§ 29. Randwertprobleme

Wir geben zunächst einige Beispiele: 1. Sei $Ly = y'' + y$ in $[a, b]$. Wir suchen eine Lösung y von $Ly = 0$ mit $y(a) = y(b) = 0$. Sei $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x ,$$

$$c_1, c_2 = \text{Konstanten}.$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$. Aus $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Die einzige Lösung des obigen Randwertproblems ist also die triviale Lösung $y \equiv 0$.

2. Sei L wie in Beispiel 1., aber statt $[0, \frac{\pi}{2}]$ wählen wir jetzt $[0, 2\pi]$. Die Randbedingungen sind wieder $y(0) = y(2\pi) = 0$. Dann folgt $c_1 = 0$, $c_2 =$ beliebig. Wir haben also die unendlich vielen Lösungen $y(x) = c \cdot \sin x$, $c \in \mathbb{R}$. Wir haben in Wahrheit die Frage untersucht, ob -1 Eigenwert von $L_0 = d^2/dx^2$ unter Randbedingungen ist, d.h., ob es ein $y \not\equiv 0$ gibt mit

$$L_0 y = (-1) y ,$$

$$y(a) = y(b) = 0 .$$

die Antwort hängt offenbar von der Grundmenge $[a, b]$ ab.

Wir befassen uns zunächst mit der Frage, wann $Lu = \rho$ unter Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ lösbar ist. Hierzu gilt

Satz 21.1: Sei

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

mit stetigen Funktionen

$$a_2, a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R} , \quad a_2 > 0 \text{ in } [a,b].$$

Wenn das homogene Randwertproblem

$$Ly = 0 , \quad y(a) = y(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt, dann existiert eine Greensche Funktion G von L mit

$$G(a, \xi) = 0 = G(b, \xi) , \quad \xi \in [a, b].$$

Für jedes stetige $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat

$$L u = \rho , \quad u(a) = 0 = u(b)$$

genau eine 2-mal stetig differenzierbare Lösung, nämlich

$\underline{V}$. 122

$$u : [a, b] \to \mathbb{R},$$

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi .$$

<u>Beweis</u>: Wir haben alle Greenschen Funktionen in Satz 28.4 konstruiert. Es genügt, eine zu finden mit $G(a, \xi) = G(b, \xi) = 0$, $\xi \in [a, b]$. Dann ist $u(a) = u(b) = 0$. Die Eindeutigkeit von u folgt aus unserer Annahme.

Seien η_1, η_2 Lösungen von $Ly = 0$ mit

$$\eta_1(a) = 0, \quad \eta_1'(a) = 1,$$
$$\eta_2(b) = 0, \quad \eta_2'(b) = 1.$$

Dann sind η_1, η_2 linear unabhängig. Wäre etwa $\eta_1 = c\eta_2$, so wäre $\eta_1(b) = 0$. Nach Annahme ist dann

$Lu = 0 \Rightarrow u \equiv 0$
$u(a) = u(b) = 0$

$\eta_1 \equiv 0$, im Widerspruch zu $\eta_1'(a) = 1$. η_1, η_2 bilden also ein Fundamentalsystem von $Ly = 0$, und die Wronski-Determinante

$$W = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

ist immer $\neq 0$ in $[a, b]$. Zur

Konstruktion der Greenschen Funktion benutzen wir den Ansatz (3,4) in Satz 28.4. Sei

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \eta_1 / N,$$

$$l_1 = \frac{\eta_2}{N}, \quad l_2 = 0$$

mit einem zunächst unbekannten Nenner N. Dann ist

$$(r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 =$$

$$= -\frac{\eta_2}{N}\eta_1 + \frac{\eta_1}{N}\eta_2 = 0,$$

$$(r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' =$$

$$= -\frac{\eta_2}{N}\eta_1' + \frac{\eta_1}{N}\eta_2' = \frac{W}{N}.$$

Mit $N = a_2 W$ erfüllen wir also (3,4 in Kap 28) und nach Satz 28.3 ist

$$(1)\ G(x,\xi) = \begin{cases} G^r(x,\xi) = \dfrac{\eta_1(\xi)\,\eta_2(x)}{a_2(\xi)W(\xi)}, & x \geq \xi, \\[2ex] G^l(x,\xi) = \dfrac{\eta_2(\xi)\,\eta_1(x)}{a_2(\xi)W(\xi)}, & \xi \geq x. \end{cases}$$

Nach Konstruktion haben wir $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$, $\xi \in [a,b]$. $\square$

Wir bringen für die Konstruk-

Von einer Greenschen Funktion unter Randbedingungen ein $\underline{\text{Beispiel}}$: Sei

$$Ly = y'' + y \quad \text{in} \quad [0, \tfrac{\pi}{2}] .$$

Vgl. Beisp. 1 zu Beginn dieses Paragraphen zur Eindeutigkeit.

