§ 31. Sturm - Liouvillesche Eigenwertaufgaben

Sei wieder $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,

/Seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $d_1^2 + d_2^2 > 0$.

$p > 0$ in $[a, b]$./Wir betrachten einen Sturm - Liouville Operator

$$Lu = (pu')' + qu \quad \text{in}$$

$$\mathcal{D}_L = \{ u \mid u : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ 2-Mal stetig differenzierbar}, \; c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0, \; d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0 \}.$$

Das Problem

(1) $\quad Lu + \lambda u = 0, \quad u \in \mathcal{D}_L$

heißt Sturm - Liouvillesche Eigenwertaufgabe. λ heißt Eigenwert zu L (mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$), wenn es ein $u \in \mathcal{D}_L$, $u \not\equiv 0$, gibt, das (1) erfüllt. u heißt dann Eigen-

/von L

funktion/zum Eigenwert λ.

<u>Lemma 31.1</u>: <u>Seien</u> u_1, u_2 <u>Eigenfunktionen von L zu Eigenwerten</u> λ_1, λ_2 <u>mit</u>

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 .$$

Dann sind u_1, u_2 orthogonal im reellen Hilbertraum $L_2(]a,b[)$, d.h.

$$(u_1,u_2)=\int_a^b u_1\, u_2\, dx = 0 .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(Lu_1, u_2) &= \lambda_1 (u_1, u_2),\\ \| \quad & \\ (u_1, Lu_2) &= \lambda_2 (u_1, u_2),\end{aligned}$$

also

$$\underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}(u_1,u_2) = 0 ,$$
$$(u_1,u_2) = 0 . \qquad \square$$

Satz 31.1: Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. 0 sei kein Eigenwert, d.h. $Lu = 0$ habe in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. u ist d.u.n.d. Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ, wenn mit G als Greenscher Funktion gilt:

$$\frac{1}{\lambda}u(x)+\int_a^b G(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = 0 , \quad x \in [a,b],$$

d.h.

$$u(x) + \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = 0\,, \quad x \in [a,b].$$

Hinweis: u genügt also einer Integralgleichung von genau der Art wie sie zu Beginn dieses Kapitels in § 18 (vor den Beispielen) erwähnt wurde.

Beweis des Satzes 31.1: Wir beziehen uns auf die Zusammenfassung am Ende von § 29. Auf

$$Lu + \lambda u = 0\,, \quad u \in \mathcal{D}_L\,,$$

wenden wir die Inverse $L^{-1} = G$ an. Dann folgt

$$u + \lambda G u = 0\,.$$

Umgekehrt folgt aus

$$w + \lambda G w = 0\,,$$

w stetig, daß $w \in \mathcal{D}_L$ ist und

$$Lw + \lambda w = 0$$

□

Aus der Umformung der S-L Eigenwertaufgabe in das Eigenwertproblem für eine Integralgleichung folgt, wie im nächsten Semester gezeigt werden soll.

Satz 31.2: 1. Sei λ Eigenwert zu L. Dann bilden die Eigenfunktionen zu λ einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathcal{D}_L$. Seine Dimension e_λ heißt die (geometrische) Vielfachheit von λ.

2. Die Eigenwerte von L bilden eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die sich in der Form

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$$

anordnen läßt. Wir denken uns jeden Eigenwert so oft angeführt wie seine endliche Vielfachheit e_λ angibt. Dann gilt:

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = +\infty .$$

0 sei kein E'wert

Zu den Eigenwerten λ_i gibt es / ein / in $L_2(]a,b[)$ / VONS $\varphi_i \in \mathcal{D}_L$ von Eigenfunktionen. Jedes beliebige $f \in L_2(]a,b[)$ erlaubt also eine Fourierentwicklung

$$(1) \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\, \varphi_n$$

nach den Eigenfunktionen von L. Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nimmt f die Randbedingungen

$$c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0$$
$$d_1 f(b) + d_2 f'(b) = 0$$

aus $\mathcal{D}_L$ an, so konvergiert die Reihe in (1) gleichmäßig in $[a, b]$.

Teil 1. Hinweise: 1. gilt auch, falls $\lambda = 0$ Eigenwert ist: $\sigma(-L)$ ist wegen $\int_a^b -Lu\,u\,dx = \int_a^b p u'^2\,dx + \int_a^b q u^2\,dx$ nach unten beschränkt. $-Lu + \gamma u$
μ hat also nur positive Eigenwerte endlicher Vielfachheit. $\mu - \gamma$ sind die Eigenwerte von L.

2. Zu Teil 2.: Nach 1. gilt die Aussage auch dann, wenn $\lambda = 0$ Eigenwert ist.

Beispiel: Wir betrachten eine schwingende elastische Saite der Länge l. Der Elastizitätsmodul der

V. 140

Saite sei $p(x) > 0$, $x \in [0, l]$. Die Massendichte $r(x)$ sei $r \equiv 1$. Für die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite an der Stelle x zur Zeit t gilt die partielle Differentialgleichung ($x \in [0,l]$, $t \geq 0$)

$p > 0$ wichtig!

