz II.6.3 mit $F := f$, $G = 0$ an. $\square$

Man kann beweisen: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. $\mathcal{D}$ ist genau dann wegweise zusammnehängend, wenn gilt: Es gibt keine Mengen $A, B \subset \mathbb{C}$ mit

$$A, B \text{ offen}, \ A, B \neq \phi$$

$$A \cup B = \mathcal{D}, \ A \cap B = \phi.$$

Daneben gibt es noch den Begriff des topologischen Zusammenhangs für ganz beliebige Mengen $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$. Eine Menge $A \subset \mathcal{D}$ heißt offen in $\mathcal{D}$, wenn $A = U \cap \mathcal{D}$ ist mit einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ heißt (topologisch) zusammenhängend, wenn es keine in $\mathcal{D}$ offenen Mengen A, B gibt mit $A, B \neq \phi$, $\mathcal{D} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$. Der wegweise Zusammenhang bei offenen Mengen impliziert den topologischen und umgekehrt wie gerade bemerkt. Man kann nun zeigen: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ eine topologisch zusammnenhängende Menge, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig, so ist auch $f(\mathcal{D})$ topologisch zusammenhängend. Ist $\mathcal{D}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig nach x, y differenzierbar, sind $p, q \in \mathcal{D}$, γ eine p und q stückweise stetig differenzierbar verbindende Kurve in $\mathcal{D}$, so ist auch $f \circ \gamma$ eine $f(p)$ und $f(q)$ stückweise stetig differenzierbar verbindende Kurve, die in $f(\mathcal{D})$ liegt. Hieraus kann man schließen: $f(\mathcal{D})$ ist topologisch zusammenhängend, $f(\mathcal{D})$ braucht aber nicht offen zu sein. Ist jedoch f holomorph und nicht konstant, so ist $f(\mathcal{D})$ offen, wie in III.16 gezeigt wird.

Es gilt
Satz II.6.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und sternförmig, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene stückweise stetig differnzierbare Kurve γ in $\mathcal{D}$ die Gleichung*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis: Nach Satz I.2.4 hat f eine Stammfunktion. Nun kann man Hilfssatz II.6.2 anwenden. □

Definition II.6.2: *Wir vereinbaren einige Bezeichnungen für spezielle Kurvenintegrale. Unter dem Integral hat man sich jeweils $f(z)dz$ eingesetzt zu denken, f geeignet.*

a) $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto z_0 + re^{it}$. $\int_{|z-z_0|=r} := \int_\gamma$

b) $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq z_1$, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $t \longmapsto z_0 + (z_1 - z_0)t$, $\int_{z_0}^{z_1} := \int_\gamma$.

c) Q *sei ein achsenparalleler Quader in* $\mathbb{C}$ *mit den Ecken* z_1, z_2, z_3, z_4 *in positivem Umlaufsinn gezählt*

$$\int_{\partial Q} := \int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_2}^{z_3} + \int_{z_3}^{z_4} + \int_{z_4}^{z_1}.$$

§7. Die Cauchysche Integralformel

Wir beginnen mit

Beispiel II.7.1: Wir berechnen $\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-a} dz$ und behaupten

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-a} dz = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{für} \quad |a-z_0| > r \\ 2\pi i & \text{für} \quad |a-z_0| < r \end{array} \right.$$

a) $|a-z_0| > r$. $\frac{1}{z-a}$ ist holomorph in einer sternförmigen offenen Menge $\mathcal{D}_\varepsilon = \{z||z-z_0| < r+\varepsilon\}$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Nach Satz II.6.1 ist

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-a} dz = 0.$$

b) Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \mathbb{C}- \quad , \text{ also } 0 \notin \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{D}_2 &= \mathbb{C}- \quad , \text{ also } 0 \notin \mathcal{D}_2. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ sind sternförmige offene Mengen. In $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ wählen wir Zweige des Logarithmus L_1, L_2 mit

$$\begin{array}{lll} L_1 : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{C} & \text{holomorph} & e^{L_1(z)} = z, \\ L_2 : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{C} & \text{holomorph} & e^{L_2(z)} = z. \end{array}$$

$p-a, q-a$ liegen in $\{z||z| < r\} \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z-a} dz &= \int_{|z|=r} \frac{1}{z-a} dz = \int_{q,p} \frac{1}{z-a} dz + \int_{p,q} \frac{1}{z-a} dz, \\ &= \int_{q-a,p-a} \frac{dz}{z} + \int_{p-a,q-a} \frac{dz}{z}, \\ &= L_1(q-a) - L_1(p-a) + (L_2(p-a) - L_2(q-a)), \\ &= L_1(q-a) - L_2(q-a) + L_2(p-a) - L_1(p-a) \end{aligned}$$

Wir wählen Umgebungen $U_1 = \{z||z-(q-a)| < \varepsilon_1\}$, $U_2 = \{z||z-(p-a)| < \varepsilon_2\} \subset \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. U_1, U_2 sind sternförmig und enthalten 0 nicht. Nach Satz I.4.3 ist

$$\begin{aligned} L_1(q-a) - L_2(q-a) &= 2k_1\pi i, \\ L_2(p-a) - L_1(p-a) &= 2k_2\pi i \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z-a} dz = k_3$$

mit $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $a \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z-a} dz$ hängt für $a \in \{z||z| < r\}$ stetig von a ab, ist also konstant. Für $a = 0$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 1.$$

Hilfssatz II.7.1: $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ *sei offen. Sei* $z_0 \in \mathcal{D}$, $U_r(z_0) = \{z||z - z_0| < r\}$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. *Sei* $a \in U_r(z_0)$. Sei

$$\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \quad \textit{stetig,}$$

$$\eta|(\mathcal{D} - \{a\}) \to \mathbb{C} \quad \textit{holomorph.}$$

Dann ist

$$\int_{|z-z_0|=r} \eta(z) dz = 0.$$

Beweis: Sei $z_0 = 0$, $a > 0$. Die Kurven α, β sind der folgenden Figur zu entnehmen:

Es sei $r_1 > r$, $\overline{U_{r_1}(z_0)} \subset \mathcal{D}$, $\alpha_\varepsilon = \alpha + i\varepsilon$, $\beta_\varepsilon = \beta - i\varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. ε sei so klein, daß die Spuren von α_ε und β_ε noch in $U_{r_1}(0)$ liegen. Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{|z-z_0|=r} \eta(z) dz &= \int_{|z|=r} \eta(z) dz, \\
&= \int_\alpha \eta(z) dz + \int_\beta \eta(z) dz \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha_\varepsilon} \eta(z) dz + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\beta_\varepsilon} \eta(z) dz.
\end{aligned}$$

Es ist die Spur von α_ε im oberen Halbkreis $U_{r_1}^+(0) = \{z||z| < r_1, Im z > 0\}$ enthalten. Dieser ist sternförmig. Nach Satz I.2.4 existiert zu η in $U_{r_1}^+$ eine Stammfunktion. Also ist nach Hilfssatz II.6.2

$$\int_{\alpha_\varepsilon} \eta(z) dz = 0.$$

Entsprechendes gilt für β_ε und den unteren Halbkreis $U_{r_1}^-(0)$. Damit folgt

$$\int_{|z|=r} \eta(z) dz = 0.$$

$\square$

Eine Konsequenz aus dem letzten Hilfssatz ist

Satz II.7.1 (Cauchysche Integralformel): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$ die Formel*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Insbesondere ist f im Inneren von $\overline{U_r(z_0)}$ durch die Werte von f auf dem Rande von $U_r(z_0)$ bestimmt.

Beweis: Sei

$$\eta(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z, \ \zeta \in \mathcal{D}, \\ \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z. \end{cases}$$

η ist stetig in $\mathcal{D}$, auch in z, weil f in $\mathcal{D}$ holomorph ist. η ist holomorph in $\mathcal{D} - \{z\}$. Hilfssatz II.7.1 liefert

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \eta(\zeta) d\zeta = 0.$$

Also folgt

$$\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - f(z) \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0;$$

das letzte Integral hat nach Beispiel II.7.1 den Wert $2\pi i$. $\square$

Definition II.7.1: *Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. (f_n) heißt kompakt (gleichmäßig) konvergent gegen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathcal{D}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ gibt mit*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \ z \in K, \ n \geq n_0(\varepsilon, K).$$

Hilfssatz II.7.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, seien $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei (f_n) kompakt (gleichmäßig) konvergent gegen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. Dann ist f stetig und für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in $\mathcal{D}$ gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\gamma f_n(z) dz = \int_\gamma f(z) dz$$

Beweis: Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Dann ist $\overline{U_r(z_0)}$ kompakt. Die f_n konvergieren für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen f in $\overline{U_r(z_0)}$. Also ist f stetig. Es gibt ein Kompaktum K, $K \subset \mathcal{D}$, das die Spur von γ enthält. Dann folgt

$$|\int_\gamma f_n(z) dz - \int_\gamma f(z) dz| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| \text{ mit}$$

$$\int_\gamma |f_n(z) - f(z)||dz| = \int_a^b |f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))||\dot\gamma(t)|dt.$$

Also ist

$$|\int_\gamma f_n(z)dz - \int_\gamma f(z)dz| \le \varepsilon \cdot L_\gamma,\ n \ge n_0(\varepsilon, K)$$

für $\varepsilon > 0$. $\square$

Für die Vertauschbarkeit von Limesbildung und Integration über γ ist die gleichmäßige Konvergenz auf γ hinreichend.

Wir berechnen jetzt alle Ableitungen einer holomorphen Funktion mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel.

Satz II.7.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f beliebig oft komplex differenzierbar. Ist $z_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$, so gilt für $z \in U_r(z_0)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis: Wir haben nach Satz II.7.1 die Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir zeigen, daß die rechte Seite nach z differenzierbar ist und, daß man die Differentiation mit dem Integral vertauschen darf. Sei

$$g_n(\zeta) = \frac{1}{h_n}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - (z + h_n)} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right), n \in \mathbb{N}$$

mit $h_n \ne 0$, $h_n \to 0$, $n \to \infty$, $dist(z + h_n, \partial U_r(z_0)) \ge \delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$g_n(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= f(\zeta)\left(\frac{1}{h_n}\frac{1}{\zeta - (z + h_n)} - \frac{1}{h_n}\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right), \\
&= f(\zeta)\left(\frac{1}{h_n}\frac{h_n}{(\zeta - (z + h_n))(\zeta - z)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right), \\
&= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\left(\frac{1}{\zeta - (z + h_n)} - \frac{1}{\zeta - z}\right), \text{ also}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|g_n(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}| &\leq \sup_{\zeta \in \partial U_r(z_0)} |f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}| \cdot |\frac{h_n}{(\zeta - (z + h_n))(\zeta - z)}|, \\
&\leq \sup_{\zeta \in \partial U_r(z_0)} |f(\zeta)\frac{1}{(\zeta - z)^2}|\frac{|h_n|}{\delta} < c(\delta)|h_n|.
\end{aligned}
$$

Für $\varepsilon > 0$, $n \geq n_0(\varepsilon)$ wird also $|g_n(\zeta) - \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}| < \varepsilon$, die Konvergenz ist gleichmäßig auf $\partial U_r(z_0)$, und es folgt

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{n\to\infty} \int_{|\zeta - z_0| = r} g_n(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = r} \lim_{n\to\infty} g_n(\zeta) d\zeta, \\
&= \frac{1!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.
\end{aligned}
$$

Mit dem gleichen Argument darf man die rechte Seite wiederum nach z differenzieren und erhält

$$
f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta
$$

und so fort für die höheren Ableitungen. $\square$

§8. Potenzreichenentwicklungen holomorpher Funktionen

Wir zeigen, daß sich jede holomorphe Funktion in ihre Taylorreihe entwickeln läßt.

Satz II.8.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Setzt man*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

so gilt für alle $z \in U_r(z_0)$ die Formel

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Die Reihe ist in $U_r(z_0)$ kompakt gleichmäßig konvergent.

Beweis: Sei $z_0 = 0$, $K \subset U_r(z_0)$, K kompakt. Wir wählen ein r_1 mit $0 < r_1 < r$, $K \subset U_{r_1}(z_0) \subset \overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$.

Sei $0 < r_1 < \rho < r$. Für $z \in K$, $|\zeta| = \rho$ ist dann $|\frac{z}{\rho}| \leq \frac{r_1}{\rho} < 1$,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

und die Reihe konvergiert als Funktion von ζ gleichmäßig in $\rho - \varepsilon \leq |\zeta| \leq \rho + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Nach Hilfssatz II.7.2 darf man gliedweise integrieren. Dies liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \cdot z^n. \end{aligned}$$

Sei $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\rho} f(\zeta)/\zeta^{n+1} d\zeta$. Dann ist nach Satz II.7.2

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; z \in K.$$

Wegen $|a_n| \leq \sup\limits_{|\zeta|\leq\rho} |f(\zeta)| \cdot \dfrac{1}{\rho^n}$, d.h. $|a_n z^n| \leq \sup\limits_{|\zeta|\leq\rho} |f(\zeta)| \dfrac{|z|^n}{\rho^n} \leq \sup\limits_{|\zeta|\leq\rho} |f(\zeta)| \left(\dfrac{r_1}{\rho}\right)^n$, $z \in K$, ist die Konvergenz gleichmäßig in K. Da K ein beliebiges Kompaktum in $U_r(z_0)$ war, folgt der Satz. $\square$

Beispiel II.8.1: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$. Dann haben wir

$$\text{(II.8.1)} \qquad f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},\ |x| < 1.$$

Es ist nun nicht ohne weiteres einzusehen, warum f keine Potenzreihenentwicklung um 0 haben sollte, die auch für $|x| > 1$ konvergiert, da mit f nichts Besonderes geschieht, wenn $|x| > 1$ wird. Nun hat f eine holomorphe Fortsetzung nach $|z| < 1$, nämlich $z \longmapsto \frac{1}{1+z^2}$. Diese bezeichnen wir ebenfalls mit f. Wie wir später zeigen, ist dies auch die einzige holomorphe Fortsetzung von $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$. Der Ansatz

$$\text{(II.8.2)} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,\ |z| < 1$$

mit einer konvergenten Reihe führt, wie wir hier nicht beweisen wollen, auf $a_n = (-1)^{n/2}$, n gerade, und $a_n = 0$, n ungerade. Der Ausdruck $1/(1+z)^2$ zeigt aber bei Annäherung an $+i$ oder $-i$ mit Punkten aus $|z| < 1$ ein singuläres Verhalten. Man sagt, $1/(1+z^2)$ konvergiert gegen ∞. Eine Potenzreihenentwicklung der reellen Funktion f um 0 hat ebenfalls notwendig die Gestalt (II.8.1). Ein allgemeinerer Gesichtspunkt zur Erklärung des Konvergenzverhaltens dieser Reihe ist der folgende: Würde die Reihe in (II.8.1) in einem x_1 mit $|x_1| > 1$ konvergieren, so auch die Reihe (II.8.2) in $|z| < |x_1|$ kompakt gleichmäßig und das komplexe f könnte in $+i$ und $-i$ nicht das beschriebene singuläre Verhalten haben. Bei einer reellen Funktion, die wir in eine reelle Potenzreihe entwickeln, wird also die Größe des Gültigkeitsbereichs der Potenzreihenentwicklung durch ihre holomorphe Fortsetzung bestimmt.

Wir beweisen jetzt eine Abschätzung für die Koeffizienten a_n in der Reihenentwicklung aus Satz II.8.1.

Satz II.8.2 (Cauchysche Ungleichungen): *Es mögen die Voraussetzungen des Satzes* II.8.1 *erfüllt sein. Ist $|f(z)| \leq M$ für $|z - z_0| = r$, dann gilt für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:*

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}.$$

Beweis: Es ist

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

nach Satz II.7.2. Damit folgt

$$|a_n| \leq M \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \frac{1}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}.$$

□

Eine direkte Konsequenz hieraus ist
Satz II.8.3 (Satz von Liouville): *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, $M > 0$ und $|f(z)| \leq M$, $z \in \mathbb{C}$. Dann ist f konstant.*

Beweis: f wird um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickelt, nämlich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Nach Satz II.8.1 konvergiert diese Reihe kompakt gleichmäßig in $\mathbb{C}$ und stellt dort f dar. Nach Satz II.8.2 ist für jedes $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und $r \to \infty$ liefert $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, also $f(z) = a_0$. □

Satz II.8.4: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $n : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei $(x_0, y_0) = z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Dann gilt für $(x, y) \in U_{r/\sqrt{2}}(z_0)$ eine Potenzreihenentwicklung*

$$n(x, y) = \sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} b_{\nu\mu} (x - x_0)^\nu (y - y_0)^\mu$$

und die letzte Reihe konvergiert kompakt gleichmäßig in $U_{r/\sqrt{z}}(z_0)$.

Beweis: Da $U_r(z_0)$ sternförmig ist, finden wir nach Satz I.5.1 eine holomorphe Funktion $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $n = Re f$. Nach Satz II.8.1 haben wir wegen $\overline{U_{r'}(z_0)} \subset U_r(z_0)$, $0 < r' < r$, die in $U_r(z_0)$ kompakt gleichmäßige Reihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$\text{(II.8.3)} \qquad Re\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Re\, a_n (z - z_0)^n.$$

Aus dem Beweis des Satzes II.8.1 folgt, daß sogar die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z - z_0|^n$$

kompakt gleichmäßig in $U_r(z_0)$ konvergiert. Anwendung des Umordnungssatzes auf die Reihe in (II.8.3) liefert das gewünschte Resultat. $\square$

§9. Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Zunächst gilt
Satz II.9.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dann ist u beliebig oft stetig differenzierbar.*

Beweis: Dies kann aus der Potenzreihenentwicklung in Satz II.8.4 gefolgert werden. Ein etwas anderer Beweis verläuft so: Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Sei $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph, $Re\ f = u$ (s. Satz I.5.1). Nach Satz II.7.2 ist f beliebig oft komplex differenzierbar, also u beliebig oft total differenzierbar, also beliebig oft stetig differenzierbar. $\square$

Satz II.9.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig. f besitze eine Stammfunktion F. Dann ist f holomorph.*

Beweis: Nach Satz II.7.2 ist $F' = f$ holomorph. $\square$

Hilfssatz II.9.1: *Sei $\mathcal{D}$ eine offene Kreisscheibe um $z_0 \in \mathbb{C}$, d.h. $\mathcal{D} = U_r(z_0)$ für ein $r > 0$. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig. Für alle achsenparallelen abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathcal{D}$ gelte*

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = 0.$$

Dann ist f holomorph.

