§ 26. Die Grundlösung einer Differentialgleichung

Wenn L ein Differentialoperator ist, φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ liegt, so wollen wir versuchen, eine Lösung von $Lu = \varphi$ / zu finden.

also einer inhomogenen Differentialgleichg.

<u>Definition 26.1</u>: <u>Eine Distribution</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>heißt Grundlösung</u> (<u>Fundamentallösung</u>, <u>Elementarlösung</u>) <u>des Differentialoperators</u> L <u>wie in Definition 25.1</u>, <u>wenn gilt</u>

$$LT = \delta .$$

Wir können hier unser Ziel nur im Fall $m = 1$ verfolgen. Zusätzlich habe L / die einfache Gestalt

/ bis § 27 einschließlich

$$L = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}, \quad a_n = 1, \; a_\nu = \text{Konstant}, \; 0 \le \nu \le n-1 .$$

Also ist

$$Lf = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{d^\nu f}{dx^\nu} .$$

Sei also i. f. $m = 1$, L wie oben.

Satz 26.1 (Die Grundlösung liefert die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung): Sei T eine Grundlösung des Differentialoperators L. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die folgende Aussage: Setzt man

$$u = T * \varphi,$$

so ist u unendlich oft (stetig) differenzierbar und genügt der Gleichung

$$Lu = \varphi$$

Beweis: Wir zeigen: u ist differenzierbar mit $u' = T' * \varphi$. Es ist

$$u(x) = T(\varphi_x) \quad \text{mit}$$

$$\varphi_x(t) = \varphi(x-t),$$

$$u(x+h) = T(\varphi_{x+h}) \quad \text{mit}$$

$$\varphi_{x+h}(t) = \varphi(x+h-t),$$

$$= \varphi(x-(t-h)),$$

$$= \varphi_x(t-h).$$

NR:

$a \leq x+h-t \leq b$

$a-(x+h) \leq -t \leq b-(x+h)$

$x+h-a \geq t \geq x+h-b$

$-b \quad -a \quad a \quad b$

$-b+x+h \quad -a+x+h$

Sei $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = 0$, $h_m \in \mathbb{R}-\{0\}$. Dann ist

$$\frac{u(x+h_m)-u(x)}{h_m} = \frac{T(\varphi_{x+h_m})-T(\varphi_x)}{h_m},$$

$$= T\left(\frac{\varphi_{x+h_m}-\varphi_x}{h_m}\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{\varphi_{x+h_m} - \varphi_x}{h_m}\right)(t) = -\frac{\varphi_x(t-h_m) - \varphi_x(t)}{-h_m}$$

$$\to -\varphi_x'(t)\,,\quad m \to \infty.$$

Man sieht nun leicht, daß sogar für jedes / feste, aber beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{\varphi_{x+h_m} - \varphi_x}{h_m} \Rightarrow -\varphi_x'\,,\quad m \to \infty$$

(besonders gleichmäßig oder Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). Mit der Stetigkeitseigenschaft der Distributionen aus Definition 22.4, die übrigens hier zum ersten Mal benutzt wird, folgt für $m \to \infty$ gerade

$$u'(x) = T(-\varphi_x') = -T(\varphi_x'),$$

$$= T'(\varphi_x) = (T' * \varphi)(x).$$

Wiederholung dieses Arguments zeigt:

$$u^{(\nu)}(x) = (T^{(\nu)} * \varphi)(x).$$

Also ist

Koeffizienten konstant

T = Grundlösung

$$Lu = (LT) * \varphi = \delta * \varphi,$$

Satz 23.6

$$= \varphi. \qquad \square$$

Es ist nur konsequent, wenn

V. 18

wir jetzt eine Grundlösung herstellen wollen. Dazu dient

Satz 26.2 (Herstellung einer Grundlösung): Sei L ein gewöhnlicher Differentialoperator der Ordnung n wie vorhin eingeführt. Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (beliebig oft differenzierbar und) die eindeutig bestimmte Lösung von

$Lf = 0$ mit den Anfangswerten $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-2)}(0) = 0$, aber $f^{(n-1)}(0) = 1$.

Sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Sei

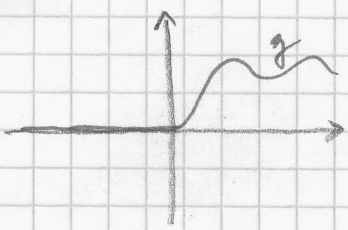
$g = hf$. Dann ist

$$T := T_g$$

eine Grundlösung von L.

