§ 25. Lineare Differentialoperatoren.

/ offen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ /, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ war

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$$

Wir bezeichnen $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ als Ordnung des Differentialoperators D^α. Allgemeiner geben wir die

Definition 25.1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $K \in \mathbb{N}_0$. Für jeden Multiindex α des $\mathbb{R}^n$ / sei eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $b_\alpha : U \to \mathbb{R}$ gegeben. Ein Ausdruck

/ mit $|\alpha| \leq K$

$$L = \sum_{|\alpha| \leq K} b_\alpha D^\alpha$$

heißt linearer Differentialoperator. Er heißt von der Ordnung K, wenn wenigstens ein b_α mit $|\alpha| = K$ nicht identisch verschwindet. Für $f : U \to \mathbb{R}$, f K-Mal stetig differenzierbar, setzen wir demnach

⌈ Zwei Differentialoperatoren

$$L_2 = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha^{(2)} D^\alpha ,$$

$$L_1 = \sum_{|\alpha| \leq l} b_\alpha^{(1)} D^\alpha ,$$

für die etwa $l \geq k$ gelte, heißen gleich, wenn sie gleiche Koeffizienten haben, d. h.: $b_\alpha^{(1)} - b_\alpha^{(2)} \equiv 0$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $b_\alpha^{(1)} \equiv 0$, $k+1 \leq |\alpha| \leq l$.

$$Lf = \sum_{|\alpha| \le k} b_\alpha D^\alpha f \text{ , d.h.}$$

$$(Lf)(x) = \sum_{|\alpha| \le k} b_\alpha(x)(D^\alpha f)(x) ,$$
$$x \in U .$$

Γ links ← Γ

Beispiele:

/$b \not\equiv 0$ 1. $L := b_0 = b$, /d.h. $Lf = bf$. Ordnung 0. Hinweis: $b \equiv 0$. Ordnung von $L = -\infty$.

2. $L := \frac{\partial}{\partial x_\nu}$. Ordnung 1. Jeder Differentialoperator baut sich aus den Operatoren nach 1. und 2. auf.

3. $L = \Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_n^2$. Ordnung 2.

4. $L = xy + x^2 \partial/\partial x + e^{xy} \partial^2/\partial x \partial y$. Ordnung 2.

Wie üblich setzen wir

$$(L_1 + L_2) f = L_1 f + L_2 f ,$$
$$(cL) f = c \cdot Lf$$
$$(\underset{\text{Ordng. }k}{L_2} \circ \underset{\text{Ordng. }l}{L_1}) f = \underset{\text{Ordnung } \le k+l}{L_2(L_1 f)} .$$

Dies liefert das folgende Beispiel:

Sei $n = 1$. Sei $L_1 = \frac{d}{dx}$, $L_2 = b_0 = b$.
Dann ist
$$(L_2 \circ L_1) f = b \cdot f',$$
$$(L_1 \circ L_2) f = \frac{d}{dx}(bf) = bf' + b'f.$$

Man erkennt, daß Differentialoperatoren bezüglich "$\circ$" i.a. nicht kommutativ sind. Daher geben wir die

Definition 25.2: Seien L_1, L_2 zwei Differentialoperatoren wie in Definition 25.1. Dann heißt
$$[L_2, L_1] = L_2 \circ L_1 - L_1 \circ L_2$$
der Kommutator von L_2, L_1.

Zum Kommutator, der also den Fehler darstellt, den man bei Vertauschung von L_1 mit L_2 bezüglich "$\circ$" macht, gilt:

Lemma 25.1: Seien L_2, L_1 zwei Differentialoperatoren wie in Definition 25.1. L_2, L_1 mögen die Ordnung k bzw. l besitzen. Dann ist $[L_2, L_1]$ ein Differentialoperator höchstens der Ordnung $k + l - 1$. Insbesondere erhalten wir für

$L_2 = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $L_1 = b_\mu$, $b_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_\mu$

die Gleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} , x_\mu \right] = \delta_{\nu\mu} ,$$

wobei wir x_μ statt b_μ schreiben.