Beweis: Sei $\mathcal{D} = U_r(z_0)$. Sei $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Sei $z_0 = 0$. $z = x + iy \in U_r(0)$. Sei $z + h \in U_r(0)$. Wir definieren $F : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ durch $z \longmapsto \int_0^x f(\zeta)d\zeta + \int_x^z f(\zeta)d\zeta$ und wollen zeigen, daß F in $\mathcal{D}$ holomorph ist sowie $F' = f$ gilt. Wegen $\int_{\partial Q} f(\zeta)d\zeta = 0$, was vorausgesetzt war, folgt

$$\begin{aligned}
F(z) &= \int_0^x f(\zeta)d\zeta + \int_x^z f(\zeta)d\zeta, \\
&= -\int_{x+iy}^{iy} f(\zeta)d\zeta - \int_{iy}^0 f(\zeta)d\zeta, \\
&= \int_0^{iy} f(\zeta)d\zeta + \int_{iy}^{x+iy} f(\zeta)d\zeta, \\
F(z+h) - F(z) &= \int_0^{iy} f(\zeta)d\zeta + \int_{iy}^{x+h+iy} f(\zeta)d\zeta - \int_0^{iy} f(\zeta)d\zeta - \int_{iy}^{x+iy} f(\zeta)d\zeta, \\
&= \int_{x+iy}^{x+h+iy} f(\zeta)d\zeta = \int_0^1 f(x + th + iy)hdt.
\end{aligned}$$

Mit $f = u + iv$, $F = U + iV$ folgt

$$\begin{aligned} U(x+h,y) - U(x,y) &= \int_0^1 hu(x+th,y)dt, \\ U_x(x,y) &= u(x,y). \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$V_x(x,y) = v(x,y).$$

Die entsprechende Rechnung mit $z + ih$ statt $z + h$ zeigt

$$\begin{aligned} U_y(x,y) &= -v(x,y), \\ V_y(x,y) &= u(x,y). \end{aligned}$$

Weil u, v stetig sind, sind also U, V stetig differenzierbar in $\mathcal{D}$, also total differenzierbar, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Daher ist F holomorph in $\mathcal{D}$ und

$$F'(z) = U_x(x,y) + iV_x(x,y) = f(z),$$

$z = x + iy$. $\square$

Eine Konsequenz aus dem vorangehenden Hilfssatz ist

Satz II.9.3 (Satz von Morera): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig. f ist genau dann holomorph, wenn für jeden achsenparallelen abgeschlossenen Quader $Q \subset \mathcal{D}$ gilt:*

$$\int_{\partial Q} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Beweis: Aus

$$\int_{\partial Q} f(\zeta)d\zeta = 0$$

für jeden abgeschlossenen achsenparallelen Quader $Q \subset \mathcal{D}$ folgt nach Hilfssatz II.9.1 sofort die Holomorphie von f. Sei nun umgekehrt $Q \subset \mathcal{D}$, Q achsenparalleler abgeschlossener Quader. Dann gibt es einen größeren achsenparallelen abgeschlossenen Quader $\widetilde{Q}$ mit

$$Q \subset \mathring{\widetilde{Q}} \subset \widetilde{Q} \subset \mathcal{D}.$$

$\mathring{\widetilde{Q}}$ ist sternförmig, also hat die holomorphe Funktion f in $\mathring{\widetilde{Q}}$ eine Stammfunktion, also ist nach Hilfssatz II.6.2

$$\int_{\partial Q} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

$\square$

Der nächste Satz besagt kurz, daß die Grenzfunktion einer Folge holomorpher Funktionen auch wieder holomorph ist. Es gilt

Satz II.9.4: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (f_n) konvergiere kompakt gleichmäßig in $\mathcal{D}$ gegen f. Dann ist f holomorph und die Folge (f_n') konvergiert kompakt gleichmäßig gegen f'.*

Beweis: Zunächst ist f stetig in $\mathcal{D}$. Sei Q ein abgeschlossener achsenparalleler Quader mit $Q \subset \mathcal{D}$. Dann ist

$$\int_{\partial Q} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial Q} f_n(z)dz = 0$$

nach Satz II.9.3. Also ist f holomorph. Sei K kompakt mit $K \subset \mathcal{D}$. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{D}$ eine Kreisscheibe um 0. Sonst wird K mit Kreisscheiben überdeckt. Wir wählen ein $U_r(0)$ mit $K \subset U_r(0) \subset \overline{U_r(0)} \subset \mathcal{D}$. Dann ist

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \ |z| < r$$

Für $|z| \leq \rho < r$, $\varepsilon > 0$ folgt

$$|f_n'(z) - f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{|f_n(\zeta) - f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} d\zeta,$$

$$\leq \frac{2\pi}{2\pi} \frac{\varepsilon r}{(r-\rho)^2}, \ n \geq n_0(\varepsilon).$$

Da es ein ρ, $0 < \rho < r$, gibt mit $K \subset \overline{U_\rho(0)} \subset U_r(0)$, ist der Satz bewiesen.
□

Im Reellen ist bekanntlich die Situation eine andere. Jede stetige Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ kann durch Polynome gleichmäßig approximiert werden, ohne daß dies für die Ableitungen gilt. f braucht ja nicht einmal differenzierbar zu sein. Weiter haben, um den Unterschied zwischen Reellem und Komplexem herauszustellen, die Funktionen f_n mit

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x), \ x \in [0, 1], \ n \in \mathbb{N},$$

die Eigenschaft, daß sie für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen Null konvergieren, jedoch ihre Ableitungen

$$f_n'(x) = n \cos(n^2 x)$$

diese Eigenschaft nicht besitzen. Offenbar ist $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, setzen wir jedoch $\sin x$ durch

$$\sin z = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \; z \in \mathbb{C},$$

oder, was dasselbe ist, durch $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $z \in \mathbb{C}$, holomorph auf $\mathbb{C}$ fort, so besitzen die $f_n(z) = \frac{1}{n}\sin(n^2 z)$ diese Eigenschaft nicht mehr.

§10. Der Cauchysche Integralsatz

Wir benötigen einige Vorbereitungen.

Definition II.10.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{D}$ heißt abgeschlossen in $\mathcal{D}$, wenn gilt: Ist $z \in \mathcal{D}$ und gilt für jede offene Umgebung U von z in $\mathcal{D}$, d.h. jede offene Menge U mit $z \in U \subset \mathcal{D}$ die Beziehung $U \cap A \neq \emptyset$, so folgt: $z \in A$.*

Die in $\mathcal{D}$ abgeschlossenen Mengen sind genau die Mengen von der Form $A = \mathcal{D} \cap C$, C abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Hilfssatz II.10.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Dann gilt: Ist $A \subset \mathcal{D}$ offen und abgeschlossen in $\mathcal{D}$ und $A \neq \emptyset$, so folgt $A = \mathcal{D}$.*

Beweis: Zunächst ist $B = \mathcal{D} - A$ offen. Wäre B nicht offen, so existierte ein $z \in B$ mit folgender Eigenschaft: Jede offene Umgebung $U = U(z)$ von z in $\mathcal{D}$ enthält einen Punkt aus A. Wegen er Abgeschlossenheit von A in $\mathcal{D}$ folgt $z \in A$, im Widerspruch zur Definition von B. Wir haben also

$$\begin{aligned} A \cup B &= \mathcal{D} \\ A \cap B &= \emptyset. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{D}$ zusammenhängend ist, folgt aus den Erörterungen in II.6, daß $B = \emptyset$ ist.

Definition II.10.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Abbildung $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ heißt lokal konstant in $\mathcal{D}$, wenn es zu jedem $z \in \mathcal{D}$ eine offene Umgebung $U(z) \subset \mathcal{D}$ von z gibt mit der Eigenschaft, daß g auf $U(z)$ konstant $= g(z)$ ist.*

Hilfssatz II.10.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und zusammenhängend. Dann ist jede lokal konstante Funktion $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ konstant.*

Beweis: Sei $z_0 \in \mathcal{D}$. Sei

$$A = \{z | z \in \mathcal{D},\ g(z) = g(z_0)\}$$

Zu $z \in A$ wählen wir gemäß Definition II.10.2 ein $U(z)$ mit $g(t) = g(z) = g(z_0)$, $t \in U(z)$. Also ist $U(z) \subset A$. Also ist A offen (in $\mathcal{D}$). Wir zeigen A ist abgeschlossen in $\mathcal{D}$: Sei $z \in \mathcal{D}$. Für jede offene Umgebung $U(z) \subset \mathcal{D}$ gelte: $U(z) \cap A \neq \emptyset$. Wir wählen $U(z)$ so, daß $g(t) = g(z)$, $t \in U(z)$. Sei $t \in A \cap U(z)$. Dann folgt $g(t) = g(z_0) = g(z)$. Also ist $z \in A$. Also ist A abgeschlossen in $\mathcal{D}$. Nach Hilfssatz II.10.1 folgt: $A = \mathcal{D}$. $\square$

Wir führen nun den Begriff der Homotopie ein.

Definition II.10.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Zwei stetige Kurven $(I, \gamma, \gamma(I))$ und $(I, \chi, \chi(I))$ mit $I = [a, b]$, $\gamma(I)$, $\chi(I) \subset \mathcal{D}$ heißen homotorp in $\mathcal{D}$, wenn*

$$\begin{aligned} \gamma(a) &= \chi(a) &= : p, \\ \gamma(b) &= \chi(b) &= : q \end{aligned}$$

ist und wenn es eine stetige Abbildung

$$h : [a, b] \times [0, 1] \to \mathcal{D}$$

gibt mit

$$\begin{aligned} h(a, s) &= p, \ h(b, s) = q \ \text{ für } s \in [0, 1], \\ h(t, 0) &= \gamma(t), \ h(t, 1) = \chi(t) \ \text{ für } t \in [a, b], \end{aligned}$$

Insbesondere bedeutet diese Definition, daß mit $\gamma_s : [a, b] \to \mathcal{D}$, $t \longmapsto h(s, t)$, eine stetige Kurve von p nach q gegeben ist und $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 = \chi$ ist. $p = q$ ist zugelassen!

Hilfssatz II.10.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, $\gamma : [a, b] \to \mathcal{D}$ eine stetige Kurve. Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$, es seien weiter K_μ offene Kreisscheiben in $\mathcal{D}$ mit*

$$\gamma([t_{\mu-1}, t_\mu)] \subset K_\mu, \ \mu = 1, \ldots, m.$$

Sei $F_\mu : K_\mu \to \mathbb{C}$ holomorph, $F'_\mu = f$ in K_μ, $F_{\mu-1} = F_\mu$ in $K_{\mu-1} \cap K_\mu$, $\mu = 1, \ldots, m$. Dann ist

$$F_m(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a))$$

unabhängig von der Wahl der t_μ, K_μ, F_μ, und für den Fall, daß γ stückweise stetig differenzierbar ist, gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = F_m(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)).$$

Für stetiges γ definiert man

$$\int_\gamma f(z) dz := F_m(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)).$$

Beweis:
Sei $p \neq q$. K_1 hat die folgenden Eigenschaften: $\gamma(a) \in K_1 \subset \mathcal{D}$. Für $t_1 > a$ gilt: $\gamma([t_0, t_1]) \subset K_1$. F_1 bestimmen wir als Stammfunktion von f in der sternförmigen Menge K_1, d.h. $F'_1 = f$ in K_1, K_2, t_2 haben analoge Eigenschaften. F_2 wird so gewählt, daß $F'_2 = f$ in K_2 ist. In $K_2 \cap K_1$ ist

$F_2 - F_1$ konstant, da $K_2 \cap K_1$ zusammenhängend ist (Corollar zu Hilfssatz II.6.3). Mit dieser Konstruktion fahren wir fort. Nun ändern wir F_2 durch Addition einer Konstanten so ab, daß $F_2 = F_1$ ist in $K_1 \cap K_2$, wobei wir das abgeänderte F_2 auch mit F_2 bezeichnen usw. Dies Verfahren liefert ein

$$\widehat{F} : [a,b] \to \mathbb{C}, \text{ indem wir}$$

$$\widehat{F}(t) = F_\mu(\gamma(t)),\ t \in [t_{\mu-1}, t_\mu],\ \mu = 1, \ldots, m$$

setzen. Bei anderer Wahl der t_μ, K_μ, etwa $\widetilde{t}_\nu, \widetilde{K}_\nu$ sowie der Stammfunktionen von f in den $\widetilde{K}_\nu$ erhält man

$$\widehat{G} : [a,b] \to \mathbb{C}.$$

Sei $t \in [a,b]$. In einer Menge $\{\tau | \tau \in \mathbb{R}, |\tau - t| < \varepsilon\} \cap [a,b]$ mit einem geeigneten $\varepsilon > 0$ sind $\widehat{F} = F \circ \gamma$, $\widehat{G} = G \circ \gamma$, wobei F, G in einer offenen zusammenhängenden Menge $U(\gamma(t)) \subset \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) \in U(\gamma(t))$ Stammfunktionen von f sind. Also ist $F - G$ in $U(\gamma(t))$ konstant, wie im Corollar zu Hilfssatz II.6.3 gezeigt wurde. Bezeichnen wir die zu $\widehat{G}$ gehörenden Kreise mit $\widetilde{K}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, so finden wir endlich viele offene Kreisscheiben $U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*))$ derart, daß: $a = \tau_1^* < \ldots < \tau_L^* = b$,

$$U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*)) \subset \mathbb{C},\ \gamma(\tau_\lambda^*) \text{ Mittelpunkt von } U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*)),\ \lambda = 1, \ldots, L,$$

$$\text{Radius } \varepsilon_\lambda > 0,\ a = \tau_0 = \tau_1^* < \tau_1 < \tau_?^* < \ldots < \tau_{L-1} < \tau_L^* = \tau_L = b \text{ mit}$$

$$\gamma([\tau_{\lambda-1}, \tau_\lambda]) \subset U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\gamma^*)),\ \lambda = 1, \ldots, L;$$

$$\gamma([a,b]) \subset \bigcup_{\lambda=1}^{L} U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\gamma^*)) \subset \bigcup_{\substack{1 \le \mu \le m, \\ 1 \le \nu \le n}} K_\mu \cap \widetilde{K}_\nu$$

Insbesondere haben wir Stammfunktionen F_λ, G_λ von f in $U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*))$, so daß

$$F_\lambda - G_\lambda \text{ konstant } c_\lambda \text{ in } U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*)) \text{ sind,}$$

$$\lambda = 1, \ldots, L.$$

Es ist $c_\lambda = c_{\lambda'}$ für $U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*)) \cap U_{\varepsilon'_\lambda}(\gamma(\tau_{\lambda'}^*)) \neq \emptyset$, da $\widehat{F}, \widehat{G}$ auf $\gamma([a,b])$ wohldefiniert sind.

Nach Konstruktion ist die offene Menge

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\lambda=1}^{L} U_{\varepsilon_\lambda}(\gamma(\tau_\lambda^*))$$

zusammenhängend. Nach Hilfssatz II.10.2 ist $F - G$ konstant in $\mathcal{L}$. Ist γ stückweise stetig differenzierbar, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{\mu=1}^{m} \int_{\gamma[t_{\mu-1},t_\mu])} f(z)dz, \\
&= \sum_{\mu=1}^{m} (F_\mu(\gamma(t_\mu)) - F_\mu(\gamma(t_{\mu-1}))), \\
&= F_m(\gamma(t_m)) - F_1(\gamma(t_0)), \\
&= F_m(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)), \\
&= \widehat{F}(\gamma(b)) - \widehat{F}(\gamma(a))
\end{aligned}$$

nach Konstruktion der $F_1, F_2, \ldots, F_m$.

1. Nun gilt der Satz aber auch für $p = q$. Dies sieht man wie folgt (Vgl. mit Jänich: Ohne Identitätssätze): Zunächst zur Erinnerung: Also $p = q$

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(t) &= F_\mu(\gamma(t)),\ t_{\mu-1} \leq t \leq t_\mu \\
\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{\mu=1}^{m} F_\mu(\gamma(t_\mu)) - F_\mu(\gamma(t_{\mu-1})), \\
&= \widehat{F}(b) - \widehat{F}(a).
\end{aligned}$$

Das ist wie vorher. Danach wird es anders. Wir zeigen die Unabhängigkeit dieser Definition von den K_μ, t_μ, F_μ. Dazu nehmen wir eine Kreiskette $\widetilde{K}_\lambda, \tau_\lambda, G_\lambda$. Sei

$$\widehat{G}(t) = G_\lambda(\gamma(t)),\ \tau_{\lambda-1} \leq t \leq \tau_\lambda.$$

Dann ist $G_1 = F_1 + c$ in $K_1 \cap \widetilde{K}_1$. Sei $t^* = \sup\{t|\widehat{G}(\widetilde{t}) = \widehat{F}(\widetilde{t}) + c,\ a \leq \widetilde{t} \leq t\}$. Sei $t^* < b$. Dann ist $\gamma(t^*) \in K_{m'} \cap \widetilde{K}_{l'}$. In $\gamma(t^* - \varepsilon) \in K_{m'} \cap K_{l'}$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(t^* - \varepsilon) &= G_{l'}(\gamma(t^* - \varepsilon)) = \widehat{F}(t^* - \varepsilon) + c, \\
&= F_{m'}(\gamma(t^* - \varepsilon)) + c,
\end{aligned}$$

und in $\gamma(t^* + \varepsilon) \in K_{m'} \cap \widetilde{K}_{l'}$ ist

$$\widehat{G}(t^* + \varepsilon) = \widehat{F}(t^* + \varepsilon) + c'$$

mit $G_{l'} - F_{m'} = c'$ in $K_{m'} \cap \widetilde{K}_{l'}$. Also ist $c = c'$ und unsere Annahme falsch, d.h. $t^* = b$, $\widehat{G} = \widehat{F} + c$.

2. In K_m kommt man nicht zu F_1 zurück.

Beispiel: $\int_{|\zeta|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i.$

Zweig I: $\log|\zeta| + i\varphi$
In K_l: $\log|\zeta| + i(\pi+\varepsilon) =$ Zweig II

Also hat man bei Fortsetzung in $K_1 = K_m$:
Zweig II: $\log|\zeta| - i\delta + 2\pi i$, aber begonnen haben wir mit Zweig I: $\log|\zeta| - i\delta$.

Merke: In der oberen Halbebene ist Zweig I = Zweig II.

□

$p = q$ ist in Hilfssatz II.10.3 zugelassen. Es braucht aber keinesfalls $F_m = F_1$ in $K_m \cap K_1$ zu sein. siehe Beispiel oben.

