§ 32. Die Legendresche Differentialgleichung

Die Legendresche Differentialgleichung lautet

Eigenwertproblem! (1) $((1-x^2)y')' + \lambda y = 0$ oder

in ausdifferenzierter Form

(2) $(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$

über dem Intervall $[-1, +1]$. Also ist $Ly = ((1-x^2)y')'$ mit $p(x) = 1-x^2$ und λ als Eigenwertparameter. Da p in $x = \pm 1$ verschwindet (sonst ist $p > 0$) ist die Theorie aus § 31 nicht mehr anwendbar. Man wird also keine Lösungen mit vorgeschriebenen Randbedingungen mehr erwarten können. Wir suchen statt dessen Lösungen, die in ± 1 definiert, z. B. in $[-1, +1]$ stetig differenzierbar sind. Dazu wählen wir einen Potenzreihenansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n ,$$

also

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2},$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n,$$

$$2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^n.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - n(n-1) a_n -$$

$$- 2n a_n + \lambda a_n = 0,$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = [n(n-1) + 2n - \lambda] a_n,$$

$$a_{n+2} = \frac{(n+1)n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \quad (3)$$

Es bleiben also zwei Koeffizienten frei wählbar, nämlich

$a_0 \underset{\text{bestimmt}}{\Longrightarrow}$ alle Koeffizienten a_{2k}, $k \in \mathbb{N}$,

$a_1 \underset{\text{bestimmt}}{\Longrightarrow}$ alle Koeffizienten a_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}$.

Man kann nun zeigen: Die Reihe

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{4}$$

im allg. divergiert bei $x = \pm 1$, es sei denn, sie bricht nach endlich vielen Gliedern ab. S. hierzu: Flügge, Rechenmethoden der Quantenmechanik, Heidelberger Taschenbücher, Bd. 6, S. 87. Die Reihe bricht ab, wenn für ein $m \in \mathbb{N}_0$

$\lambda = \lambda_m = m(m+1)$ und eine der Größen $a_0, a_1 = 0$ ist.

Genauer gilt:

I. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ gerade, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

$\lambda = \lambda_m = m(m+1)$

/(4) $\Rightarrow$ Die Reihe / enthält nur

/(d.h. $a_{2k+1} = 0$, $k \in \mathbb{N}$) gerade Potenzen von x / und

bricht nach der m-ten

Potenz von x ab.

II. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ ungerade, $a_0 = 0$,

$a_1 = 1$,

$\lambda = \lambda_m = m(m+1)$

$\Rightarrow$ Die Reihe (4) enthält nur

/(d.h. $a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$) ungerade Potenzen von x / und

bricht nach der m-ten Potenz

von x ab.

L p_m Die sich dabei ergebenden Lösungen L

der Legendreschen Differentialgleichung

lauten:

m	a_0	a_1	p_m	λ_m
0	1	0	$p_0(x) = 1$	0
1	0	1	$p_1(x) = x$	2
2	1	0	$p_2(x) = 1 - 3x^2$	6
3	0	1	$p_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$	12
4	1	0	$p_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{4}x^4$	20
5	0	1	$p_5(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$	30

Kurze Rechnung:

$$m = 2,\ \lambda_m = 6 \Rightarrow a_2 = \frac{0\cdot 1 - 6}{1\cdot 2}\,a_0 = -3,$$

$$m = 3,\ \lambda_m = 12 \Rightarrow a_3 = \frac{1\cdot 2 - 12}{2\cdot 3}\,a_0 = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3},$$

$$m = 4,\ \lambda_m = 20 \Rightarrow a_2 = \frac{0\cdot 1 - 20}{1\cdot 2}\,a_0 = -10,$$

$$a_4 = \frac{2\cdot 3 - 20}{4\cdot 3}(-10),$$

$$= \frac{-7}{6}(-10) = \frac{35}{3}.$$

Mit p_m ist auch $c\cdot p_m$ Lösung der Legendreschen Differentialgleichung, da diese homogen ist (c = Konstant). Diese Eigenschaft nutzt man zur Normierung von p_m aus. Man normiert auf verschiedene Weisen:

1. $P_m = c_{1m}\,p_m$. c_{1m} wird so gewählt, daß $P_m(1) = 1$ wird.