Beweis: Mit

$$L_2 f = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha^{(2)} D^\alpha f ,$$

$$L_1 f = \sum_{|\alpha| \leq l} b_\beta^{(1)} D^\beta f$$

folgt

Ausdiff. nach Leibniz-Regel

Ordnen nach Ableitg. von f

$$(L_2 \circ L_1) f = L_2 (L_1 f) = \sum_{\substack{|\alpha| = k, \\ |\beta| = l}} b_\alpha^{(2)} b_\beta^{(1)} D^{\alpha + \beta} f + \text{Terme niedrigerer Ordnung} \leq k + l - 1 ,$$

$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| = k + l$

$$\Vert$$

$$(L_1 \circ L_2) f = L_1 (L_2 f) = \sum_{\substack{|\beta| = l, \\ |\alpha| = k}} b_\beta^{(1)} b_\alpha^{(2)} D^{\beta + \alpha} f + \text{Terme niedrigerer Ordnung} \leq k + l - 1 .$$

Bei der Bildung von $(L_2 \circ L_1)f - (L_1 \circ L_2)f$ heben sich die Terme von höchster Ordnung also heraus. Im konkreten Fall des Satzes erhalten wir

$$L_2(L_1 f) = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\mu f) = \delta_{\mu\nu} f + x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f$$

$$L_1(L_2 f) = x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f. \qquad \square$$

Def. → 25.1'

<u>Definition 25.3: Jedem Differentialoperator L wie in Definition 25.1 ordnen wir einen Differentialoperator</u>

$$L^* f = \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha f)$$

Ausdiff. nach Leibniz Regel
Ordnen nach Abl. von f

$$= \sum_{|\alpha| = k} (-1)^{\overbrace{|\alpha|}^{=k}} b_\alpha D^\alpha f +$$

+ <u>Terme niedrigerer Ordnung</u>.

L^* <u>heißt der zu L adjungierte Differentialoperator</u>. <u>Hat L die Ordnung</u>

K, so auch L^*.

Beispiele: 1. $\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, insbesondere $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$ im Fall $n = 1$.

2. Sei $L = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$. Dann ist

$$L^* f = -\sum_{\nu=1}^{n}\left(b_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \frac{\partial b_\nu}{\partial x_\nu} f\right)$$

3. Sei $L = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Dann ist

$$L^* f = \sum_{1 \le i,j \le n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} f)$$

$$= \sum_{1 \le i,j \le n}\left(a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} f\right),$$

$$L^* f = Lf + \text{Terme niedrigerer Ordnung}$$

Für $L = \Delta$, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij}$, folgt $\Delta^* = \Delta$. Man sagt, Δ sei symmetrisch oder selbstadjungiert. Im Fall $n = 1$, $L = a\, d^2/dx^2$ folgt aus obiger Formel

$$L^* = a\frac{d^2}{dx^2} + 2\left(\frac{d}{dx}a\right)\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}a \quad .$$

Der Name "zu L adjungierter Operator" stammt aus
Satz 25.1: Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, / unendlich oft stetig differenzierbaren
eine der beiden/ Funktionen f, g besitze Kompakten Träger. Dann ist

$$(Lf, g) = \int_{\mathbb{R}^n} Lf\, g\, dx \,,$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f\, L^* g\, dx \,.$$

Für den adjungierten Differentialoperator gelten die folgenden Rechenregeln:

Koeff.-Funkt. gleich

$$(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$$

K.-F. gleich

$$(cL)^* = cL^*, \quad c = \text{Konstante},$$

K.-F. gleich

$$(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*, \quad (L^*)^* = L.$$

Beweis: Es habe etwa f Kompakten Träger. Der Ausdruck $\int_{\mathbb{R}^n} Lf\, g\, dx$ ist dann wohldefiniert.
Ist auch $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so handelt es sich dabei um das/ $L_2(\mathbb{R}^n)$- / reelle
Skalarprodukt, und wir wollen also in diesem Skalarprodukt

den Differentialoperator L vom ersten Faktor auf den zweiten abwälzen. Es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf\, g\, dx = \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\mathbb{R}^n} b_\alpha D^\alpha f \cdot g\, dx$$

$$= \sum_{|\alpha| \le k} \int_{K_R(0)} D^\alpha f \cdot b_\alpha g\, dx, \quad \operatorname{Tr} f \subset K_R(0),$$

$$= \sum_{|\alpha| \le k} \int f \cdot (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha g)\, dx,$$

$$= \int_{K_R(0)} f L^* g\, dx,$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f L^* g\, dx.$$