Satz II.10.1 (Cauchyscher Integralsatz): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, seien $\gamma, \chi : [a,b] \to \mathcal{D}$ homotype Kurven in $\mathcal{D}$. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\chi f(z)dz.$$

Beweis: h entnehmen wir aus der Definition II.10.3 der Homotopie. Dann ist $\gamma_s(t) = h(t,s)$, $t \in [a,b]$ für jedes $s \in [0,1]$ eine stetige Kurve. Sei

$$g : [0,1] \to \mathbb{C},\ s \longmapsto \int_{\gamma_s} f(z)dz.$$

Zu $s_0 \in [0,1]$ existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für $s \in [0,1]$, $|s - s_0| < \varepsilon$ gilt: Die gemäß dem Beweis von Hilfssatz II.10.3 für γ_{s_0} konstruierten t_μ, K_μ, F_μ leisten dasselbe für die stetigen Kurven γ_s, d.h. insbesondere

$$\gamma_s([t_{\mu-1}, t_\mu]) \subset K_\mu,\ \mu = 1, \dots, m.$$

Dann folgt nach Hilfssatz II.10.3

$$g(s) = \int_{\gamma_s} f(z)dz = F_m(q) - F_1(p) = \int_{\gamma s_0} f(z)dz.$$

Wir finden endlich viele offene Kreisscheiben $U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*)$ derart, daß: $0 = x_1^* <$

$x_2^* < \ldots < x_N^* = 1$,

$$\begin{aligned}
&U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \subset \mathbb{C},\ x_\nu^* \text{ Mittelpunkt von } U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*),\ \nu = 1, \ldots, N,\\
&\text{Radius } \varepsilon_\nu > 0;\ \text{es gibt eine Zerlegung } a = x_0 < x_1 < \ldots\\
&< x_n = 1 \text{ mit } [x_{\nu-1}, x_\nu] \subset U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \cap [0,1],\ \nu = 1, \ldots, N,\\
&g \text{ konstant auf } U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \cap [0,1],\\
&U = \bigcup_{\nu=1}^{N} U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \text{ zusammenhängende offene Menge, sind.}
\end{aligned}$$

Sei $g_\nu(z) = g(x_\nu^*)$, $z \in U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*)$. Dadurch ist eine Funktion $\widetilde{g}$ auf U gegeben. Sei nämlich $z \in U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \cap U_{\varepsilon_\mu}(x_\mu^*)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(z) &= g(x_\nu^*),\\
\widetilde{g}(z) &= g(x_\mu^*).
\end{aligned}$$

Wegen $Re\, z = x \in U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \cap [0,1] \cap (U_{\varepsilon_\mu}(x_\mu^*) \cap [0,1])$ ist nach Konstruktion der $U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*)$ jedenfalls

$$\widetilde{g}(z) = g_\nu(z) = g(x_\nu^*) = g(x) = g(x_\mu^*) = g_\mu(z) = \widetilde{g}(z),\ z \in U_{\varepsilon_\nu}(x_\nu^*) \cap U_{\varepsilon_\mu}(x_\mu^*).$$

Also ist $\widetilde{g}$ auf U lokal konstant, also nach Hilfssatz II.10.2 konstant. Also ist g konstant. $\square$

Wir bringen einige **Beispiele:** Es seien die folgenden Kurven in $\mathcal{D} = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. vorgelegt:

$$\begin{aligned}
\gamma &: [0,1] \to \mathbb{C}^*,\ t \longmapsto e^{2\pi i t},\\
\chi &: [0,1] \to \mathbb{C}^*,\ t \longmapsto e^{4\pi i t},\\
\psi &: [0,1] \to \mathbb{C}^*,\ t \longmapsto 1,\\
f &: \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ z \longmapsto \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{dz}{z} &= 2\pi i, \quad \text{siehe auch Beispiel II.7.1},\\
\int_\chi \frac{dz}{z} &= \int_0^1 \frac{4\pi i e^{4\pi i t}}{e^{4\pi i t}} dt = 4\pi i,\\
\int_\psi \frac{dz}{z} &= 0.
\end{aligned}$$

Die Kurven γ, χ, η sind also nicht paarweise homotop. Wir kommen nun zur Homotopie geschlossener Kurven. Hierbei handelt es sich um eine Erweiterung der Def. II.10.3. für $p = q$.

Definition II.10.4: *Seien $\gamma, \chi : [a,b] \to \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ geschlossene stetige Kurven, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\chi(a) = \chi(b)$. Hierbei ist $\mathcal{D}$ eine offene Menge aus $\mathbb{C}$. γ, χ heißen homotop in $\mathcal{D}$ als geschlossene Kurven, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h : [a,b] \times [0,1] \to \mathcal{D}$$

gibt mit

$$\begin{aligned} h(a,s) &= h(b,s),\ s \in [0,1], \\ h(t,0) &= \gamma(t), \\ h(t,1) &= \chi(t),\ t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Definition II.10.5: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, sei $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}$, $\gamma(a) = \gamma(b)$, eine geschlossene stetige Kurve in $\mathcal{D}$. γ heißt nullhomotop in $\mathcal{D}$, wenn γ, η homotop sind, wobei η eine Kurve der Gestalt*

$$\eta : [a,b] \to \mathcal{D},\ t \longmapsto z_0$$

mit einem $z_0 \in \mathcal{D}$ ist.

Satz II.10.2 (Cauchyscher Integralsatz): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien γ, χ homotop in $\mathcal{D}$ als geschlossene Kurven. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\chi f(z)dz.$$

Für jede in $\mathcal{D}$ nullhomotope Kurve γ gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Beweis: Seien α, β stetige Kurven in $\mathcal{D}$, etwa die Tripel

$$\begin{aligned} &(I_1, \alpha, \alpha(I_1)), \quad I_1 = [a_1, b_1], \\ &(I_2, \beta, \beta(I_2)), \quad I_2 = [a_2, b_2]. \end{aligned}$$

Sei $\alpha(b_1) = \beta(a_2)$. Die stetige Kurve

$$\begin{aligned} &(I_3, \gamma, \gamma(I_3)) \text{ mit} \\ &I_3 = [a_1, b_2 - a_2 + b_1], \\ &\gamma(t) = \alpha(t),\ a_1 \le t \le b_1 \\ &\gamma(t) = \beta(t + a_2 - b_1),\ b_1 \le t \le b_2 - a_2 + b_1 \end{aligned}$$

nennen wir $\alpha + \beta$. Die stetige Kurve

$$\begin{aligned} &(I_1, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}(I_1)) \text{ mit} \\ &\widetilde{\alpha} = \alpha(b_1 - t + a_1),\ a_1 \le t \le b_1, \end{aligned}$$

bei der also $\widetilde{\alpha}(I_1) = \alpha(I_1)$ ist, nennen wir $-\alpha$.

Seien also γ, χ homotop in $\mathcal{D}$ als geschlossene Kurven. Sei h die Abbildung von $[a,b] \times [0,1]$ in $\mathcal{D}$ aus Definition II.10.4. Sei $\gamma_s(t) = h(t,s)$. Wir haben $\gamma_0(a) = \gamma(a)$. Sei

$$\begin{aligned} &\alpha_s : [0,1] \to \mathcal{D},\ t \longmapsto h(a, st), \\ &\beta_s = \alpha_s + \gamma_s + (-\alpha_s). \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\widetilde{h} : [0, b-a+2] \times [0,1] \to \mathcal{D}$$

mit

$$(t,s) \longmapsto \left[\begin{array}{l} h(a, st),\ 0 \le t \le 1, \\ \\ h(t+a-1, s),\ 1 \le t \le b-a+1, \\ \\ h(a, s(1-[t-(b-a+1)])) = h(b, s(1-[t-(b-a+1)])), \\ b-a+1 \le t \le b-a+2, \end{array} \right.$$

liefert wegen

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(0,s) &= h(a,0) = \gamma(a), \\ \widetilde{h}(b-\alpha+2, s) &= h(a,0) = \gamma(a), \end{aligned}$$

daß β_0 und β_1 homotop in $\mathcal{D}$ sind im Sinn von Definition II.10.3. Man beachte hierzu, daß Anfangs- und Endpunkt der Kurven β_s fest sind, nämlich $= \gamma(a)$ sind. Also haben wir nach Satz II.10.1 jedenfalls

$$\int_{\beta_0} f(z)dz = \int_{\beta_1} f(z)dz.$$

Konstruktion der t_μ, K_μ, F_μ wie in Hilfssatz II.10.3 für β_0, β_1, wobei wir noch verlagen, daß Anfangspunkte und Endpunkte von $\alpha_0, \gamma_0, -\alpha_0$ und von $\alpha_1, \gamma_1, -\alpha_1$ stets als Mittelpunkte von Kreisen K_μ vorkommen, zeigt

$$\begin{aligned} \int_{\beta_0} f(z)dz &= \int_{\alpha_0} f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\alpha_0} f(z)dz, \\ \int_{\beta_1} f(z)dz &= \int_{\alpha_1} f(z)dz + \int_{\gamma_s} f(z)dz - \int_{\alpha_1} f(z)dz, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\int_\chi f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Unsere Konstruktion wird durch folgendes Bild veranschaulicht:

Die zweite Behauptung des Satzes folgt aus $\int_\eta f(z)dz = 0$. $\square$

Beispiel II.10.1: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen und sternförmig, etwa bezüglich 0, d.h. für jeden Punkt $p \in \mathcal{D}$ liegt die Strecke von p nach 0 in $\mathcal{D}$. Dann ist jede geschlossene stetige Kurve in $\mathcal{D}$ nullhomotop in $\mathcal{D}$. Sei nämlich γ eine geschlossene Kurve in $\mathcal{D}$. Dann setze man

$$h(t,s) = (1-s)\gamma(t).$$

Wir kommen zum Begriff der Umlaufzahl.

Definition II.10.6: *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine geschlossene stetige Kurve in $\mathbb{C}$, sei $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \gamma([a,b])$. Dann heißt die Größe*

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Umlaufzahl von γ bezüglich z.

Es gilt
Satz II.10.3: *Die Umlaufzahl $I(\gamma, z)$ ist stets aus $\mathbb{Z}$.*

Beweis: Sei $z = 0$. Der Beweis wird durch folgendes Bild veranschaulicht.

Die t_μ, K_μ werden wie in Hilfssatz II.10.3 konstruiert, $\mu = 0, \ldots, m$ bzw. $\mu = 1, \ldots, m$. Es sei $\gamma(t_\mu) = \zeta_\mu$. In der sternförmigen offenen Menge K_μ, von der wir noch annehmen, daß $z = 0$ nicht in ihr enthalten ist, wählen wir für F_μ einen Zweig des Logarithmus, d.h.

$$F_\mu(\zeta) = \log|\zeta| + i\varphi_\mu(\zeta),\ \mu = 1, \ldots, m.$$

Wenn γ_μ die stetige Kurve $\gamma : [t_{\mu-1}, t_\mu] \to \mathbb{C}$ bedeutet, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\zeta} d\zeta = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\mu} \frac{1}{\zeta} d\zeta,$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{m-1} (\log|\zeta_\mu| - \log|\zeta_\mu| + i(\varphi_\mu(\zeta_\mu) - \varphi_{\mu+1}(\zeta_\mu))) +$$

$$+ \log|\zeta_m| - \log|\zeta_0| + i(\varphi_m(\zeta_m) - \varphi_1(\zeta_0))),$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\mu=1}^{m-1} k_\mu 2\pi i + k_m 2\pi i \right),$$

da es sich bei $\log|\zeta_\mu| - \log|\zeta_\mu| + i(\varphi_\mu(\zeta_\mu) - \varphi_{\mu+1}(\zeta_\mu))$ um die Differenz der Zweige F_μ und $F_{\mu+1}$ des Logarithmus in der sternförmigen offenen Menge $K_{\mu+1} \cap K_\mu$ handelt. Entsprechendes gilt für den letzten Term. $\square$

Wir wollen nun die Umlaufzahl etwas genauer studieren. Zunächst das
Beispiel II.10.2: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen und sternförmig, sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathcal{D}$, sei $z \notin \mathcal{D}$. Dann haben wir nach Beispiel II.10.1 zunächst, daß γ in $\mathcal{D}$ nullhomotop ist. Die Funktion $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$, $\zeta \in \mathcal{D}$, ist wegen $z \notin \mathcal{D}$ jedenfalls in $\mathcal{D}$ holomorph. Also ist nach Satz II.10.2

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Beispiel II.10.3: Im Gegensatz zum vorigen Beispiel bleibt γ fest, z variiert. Wir zerlegen $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$, γ wie in Definition II.10.5, in seine Zusammenhangskomponenten. Da $\gamma([a,b])$ abgeschlossen, also $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$ offen ist, haben wir

$$\mathbb{C} - \gamma([a,b]) = \bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{G}_i \cup \widetilde{G}_{N+1} \text{ mit}$$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{G}_i \cap \widetilde{G}_j = \emptyset,\ i \neq j,\ 1 = i,\ j \leq N, \\
&\widetilde{G}_i \text{ offen, zusammenhängend und beschränkt, } 1 \leq i \leq N, \\
&\widetilde{G}_{N+1} \text{ offen, zusammenhängend und nichtbeschränkt.}
\end{aligned}$$

In jedem $\widetilde{G}_i$ ist $I(\gamma, .)$ als stetige Funktion konstant; siehe Hilfssatz II.10.2. In $\widetilde{G}_{N+1}$ ist $I(\gamma, .) = 0$: Wir wählen dazu eine Umgebung $U_R(0)$, R hinreichend groß, mit

$$\bigcup_{i=1}^{N} \widetilde{G}_i \cup \gamma([a,b]) \subset U_R(0).$$

$U_R(0)$ ist sternförmig. Nach Beispiel II.10.2 ist $I(\gamma, z) = 0$, $z \notin U_R(0)$, also für $z \in (\mathbb{C} - U_R(0)) \cap \widetilde{G}_{N+1}$, also für $z \in \widetilde{G}_{N+1}$. Wir wählen folgendes Bild zur Veranschaulichung: $I(\gamma, z)$ ändert sich bei festem Punkt z nicht, wenn die geschlossene Kurve γ stetig so deformiert wird, daß sie nicht durch z läuft. Dies liegt daran, daß die Umlaufzahl stetig von γ abhängt und konstant ganz ist. Wir benötigen dies zur Auswertung der folgenden Figur und deuten dies durch unterbrochene Linien an. $I(\gamma, z)$gibt, unter Einbeziehung des Umlaufsinns, an, wie oft der Zeiger $\overrightarrow{z\zeta}$ dem Punkt z umläuft, wenn ζ die Kurve γ durchläuft. Gegenläufig überstrichene Winkel annullieren sich dabei. Durchsetzt z die Kurve γ, so erleidet $I(\gamma, z)$ einen ganzzahligen Sprung. Sei also γ wie folgt vorgelegt mit $N = 8$. Für $z \in \widetilde{G}_2$ sieht man sofort: $I(\gamma, z) = -1$. Durch geeignete stetige Deformationen von

γ, die nicht durch z laufen und also $I(\gamma, z)$ nicht ändern, weil $I(\gamma, z)$ stetig von γ abhängt und ganz ist, folgt $I(\gamma, z) = 1$, $z \in \widetilde{G}_3, \widetilde{G}_1, \widetilde{G}_5$. Für die anderen Zusammenhangskomponenten gilt:

$$\begin{aligned}
I(\gamma, z) &= +1,\ z \in \widetilde{G}_8, \\
I(\gamma, z) &= 2,\ z \in \widetilde{G}_4, \\
I(\gamma, z) &= 3,\ z \in \widetilde{G}_6, \\
I(\gamma, z) &= 2,\ z \in \widetilde{G}_7.
\end{aligned}$$

Wir ziehen weitere Konsequenzen aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Satz II.10.4 (1. Riemannscher Hebbarkeitssatz): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, $\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ stetig, $a \in \mathcal{D}$. Sei $\eta|(\mathcal{D} - \{a\})$ holomorph. Dann ist η holomorph.*

Beweis: Sei $Q \subset \mathcal{D}$, Q ein achsenparalleler abgeschlossener Quader, sei $a \in \partial Q$. Wir wählen zu $\varepsilon > 0$ einen in der Nähe gelegenen achsenparallelen abgeschlossenen Quader $Q_\varepsilon \subset \mathcal{D}$, derart, daß für $\varepsilon \to 0$ die Q_ε in Q übergehen. Die folgende Figur bezeichnet die Situation näher:

Nach Satz II.9.3 ist $\int_{\partial Q_\varepsilon} f(z)dz = 0$, also wegen

$$\int_{\partial Q} \eta(z)dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial Q_\varepsilon} \eta(z)dz = 0.$$

Ist $a \notin \partial Q$, sondern im Inneren von Q gelegen, wie in der folgenden Figur dargestellt, so folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Q} \eta(z)dz &= \int_{\partial Q_1} \eta(z)dz + \int_{\partial Q_2} \eta(z)dz, \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wie eben gezeigt. Mit Satz II.9.3 folgt die Behauptung. □

Wir schließen dieses Kapitel ab mit

Satz II.10.5 (Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine in $\mathcal{D}$ nullhomotope geschlossene Kurve. Dann gilt für $z \in \mathcal{D}$, $z \notin \gamma([a, b])$ die Formel*

$$I(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis: Sei $\eta(\zeta) = \frac{f(\zeta) - z}{\zeta - z}$ für $\zeta \in \mathcal{D} - \{z\}$ und $\eta(\zeta) = f'(z)$ für $\zeta = z$. Dann genügt $\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ den Voraussetzungen von Satz II.10.4. Also ist η

holomorph in $\mathcal{D}$ und nach Satz II.10.2 ist

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot I(\gamma, z).$$

□

Kapitel 3
Isolierte Singularitäten

§11. Der Identitätssatz

Hilfssatz III.11.1: *Sei $f : U_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph ($r > 0$) mit der Potenzreihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

die Reihe konvergiert kompakt gleichmäßig absolut in $|z| < r$.

Für eine Folge (z_k) mit $0 < |z_k| < r$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ gelte $f(z_k) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ f(z) &= 0, \ z \in U_r(0). \end{aligned}$$

Beweis: Unsere Situation ist die folgende:

Wir nehmen an, es gibt ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart, daß $a_0 = a_1 = \ldots = a_{m-1} = 0$, jedoch $a_m \neq 0$ sind. Dann hat f die Gestalt

$$\begin{aligned} f(z) &= z^m g(z) \text{ mit} \\ g(z) &= \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{n-m}, \ z \in U_r(0) \end{aligned}$$

und einer in $U_r(0)$ kompakt gleichmäßigen Potenzreihe. Es ist $g(0) = a_m \neq 0$, g ist stetig in $U_r(0)$. Wegen

$$0 = f(z_k) = z_k^m g(z_k), \ z_k \neq 0, \ k \in \mathbb{N},$$

folgt $g(z_k) = 0$, also

$$g(0) = \lim_{k\to\infty} g(z_k) = 0$$

und dies ist ein Widerspruch. □

Eine Konsequenz ist

Satz III.11.2 (Identitätssatz für Potenzreihen): *In $U_r(z_0)(z_0 \in \mathbb{C}, \ r > 0)$ seien*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

mit in $U_r(z_0)$ kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Potenzreihen. Es sei $f(z) = g(z)$, $z \in U_r(z_0)$. Dann folgt

$$a_n = b_n, \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Beweis: Ohne Einschränkung sei $z_0 = 0$. Dann ist

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = 0$$

in $|z| < r$, also nach Satz III.11.1: $a_n = b_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. □

Satz III.11.3 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend (äquivalent: topologisch zusammenhängend, s. §6, S. 27, da $\mathcal{D}$ offen). Seien $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei (z_n) eine Folge in $\mathcal{D}$, sei $p \in \mathcal{D}$, sei $z_n \to p$, $n \to \infty$, $z_n \neq p$, $n \in \mathbb{N}$. Sei*

$$f(z_n) = g(z_n), \ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f(z) = g(z)$, $z \in \mathcal{D}$.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $g \equiv 0$. Sei

$$A = \{z | z \in \mathcal{D}, \ f^{(n)}(z) = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Sei $r > 0$, $\overline{U_r(p)} \subset \mathcal{D}$. In $U_r(p)$ liegen alle z_n, $n \geq n_0$. Nach Hilfssatz III.11.1 ist $f(z) = 0$, $z \in U_r(p)$, also nach Satz II.8.1: $p \in A$. Insbesondere ist $A \neq \emptyset$. Sei $z_0 \in A$, sei $r' > 0$, $\overline{U_{r'}(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Nach Satz II.8.1 ist $f(z) = 0$, $z \in U_{r'}(z_0)$, also ist $U_{r'}(z_0) \subset A$. Also ist A offen. Nach Satz II.7.2 sind alle $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ stetig. Also ist

$$\widetilde{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \overline{\{z | z \in \mathcal{D}, \ f^{(n)}(z) = 0\}}$$

als Durchschnitt abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen. Wegen $A = \mathcal{D} \cap \widetilde{A}$, $\widetilde{A}$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$, ist A abgeschlossen in $\mathcal{D}$ (siehe Seite 42). Nach Hilfssatz II.10.1 ist $A = \mathcal{D}$, da $\mathcal{D}$ zusammenhängend ist. □

Wir ziehen eine Folgerung aus dem Beweis von Satz III.11.3: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann ist $f(z) = 0$, $z \in \mathcal{D}$. Die Menge A des Beweises von Satz III.11.3 ist unter unseren Annahmen nicht leer. Weiter verfährt man dann so wie im Beweis des Satzes III.11.3.