von $Ly = 0, y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$ $l(x)$

$$\eta_1 = \sin x , \quad \eta_1(0) = 0 , \quad \eta_1'(0) = 1 ,$$

$l(x)$

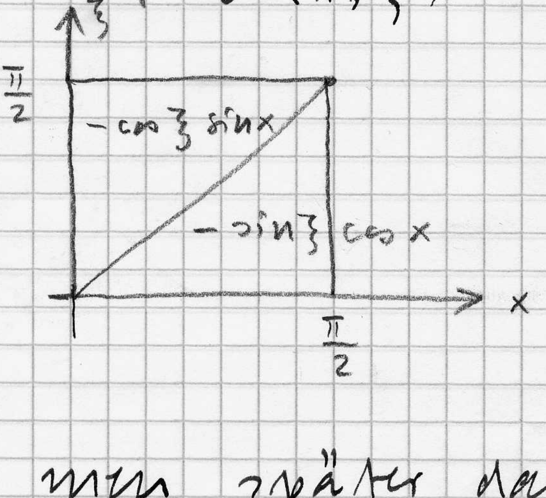
$$\eta_2 = -\cos x , \quad \eta_2(\tfrac{\pi}{2}) = 0 , \quad \eta_2'(\tfrac{\pi}{2}) = 1 .$$

Wegen

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin\xi & -\cos\xi \\ \cos\xi & \sin\xi \end{vmatrix} = 1$$

können wir η_1, η_2 für die Konstruktion der Greenschen Funktion gemäß dem Beweis von Satz 29.1(1) verwenden. Es folgt

$$G(x,\xi) \begin{cases} = G^r(x,\xi) = -\sin\xi\cos x , & x \geq \xi , \\ = G^l(x,\xi) = -\cos\xi\sin x , & \xi \geq x . \end{cases}$$



Man erkennt, daß $G(x,\xi) = G(\xi, x)$ ist. Dies liegt daran, daß L selbstadjungiert ist. Wir kommen später darauf zurück.

hermitesch, Aufg. 1, Bl. 4

Wir gehen noch kurz auf <u>allgemeinere Randbedingungen</u> ein. L sei wie vorher. Es seien c_1, c_2, d_1, d_2 reelle Konstanten mit

$$(c_1, c_2) \neq (0,0)$$
$$(d_1, d_2) \neq (0,0)$$

Wir wollen $Lu = \rho$ lösen unter den Randbedingungen

(2) $\quad c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0,$

(3) $\quad d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0$

$Lu = 0$ habe unter den Randbedingungen (2,3) nur die Lösung $u \equiv 0$. Dann finden wir Lösungen η_1, η_2 von $Ly = 0$ mit

$\eta_1(a) = -c_2, \ \eta_1'(a) = c_1$
$\eta_2(b) = -d_2, \ \eta_2'(b) = c_1$

$$c_1 \eta_1(a) + c_2 \eta_1'(a) = 0,$$
$$d_1 \eta_2(b) + d_2 \eta_2'(b) = 0,$$

die ein Fundamentalsystem bilden. G bilden wir gemäß (1, Beweis Satz 21.1). Dann ist

(4) $\quad c_1 G(a, \xi) + c_2 (\partial G / \partial x)(a, \xi) = 0,$

(5) $\quad d_1 G(b, \xi) + d_2 (\partial G / \partial x)(b, \xi) = 0$

und

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi$$

löst <u>1</u>. $Lu = \rho$ und erfüllt

2. die Randbedingungen

$$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0,$$
$$d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0$$

$i = 1, 2$
$c_1^2 + c_2^2 > 0$,
$d_1^2 + d_2^2 > 0$.

$\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\Gamma = \mathcal{D}_{L, c_1, c_2}$

Evtl. nur Randw. $u(a) = u(b) = 0$

Zusammenfassung: Seien $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ /

$$\mathcal{D}_L \Gamma = \{ u \mid u \, \Gamma \text{ 2-mal stetig differenzierbar in } [a, b], \; c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0, \; d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0 \}$$

$$C^0([a, b]) = \{ \rho \mid \rho : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}.$$

/ offenbar

Dann ist / $L : \mathcal{D}_L \to C^0([a, b])$. Dies ist trivial. Weniger trivial ist das folgende Resultat, das wir bewiesen haben: Wenn

$$L : \mathcal{D}_L \to C^0([a, b])$$

injektiv ist, so ist L surjektiv. In diesem Fall besitzt L eine überall / erklärte Inverse $L^{-1} = G$

/ in $C^0([a, b])$

mit

$$(G\rho)(x) = \int_a^b G(x, \xi) \rho(\xi) \, d\xi,$$

G = Greensche Funktion zu L mit (4,5),

$$L \circ G = \mathrm{id} : C^0([a, b]) \to C^0([a, b]),$$
$$G \circ L = \mathrm{id} : \mathcal{D}_L \to \mathcal{D}_L.$$

Analogie zur lin. Alg.!