2. $L_m = c_{2m}\,p_m$. c_{2m} wird so gewählt, daß

$$\|L_m\|_{L_2((-1,1))} = 1 \text{ wird, d.h.}$$

$$\int_{-1}^{+1} L_m^2\,dx = 1.$$

3. $Q_m = c_{3m}\,p_m$. c_{3m} wird so gewählt, daß der führende Koeffizient im Polynom Q_m gerade 1 ist, d.h. $Q_m = x^m +$

$+ \ldots$.

4. Die bereits eingeführte Normierung $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oder $a_0 = 1$, $a_1 = 0$:

$$p_m(x) = \begin{cases} 1 + \text{höhere Ordnung}, & m \text{ gerade} \\ x + \text{höhere Ordnung}, & m \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Um die Normierung nach 1. vorzunehmen, muß man wissen, daß $p_m(1) \neq 0$ ist. Wäre $p_m(1) = 0$, so folgte aus (2):

$$-2p_m'(1) + \lambda \overbrace{p_m(1)}^{=0} = 0,$$

$$p_m'(1) = 0.$$

Mit (1) ergibt sich durch Integration

$$(1-x^2)\,p_m'(x) = -\lambda \int_x^1 p_m(t)\,dt$$

$$|p_m'(x)| \leq \frac{\lambda_m}{(1-x)(1+x)} \int_x^1 |p_m(t) - \overbrace{p_m(1)}^{=0}|\,dt$$

Lm

$$\leq \frac{\lambda \sup_{x \leq t \leq 1} |p_m'(t)|}{(1-x)(1+x)} \int_x^1 (1-t)\,dt$$

$$= \frac{\lambda_m \sup_{x \leq t \leq 1} |p_m'(t)}{(1-x)(1+x)} \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x\right)$$

$$= \frac{\lambda_m \sup_{x \leq t \leq 1} |p_m'(t)|}{(1-x)(1+x)} \frac{1}{2}(1-x)^2$$

$$m \geq 1,$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{x \leq t \leq 1} |p_m'(t)|, \quad 1 - \frac{1}{\lambda_m} \leq x \leq 1,$$

V. 151

$$p_m'(x) = 0 \;, \quad 1-\frac{1}{\lambda_m} \le x \le 1 \;,$$

$$p_m(x) = 0 \;, \quad 1-\frac{1}{\lambda_m} \le x \le 1 \;.$$

Ein Polynom in x, das auf einem Intervall positiver Länge identisch verschwindet, verschwindet überhaupt identisch, d.h. alle Koeffizienten sind 0/. Bei der Normierung 1 ergeben sich die P_m wie folgt:

/„Widerspruch zu $(a_0, a_1) \neq (0,0)$"

$$P_0 = 1 \;,$$

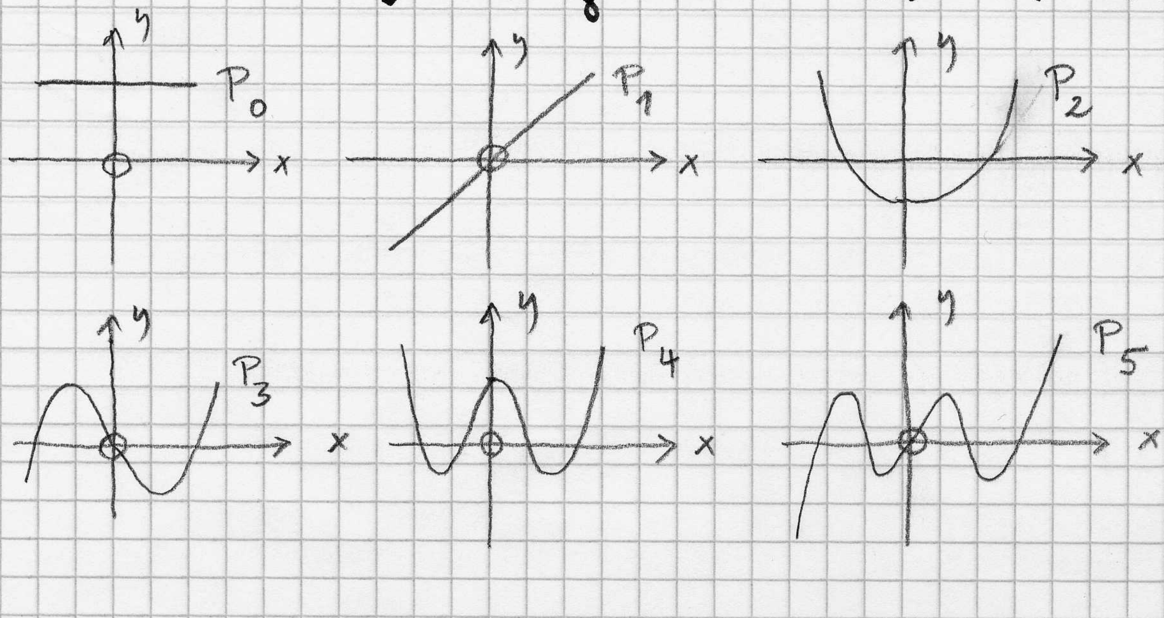
$$P_1 = x \;,$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \;,$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \;,$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \;,$$