Beispiele III.11.1:

1. Wir betrachten $x \longmapsto e^x$, $x \to \sin x$, $x \longmapsto \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann haben wir die in $\mathbb{R}$ kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Potenzreihenentwiclungen

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

   Infolgedessen konvergieren auch die Reihen

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \\ f_2(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ f_3(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

   kompakt gleichmäßig absolut in $\mathbb{C}$ und stellen dort holomorphe Funktionen dar (Beweis?). Nach Satz III.11.3 sind sie die einzigen holomorphen Fortsetzungen von e^x, $\sin x$, $\cos x$ und werden mit e^z, $\sin z$, $\cos z$ bezeichnet. Natürlich stimmt die über die Potenzreihe definierte Funktion f_1, $f_1(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$, mit der auf S. 9 definierten Funktion $z \longmapsto e^z$ überein, und zwar wiederum nach Satz III.11.3.

2. Wir wollen beweisen, daß $e^{z+w} = e^z e^w$ ist, $z, w \in \mathbb{C}$. Sei dazu w fest aus $\mathbb{C}$. Für $z \in \mathbb{R}$ ist die in $\mathbb{C}$ erklärte Funktion f, $f(z) = e^{z+w} - e^z e^w, = 0$, denn für $z = x$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x+w} - e^x e^w \\ &= e^{x+\xi}(\cos\eta + i\sin\eta) - e^x e^\xi(\cos\eta + i\sin\eta) \\ &= 0, \text{ wobei } w = \xi + i\eta,\ \xi, \eta \in \mathbb{R}, \text{ ist.} \end{aligned}$$

   f ist holomorph in $\mathbb{C}$, also ist nach Satz III.11.3 auch $f(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. $e^{z+w} = e^z e^w$ hatten wir bisher nicht benutzt.

Beispiel III.11.2: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei

$$supp\ f = \overline{\{z | z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0\}}$$

kompakt. Dann ist $f \equiv 0$ nach Satz III.11.3 oder Satz II.8.3. Es gibt also keine holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f \not\equiv 0$, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden.

§12. Laurentreihen

Für holomorphe Funktionen mit isolierten Singularitäten gilt

Satz III.12.1 (Entwicklung in Laurentreihen): *Sei* $z_0 \in \mathbb{C}$, *sei* $0 \leq r < R$, $\mathcal{D} = \{z | z \in \mathbb{C},\ r < |z - z_0| < R\}$. *Sei* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *holomorph,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,\ n \in \mathbb{Z},$$

für ein ρ, $r < \rho < R$, *so gilt für* $z \in \mathcal{D}$ *die Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit einer in $\mathcal{D}$ *kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Reihe*

Vor dem Beweis geben wir einige Hinweise: Seien $0 \leq r < \rho,\ \rho' < R$. Dann sind die Kurven $|\zeta - z_0| = \rho$ und $|\zeta - z_0| = \rho'$ in $\mathcal{D}$ homotop als geschlossene Kurven. Infolgedessen ist

$$\int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \int_{|\zeta - z_0| = \rho'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, n \in \mathbb{Z},$$

nach Satz II.10.2 (Cauchyscher Integralsatz). Es ist weiter definiert

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \lim_{N,M \to \infty} \sum_{n=-M}^{N}$$

Beweis des Satze III.12.1: Sei $z_0 = 0$, $z \in \mathcal{D}$. Sei

$$\eta : \mathcal{D} \to \mathbb{C},\ \zeta \longmapsto \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für} \quad \zeta \neq z \\ \\ f'(z) & \text{für} \quad \zeta = z \end{cases}$$

Nach Satz II.10.8 (1. Riemannscher Hebbarkeitssatz) ist η in $\mathcal{D}$ holomorph. Für $0 \leq r < r' < |z| < R' < R$ sind zunächst, wie gerade bemerkt, die Kurven $|\zeta| = r'$ und $|\zeta| = R'$ homotop in $\mathcal{D}$ als geschlossene Kurven. Also ist

$$\int_{|\zeta| = r'} \eta(\zeta) d\zeta = \int_{|\zeta| = R'} \eta(\zeta) d\zeta,$$

$$\int_{|\zeta| = R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{|\zeta| = r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$\begin{aligned} &= f(z) \int_{|\zeta| = R'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - f(z) \int_{|\zeta| = r'} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= 2\pi i f(z), \end{aligned}$$

denn das zweite Integral rechts verschwindet, weil $|z| > r'$ und somit $\zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$ sogar holomorph in $|\zeta| < r' + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein, ist, und auf das erste Integral wenden wir das Beispiel II.7.1 an. Also ist

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta) - z} d\zeta, \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'} f(\zeta)\frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} d\zeta. \end{aligned}$$

Sei nun K ein Kompaktum in $\mathcal{D}$. Wir denken uns r', R' so bestimmt, daß für alle $z \in K$ gilt:

$$r' < r'' \le |z| \le R'' < R'.$$

Dann ist $|\frac{z}{\zeta}| \le \frac{R''}{R'} < 1$, $z \in K$, $|\zeta| = R'$. Wir haben

$$\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n$$

mit einer in $|\zeta| = R'$ gleichmäßig konvergenten Reihe, also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'} f(\zeta)\frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} \cdot z^n$$

$$\text{mit } \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R'} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}\right| \le \frac{\sup\limits_{|\zeta'|=R'} |f(\zeta')|}{R'^n}, \text{ so daß}$$

die letzte Reihe in K gleichmäßig absolut konvergiert.

Weiter ist

$$\left|\frac{\zeta}{z}\right| \le \frac{r'}{r''} < 1,\ z \in K,\ |\zeta| = r' \text{ und}$$

$$\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

mit einer in $|\zeta| = r'$ gleichmäßig konvergenten Reihe, also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\zeta^n d\zeta \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$$

mit

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\zeta^n d\zeta\right| \le \sup_{|\zeta| = r'} |f(\zeta)| \cdot r'^{n+1},$$

so daß die letzte Reihe in K gleichmäßig absolut konvergiert.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}}d\zeta &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'} f(\zeta)\zeta^{n-1}d\zeta\cdot\frac{1}{z^n}, \\
&= \sum_{-\infty}^{n=-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r'}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\cdot z^n,
\end{aligned}
$$

und der Satz ist bewiesen. □

Eine Konsequenz aus Satz III.12.1 ist

Satz III.12.2 (2. Riemannscher Hebbarkeitssatz): *Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ offen, $z_0\in\mathcal{D}$. Es sei $f:\mathcal{D}-\{z_0\}\to\mathbb{C}$ holomorph. Sei für ein $r>0$ auf der in z_0 punktierten Umgebung $U_r(z_0)-\{z_0\}$ mit $\overline{U_r(z_0)}\subset\mathcal{D}$ die Funktion f beschränkt, d.h. $|f(z)|\le M$, $z\in U_r(z_0)-\{z_0\}$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\widetilde{f}:\mathcal{D}\to\mathbb{C}$ mit*

$$\widetilde{f}(z)=f(z),\ z\in\mathcal{D}-\{z_0\}.$$

f läßt sich also holomorph auf $\mathcal{D}$ fortsetzen.

Beweis: Ohne Einschränkung sei $z_0=0$. Nach Satz III.12.1 haben wir

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_nz^n$$

für $0<|z|<r$ mit einer in $0<|z|<r$ kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Reihe, wobei für $|z|=\rho>0$, $\rho<r$ gilt

$$|a_n|\le\frac{M}{\rho^n},\ n\le-1.$$

Für $\rho\to0$ folgt: $a_n=0$, $n\le-1$. Also ist in $0<|z|<r$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

und die gewünschte holomorphe Fortsetzung von f lautet

$$
\begin{aligned}
\widetilde{f}(z_0) &= a_0, \\
\widetilde{f}(z) &= f(z),\ z\in\mathcal{D}-\{z_0\}.
\end{aligned}
$$

□

Satz III.12.3: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gibt es holomorphe Funktionen $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, $h : \mathbb{C} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit*

$$f = g + h \text{ in } \mathcal{D} - \{z_0\}.$$

Hinweis: h ist in ganz $\mathbb{C} - \{z_0\}$ holomorph!

Beweis: Sei ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Sei $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. In $0 < |z| < r$ gilt nach Satz III.12.1 die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n z^n$$

und nach dem Beweis von Satz III.12.1 konvergiert jede der beiden Reihen kompakt gleichmäßig absolut in $0 < |z| < r$. Sei $0 < \rho < r$. Für $|z| = \rho$ ist die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{n=-1} |a_n z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{-n}|}{\rho^n}$$

konvergent, also ist

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \ |z| > 0,$$

kompakt gleichmäßig in $|z| > 0$ konvergent (sogar die Reihe der absoluten Beträge ist kompakt gleichmäßig in $|z| > 0$ konvergent). Demnach ist $z \longmapsto h\left(\frac{1}{z}\right)$, $|z| > 0$, holomorph, also auch h in $|z| > 0$. Sei $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$z \longmapsto \begin{cases} f(z) - h(z), \ z \in \mathcal{D}, z \neq 0, \\ \\ a_0, \ z = 0. \end{cases}$$

Dies ist wegen

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ z \in U_r(0),$$

g holomorph in $\mathcal{D}$. Der Satz ist bewiesen. $\square$

§13. Der Residuensatz

Der Koeffizient a_{-1} in der Laurententwicklung spielt eine besondere Rolle, die jetzt näher untersucht werden soll.

Definition III.13.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Sei $f : \mathcal{D} - \{z_0\}$ holomorph. Sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f um z_0 gemäß Satz III.12.1. Sei $0 < \rho < r$. Dann heißt

$$Res_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} f(\zeta) d\zeta$$

das Residuum von f in z_0. Diese Definition ist von r, ρ unabhängig (siehe Seite 58).

Satz III.13.1 (Residuensatz): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, seien $z_1, \ldots, z_m \in \mathcal{D}$, sei $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} - \{z_1, \ldots, z_m\}$. Sei $f : \mathcal{D}^* \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathcal{D}^*$, die in $\mathcal{D}$ nullhomotop ist (s. Seite 48). Dann gilt*

$$\int_\gamma f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \sum_{\mu=1}^{m} I(\gamma, z_\mu) Res\sqrt{z}_\mu f.$$

Beweis: Wir wählen ein $R_1 > 0$ mit $\overline{U_{R_1}(z_1)} - \{z_1\} \subset \mathcal{D}^*$. Dann gilt in $0 < |z - z_1| < R_1$ die Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_1)^n + \sum_{-\infty}^{n=-1} a_n (z - z_1)^n.$$

Nach dem Beweis von Satz III.12.3 läßt sich die erste Reihe zu einer in $\mathcal{D} - \{z_2, \ldots, z_m\}$ holomorphen Funktion g_1 fortsetzen, während die zweite Reihe eine in $\mathbb{C} - \{z_1\}$ holomorphe Funktion h_1 darstellt. Nach Satz III.12.3 ist

$$f(z) = g_1(z) + h_1(z),\ z \in \mathcal{D}^*.$$

Auf g_1 wendet man das gleiche Verfahren an und erhält

$$g_1(z) = g_2(z) + h_2(z),\ z \in \mathcal{D} - \{z_2, \ldots, z_m\}$$
mit $g_2 : \mathcal{D} - \{z_3, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph,
$h_2 : \mathbb{C} - \{z_2\} \to \mathbb{C}$ holomorph

usw. Dieses Vorgehen liefert also

$$\begin{aligned}
&f = g + h_1 + \ldots + h_m \text{ in } \mathcal{D}^*,\\
&g : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \text{ holomorph},\\
&h_\mu : \mathbb{C} - \{z_\mu\} \to \mathbb{C} \text{ holomorph}, \mu = 1, \ldots, m.
\end{aligned}$$

Weil γ in $\mathcal{D}$ nullhomotop ist, folgt nach Satz II.10.2

$$\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0.$$

Wenn $a_n^{(\mu)}$, $n \in \mathbb{Z}$, die Koeffizienten in der Laurententwicklung von h_μ um z_μ sind, so ist

$$\int_\gamma h_\mu(\zeta)d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(\mu)} \int_\gamma (\zeta - z_\mu)^n d\zeta.$$

Für $n \neq 1$ ist $\zeta \longmapsto \frac{1}{n+1}(\zeta - z_\mu)^{n+1}$ eine Stammfunktion von $(\zeta - z\mu)^n$. Aus Hilfssatz II.10.3 folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (\zeta - z\mu)^n d\zeta &= 0, \; n \neq -1, \text{ also}\\
\int_\gamma h\mu(\zeta)d\zeta &= a_{-1}^{(\mu)} \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z_\mu} d\zeta\\
&= Res_{z\mu} h_\mu \cdot 2\pi i I(\gamma, z_\mu).
\end{aligned}$$

Nun ist in $0 < |z - z_\mu| < R_\mu$ mit $\overline{U_{R_\mu}(z_\mu)} \subset \mathcal{D}$, $z_l \notin \overline{U_{R_\mu}(z_\mu)}$, $l = 1, \ldots, \mu - 1,\; \mu + 1, \ldots, n$ jedenfalls

$$f(z) = g(z) + h_1(z) + \ldots + h_{\mu-1}(z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(\mu)} \cdot (z - z_\mu)^n + h_{\mu+1}(z) + \ldots + h_m(z)$$

mit in $U_{R_\mu}(z_\mu)$ holomorphen Funktionen $g, h_1, \ldots, h_{\mu-1}, h_{\mu+1}, \ldots, h_m$. Aus dem folgenden Eindeutigkeitssatz für Laurententwicklung folgt:

$$a_{-1}^{(\mu)} = Res_{z_\mu} h_\mu = Res_{z_\mu} f$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(\zeta)d\zeta &= \sum_{\mu=1}^m \int_\gamma h_\mu(\zeta)d\zeta\\
&= 2\pi i \sum_{\mu=1}^m I(\gamma, z_\mu) Res_{z_\mu} f.
\end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. $\square$

Im Beweis des Satzes III.13.1 haben wir und in den folgenden Beispielen werden wir vom folgenden Eindeutigkeitssatz für Laurententwicklungen Gebrauch machen, den wir hier ohne Beweis angeben.

Satz III.13.2: *Sei* $z_0 \in \mathbb{C}$, *sei* $0 \leq r < R$, $\mathcal{D} = \{z | z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$. *Sei* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *holomorph. Es gelten für* $z \in \mathcal{D}$ *die kompakt gleichmäßig konvergenten Entwicklungen*

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

im Sinn von Seite 58. Dann ist

$$\begin{aligned} a_n &= b_n, \; n \in \mathbb{Z}, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \; n \in \mathbb{Z}, \; r < \rho < R. \end{aligned}$$

Beispiele III.13.1:

1. Für $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ ist

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \ldots, \\ &= \sum_{-\infty}^{n=-1} \frac{1}{n!} z^n + 1 \end{aligned}$$

   mit einer in $|z| > 0$ kompakt gleichmäßig konvergenten Reihe. Nach Satz III.13.2 ist dies die Laurententwicklung von $z \longmapsto e^{1/z}$ um 0, d. h.

$$Res_0 e^{1/\cdot} = 1,$$

   und nach Satz III.13.1 ist

$$\int_{|\zeta|=1} e^{1/\zeta} d\zeta = 2\pi i.$$

2. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z-1} &= e\frac{e^{z-1}}{z-1} = e\left(\frac{1}{z-1} + 1 + \frac{z-1}{2!} + \frac{(z-1)^2}{3!} + \dots\right) \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} e\widetilde{a}_n (z-1)^n \text{ mit } \widetilde{a}_{-1} = 1, \widetilde{a}_n = \frac{1}{(n+1)!}, \\ & \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \text{ und einer in } \mathbb{C} - \{1\} \text{ kompakt} \\ & \quad \text{gleichmäßig konvergenten Reihe.} \end{aligned}$$

Also ist nach Satz III.13.2 $Res_1 \frac{e^{\cdot}}{\cdot - 1} = e$ und etwa $\int_{|\zeta|=3} e^{\zeta}/(\zeta - 1) d\zeta = 2\pi i e$.