Die ersten beiden Rechenregeln sind klar. Idee zur dritten: Es ist

NR.:

f verschwindet mit allen Ableitungen auf $\partial K_R(0)$

$$\int_{K_R(0)} \frac{\partial}{\partial x_j}(f_1 \cdot f_2)\, dx$$

Leibniz-Regel

$$= \int_{K_R(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1 \cdot f_2\, dx + \int_{K_R(0)} f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} f_2\, dx$$

Satz von Gauß, Beispiel 2, T 16

$$= \int \nu_j f_1 f_2\, d\sigma = 0, \quad \operatorname{Tr} f_1 \subset K_R(0)$$

$$\Rightarrow \int_{K_R(0)} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1 \cdot f_2\, dx = -\int_{K_R(0)} f_1 \frac{\partial}{\partial x_j} f_2\, dx$$

Sukzessive Anwendung:

$$\int_{K_R(0)} D^\alpha f_1 \cdot f_2\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{K_R(0)} f_1 D^\alpha f_2\, dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (L_1 \circ L_2) f \cdot g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, (L_1 \circ L_2)^* g \, dx$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} (L_1 \circ L_2) f \cdot g \, dx \overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} L_1 (L_2 f) \cdot g \, dx$$

$$\underset{\text{eben}}{\overset{\text{wie}}{=}} \int_{\mathbb{R}^n} L_2 f \cdot L_1^* g \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot L_2^* (L_1^* g) \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot (L_2^* \circ L_1^*) g \, dx, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Also ist (s. Beweis Satz 22.1)

$$(L_1 \circ L_2)^* g = (L_2^* \circ L_1^*) g, \quad g \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Jetzt müßte man noch zeigen, daß die Koeffizientenfunktionen der Differentialoperatoren $(L_1 \circ L_2)^*$ und $L_2^* \circ L_1^*$ übereinstimmen. Dies geschieht durch Einsetzen von Polynomen für g und soll hier nicht vorgeführt werden. Idee zur vierten Rechenregel: Analog:

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf \cdot g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot L^* g \, dx,$$

Tr g kompakt,

$$= \int_{\mathbb{R}^n} L^* g \, f \, dx ,$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} g \, (L^*)^* f \, dx ,$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (L^*)^* f \, g \, dx ,$$

und daraus wie eben $Lf = (L^*)^* f$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(L^*)^* = L$. $\square$

Satz 25.2: Sei L ein Differentialoperator, T eine Distribution, so gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Formel

$$(LT)(\varphi) = T(L^* \varphi).$$

Beweis:

$$(LT)(\varphi) \overset{\text{Def. 22.5}}{\underset{\text{Def. 22.7}}{=}} \sum_{|\alpha| \le k} b_\alpha (D^\alpha T)(\varphi)$$

$$\overset{\text{Def. 22.7}}{=} \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha T)(b_\alpha \varphi)$$

$$\overset{\text{Def. 22.5}}{=} \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(b_\alpha \cdot \varphi))$$

$$= T(L^* \varphi). \qquad \square$$

Satz 25.3: Sei L ein Differentialoperator, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Dann ist

$$L T_f = T_{Lf}.$$

Beweis: Es ist

$$L T_f(\varphi) \overset{\text{Satz 25.2}}{=} T_f(L^* \varphi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f \, L^* \varphi \, dx$$

$$\overset{\text{Satz 25.1}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} Lf \, \varphi \, dx$$

$$= T_{Lf}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \square$$

Insbesondere erkennt man, daß Def. 22.5 von $D^\alpha T$ eine Verallgemeinerung der partiellen Integration ist: $D^\alpha T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha T \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} T (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \, dx = T((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi)$. Man nimmt den Wert, der nach partieller Integration herauskommen würde, wenn T eine Funktion wäre.