$$P_5 = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \;.$$



Zur Normierung 2: Man rechnet aus, daß

$$\| P_m \|^2_{L_2(]-1,1[)} = \int_{-1}^{+1} P_m^2 \, dx = \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

ist. Daher ist

$$L_m = \sqrt{m+\tfrac{1}{2}} \cdot P_m . \tag{5}$$

Lemma 32.1: Der Differentialoperator

$$L, \quad Ly = ((1-x^2)y')'$$

ist selbstadjungiert im folgenden Sinn: Sind $f, g : [-1,+1] \to \mathbb{R}$ 2-Mal stetig differenzierbar (ohne bestimmte Randwerte), so ist

$$\int_{-1}^{+1} Lf \, g \, dx = \int_{-1}^{+1} f \, Lg \, dx .$$

Beweis:

$$\int_{-1}^{+1} Lf \, g \, dx = \int_{-1}^{+1} ((1-x^2)f')' g \, dx ,$$

$$= \underbrace{[(1-x^2)f'g]_{-1}^{+1}}_{=0} - \int_{-1}^{+1} f'(1-x^2)g' \, dx ,$$

$$= -\int_{-1}^{+1} \overset{v'}{f'} (1-\overset{u}{x^2}) g' \, dx$$

$$= -\Big\{ \underbrace{[f(1-x^2)g']_{-1}^{+1}}_{=0} - \int_{-1}^{+1} f ((1-x^2)g')' dx \Big\}$$

$$= \int_{-1}^{+1} f\, L g \, dx \,. \qquad \square$$

Hieraus ergibt sich

Satz 32.1: Die Polynome L_m sind orthonormiert in folgendem Sinn:

$$(L_n, L_m)_{L^2(]-1,1[)} = \delta_{nm} \,,$$

$$n, m \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Beweis: Die λ_m sind jetzt Eigenwerte zum in Lemma 32.1 eingeführten Operator L, der selbstadjungiert ist. Damit folgt die Orthogonalität von L_n und L_m, $n \neq m$, wie im Beweis von Lemma 31.1. Zur Normierung s. (5). $\square$

Satz 32.2: Sei $\langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$ der von den Funktionen

$$f_0,\ f_0(x) = 1,\ x \in [-1, +1],$$

$$\vdots$$

$$f_n,\ f_n(x) = x^n,\ x \in [-1, +1]$$

aufgespannte Untervektorraum von $L_2(]-1, +1[)$. Dann ist $\pm L_0$, $\pm L_1, \dots, \pm L_n$ eine Orthonormalbasis von $\langle 1, x, x^2, \dots, x^n \rangle$.

Beweis: Da nach Satz 32.1 die $L_0, L_1, \dots, L_n$ orthonormiert sind in $L_2(]-1,1[)$, so sind sie dort insbesondere linear unabhängig. Also ist

$$\dim \langle L_0, L_1, \dots, L_n \rangle = n+1 .$$

Offenbar gilt

$$\langle L_0, L_1, \dots, L_n \rangle \subset \langle 1, x, \dots, x^n \rangle ,$$

$$\dim \langle 1, x, \dots, x^n \rangle \leq n+1 ,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Hieraus ~~entsteht~~

<u>Satz 32.3</u>: <u>Das</u> n-te <u>Legendre Polynom</u>/ <u>hat in</u> $[-1,+1]$ <u>genau</u> n <u>einfache Nullstellen</u>.