§14. Klassifizierung der Singularitäten

Die isolierten Singularitäten einer holomorphen Funktion teilen wir folgendermaßen ein:

Definition III.14.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurententwicklung von f um z_0. Dann sagen wir:

1. *f hat eine hebbare Singularität in z_0, wenn $a_n = 0$ ist für $n < 0$.*
2. *f hat einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in z_0, wenn $a_{-k} \neq 0$, aber $a_{+n} = 0$ ist für $n \leq -(k+1)$.*
3. *f hat eine wesentliche Singularität in z_0, wenn es unendlich viele Indizes $n < 0$ gibt mit $a_n \neq 0$.*

Bezüglich der hebbaren Singularitäten gilt
Satz III.14.1: *Die folgenden Aussagen sind äquivalent, wobei f eine Funktion wie in Definition III.14.1 ist:*

(a) *f hat eine hebbare Singularität in z_0,*

(b) *für ein $r > 0$ ist f in $U_r(z_0) - \{z_0\}$ beschränkt,*

(c) *f ist nach z_0 holomorph fortsetzbar.*

Beweis: (a) $\overset{\text{Def. III.14.1}}{\Rightarrow}$ (b) $\overset{\text{Satz III.12.2}}{\Rightarrow}$ (c) $\overset{\text{Satz III.13.2}}{\Rightarrow}$ $a_n = 0,\ n \leq -1$, d. h. (a). $\square$

Pole können wir folgendermaßen charakterisieren:

Satz III.14.2: *Sei f eine Funktion wie in Definition III.14.1. f hat in z_0 einen Pol mit der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ dann und nur dann, wenn es zu jedem $M > 0$ ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß $|f(z)| \geq M$ ist für alle z mit $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.*

Beweis: f habe einen Pol in z_0 mit der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Dann ist mit

$$g(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}$$

jedenfalls g holomorph in $U_r(z_0)$ mit $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Es ist $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$, $f(z) = g(z)/(z-z_0)^k$. Hieraus folgt das Kriterium des Satzes. Die zweite Richtung ergibt sich, wie gleich gezeigt wird, aus dem folgenden Satz, den wir, ohne die zweite Richtung in Satz III.14.2 zu benutzen, beweisen. $\square$

Satz III.14.3 (Casovati-Weierstraß): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathcal{D}$, sei $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. f hat eine wesentliche Singularität in z_0 genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem $c \in \mathbb{C}$, zu jedem $\varepsilon > 0$, zu jedem $\delta > 0$ existiert ein $z \in \mathcal{D}$ mit $0 < |z - z_0| < \delta$, $|f(z) - c| < \varepsilon$. Dies bedeutet: Wenn für $\delta > 0$ gilt: $\overline{U_\delta(z_0)} \subset \mathcal{D}$, so ist*

$$\overline{f(U_\delta(z_0) - \{z_0\})} = \mathbb{C}.$$

Beweis: Es mögen $c \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0, \delta > 0$ existieren mit $\overline{U_\delta(z_0)} \subset \mathcal{D}$, $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ für alle z mit $0 < |z - z_0| < \delta$. Sei

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} \text{ in } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Dann ist $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$, so daß g nach Satz III.14.1 nach z_0 holomorph fortsetzbar ist. Es ist $f(z) = \frac{1}{g(z)} + c$, $0 < |z - z_0| < \delta$. Ist $g(z_0) \neq 0$, so hat f in z_0 eine hebbare Singularität, d.h. f ist nach Satz III.14.1 nach z_0 holomorph fortsbar. Nun sei $g(z_0) = 0$. Da g in $U_\delta(z_0)$ nicht identisch verschwindet, gibt es in der Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ein eindeutig bestimmtes $k \in \mathbb{N}$ mit $a_n = 0$, $n \leq k - 1$, $a_k \neq 0$. Also ist $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, $z \in U_\delta(z_0)$. h ist holomorph in $U_\delta(z_0)$, $h(z_0) \neq 0$. Also gilt für ein δ', $0 < \delta' \leq \delta$: $1/h$ ist holomorph in $U_{\delta'}(z_0)$. Sei

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$$

die Potenzreihenentwicklung von $1/h$ in $U_{\delta'}(z_0)$. Dann ist $b_0 \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n + c, \; 0 < |z - z_0| < \delta',$$

so daß nach Satz III.13.2 dies die Laurententwicklung von f um z_0 ist und f wegen $b_{-k+k} = b_0 \neq 0$ in z_0 einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ hat. Gilt also das Kriterium des Satzes nicht, so hat f in z_0 keine wesentliche Singularität. Hat f keine wesentliche Singularität in z_0, so hat f entweder einen

Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in z_0 oder f läßt sich nach z_0 holomorph fortsetzen. Im Fall eines Pols gilt, wie im Beweis des Satzes III.14.2 schon gezeigt, das Kriterium des Satzes III.14.2, d.h. $|f(z)|$ wächst über alle Grenzen bei Annäherung an z_0, während im zweiten Fall $|f(z)|$ bei Annäherung an z_0 beschränkt bleibt. In keinem Fall ist das Kriterium des gegenwärtigens Satzes erfüllt. $\square$

Die zweite Richtung des Beweises von Satz III.14.2 folgt nun leicht: Wenn das Kriterium des Satzes III.14.2 erfüllt ist, kann f in z_0 keine wesentliche Singularität haben; dies folgt aus Satz III.14.3. f kann auch keine holomorphe Fortsetzung nach z_0 besitzen; dies folgt aus Satz III.14.1. Also kann f in z_0 nur einen Pol (der Ordnung $k \in \mathbb{N}$) besitzen.

Wir schließen einige Bemerkungen zur Berechnung des Residuums an.

Hilfssatz III.14.4: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \mathcal{D}$. Sei $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f in z_0 einen Pol der Ordnung 1 hat, dann ist*

$$Res_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

und insbesondere existiert der letzte Grenzwert.

Beweis: Die Laurententwicklung von f um z_0 lautet

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots, \text{ so daß}$$

$$(z - z_0) f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0) + \ldots$$

entsteht. Der Hilfssatz ist bewiesen. $\square$

Beispiele III.14.1:

1. Sei $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z \neq \pm i$. f ist holomorph in $\mathbb{C} - \{\pm i\}$. Es ist

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z - i)(z + i)}.$$

$z \longmapsto \frac{1}{z+i}$ ist in $U_1(i)$ holomorph und gestattet dort die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{z + i} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - i)^n,$$

so daß nach Satz III.13.2

$$\frac{1}{1 + z^2} = \frac{1}{(z - 1)(z + 1)} = \frac{b_0}{z - i} + b_1 + b_2(z - 1) + \ldots$$

mit $b_0 \neq 0$ gerade die Laurententwicklung von $z \longmapsto 1/(1+z^2)$ um i ist. Also hat f in i einen Pol der Ordnung 1. Analog zeigt man, daß f in $-i$ auch einen Pol der Ordnung 1 hat. Mit Hilfssatz III.14.4 folgt

$$\begin{aligned} Res_{+i}f &= \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}, \\ Res_{-i}f &= \lim_{z\to -i} \frac{z+i}{(z-i)(z+i)} = -\frac{1}{2i}. \end{aligned}$$

2. Wir berechnen $\displaystyle\int_{|\zeta|=2} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta$. Anwendung der Formel aus Satz III.13.1 liefert

$$\int_{|\zeta|=2} \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = 2\pi i \left(\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right) = 0.$$

Für die folgenden Erörterungen ist es nützlich, den Begriff der Ordnung einer Nullstelle einer holomorphen Funktion zu definieren. Ebenso wollen wir den Grad eines Polynoms erklären.

Definition III.14.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $f(z_0) = 0$, $f \not\equiv 0$. Sei $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$, sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ |z - z_0| < r,$$

die Potenzreihenentwicklung von f um z_0. Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit

$$a_k \neq 0, \ a_n = 0, \ n \leq k-1$$

(Beachte: $a_0 = 0$, es sind nicht alle $a_n = 0$, da sonst f in $U_r(z_0)$ identisch verschwinden würde, und nach Satz III.11.3 würde dies auch in $\mathcal{D}$ gelten). k heißt die Ordnung der Nullstelle z_0 von f. Verschwindet f in $\mathcal{D}$ identisch, so ist jeder Punkt z aus $\mathcal{D}$ Nullstelle der Ordnung $-\infty$ von f. Sei P ein Polynom in $\mathbb{C}$, d.h. für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ haben wir die Darstellung

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu (z-z_0)^\nu$$

(Statt z_0 kann ein beliebiger anderer Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ genommen werden). Es sei $P \not\equiv 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq n \leq N$, mit

$$a_n \neq 0, \ a_\nu = 0, \ n < \nu \leq N (\text{ falls } n < N).$$

n heißt der Grad von P: $n = grad\,P$. Ist $P \equiv 0$, so sagt man, P habe den Grad $-\infty$.

Wenn die nicht identisch verschwindende holomorphe Funktionen f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ hat, so bedeutet dies nach Satz II.8.1 gerade, daß

$$\begin{aligned} &f^{(n)}(z_0) = 0,\ n \leq k-1,\ \text{und} \\ &f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{aligned}$$

sind. Damit formulieren wir

Hilfssatz III.14.5: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, seien $g, h : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, h habe in z_0 eine Nullstelle der Ordnung 1, d.h. $h'(z_0) \neq 0$. Dann gilt*

$$Res_{z_0} \frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beweis: In einer Umgebung $U_r(z_0)$ mit $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$ gilt: $h(z) = (z-z_0)f(z)$ mit

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n-1}, \\ a_n &= \frac{1}{n!} h^{(n)}(z_0),\ n \in \mathbb{N},\ \text{insbesondere} \\ a_1 &\neq 0,\ f(z_0) = h'(z_0) = a_1,\ f(z) \neq 0,\ z \in \overline{U_r(z_0)}, \end{aligned}$$

$\frac{g}{f}$ ist holomorph in $U_r(z_0)$ mit

$$\begin{aligned} \frac{g}{f}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n,\ \text{also} \\ \frac{g}{h}(z) &= \frac{g(z)}{(z-z_0)f(z)} = \frac{b_0}{z-z_0} + b_1 + b_2(z-z_0) + \ldots\ \text{mit} \\ b_0 &= \frac{g}{f}(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

Der Hilfssatz ist bewiesen. □

§15. Beispiele zum Residuensatz

Wir beginnen mit

Beispiel III.15.1: Wir behaupten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Dazu betrachten wir das Kurvenintegral $\int_\gamma \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta$. Es ist nach Beispiel III.14.1. 1.

$$\int_\gamma \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi,$$

und außerdem gilt

$$\int_\gamma \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta = \int_\cap \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta + \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

$$\left| \int_\cap \frac{1}{1+\zeta^2} d\zeta \right| \le \frac{\pi R}{R^2-1}, \ \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \text{ für } R \to +\infty.$$

Durch Grenzübergang $R \to \infty$ folgt das behauptete Resultat.

Allgemeiner gilt

Satz III.15.2: *Seien P, Q Polynome in $\mathbb{C}$, Q besitze keine reellen Nullstellen. Es sei $\operatorname{grad} Q \ge \operatorname{grad} P + 2$. Es sei $\operatorname{grad} Q = N$, $z_1, \dots z_N$ seien die Nullstellen von Q, jede so oft gezählt, wie ihre Ordnung angibt. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right| dx < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{z_\nu,\ Im z_\nu > 0} Res_{z_\nu} \frac{P}{Q}.$$

Beweis: Der Beweis verläuft entsprechend der Behandlung des Beispiels III.15.1. Er sei dem Leser als Übung überlassen. □

Wir geben den folgenden Hinweis zu Satz III.15.2: In §16 zeigen wir, daß jedes Polynom von Grad N, $N \in \mathbb{N}$, genau N Nullstellen $z_1, \dots, z_N$ hat, wenn jede Nullstelle so oft gezählt wird wie ihre Ordnung angibt.

Beispiel III.15.3: Wir betrachten die Funktion f mit

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

Die Nullstellen von e^z-1 sind $z=0$, $z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$. In $z=0$ liegt wegen $f(z)=z/(z+\frac{z^2}{2!}+\ldots)$ eine hebbare Singularität, und wir können, indem wir $f(0)=1$ setzen, f holomorph nach 0 fortsetzen. Demnach läßt sich f in $|z|<2\pi$ in eine Potenzreihe

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

mit den Koeffizienten $a_n=B_n/n!$

entwickeln. Es ist $f(z)\cdot\frac{e^z-1}{z}=1$. Links entsteht die in $|z|<2\pi$ konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{(k+1)!}\right]z^n,$$

woraus mit $1/(n-k)!(k+1)!=(1/(n+1)![(n+1)!/(n+1-(k+1))!(k+1)!]=(1/(n+1)!)\binom{n+1}{k+1}$ und Satz III.11.2 die Gleichungen

$$B_0=1,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}B_{n-k}=0,\ n\geq 1,$$

entstehen. Hieraus berechnet man rekursiv die B_n und erhält die folgende Tabelle (B_n sind die Bernoullischen Zahlen!):

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	1	-1/2	1/6	0	-1/30	0	1/42	0	-1/30

Für $s\in\mathbb{N}$ setzen wir

$$h_s(z)=\frac{f(z)}{z^{s+1}},\ 0<|z|<2\pi,\ 2\pi<|z|<4\pi,\ldots,$$

und behaupten, daß

$$Res_{z=0}h_s=\frac{B_s}{s!},\ Res_{z=2\pi in}h_s=\frac{1}{(2\pi in)^s}$$

ist, $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Wir haben nämlich

$$\begin{aligned}h_s(z) &= \frac{1}{z^s(e^z-1)}=\frac{1}{z^s(e^{z-2\pi in}-1)},\\ &= \frac{1}{z^s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}(z-2\pi in)^{m-1},\ 0<|z-2\pi in|<2\pi,\ z\neq 0,\end{aligned}$$

mit der Reihe als Laurententwicklung von h_s um $2\pi in$. Für $n=0$ ist jedoch

$$\frac{1}{z^s}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m}{m!}z^{m-1} = \sum_{m=-(s+1)}^{\infty}\frac{Bm+s+1}{(m+s+1)!}\cdot z^m,\ 0<|z|<2\pi,$$

gerade die Laurententwicklung von h_s um 0, und es folgt sofort

$$Res_{z=0}h_s = \frac{B_s}{s!}.$$

In $2\pi in$, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, hat $\cdot^s h_s$ wegen $B_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 1 mit

$$Res_{z=2\pi in}\cdot^s h_s \ = \ 1,\ \text{also wegen}$$

$$Res_{z=2\pi in}\cdot^s h_s \ = \ (2\pi in)^s\ Res_{z=2\pi in}h_s,$$

was der Leser zur Übung beweisen kann, gerade

$$Res_{z=2\pi in}h_s = \frac{1}{(2\pi in)^s}.$$

Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen. Wie eingangs bemerkt ist für $|z| = (2m+1)\pi$ jedenfalls $e^z - 1 \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$. Also existiert

$$\int_{|\zeta|=(2m+1)\pi} h_s(\zeta)d\zeta.$$

Mit $\zeta = \xi + i\eta$ ist $|e^\zeta - 1|^2 = (e^\xi\cos\eta - 1)^2 + e^{2\xi}\sin^2\eta = e^{2\xi} + 1 - 2e^\xi\cos\eta \geq e^{2\xi} + 1 - 2e^\xi = (e^\xi - 1)^2$. Für $|\zeta| = (2m+1)\pi$ haben wir

$$\xi^2 + \eta^2 = (2m+1)^2\pi^2.$$

Es sei jetzt $m \geq 1$. Sei $|\xi| \geq \pi$. Dann ist

$$|e^\zeta - 1|^2 \geq c_1 > 0,\ |\zeta| = (2m+1)\pi,$$

mit einer von m unabhängigen Konstante.

Sei $|\xi| \leq \pi$. Dann ist wegen $\xi^2 + \eta^2 = (2m+1)^2\pi^2$ jedenfalls

$$\begin{aligned}
(4m^2+4m+1)\pi^2 \ &\geq\ \eta^2 \geq (4m^2+4m)\pi^2,\ \text{also}\\
(2m+1)\pi \ &\geq\ |\eta| \geq \sqrt{4m^2+4m}\pi,\ \text{also}\\
(2m+1)\pi \ &\geq\ |\eta| \geq (2m+1/2)\pi \text{ wegen } \sqrt{4m^2+4m} \geq 2m+1/2.
\end{aligned}$$

Für $(2m+1)\pi \geq |\eta| \geq (2m+1/2)\pi$ ist jedoch $\cos\eta \leq 0$, so daß

$$|e^\zeta - 1|^2 \geq 1$$

ausfällt. Insgesamt ist auf $|\zeta| = (2m+1)\pi$ gerade

$$|e^\zeta - 1| \geq \min(\sqrt{c_1}, 1) = c_2 > 0$$

mit einer von m unabhängigen Konstante $c_2 > 0$. Damit folgt

$$|\int_{|\zeta|=(2m+1)\pi} h_s(\zeta)d\zeta| \leq \frac{1}{c_2}(2m+1)2\pi^2 \frac{1}{((2m+1)\pi)^s},\ m \geq 1,\ s \in \mathbb{N},$$

insbesondere

$$\lim_{m\to\infty} \int_{|\zeta|=(2m+1)\pi} h_{2s}(\zeta)d\zeta = 0,\ s \in \mathbb{N}.$$

Satz III.13.1 (Residuensatz) ergibt

$$\int_{|\zeta|=(2m+1)\pi} h_{2s}(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{z_\mu\in\{0,2\pi i,\ldots,2\pi i m,-2\pi i,\ldots,-2\pi i m\}} Res_{z_\mu} h_{2s},$$

$$= \left[\frac{B_{2s}}{(2s)!} + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2\pi i n)^{2s}} + \sum_{n=-m}^{-1} \frac{1}{(2\pi i n)^{2s}}\right] 2\pi i,$$

$$= \left[\frac{B_{2s}}{(2s)!} + \frac{2}{(2\pi i)^{2s}} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{2s}}\right] 2\pi i.$$

Für $m \to \infty$ folgt die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = (-1)^{s-1}\frac{2^{2s-1}}{(2s)!}\pi^{2s}B_{2s},$$

so daß sich mit der Tabelle auf S. 72 ergibt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ im Fall } s = 1,\ 2s = 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ im Fall } s = 2,\ 2s = 4,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945} \text{ im Fall } s = 3,, 2s = 6.$$

Als nächste Anwendung des Residuensatzes studieren wir die Ermittlung des Cauchyschen Hauptwerts. Dazu geben wir die folgende Definition:

Definition III.15.1: *Sei $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Sei $x_0 \in (a, b)$, sei $f : [a, b] - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ stetig.*

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

heißt der Cauchysche Hauptwert von $\int_a^b f(x)dx$, falls der letzte Grenzwert existiert.

Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ offen, $z_0\in\mathcal{D}$, $f:\mathcal{D}-\{z_0\}\to\mathbb{C}$ holomorph. Sei γ eine in $\mathcal{D}$ verlaufende stetig differenzierbare Kurve durch z_0. γ_r,γ_l sind wie in der nachfolgenden Figur erklärt. Sei

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta &= \int_{\gamma_r} f(\zeta)d\zeta,\\ \mathcal{L}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta &= \int_{\gamma_l} f(\zeta)d\zeta.\end{aligned}$$

Satz III.15.4: *Sei $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ offen. Seien $a<b$ ($a,b\in\mathbb{R}$), $p_0=x_0\in(a,b)\subset[a,b]\subset\mathcal{D}$. Sei $f:\mathcal{D}-\{p_0\}\to\mathbb{C}$ holomorph. f besitze in p_0 einen Pol der Ordnung 1. Dann existiert ($f=f_1+if_2$)*

$$\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx = \mathcal{P}\int_a^b f_1(x)dx + i\mathcal{P}\int_a^b f_2(x)dx,$$

und, wenn γ durch $[a,b]\ni t\longmapsto t$ gegeben ist, so ist

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right),\\ &= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \pi i\, Res_{p_0} f.\end{aligned}$$

Beweis: In der oben dargestellten allgemeinen Situation ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta - \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta &= 2\pi i\, Res_{p_0} f, \text{ also}\\ \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta\right) &= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \pi i\, Res_{p_0} f,\\ &= \mathcal{L}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta - \pi i\, Res_{p_0} f.\end{aligned}$$

Damit ist die zweite Behauptung des Satzes bewiesen. Sei ohne Einschränkung $p_0=0$.