Beweis: Wir führen den Beweis für $n = 2$ durch. Es ist also

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 ,$$



$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ f(x) & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

$$Lf = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

h ist die Heaviside-Funktion, die von ihr erzeugte Distribution hatten wir mit H bezeichnet (Beispiel nach Satz 22.2). Also ist

$$T = T_{hf} = T_{fh} \overset{f \in C^\infty}{=} f \cdot T_h = f \cdot H ,$$

$$T' \underset{22.6}{\overset{\text{Satz}}{=}} f' H + f \cdot H' \underset{\text{nach Satz 22.2}}{\overset{\text{Beisp.}}{=}} f' H + f \cdot \delta$$

$$(f \cdot \delta)(\varphi) = \delta(f \cdot \varphi) = f(0)\varphi(0) ,$$

$$\underset{f(0)=0}{\overset{\text{Annahme}}{=}} 0 ,$$

$$T' = f' H ,$$

$$T'' = f'' H + f' H' = f'' H + f' \delta ,$$

$$(f' \cdot \delta)(\varphi) = \delta(f' \varphi) = f'(0)\varphi(0) ,$$

$$\underset{f'(0)=1}{\overset{\text{Annahme}}{=}} \varphi(0) ,$$

$$T'' = f'' H + \delta ,$$

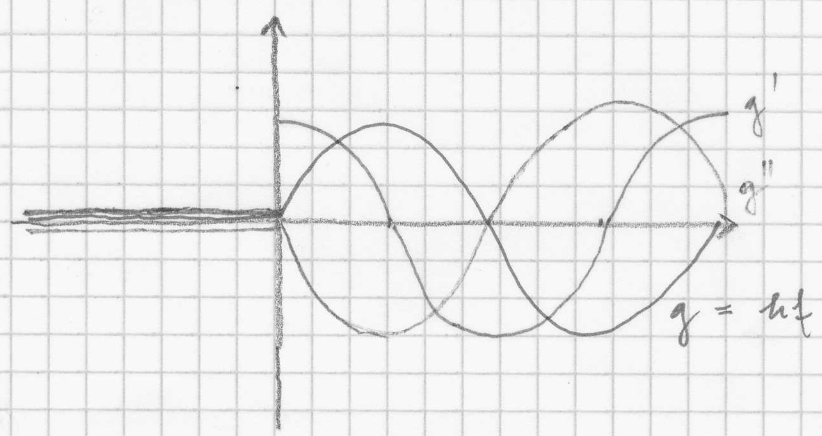
$$\begin{aligned} LT &= T'' + a_1 T' + a_0 T \\ &= (f'' + a_1 f' + a_0 f) H + \delta \\ &= (Lf) \cdot H + \delta \underset{Lf=0}{\overset{\text{Annahme}}{=}} \delta . \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Wir befassen uns mit dem Beispiel 2. nach Satz 22.3. Es sei $Ly = y'' + y$. Die Lösung / von

/f

$y'' + y = 0$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist $f(x) = \sin x$. Demnach haben wir folgende graphische Darstellung:



Es ist (s. wieder Beisp. 2 nach Satz 22.3)

$$T_g' = T_{g'},$$

$$T_g'' = T_{g'}' = T_{g''} + \delta,$$

$$= T_{-g} + \delta = -T_g + \delta,$$

$$LT = T_g'' + T_g = \delta.$$

2. $Ly = y'' - 3y' + 2y$. Aus der Faktorisierung

$$L = \left(\frac{d}{dx} - 1\right)\left(\frac{d}{dx} - 2\right)$$

gewinnt man als allgemeine Lösung von $Ly = 0$ die Funktionen

$$ae^x + be^{2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hieraus bestimmt man f mit $Lf = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ zu

$$f(x) = e^{2x} - e^{x}, \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^{x}, \quad f'(0) = 1.$$

Sei also

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{2x} - e^{x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

T_g ist eine Fundamentallösung

3. Wir betrachten den Differentialoperator 1. Ordnung $Ly = y' - y$. Die Lösung von $Lf = 0$, $f(0) = 1$, ist $f(x) = e^{x}$. Demnach ist T_g mit $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, eine Fundamentallösung.

4. Bei einem Differentialoperator L 3. Ordnung bestimmt man f mit $Lf = 0$, $f(0) = f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$.