[P_n, L_n oder Q_n

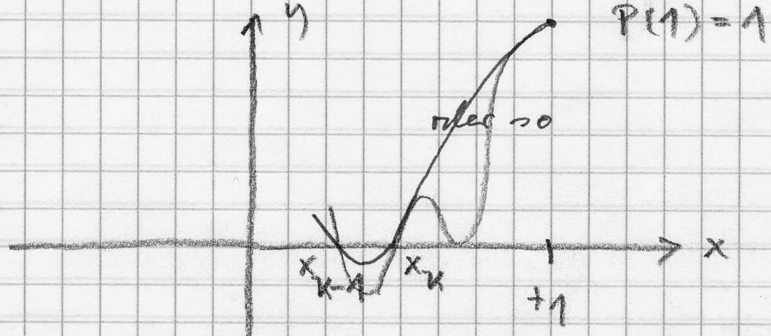
<u>Beweis</u>: Wir brauchen den Beweis nur für P_n durchzuführen. Zu beweisen ist nur etwas für $n \in \mathbb{N}$. Zunächst betrachten wir die Nullstellen ungerader Ordnung von P_n in $[-1,+1]$. Dies sind die/ Nullstellen von P_n, in denen P_n sein Vorzeichen wechselt. Nach Satz 32.1

[jenigen

ist

$$0 = \int_{-1}^{+1} P_0 P_n \, dx = \int_{-1}^{+1} P_n \, dx \,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daher hat P_n, $n \in \mathbb{N}$, wenigstens eine ungerade Nullstelle. Seien also $x_1, \dots, x_k$ die ungeraden Nullstellen von P_n. Wegen $P(1) = 1$ sieht das ungefähr so aus:



Sei $h(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)$. Also ist

$h(x) \cdot P_n(x) > 0$ bis auf die endlich vielen Nullstellen von P_n.

Insbesondere ist $\int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot h(x)\,dx > 0$. Ist $k \leq n-1$, so ist

$$h \in \langle 1, x, \dots, x^{n-1} \rangle = \underset{32.2}{\overset{\text{Satz}}{=}} \langle P_0, P_1, \dots, P_{n-1} \rangle .$$

Also ist $h \perp P_n$, d. h. $\int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot h(x)\,dx = 0$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Zum Abschluß lösen wir ein Variationsproblem:

Satz 32.4: Sei $n \in \mathbb{N}$. Man finde das Minimum des Funktionals

$$\int_{-1}^{+1} Q^2(x)\,dx = \|Q\|^2_{L_2(]-1,1[)},$$

wobei Q alle normierten Polynome

$$Q(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

vom Grade n, $a_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0,\dots,n-1$ durchläuft. Das Minimum von $\|Q\|^2_{L_2(]-1,+1[)}$ ist

(Führender Koeffizient von P_n)$^{-2}$

$$\frac{\overset{\|P_n\|^2_{L_2}}{2}}{2n+1} \cdot \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}^2}$$

und wird für $Q = Q_n$ = n-tes Legendre Polynom mit Normierung nach 3. angenommen.

Beweis: Nach Satz 32.2 ist zusammen mit der Normierung nach 3.

$$Q = Q_n + c_{n-1} Q_{n-1} + \dots + c_0 Q_0$$

mit reellen Konstanten $c_{n-1}, \dots, c_0$ und den Legendre Polynomen $Q_{n-1}, \dots,$

Q_0. Nach Satz 32.1 ist

$$\|Q\|_{L_2(]-1,+1[)} = \|Q_n\|^2_{L_2(]-1,+1[)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2 \, \|Q_\nu\|^2_{L_2(]-1,+1[)},$$

$$\geq \|Q_n\|^2_{L_2(]-1,+1[)}.$$

Hieraus folgt die Annahme des Minimums für $Q = Q_n$. Zur Formel für $\|Q_n\|^2_{L_2(]-1,+1[)}$ s. Abramowitz/Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, S. 773-775. $\square$