Als Laurententwicklung von f um 0 haben wir $f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots$. Mit $g(z) = zf(z)$ gilt: $g(z) = a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + \ldots$. Also ist g in $\mathcal{D}$ holomorph. Weiter ist $\frac{g(.)-g(0)}{.}$ holomorph in $\mathcal{D} - \{0\}$ und nach 0 holomorph fortsetzbar,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_\varepsilon} f(\zeta)d\zeta &= \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{g(\zeta)-g(0)}{\zeta}d\zeta + g(0)\int_{\alpha_\varepsilon}\frac{1}{\zeta}d\zeta, \\
&= \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{g(\zeta)-g(0)}{\zeta}d\zeta + a_{-1}\pi i
\end{aligned}$$

(III.15.1)

$$= \int_{\alpha_\varepsilon} \frac{g(\zeta)-g(0)}{\zeta}d\zeta + \pi i\, Res_0 f.$$

Der Cauchysche Integralsatz (Satz II.10.2) liefert

$$\int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(\zeta)d\zeta - \int_{\alpha_\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\rho} + \int_{\alpha_\rho} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\int_a^{-\varepsilon} f(x)dx + \int_\varepsilon^b f(x)dx &= (\int_a^{-\rho} - \int_{\alpha_\rho} + \int_\rho^b) + \int_{-\rho}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^\rho + \int_{\alpha_\rho}, \\
&= (\int_a^{-\rho} - \int_{\alpha_\rho} + \int_\rho^b) + \int_{\alpha_\varepsilon}, \\
&= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \int_{\alpha_\varepsilon}, \text{ also mit (III.15.1) für } \varepsilon \to 0 \\
\mathcal{P}\int_a^b f(x)dx &= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \pi i\, Res_0 f.
\end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. □

Beispiel III.15.5: Als Anwendung zeigen wir

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3-1} := \lim_{\substack{a \to -\infty, \\ a < -1 \\ b \to +\infty \\ b > 1}} \mathcal{P}\int_a^b \frac{dx}{x^3-1} = -\frac{\pi}{3}\sqrt{3}.$$

Wir haben die Zerlegung

$$\begin{aligned}
z^3 - 1 &= (z-1)(z-\rho)(z-\overline{\rho}) \text{ mit} \\
\rho &= -\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}},\ |\rho| = 1, \\
\overline{\rho} &= -\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}},\ |\overline{\rho}| = 1,
\end{aligned}$$

und $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = \rho$, $\rho_3 = \overline{\rho}$ sind gerade die Nullstellen von $z^3 - 1$. Nach Hilfssatz III.14.5 ist, da es sich bei ρ_1, ρ_2, ρ_3 um einfache Nullstellen von $z^3 - 1$ handelt,

$$\begin{aligned} Res_{\rho_j} \frac{1}{.^3 - 1} &= \left(\frac{1}{3z^2}\right)_{\rho_j} = \frac{1}{3\rho_j^2} = \frac{1}{3}\overline{\rho}_j^2 \\ &= \frac{1}{3},\ j = 1, \\ &= -\frac{1}{6} \pm \frac{i}{6}\sqrt{3},\ j = 2, 3. \end{aligned}$$

Nach Satz III.15.4 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\int_{-R}^{+R} f(x)dx &= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \pi i Res_1 \frac{1}{.^3 - 1}, \\ &= \mathcal{R}\int_\gamma f(\zeta)d\zeta + \frac{\pi i}{3}, \\ &= \int_{\gamma_r} f(\zeta)d\zeta + \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta + \frac{\pi i}{3} - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta, \\ &= 2\pi i\ Res_{\rho_2} \frac{1}{.^3 - 1} + \pi i/3 - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta, \\ &= -\frac{2\pi i}{6} - \frac{2\pi}{6}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\pi i - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta, \\ &= -\frac{1}{3}\pi\sqrt{3} - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta. \end{aligned}$$

Wegen $|\int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta| \leq 2\pi R \frac{1}{R^3 - 1}$ ist $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta = 0$. Mit $a < -R, b > R$ folgt

$$\lim_{\substack{a\to-\infty,\\ a<-R,\\ b\to+\infty,\\ b>R}} \mathcal{P}\int_a^b \frac{1}{x^3 - 1}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ a<-R}} \int_a^{-R} \frac{1}{x^3 - 1}dx + \mathcal{P}\int_{-R}^{+R} \frac{1}{x^3 - 1}dx + \lim_{\substack{b\to\infty\\ b>R}} \int_R^b \frac{1}{x^3 - 1}dx,$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ a<-R}} \int_a^{-R} \frac{1}{x^3 - 1}dx - \frac{1}{3}\pi\sqrt{3} - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta + \lim_{\substack{b\to\infty,\\ b>R}} \int_R^b \frac{1}{x^3 - 1}dx, \\ &= \int_{-\infty}^{-R} \frac{1}{x^3 - 1}dx - \frac{1}{3}\pi\sqrt{3} - \int_{\alpha_R} f(\zeta)d\zeta + \int_R^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 1}dx. \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, daß

$$\lim_{\substack{a\to-\infty,\\ a<-R,\\ b\to+\infty,\\ b>R}} \mathcal{P}\int_a^b \frac{1}{x^3-1}dx = \lim_{\substack{a\to-\infty,\\ a<-1,\\ b\to+\infty,\\ b>1}} \mathcal{P}\int_a^b \frac{1}{x^3-1}dx$$

ist. Für $R\to\infty$ folgt in der Tat $\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^3-1}dx = -\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$.

Beispiel III.15.6: Die Distribution $\mathcal{P}\frac{1}{x}$: Sei $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Sei

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)\varphi = \mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

Da $\frac{1}{x}$ um 0 nicht integrierbar ist, muß die zu $\frac{1}{x}$ gehörigen Distribution über den Hauptwert erklärt werden. Dieser existiert: Für $supp\varphi\subset[-R,R]$ folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}dx &= \varphi(0)\mathcal{P}\int_{-R}^{+R}\frac{dx}{x}+\mathcal{P}\int_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,\\
&= \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to0}(\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dx}{x})+\mathcal{P}\int_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,\\
&= \int_{-R}^{+R}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}dx,
\end{aligned}$$

da das letzte Integral wegen $|\varphi(x)-\varphi(0)|\le c|x|$ dem Betrage nach existiert. Die Abbildung $\mathcal{P}\frac{1}{x}:\mathcal{D}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ ist linear.

Wenn $\varphi_n \Rightarrow 0$, $n\to\infty$ (besonders gleichmäßig im Sinn der Topologie in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$), so folgt $(\mathcal{P}\frac{1}{x})(\varphi_n)\to0$, $n\to\infty$. Also ist $\mathcal{P}\frac{1}{x}\in\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

Wichtige Distributionen sind

$$\begin{aligned}
\delta^+ &= \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\frac{1}{x},\\
\delta^- &= \frac{1}{2}\delta-\frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

§16. Der Satz von der offenen Abbildung und das Maximumprinzip

Wir erinnern zunächst an Definition III.14.2, in der wir den Begriff der Ordnung einer Nullstelle einer holomorphen Funktion f erklärt hatten. Es gilt das

Lemma III.16.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen. Seien $\begin{smallmatrix} \widetilde{z}_1,\ldots,\widetilde{z}_n \\ z_1,\ldots,z_m \end{smallmatrix} \in \mathcal{D}$. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $r > 0$. Seien*

$$\begin{aligned} &\begin{matrix} \widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n \\ z_1, \ldots, z_m \end{matrix} \in U_r(z_0), \\ &\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Sei $f : \mathcal{D} - \{z_1, \ldots, z_m\}$ holomorph, sei $f(z) \neq 0$, $z \in \partial U_r(z_0)$. f besitze in $z_1, \ldots, z_m$ Pole der Ordnungen $k_1, \ldots, k_m$. $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ seien genau die Nullstellen von f in $U_r(z_0)$, ihre Ordnungen seien $n_1, \ldots, n_n$. Sei

$$P = \sum_{\mu=1}^{m} k_\mu, \; N = \sum_{\nu=1}^{n} n_\nu$$

Wenn f keine Singularitäten in $\mathcal{D}$ hat, setzen wir $P = 0$. Wenn f keine Nullstellen in $U_r(z_0)$ hat, setzen wir $N = 0$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = N - P.$$

Beweis: Wir berechnen $Res_{z_1} \frac{f'}{f}$. Wegen $f(z) = (z - z_1)^{-k_1} g(z)$, $g(z_1) \neq 0$, $f'(z) = -k_1 (z - z_1)^{-k_1 - 1} g(z) + (z - z_1)^{-k_1} g'(z)$ mit einer in einer Umgebung von z_1 holomorphen Funktion g, folgt

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-k_1}{z - z_1} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

in einer eventuell kleineren Umgebung von z_1. Also ist $Res_{z_1} \frac{f'}{f} = -k_1$. Analog zeigt man $Res_{z_2} \frac{f'}{f} = -k_2$ usw. Jetzt berechnen wir $Res_{\widetilde{z}_1} \frac{f'}{f}$. Wegen $f(z) = (z - \widetilde{z}_1)^{n_1} \widetilde{g}(z)$, $\widetilde{g}(z_1) \neq 0$, $f'(z) = n_1 (z - \widetilde{z}_1)^{n_1 - 1} \widetilde{g}(z) + (z - \widetilde{z}_1)^{n_1} \widetilde{g}'(z)$, $\widetilde{g}$ holomorph in einer Umgebung von $\widetilde{z}_1$, $\widetilde{g}(z) \neq 0$ in einer eventuell kleineren Umgebung, gilt dort

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_1}{z - \widetilde{z}_1} + \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}.$$

Also ist $Res_{\widetilde{z}_1} \frac{f'}{f} = n_1$. Analog zeigt man $Res_{\widetilde{z}_2} \frac{f'}{f} = n_2$ usw. Anwendung des Satzes III.13.1 (Residuensatz) vollendet den Beweis. □

Satz III.16.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend, f :*

$\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. f sei nicht konstant. Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $w_0 = f(z_0)$. Dann gibt es offene Umgebungen $U(z_0) \subset \mathcal{D}$, $V(w_0) \subset \mathbb{C}$ mit $f(U(z_0)) = V(w_0)$. Genauer gilt folgende Aussage: $f - w_0$ hat in z_0 eine Nullstelle der endlichen Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Dann kann man $U(z_0)$, $V(w_0)$ so wählen, daß für jedes $w \in V(w_0)$ die Funktion $f - w$ in $U(z_0)$ genau k Nullstellen besitzt (nach ihrer Ordnung gezhlt).

Beweis: $f - w_0$ hat in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung. Anderenfalls ist $f(z_0) - w_0 = 0$, $f^{(n)}(z_0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist nach S. ...... jedenfalls $f(z) = w_0$ in $\mathcal{D}$, im Widerspruch zu unserer Annahme. Sei $\widetilde{U} = U_r(z_0)$ mit $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$ auf $\overline{\widetilde{U}} - \{z_0\}$ sei $f(z) \neq w_0$. Für k gilt dann nach Lemma III.16.1:

$$k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w_0} d\zeta.$$

$K = f(\partial \widetilde{U})$ ist kompakt. Wir haben $w_0 \notin K$. Wir wählen eine offene Umgebung $V_\rho(w_0) = \{w | w \in \mathbb{C}, |w - w_0| < \rho\}$ mit $\rho > 0$ und $\overline{V_\rho(w_0)} \cap K = \emptyset$. Sei $V(w_0) = V_\rho(w_0)$, sei $w \in V(w_0)$. Dann ist $f(z) \neq w$, $|z - z_0| = r$.

Jedem $w \in V(w_0)$ ordnen wir die Zahl

$$N_w = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

zu. N ist stetig auf $V(w_0)$, nach Lemma III.16.1 ganz, also konstant und wegen $N_{w_0} = k$ folgt: $N_w = k$, $w \in V(w_0)$. Sei $U(z_0) = f^{-1}(V(w_0))$. Dann ist $U = U(z_0)$ offene Umgebung von z_0, da f stetig ist. Sei $z \in U_r(z_0)$, $f(z) = w \in V(w_0)$. Dann ist $z \in U(z_0)$. Die Summe der Ordnungen der endlich vielen Nullstellen $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_n$ von $f - w$ in $U_r(z_0)$, die alle in $U(z_0)$ liegen, ist nach Lemma III.16.1 gerade k. □

Definition III.16.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. f heißt offen, wenn für jede offene Menge $U \subset \mathcal{D}$ gilt: $f(U)$ ist offen.*

Satz III.16.3 (Satz von der offenen Abbildung): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist f offen, $f(\mathcal{D})$ ist wegweise zusammenhängend.*

Beweis: Sei $U' \subset \mathcal{D}$, U' offen. Sei $z_0 \in U'$. Wir wählen ein offenes und wegweise zusammenhängendes U'' mit $z_0 \in U'' \subset U' \subset \mathcal{D}$. Dann wählen wir nach Satz III.16.2 ein $U(z_0) \subset U''$, $U(z_0)$ offen, und ein $V(f(z_0))$, $V(f(z_0))$ offen mit $f(U(z_0)) = V(f(z_0)) \subset f(\mathcal{D})$. Damit haben wir zu jedem $w_0 = f(z_0) \in f(U')$ eine offene Menge $V(w_0)$ gefunden mit $V(w_0) \subset f(U')$. $f(U')$

ist also offen. Der wegweise Zusammenhang ist klar. $\square$

Satz III.16.4 (Das Maximumprinzip): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es existiere ein $z_0 \in \mathcal{D}$ und eine offene Umgebung $U(z_0) \subset \mathcal{D}$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $z \in U(z_0)$. Dann ist f konstant.*

Beweis: f sei nicht konstant. f ist offen nach Satz III.16.3. Also ist $f(U(z_0))$ offen. In $f(U(z_0))$ gibt es Punkte w mit $|w| > |f(z_0)|$, $w = f(z)$ für ein $z \in U(z_0)$, und dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. And der folgenden Figur wird der Beweis veranschaulicht. $\square$

Satz III.16.5 (Das Minimumprinzip): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Es existiere ein $z_0 \in \mathcal{D}$ und eine offene Umgebung $U(z_0) \subset \mathcal{D}$ mit*

$$|f(z)| \geq |f(z_0)| > 0, \; z \in U(z_0)$$

Dann ist f konstant.

Eine Folgerung aus Satz III.16.3 ist
Satz III.16.6 (Satz von der Gebietstreue): *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend. Sei $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(\mathcal{D})$ offen und wegweise zusammenhängend.*

Beweis: $f(\mathcal{D})$ ist offen nach Satz III.16.3. Seien $w_1, w_2 \in f(\mathcal{D})$, $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ mit $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$. Für den wegweisen Zusammenhang von $f(\mathcal{D})$ verweisen wir auf IV.6. $\square$

Eine Folgerung aus Lemma III.16.1 ist der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra, nämlich

Satz III.16.7: *Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, d. h.*

$$P(z) = z^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu, \; z \in \mathbb{C}.$$

Dann hat P in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen (mit ihrer Ordnung gezählt).

Beweis: Sei

$$\mathcal{R}(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu, \; z \in \mathbb{C}.$$

Dann gibt es ein $R > 0$ derart, daß $|z|^n \geq |\mathcal{R}(z)| + 1$ ist für $|z| \geq R$. Demnach liegen alle Nullstellen von P in $|z| < R$. Nach Satz III.11.3 hat P nur endlich viele paarweise verschiedene Nullstellen $\widetilde{z}_1, \ldots, \widetilde{z}_l$ mit den Ordnungen $n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$. Sei

$$N = \sum_{\lambda=1}^{l} n_\lambda.$$

Nach Lemma III.16.1 ist

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\widetilde{R}} \frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} d\zeta, \ \widetilde{R} \geq R.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{P'(z)}{P(z)} - n\frac{1}{z} &= \frac{zP'(z) - nP(z)}{zP(z)} \\ &= \frac{(n-1)a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z - na_{n-1}z^{n-1} - \ldots - na_0}{z^{n+1} + a_{n-1}z^n + \ldots + a_0 z}. \end{aligned}$$

Also gibt es ein $R_1 \geq \mathbb{R} > 0$ derart, daß

$$|\frac{P'(z)}{P(z)} - n\frac{1}{z}| \leq \frac{c}{|z|^2}, \ |z| \geq R_1,$$

ist mit einer Konstanten $c > 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\widetilde{R}} n\frac{1}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\widetilde{R}} \left(\frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} - n\frac{1}{\zeta} \right) d\zeta, \\ &= n + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\widetilde{R}} \left(\frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} - n\frac{1}{\zeta} \right) d\zeta, \ \widetilde{R} \geq R_1 \text{ nach Beispiel II.7.1.} \end{aligned}$$

Wegen

$$|\int_{|\zeta|=\widetilde{R}} \left(\frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} - n\frac{1}{\zeta} \right) d\zeta| \leq \frac{2\pi c}{\widetilde{R}}, \quad \widetilde{R} \geq R_1,$$

ist

$$\lim_{\widetilde{R}\to\infty} \int_{|\zeta|=\widetilde{R}} \left(\frac{P'(\zeta)}{P(\zeta)} - n\frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = 0.$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $\widetilde{R} \to \infty$ sofort: $N = n$. □

Aus Satz III.16.4 und den Cauchy-Riemannschen-DGLen ziehen wir die folgende Konsequenz:

Satz III.16.8: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen und wegweise zusammenhängend, sei f :*

$\mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $|f|$ konstant. Dann ist f konstant. Sei $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph und reellwertig. Dann ist g konstant.

Beweis: Sei $z_0 \in \mathcal{D}$. Dann ist $|f(z)| = |f(z_0)|$, $z \in \mathcal{D}$. Aus Satz III.16.4 folgt die erste Behauptung. Zur zweiten Behauptung: Sei $g = u + iv$. Wegen $v \equiv 0$ ist gemäß den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = u_y \equiv 0$, also ist n konstant. $\square$

Wir beenden diesen Paragraphen mit einem Satz über harmonische Funktionen, nämlich
Satz III.16.9: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ offen, $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei u nicht konstant. Dann besitzt u keine lokalen Extrema.*

Beweis: Sei $z_0 \in \mathcal{D}$, $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$. Sei $r > 0$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$,

$$u(x,y) \leq u(x_0,y_0), \ (x,y) \in U_r(z_0),$$

d.h. in (x_0, y_0) hat u ein lokales Maximum. Da $U_r(z_0)$ sternförmig ist, hat nach Satz I.5.1 die Funktion u eine holomorphe Ergänzung, d.h. es existiert eine holomorphe Funktion $f : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $u = Re\, f$. Da u nicht konstant ist, ist f nicht konstant. Sei $r' \in (0, r)$. Dann ist $f(U_{r'}(z_0))$ offen nach Satz III.16.3 und

$$(Re\ f)(x,y) \leq (Re\ f)(x_0,y_0), \ (x,y) \in U_{r'}(z_0).$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch, denn im rot schraffierten Teil der obigen Figur liegt ein w mit $Re\ w > u(x_0, y_0)$, $w = f(z)$, $z \in U_{r'}(z_0)$, also $u(x,y) > u(x_0, y_0)$ mit $z = x + iy$. Analog schließt man die Möglichkeit eines lokalen Minimums aus. $\square$

§17. Holomorphe Abbildungen

Wir fügen zunächst zu $\mathbb{C}$ ein neues Objekt, nämlich den Punkt ∞, hinzu. Als offene Umgebungen von ∞ bezeichnen wir die Mengen $\{z||z| > R\}$, $R > 0$. Wir sagen, daß eine Folge (z_ν) aus $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gegen ∞ konvergiert, wenn es zu jedem $R > 0$ ein $\nu_0(R) \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß $|z_\nu| > R$ ist für $\nu \geq \nu_0(R)$. Dabei legen wir fest, daß

$$|\infty| = +\infty$$

ist und notieren als Rechenregeln

$$\begin{aligned} &z + \infty = \infty, \ z \in \mathbb{C} \\ &1/\infty = 0. \end{aligned}$$

Eine Menge $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt offen, wenn $\mathcal{D} \cap \mathbb{C}$ offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und wenn $\mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$ offene Teilmeinge von $\widehat{\mathbb{C}}$ ist. Dies bedeutet: Ist $\infty \in \mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$, so enthält $\mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$ eine Menge der Form $\{z||z| > R\}$ mit $R > 0$, ist $z' \in \mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$, $z' \neq \infty$, so gibt es eine offene Menge $U(z') \subset \mathbb{C}$ mit $z' \in U(z') \subset \mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$ der Form $\{z||z| > R\}$ mit $R > 0$, $z' \in \{z||z| > R\} \subset \mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$. Es ist oft zweckmäßig, $\widehat{\mathbb{C}}$ in der Form

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup (\underbrace{\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}}_{\text{offen}})$$

zu schreiben.