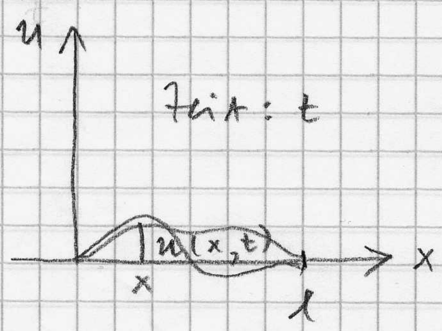
$$\partial(p(x)(\partial u)(x,t))/\partial x = (\partial^2 u/\partial t^2)(x,t),$$

Kurz (2) $$(p(x)\, u_x(x,t))_x = u_{tt}(x,t)$$

(Schwingungsgleichung). Die Saite sei an ihren Endpunkten fest eingespannt, d.h.

(3) $$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Die Anfangsposition der Saite und die Anfangsgeschwindigkeit der Auslenkung seien vorgeschrieben:



(4) $$\begin{cases} u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = g(x), \quad x \in [0,l], \end{cases}$$

$[\, f(0) = g(0) = 0 = f(l) = g(l).$

Als Ansatz wählen wir wieder den Separationsansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t) \quad \text{mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot = {}' \,, \quad \frac{\partial}{\partial t} \cdot = \dot{} \,.$$

dann folgt mit $Lv = \frac{d}{dx}(p \frac{d}{dx} v)$

$$wLv = v\ddot{w}$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\overset{\downarrow\,\text{hängt}}{Lv}}{\underset{\substack{\text{nur}\\ \text{von } x\\ \text{ab}}}{v}} = \frac{\overset{\downarrow\,\text{hängt}}{\ddot{w}}}{\underset{\substack{\text{nur}\\ \text{von } t\\ \text{ab}}}{w}} =: -\lambda = \text{Konstant.}$$

v soll die Randbedingungen (3) realisieren. Wir wählen also in

$$\mathcal{D}_L = \{u \mid u : [0,l] \to \mathbb{R} \text{ 2-Mal stetig differenzierbar}, \ c_1 u(0) + c_2 u'(0) = 0, \ d_1 u(l) + d_2 u'(l) = 0\}$$

für c_1, c_2, d_1, d_2 die Werte $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ und verlangen $v \in \mathcal{D}_L$. Aus $v \in \mathcal{D}_L$, $Lv/v = -\lambda$ folgt

$$-Lv = \lambda v, \quad \lambda \text{ ist Eigenwert zu } L,$$

$$\int_0^l p v'^2 \, dx \overset{\substack{\text{Mult.}\\ \text{mit } v}}{\underset{\text{Integr.}}{=}} \lambda \int_0^l v^2 \, dx,$$

$$\lambda > 0.$$

Insbesondere gilt: die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ zu L sind also alle positiv. Aus (5) folgt dann für w:

$$w_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\, t,$$

$$A_n, B_n \text{ Konstant},$$

/von L und mit v_n = Eigenfunktion / zum Eigenwert λ_n gewinnen wir eine partikuläre Lösung

$$v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t)$$

von (2), die bereits die Randbedingungen (3) realisiert. Die $v_1, v_2, \dots$ mögen ein VONS wie in Satz 31.2 bilden. Bei genügender Konvergenz wird man also die allgemeine Lösung von (2) mit den Randbedingungen (3) in der Form

$$(6)\quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t)$$

gewinnen. Wegen $v_n \in \mathcal{D}_L$ realisiert u also die Randbedingungen (3). Wir müssen uns nun noch um die Anfangsbedingungen (4) kümmern. Die Fourierentwicklungen von f und g lauten

$$(7)\quad f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n, \quad a_n = (f, v_n),$$

$$(8) \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n , \qquad b_n = (g, v_n)$$

Koeffizientenvergleich mit (6) für $t=0$ liefert $A_n = a_n$, Koeffizientenvergleich mit der nach t differenzierten Reihe (6), das ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\left(-A_n\sqrt{\lambda_n}\cdot \sin\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,t\right),$$

liefert für $t=0$ $B_n = \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}$. Mit den Fourier-Koeffizienten a_n, b_n aus (7, 8) folgt als Lösung des Problems (2, 3, 4) gerade

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\left(a_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,t + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right)$$

Die Randbedingungen (3) heißen "fest-fest". Ist z.B. ein Ende fest (etwa $x = 0$), das andere Ende frei und schreibt man $u'(l,t) = 0$ vor, so läßt sich dieses Problem ebenso behandeln, indem man in $\vartheta(L)$ $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ setzt. Diese Randbedingung heißt "fest-frei".