Definition III.17.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen. Eine Abbildung $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn*

1. $f|(\mathcal{D} \cap \mathbb{C})$ *holomorph ist*
2. $f|(\mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}))$ *holomorph ist, d. h. mit $\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$, $z \longmapsto \frac{1}{z}$, gilt: $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})) \to \mathbb{C}$ ist holomorph.*

Beachte:

1. $\varphi^{-1}(\mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\}))$ *ist offene Teilmenge von* $\mathbb{C}$
2. *Es gilt, falls $\infty \in \mathcal{D} \cap (\widehat{\mathbb{C}} - \{0\})$ ist: $f(\infty) := f \circ \varphi(0)$. Ist $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt f holomorphe Abbildung.*

Als Anwendung dieser Definition zeigen wir: $f : \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto e^{1/z}$, $f(\infty) = 1$, ist holomorph. Wir haben nämlich $f \circ \varphi(z) = e^z$, $f \circ \varphi(0) = 1$.

Definition III.17.2: *Sei $\mathcal{D} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen, sei $z_0 \in \mathcal{D} \cap \mathbb{C}$. Sei $f : \mathcal{D} - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f in z_0 einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ hat, setzt man*

$f(z_0) = \infty$.

Diese Definition wird dadurch gerechtfertigt, daß für eine Folge (z_ν) mit $z_\nu \in \mathcal{D} \cap \mathbb{C} - \{z_0\}$, $\nu \in \mathbb{N}$, $z_\nu \to z_0$, $\nu \to \infty$, gilt: $|f(z_\nu)| \to +\infty$, $\nu \to \infty$.

Beispiel III.17.1: Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ gegeben durch

$$z \longmapsto \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{für} \quad z \neq -\frac{d}{c},\ z \neq \infty, \\ \infty & \text{für} \quad z = -d/c, \\ \frac{a}{c} & \text{für} \quad z = \infty. \end{cases}$$

Wegen

$$\frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} = \frac{a + bz}{c + dz}$$

ist f holomorph in $\widehat{\mathbb{C}} - \{-\frac{d}{c}\}$ mit $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Wegen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z + \frac{d}{c}}(\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}), \\ &= \frac{1}{z + \frac{d}{c}}(\frac{a}{c}(z + \frac{d}{c}) + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}), \\ &= \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

hat f in $z = -\frac{d}{c}$ einen Pol der Ordnung 1 mit dem Residuum $\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}$ (diese Größe ist wegen $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ ebenfalls $\neq 0$).

Satz III.17.1: *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$. Bei*

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}},\ f \textit{ wie in Beispiel III.17.1,}$$

gehen Kreise und Geraden wieder in Kreise und Geraden über.

Beweis: Wir zerlegen f in $f = f_3 \cdot f_2 \cdot f_1$, wobei f_1, f_3 von der Form $z \longmapsto \widetilde{a}z + \widetilde{b}$ mit $\widetilde{a} \neq 0$ (nicht konstant), $f_2(z) = \frac{1}{z}$ sind: Sei $f_1(z) = cz + d$, $f_2(w) = \frac{1}{w}$, $f_3(\zeta) = \widetilde{a}\zeta + \widetilde{b}$, wobei

$$\widetilde{b}c = a$$

$$\widetilde{b}d + \widetilde{a} = b, \text{ also } \widetilde{a} = b - \widetilde{b}d = b - \frac{a}{c}d \neq 0$$

sind. Für f_1, f_3 gehen in der Tat Kreise und Geraden wieder in Kreise und Geraden über, wie der Leser als Übung zeigen kann. Es bleibt f_2 zu untersuchen:

$$z \longmapsto \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv(x,y), \text{ also}$$

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \; y = -\frac{v}{u^2+v^2}.$$

Die Menge der Kreise und Geraden wird beschrieben durch

$$A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

wobei sich für $4AD - B^2 - C^2 < 0$, $A \neq 0$ ein Kreis und für $A = 0$, $(B, C) \neq (0, 0)$ eine Gerade ergibt. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&A\left(\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right) + B\frac{u}{u^2+v^2} - C\frac{v}{u^2+v^2} + D = 0,\\
&A\left(\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2}\right) + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0,\\
&A + Bu - Cv + D(u^2+v^2) = 0.
\end{aligned}$$

so daß sich gerade wieder die Kreise und Geraden (für $D = 0$) ergeben. □

Sei

$$\begin{aligned}
H &= \{z | z \in \mathbb{C},\ Im\, z \geq 0\},\\
\overset{\circ}{H} &= \{z | z \in \mathbb{C},\ Im\, z > 0\},\\
E &= \{z | z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1\},\\
\overset{\circ}{E} &= \{z | z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}.
\end{aligned}$$

Satz III.17.2: *Sei die holomorphe Funktion $f: \overset{\circ}{H} \to \overset{\circ}{E}$ gegeben durch $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$. Die durch $g: \overset{\circ}{E} \to \overset{\circ}{H}$, $w \longmapsto (-i)\frac{w+1}{w-1}$ gegebene Umkehrabbildung ist holomorph, d.h., wie man auch sagt, f ist biholomorph.*

Beweis: Es ist klar, daß f in $\overset{\circ}{H}$ holomorph ist. Wegen

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{x^2+(1+y)^2}}$$

ist für $y > 0$ gerade $|\frac{z-i}{z+i}| < 1$. Also ist $f(\overset{\circ}{H}) \subset \overset{\circ}{E}$. Mit $w = (z-i)/(z+i)$ folgt für $w \in \overset{\circ}{E}$ gerade $w(z+i) = z - i$, $wz - z = -iw - i$,

$$\begin{aligned}
z &= \frac{iw+i}{1-w} = \frac{i(w+1)(1-\overline{w})}{|1-w|^2},\\
&= \frac{i(w-|w|^2+1-\overline{w})}{|1-w|^2} = \frac{i(2iImw+1-|w|^2)}{|1-w|^2}, \text{ also}
\end{aligned}$$

$$Im\, z > 0,\ f(\overset{\circ}{H}) = \overset{\circ}{E}\ .$$

Damit ist der Satz bewiesen. Wir geben noch eine Übersicht über einige Werte von f. Man vergleiche hierzu das Beispiel III.17.1.

z	0	1	-1	∞	-i
f(z)	-1	-i	i	1	∞

Satz III.17.3 (Die holomorphen Antomorphismen von $\overset{\circ}{E}$): *Sei $z_0 \in \overset{\circ}{E}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$. Dann ist*

$$f : \overset{\circ}{E} \to \overset{\circ}{E},\ z \longmapsto e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z},$$

biholomorph. Jede biholomorphe Abbildung f von $\overset{\circ}{E}$ auf sich läßt sich in der Form

$$f(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

mit einem $\vartheta \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \overset{\circ}{E}$ darstellen.

Beweis: Wegen $|z_0| < 1$, $|1 - \overline{z}_0 z| \geq 1 - |z_0||z| \geq 1 - |z_0|(1+\varepsilon) > 0$, $|z| \leq 1 + \varepsilon$, läßt sich f holomorph auf $U_{1+\varepsilon}(0)$ fortsetzen für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Für $|z| = 1$ ist

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right|, \\
&= \left|\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}\right||\overline{z}| = \left|\frac{|z|^2 - z_0\overline{z}}{1 - \overline{z}_0 z}\right| = \left|\frac{1 - z_0\overline{z}}{1 - \overline{z}_0 z}\right| = 1
\end{aligned}$$

Es ist $f(z_0) = 0$. Also ist f nicht konstant. Nach Satz III.16.4 ist $|f(z)| \leq 1$, $z \in \overset{\circ}{E}$, und dann $|f(z)| < 1$, $z \in \overset{\circ}{E}$. Also ist $f(\overset{\circ}{E}) \subset \overset{\circ}{E}$. Sei

$$w = e^{i\vartheta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z},\ |z| < 1,\ \text{also}$$

$$\begin{aligned}
w(1 - \overline{z}_0 z) &= e^{i\vartheta}(z - z_0), \\
w - w\overline{z}_0 z &= e^{i\vartheta} z - e^{i\vartheta} z_0, \\
w + e^{i\vartheta} z_0 &= e^{i\vartheta} z + w\overline{z}_0 z, \\
z &= \frac{w + e^{i\vartheta} z_0}{w\overline{z}_0 + e^{i\vartheta}} = \frac{w + e^{i\vartheta} z_0}{(w\overline{z}_0 e^{-i\vartheta} + 1)e^{i\vartheta}}, \\
&= e^{-i\vartheta} \frac{w - w_0}{1 + e^{-i\vartheta}\overline{z}_0 w},\ w_0 = -e^{i\vartheta} z_0, \\
&= e^{-i\vartheta} \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w},\ \overline{w}_0 = -e^{-i\vartheta}\overline{z}_0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $f : \overset{\circ}{E} \to \overset{\circ}{E}$ ist biholomorph, die Umkehrabbildung hat dieselbe Gestalt wie f. Die letzte Aussage des Satzes können wir hier nicht beweisen. $\square$

§18. Harmonische Funktionen und das Dirichletsche Randwertproblem

Wir machen zunächst eine **Bemerkung zur Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen:** Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $r > 0$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $\overline{U_r(z_0)} \subset \mathcal{D}$. Dann ist nach Satz II.7.1 jedenfalls

$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \text{ also mit } \zeta(t) = z_0 + re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi, \\
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt, \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.
\end{aligned}
$$

Diese Formel überträgt sich sofort auf Real- und Imaginärteil von f. Wir wollen das folgende Problem betrachten:

Problem III.18.1: Sei wieder $\overset{\circ}{E} = \{z | z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$, $E = \{z | z \in \mathbb{C},\ |z| \le 1\}$. Sei $g : \partial E \to \mathbb{R}$ stetig. Gesucht ist eine stetige Funktion $h : E \to \mathbb{R}$, die in $\overset{\circ}{E}$ zwei Mal stetig differenzierbar ist, mit

$$
\begin{aligned}
\Delta h &= 0 \text{ in } \overset{\circ}{E} \\
h &= g \text{ auf } \partial E.
\end{aligned}
$$

Dieses Problem nennt man das Dirichletsche Randwertproblem für harmonische Funktionen.

Wie am Ende von §5 schon erwähnt, ist es zur Lösung des Problems III.18.1 nützlich, $\overset{\circ}{E}$ auf die obere Halbebene abzubilden. Am Satz III.17.2 wissen wir, daß die Abbildung

$$\overset{\circ}{E} \ni z \longmapsto (-i)\frac{z+1}{z-1} = g(z).$$

dies leistet. Mit $g = u + iv$ haben wir

$$
\begin{aligned}
g(z) &= (-i)\frac{(z+1)(\overline{z}-1)}{(z-1)(\overline{z}-1)} = (-i)\frac{|z|^2 + (\overline{z} - z) - 1}{|z-1|^2}, \\
&= (-i)\frac{r^2 - 1 + 2iy}{r^2 - 2x + 1} = \frac{2y}{r^2 - 2x + 1} + i\frac{1 - r^2}{r^2 - 2x + 1}, \\
v(x, y) &= \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2},\ |z| = r < 1
\end{aligned}
$$

v ist in $\overset{\circ}{E}$ harmonisch, und es ist $v|(\partial E - \{1\}) \equiv 0$. Allgemeiner legen wir bei v die Singularität nicht in $z = 1$, sondern in einen Randwertpunkt $\zeta \in \partial E$: Wir ersetzen z durch z/ζ. Dies liefert die Funktion

$$\frac{1 - \frac{|z|^2}{|\zeta|^2}}{|1 - \frac{z}{\zeta}|^2} = \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z^2|},$$

$$\frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = Re\frac{\zeta + z}{\zeta - z},$$

die wir als Singularitätenfunktion für Problem III.18.1 benutzen wollen. Es gilt

Satz III.18.1 (Poissonsche Integralformel): *Ist $h : E \to \mathbb{R}$ stetig und in $\overset{\circ}{E}$ harmonisch, so gilt für alle $z \in \overset{\circ}{E}$ die Formel*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\vartheta}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\vartheta} - z|^2} d\vartheta,$$

d. h. für $z = re^{it}$, $0 \le r < 1$, $0 \le t \le 2\pi$, ist

$$h(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\vartheta}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - t) + r^2} d\vartheta.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$, h in $|z| < 1 + \varepsilon$ harmonisch. Sei $f : U_{1+\varepsilon}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $h = Re\, f$ (siehe Satz I.5.1). Sei $f = h + iv$. Die Annahme, daß h in $|z| < 1 + \varepsilon$ harmonisch ist, ist keine Einschränkung, da man sonst

$$f_n(z) = f((1 - \frac{1}{n})z) = h((1 - \frac{1}{n})z) + iv((1 - \frac{1}{n})z),\ n \in \mathbb{N},$$

betrachten kann und anschließend $n \to \infty$ konvergieren läßt. Für $|z| < 1$ erhält man vermöge der Cauchyschen Integralformel (Satz II.7.1) die Formel

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\vartheta})}{e^{i\vartheta} - z} ie^{i\vartheta} d\vartheta,\ \zeta = e^{i\vartheta},\ d\zeta = ie^{i\vartheta} d\vartheta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\vartheta})}{1 - e^{-i\vartheta} z} d\vartheta. \end{aligned}$$

Bei festem $z \in \overset{\circ}{E}$ ist jedenfalls die Abbildung $\zeta \longmapsto f(\zeta)/(1 - \zeta\overline{z})$ holomorph in $U_{1+\varepsilon}(0)$ für ein von z abhängiges $\varepsilon > 0$. Ersetzen wir f durch $f(.)/(1 - . \cdot \overline{z})$,

$$\frac{f(z)}{1 - |z|^2} = \frac{f(w)}{1 - w \cdot \overline{z}}|_{w=z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\vartheta})}{(1 - e^{i\vartheta}\overline{z})(1 - e^{-i\vartheta} z)} d\vartheta,$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\vartheta})}{|e^{i\vartheta}-z|^2} d\vartheta,\ |z|<1.$$

Übergang zum Realteil auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned}
\frac{h(z)}{1-|z|^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\vartheta})}{|e^{i\vartheta}-z|^2} d\vartheta,\\
h(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2} h(e^{i\vartheta}) d\vartheta.
\end{aligned}$$

□

Den nächsten Satz können wir hier nicht beweisen. In Anbetracht von Satz III.18.1 erscheint er aber naheliegend.

Satz III.18.2 (Lösung des Dirichlet-Problems für E): *Sei $g : \partial E \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$h : E \to \mathbb{R},\ z \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\vartheta})\frac{1-|z|^2}{|e^{i\vartheta}-z|^2} d\vartheta,\ z \in \mathring{E} \\ \\ g(z),\ z \in \partial E. \end{cases}$$

in E stetig und in $\mathring{E}$ harmonisch.

§19. Harmonische Funktionen und Greensche Funktionen

Wir befassen uns mit dem folgenden Problem: Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen. Zu $\rho : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, ρ wenigstens stetig, wird ein zweimal stetig differenzierbares (nach den reellen Variablen x, y) u gesucht mit $u : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\Delta u = \rho$ in $\mathcal{D}$, u lässt sich stetig auf $\overline{\mathcal{D}}$ fortsetzen, und wenn wir diese Fortsetzung ebenfalls mit u bezeichnen, soll $u|\partial\mathcal{D} = 0$ sein. Wir suchen zunächst eine Fundamentallösung, d.h. hier eine Funktion $J(z, \zeta) = J(|z - \zeta|)$ mit $z, \zeta \in \mathbb{C}$, $z \neq \zeta$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$,

$$\varphi(z) = \int_{\mathbb{R}^2} J(|z - \zeta|)\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\zeta)d\xi d\eta \quad z \in \mathbb{R}^2,\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Eine Fundamentallösung leistet also folgendes: Mit ihrer Hilfe können wir Δ auf den Elementen aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ invertieren. Wir betrachten die Funktion $\log r$, $r = |z| = (x^2+y^2)^{1/2}$ auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Offenbar ist $\Delta \log r = 0$. Dies sieht man am Einfachsten so: Sei $z_0 \in \mathbb{C}^{**}$, $U_r(z_0) \subset \mathbb{C}^{**}$ mit einem $r > 0$. Da $U_r(z_0)$ sternförmig ist, haben wir nach Satz I.4.4 einen holomorphen Zweig des Logarithmus

$$L(z) = \log r + i\varphi(z)$$

in $U_r(z_0)$ mit dem Realteil $\log r$, der infolgedessen harmonisch ist. $\log r$ ist im Wesentlichen die gesuchte Fundamentallösung. Dies zeigt

Satz III.19.1: *Es ist* $(z = x + iy)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log|z - \zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta = \varphi(z) = \varphi(x, y),\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Beweis: $\log r$ ist in $\mathbb{R}^2$ lokal integrierbar, d.h. für jedes kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ ist

$$\int_K |\log r|dxdy < +\infty.$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $supp\varphi \subset K$, K kompakt. Der Einfachheit halber sei $z = 0$. Dann haben wir

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \log|\zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_K \frac{1}{2\pi} \log|\zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta, \\
&= \int_{U_R(0)} \frac{1}{2\pi} \log|\zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta, \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{U_R(0) - \overline{U_\varepsilon(0)}} \frac{1}{2\pi} \log|\zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi, \eta)d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Dabei ist $U_R(0)$ eine Kreisscheibe um 0 mit Radius $R > 0$, den wir so groß wählen, daß $supp\varphi \subset K \subset U_R(0)$ ist. Hingegen ist $\varepsilon > 0$ klein, wenigstens $\varepsilon < R$. Nun brauchen wir die Greensche Formel, die wegen ihrer großen Wichtigkeit hier noch einmal angeführt und erläutert sei. Sei A eine offene beschränkte Menge des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. ∂A sei in Form einer oder mehrerer, etwa zweier wenigstens stetig differenzierbarer geschlossener Kurven γ_1, γ_2 gegeben. Wir stellen uns folgendes Bild vor:

γ_1, γ_2 seien doppelpunktfrei, bis auf Anfangs- und Endpunkt, sie sollen so durchlaufen werden, daß, in Durchlaufungsrichtung gesehen, A stets zur Linken liegt. Sei $\gamma_i \neq 0$, $i = 1, 2$. In jedem Punkt von ∂A, d.h. in jedem Punkt auf γ_1 oder γ_2 denken wir uns die äußere Normale ν abgetragen: ν ist ein nach außen weisender (außen bezüglich A) Vektor der Länge 1, der senkrecht auf dem Tangentialvektor an γ_1 bzw. γ_2 im betreffenden Punkt steht. Dabei ist mit $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, $\gamma_i(t) = (x_i(t),\ y_i(t))$ der Tangentialvektor einfach $\gamma_i'(t) = (x_i'(t),\ y_i'(t))$. Wie in II.6 eingeführt, ist

$$s_i(t) = \int_{a_i}^{t} |\gamma_i'(t)| dt,\ i = 1, 2,\ t \in [a_1, b_1] \text{ bzw. } [a_2, b_2]$$

die Bogenlänge des von a_i bis $\gamma_i(t)$ laufenden Kurvenstücks von γ_i. Es stellt sich nun heraus, daß man die Bogenlänge als neuen Kurvenparameter einführen kann. Dies wollen wir auf γ_1, γ_2 tun und diesen Parameter als s bezeichnen. Die Parameterintervalle sind dann einfach $[0, S_1]$ bzw. $[0, S_2]$ mit $S_1 = L_{\gamma_1}$, $S_2 = L_{\gamma_2}$. Die Greensche Formel lautet dann folgendermaßen: Seien $u, v : A \to \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Alle zweiten Ableitungen von u, v seien in A beschränkt, während sich u, v sowie ∇u, ∇v noch stetig auf $\overline{A}$ fortsetzen lassen mögen. Diese Fortsetzungen werden ebenfalls mit $u, \nabla u$ bzw. $v, \nabla v$ bezeichnet. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_A (u\Delta v - v\Delta u) dxdy &= \int_{\gamma_1} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}) ds + \int_{\gamma_2} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}) ds, \\
\frac{\partial u}{\partial \nu}(s) &= (\nabla u(\gamma_i(s)),\ \nu(\gamma_i(s))), \\
\frac{\partial v}{\partial \nu}(s) &= (\nabla v(\gamma_i(s)),\ \nu(\gamma_i(s))) \\
u(s) &= u(\gamma_i(s)),\ v(s) = v(\gamma_i(s)),\ i = 1 \text{ oder } 2,
\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_i} (u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}) ds = \int_0^{S_i} (u(s)\frac{\partial v}{\partial \nu}(s) - v(s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)) ds,\ i = 1 \text{ oder } 2.$$

Diese Greensche Formel wollen wir folgendermaßen anwenden: $A = U_R(0) - \overline{U_\varepsilon(0)}$, $\gamma_1 = \partial U_R(0)$ in positiver Richtung durchlaufen, $\gamma_2 = \partial U_\varepsilon(0)$ in negativer Richtung durchlaufen, $u = \log r$, $v = \varphi$. Dann ist $\Delta u = 0$ in A wie gerade gezeigt, $\nabla u = \frac{1}{2\pi}(\frac{x}{r^2},\ \frac{y}{r^2})$. Im Punkt $(x(s), y(s))$ aus γ_1 ist die äußere Normale gerade $\frac{1}{R}(x(s), y(s))$, im Punkt $(x(s), y(s))$ aus γ_2 gerade $-\frac{1}{\varepsilon}(x(s), y(s))$. Damit folgt

$$\int_A \frac{1}{2\pi} \log r \Delta\varphi dxdy = \int_{U_R(0)-\overline{U_\varepsilon(0)}} \frac{1}{2\pi} \log r \Delta\varphi dxdy,$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{U_R(0)-\overline{U_\varepsilon(0)}} \left(\frac{1}{2\pi}\log r\Delta\varphi - \frac{1}{2\pi}\varphi\Delta\log r\right) dxdy,\\
&= \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\varphi\right) ds +\\
&\quad + \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\varphi\right) ds,\\
&= \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\varphi\right) ds,\\
&= \int_{\gamma_2} \frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds - \int_{\gamma_2}\frac{1}{2\pi}(\nabla\log r(s), \left(\frac{-x(s)}{\varepsilon}, \frac{-y(s)}{\varepsilon}\right))\varphi(x(s), y(s))ds,\\
&= \int_{\gamma_2} \frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds + \int_{\gamma_2}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{x^2(s)}{\varepsilon^2} + \frac{y^2(s)}{\varepsilon^2}\right)\varphi(x(s), y(s)), ds,\\
&= \int_{\gamma_2} \frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds + \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\gamma_2}\varphi(x(s), y(s))ds.
\end{aligned}$$

Nun ist $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{\gamma_2}\varphi(x(s), y(s))ds = \varphi(0)$ und

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_2}\frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds = 0, \text{ weil}$$

$$\left|\int_{\gamma_2}\frac{1}{2\pi}\log r\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds\right| \le \varepsilon|\log\varepsilon|\sup_{\mathbb{R}^2}|\nabla\varphi|,\ 0 < \varepsilon < 1,$$

ist. Nach Umbenennung der Integralvariablen folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{2\pi}\log|\zeta|\Delta_{\xi,\eta}\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta = \varphi(0).$$

Der Fall $z \neq 0$ wird entsprechend behandelt, indem man nämlich $U_R(0)$ durch $U_R(z)$ und $U_\varepsilon(0)$ durch $U_\varepsilon(z)$ ersetzt. $\square$

Was die Fundamentallösung für den $\mathbb{R}^2$ leistet, soll nun die Greensche Funktion für eine beschränkte offene Menge $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ leisten. Dabei sind jedoch noch Randwerte in Betracht zu ziehen.

Definition III.19.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen , zusammenhängend und beschränkt. Eine Greensche Funktion zum Gebiet $\mathcal{D}$ und zum Operator Δ ist eine stetige Abbildung*

$$G : \overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}} - \{z = \zeta\} \to \mathbb{R},$$

$$(x, y, \xi, \eta) \longmapsto G(x, y, \xi, \eta) = G(z, \zeta),$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \zeta &= \xi + i\eta \end{aligned}$$

mit folgender Eigenschaften:

1. *Es ist $G(z, \zeta) = G(\zeta, z)$.*
2. *Für jedes feste $\zeta \in \mathcal{D}$ ist $z \longmapsto G(z, \zeta)$ in $z \neq \zeta$ zweimal stetig nach x, y differenzierbar und*
$$\Delta_{x,y} G(., \zeta) = 0 \text{ in } \mathcal{D} - \{\zeta\},$$
also auch $\Delta_{\xi,\eta} G(z, .) = 0$ in $\mathcal{D} - \{z\}$ für jedes feste $z \in \mathcal{D}$.
3. *Für alle $\zeta \in \mathcal{D}$ ist*
$$G(z, \zeta) = 0, \; z \in \partial\mathcal{D},$$
also auch $G(z, \zeta) = 0$ für $z \in \mathcal{D}$, $\zeta \in \partial\mathcal{D}$.
4. Für alle $z \in \mathcal{D}$ ist
$$\int_{\mathcal{D}} |G(z, \zeta)| d\xi d\eta \leq c < +\infty,$$
c eine von z unabhängige Konstante, und
$$\varphi(z) = \int_{\mathcal{D}} G(z, \zeta) \Delta_{\xi,\eta} \varphi(\zeta) d\xi d\eta, \; \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{D}).$$

Wir wollen nun im Fall $\mathcal{D} = \overset{\circ}{E} = \{z \,|\, |z| < 1\}$ eine Greensche Funktion konstruieren. Dazu benötigen wir

Hilfssatz III.19.1: *Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{D}$ offen, zusammenhängend und beschränkt. Sei $h : \overline{D} \times \overline{D} - \{z = \zeta | z \in \partial\mathcal{D}, \zeta \in \partial\mathcal{D}\} \to \mathbb{R}$ stetig, die Abbildung $(x, y) \longmapsto h(x, y, \zeta)$ sei für jedes feste $\zeta \in \mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$ harmonisch und es sei $h(z, \zeta) = h(\zeta, z)$,*

$$h(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \log |z - \zeta|, \; z \in \partial\mathcal{D}, \zeta \in \mathcal{D}.$$

$$\int_{\mathcal{D}} |h(z,\zeta)| d\xi d\eta \leq c < +\infty, \; z \in \mathcal{D},$$

c von z unabhängig.

Dann ist

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log |z-\zeta| + h(z,\zeta), \; (z,\zeta) \in \overline{D} \times \overline{D} - \{z=\zeta\}$$

Greensche Funktion zum Gebiet $\mathcal{D}$ zum Operator Δ.

Beweis: Zum Beweis haben wir uns nur mit Eigenschaft 4 der Definition III.19.1 zu befassen. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} \left(\frac{1}{2\pi} \log |z-\zeta| + h(z,\zeta) \right) \Delta, \varphi(\zeta) d\xi d\eta = \\
= \int_{\mathcal{D}} h(z,\zeta) \Delta_{\xi,\eta} \varphi(\zeta) d\xi d\eta + \varphi(z), \\
= \int_{\mathcal{D}} \Delta_{\xi,\eta} h(z,\zeta) \varphi(\zeta) d\xi d\eta + \varphi(z), \\
= \varphi(z), \; z \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

gemäß Satz III.19.1 und der Voraussetzung an h. $\square$

Für die Gültigkeit von 4. in Definition III.19.1 ist gerade das singuläre Verhalten von G auf der Diagonalen $z = \zeta$ verantwortlich. Hilfssatz III.19.1 liefert eine Darstellung von G, in der das singuläre Verhalten von G in $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ gerade durch den Term $\frac{1}{2\pi} \log |z-\zeta|$ gegeben ist.

Hilfssatz III.19.2: *Sei $\mathcal{D} = \overset{\circ}{E}$. Dann ist*

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta} \right|, \; z \in \overline{\mathcal{D}} = E, \; \zeta \in \mathcal{D} = \overset{\circ}{E}, \; z \neq \zeta$$

Greensche Funktion zum Gebiet $\overset{\circ}{E}$ zu Δ.

Beweis: Die Idee dieses Ansatzes stammt aus Satz III.17.3. Wie im Beweis zu diesem Satz bemerkt, ist

$$\left| \frac{z-\zeta}{1-\overline{\zeta}z} \right| = \left| \frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta} \right| = 1, \; |z| = 1, \; |\zeta| < 1.$$

Offenbar ist $|\frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta}|$ stetig in $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}} - \{|z| = |\zeta| = 1, \, z = \zeta\}$; also ist, da der Fall $|\frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta}| = 0$ in $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}} - \{|z| = |\zeta| = 1, \, z = \zeta\}$ nur für $z = \zeta$ eintritt, die Funktion $\log |\frac{z-\zeta}{1-\overline{z}\zeta}|$ in $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}} - \{z = \zeta\}$ stetig. Es folgt

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta| - \frac{1}{2\pi}\log|1-\overline{z}\zeta|.$$

Mit $h(z,\zeta) = -\frac{1}{2\pi}\log|1-\overline{z}\zeta| = -\frac{1}{2\pi}\log|1-z\overline{\zeta}|$ folgt: $(x,y)\longmapsto h(x,y,\zeta)$ ist in $\mathcal{D} = \overset{\circ}{E}$ harmonisch für jedes feste $\zeta \in \mathcal{D} = \overset{\circ}{E}$ (Man siehe hierzu I.5). Wegen $\log|1-\overline{z}\zeta| = \log|1-\overline{\zeta}z|$ folgt $h(z,\zeta) = h(\zeta,z)$. h ist stetig in $\overline{\mathcal{D}}\times\overline{\mathcal{D}} - \{|z| = |\zeta| = 1, z = \zeta\}$, da $1 = \overline{\zeta}z$ in $\overline{\mathcal{D}}\times\overline{\mathcal{D}}$ genau dann eintritt, wenn $z=\zeta,\ |z| = |\zeta| = 1$ ist. Für $|z| = 1,\ |\zeta| < 1$ ist

$$\begin{aligned} h(z,\zeta) &= -\frac{1}{2\pi}\log|1-\overline{z}\zeta|, \\ &= -\frac{1}{2\pi}\log|z\overline{z}-\overline{z}\zeta|, \\ &= -\frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|, \end{aligned}$$

so daß die Behauptung aus Hilfssatz III.19.2 folgt, wenn wir noch die Integrierbarkeitseigenschaft nachweisen. Es ist jedoch wegen der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{E}} |\log|1-\overline{z}\zeta||d\xi d\eta &\leq \int_{|1-\zeta|<2} |\log(1-|\zeta|)|d\xi d\eta \\ &= 2\pi\int_0^1 r|\log(1-r)|dr,\ z\in\overset{\circ}{E}\ . \end{aligned}$$

□

Hinweis zum Beweis: $1-z\overline{\zeta}$ ist holomorph in $U_{1+\delta}(0)$ und $Re(1-z\overline{\zeta}) > 0$. Nehme holomorphen Zweig von log in $\mathbb{C}^{**} = \mathbb{C} - \{Rez \leq 0\, Imz = 0\} \Rightarrow \log(1-z\overline{\zeta})$ holomorph $\Rightarrow \log(1-z\overline{\zeta}) = \log|1-z\overline{\zeta}|$ harmonisch in $U_{1+\delta}(0)(\delta = \delta(\zeta) > 0)$.

Wir bemerken noch, daß jedenfalls im Beispiel des ebenen Einheitskreises $\overset{\circ}{E}$ die Aussage

$$\int_{\overset{\circ}{E}} |G(z,\zeta)|^P d\xi d\eta \leq c(p),\ p\geq 1,$$

$c(p)$ von z unabhängig, aber von p abhängig

folgt, da die bei der Integration auftretenden Singularitäten nur vom Typ $\log|z-\zeta|$, $\log|1-|\zeta||$ sind. Nun invertieren wir Δ.

Satz III.19.2: *Sei $\rho : E \to \mathbb{R}$ stetig, in $\overset{\circ}{E}$ stetig differenzierbar, $\partial\rho/\partial x$, $\partial\rho/\partial y$ seien beschränkt auf $\overset{\circ}{E}$. Dann hat die Gleichung*

$$\Delta u = \rho,$$

$$u|\partial E = 0$$

eine und nur eine Lösung $u : E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: u ist in $\overset{\circ}{E}$ zweimal stetig differenzierbar, es gilt dort $\Delta u = \rho$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2/\partial x\partial y = \partial^2 u/\partial x\partial y$, $\partial^2 u/\partial y^2$ sind in $\overset{\circ}{E}$ beschränkt, u, ∂u lassen sich stetig auf $\partial E = \partial\overset{\circ}{E}$ fortsetzen. Wenn wir die stetige Fortsetzung von u auf E ebenfalls mit u bezeichnen, so ist $u = 0$ auf $\partial E = \partial\overset{\circ}{E}$. Für u gilt die Formel (G wie in Hilfssatz III.19.2)

$$u(z) = \int_{\mathcal{D}} G(z,\zeta)\rho(\zeta)d\xi d\eta,\ |z| < 1.$$

Beweis: Wir können hier nur die Formel beweisen (und damit die Eindeutigkeit). Zu z wählen wir einen Kreis $U_\varepsilon(z)$ mit positivem Radius $\varepsilon > 0$ derart, daß $\overline{U_\varepsilon(z)} \subset \overset{\circ}{E}$ ist. Wir haben

$$\int_{\overset{\circ}{E}-\overline{U_\varepsilon}(z)} G(z,\zeta)\Delta u(\zeta)d\xi d\eta = \int_{\overset{\circ}{E}-\overline{U_\varepsilon(z)}}(G(z,\zeta)$$

$$\Delta u(\zeta) - (\Delta_{\xi,\eta}G)(z,\zeta)u(\zeta))d\xi d\eta,$$

da nach Voraussetzung $(\Delta_{\xi,\eta}G)(z,\zeta) = 0$ ist in $A = \overset{\circ}{E} - \overline{U_\varepsilon(z)}$. Man kann zeigen, daß für jedes z mit $|z| < 1$, die Funktionen v, $(\xi,\eta) \longmapsto G(z,\xi,\eta)$ und u den Voraussetzungen der Greenschen Formel genügen. Also folgt (für γ_1 schreiben wir ∂E, für γ_2 schreiben wir $\partial U_\varepsilon(0)$)

$$\int_{\overset{\circ}{E}-\overline{U_\varepsilon(z)}} G(z,\zeta)\Delta u(\zeta)d\xi d\eta =$$

$$= \int_{\partial E} G(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_{\partial E} u\frac{\partial}{\partial n}G(z,\zeta)ds + \int_{\partial U_\varepsilon(0)}(G(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}ds - u\frac{\partial}{\partial n}G(z,\zeta)ds$$

$$= \int_{\partial U_\varepsilon(0)} G(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}ds - \int_{\partial U_\varepsilon(0)} u\frac{\partial}{\partial n}G(z,\zeta)ds$$

wegen $G(z,\zeta) = 0$, $\zeta \in \partial E = \partial\overset{\circ}{E}$, $u(\zeta) = 0$, $\zeta \in \partial E = \partial\overset{\circ}{E}$. Nun ist

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial U_\varepsilon(0)} G(z,\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}(s)ds = 0,$$

was man wie im Beweis von Satz III.19.1 sieht. Damit haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_{\overset{\circ}{E}} G(z,\zeta)\rho(\zeta)d\xi d\eta &= \int_{\overset{\circ}{E}} G(z,\zeta)\Delta_{\xi,\eta}u(\zeta)d\xi d\eta,\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\overset{\circ}{E}-\overline{U_\varepsilon(z)}G(z,\zeta)} \Delta_{\xi,\eta}u(\zeta)d\xi d\eta,\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial U_\varepsilon(z)} u\frac{\partial n}{\partial n}G(z,\zeta)ds\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\int_{\partial U_\varepsilon(z)} u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|ds - \int_{\partial U_\varepsilon(z)} u\frac{\partial}{\partial n}h(z,\zeta)ds).
\end{aligned}
$$

Sei $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\overline{U_{\varepsilon_0}(z)} \subset \overset{\circ}{E}$. Dann haben wir $|\nabla_{\xi,\eta}h(z,\zeta)| \leq c(\varepsilon_0)$, $\zeta \in U_{\varepsilon_0}(z)$, also

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial U_\varepsilon(z)} u\frac{\partial}{\partial n}h(z,\zeta)ds = 0.
$$

Indem man im Beweis von Satz III.19.1 den Punkt 0 durch z ersetzt, folgt wie dort

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{1\partial}{2\pi\partial n}\log|z-\zeta|uds = u(z).
$$

□

Ganz allgemein kann man zu beschränkten, glatt berandeten offenen Mengen $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ eine Greensche Funktion zu Δ finden. Dann löst

$$
u(z) = \int_{\mathcal{D}} G(z,\zeta)\rho(\zeta)d\xi d\eta
$$

das Problem $\Delta u = \rho$ in $\mathcal{D}$, $u|\partial\mathcal{D} = 0$ und aus den Integrierbarkeitseigenschaften von G folgt

$$
\sup_{z\in\overline{\mathcal{D}}}|u(z)| \leq c\sup_{\zeta\in\mathcal{D}}|\rho(\zeta)|.
$$

Genauer kann man noch $c = 1$ zeigen.