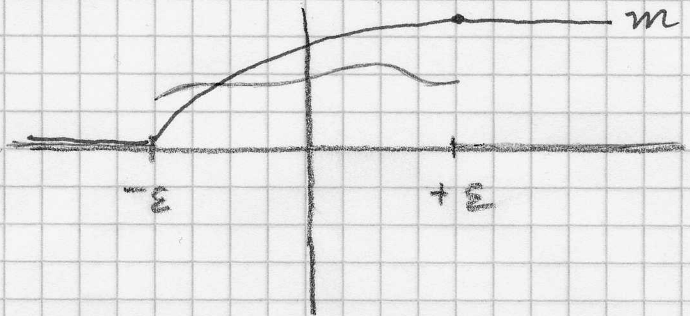
22.1.2001
zu Ergänzg.:
Bem. KS
Frage: Ver.
harm. Fkt.

§ 22. Distributionen

Auf der reellen Achse sei eine Massendichte $\rho(x)$ gegeben. Es

/ mit ε > 0 — sei $\rho(x) = 0$, $x < -\varepsilon$ oder $x > \varepsilon$ /. ρ ist eine Sprungfunktion und hat etwa folgendes Aussehen:



die Gesamtmasse in $]-\infty, x]$ wird durch

$$m(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt\,,$$

/ m — die Gesamtmasse / überhaupt durch

$$m = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt\,, \quad x \geq \varepsilon\,,$$

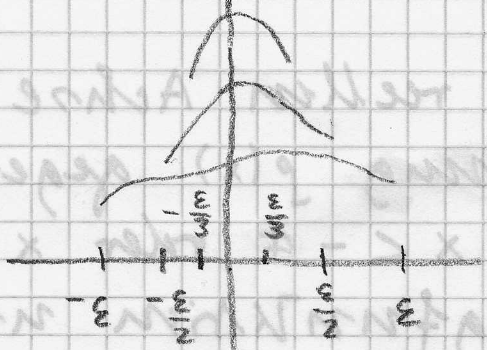
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,dt$$

gegeben.

Es ist nun ein geläufiger

/ ε gegen Null streben zu lassen und — Idealisierungsprozess, / die Gesamtmasse m, etwa $m = 1$, in einem Punkt, etwa im Nullpunkt zu

NR.:



$m = 1$ bleibt ungeändert. Die Gesamtmasse wird auf immer kleinere Intervalle zusammengeschoben.

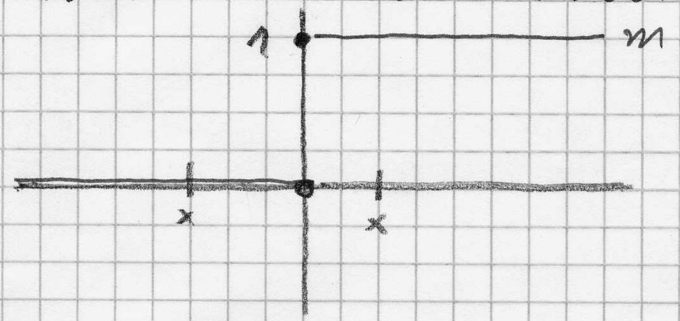
Insbesondere ist die wie oben gewonnene Massenverteilung <u>keine</u> Funktion, sondern ein anderes mathematisches Objekt. Welches ?

⌈ s. links

Konzentrieren. / die Massendichte $\delta(x) = \rho(x)$ würde dann $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, erfüllen und nach obigem Ansatz müßte

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx$$

sein. Offenbar ist aber immer $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 0$, selbst wenn wir $\delta(0) = +\infty$ festsetzen. Dieser Ansatz versagt also. Er würde auch auf die / gewöhnliche Differentiation einer Sprungfunktion hinauslaufen.



Massendichte $\delta(x)$ = Ableitung der bis x angesammelten Masse $\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt$.

⌈ s. links

Im folgenden befassen wir uns mit der Idee zur Überwindung dieser Schwierigkeit und ihrer Ausbeutung. Sie läßt zahlreiche Anwendungen zu. Die Idee besteht darin, δ nicht als

Funktion aufzufassen, was
nicht möglich ist wie eben
/ lineares gesehen, sondern als ein / Funk-
Γ s. links ← tional. Γ Dieses Funktional soll
L φ auf (differenzierbare) Funktionen⌊
folgendermaßen wirken:

Vgl. Beispiel S. $\underline{\text{V}}$. 52 !

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) .$$

| Woher kommt nun diese Idee:
Wäre δ doch eine halbwegs ver-
/ sich nünftige Funktion, so ließe /
das üblicherweise durch δ gege-
bene Funktional in der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt \overset{\text{Soll}}{\underset{\text{sein}}{=}} \varphi(0)$$ schreiben.

/ dann Insbesondere wäre / $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$.|

Wir beginnen mit

<u>Definition 22.1:</u> <u>Für</u> $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
<u>heißt die abgeschlossene Menge</u>

. ⌊ ≠ 0 $$\operatorname{Tr}\varphi = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x)\lfloor\}$$

<u>der Träger von</u> φ. φ <u>hat also kompakten Träger</u>, <u>wenn es ein Kompaktum</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ <u>gibt mit</u>

$$\varphi \mid (\mathbb{R}^n - K) \equiv 0 .$$

<u>Definition 22.2:</u> $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>ist</u>

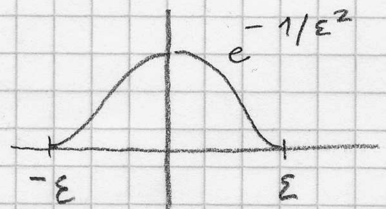
die Menge aller $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und für die / $\operatorname{Tr}\varphi$ kompakt ist.

/ die Menge

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

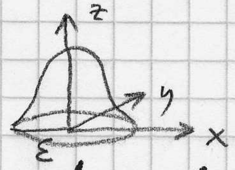
$$x \mapsto e^{+\frac{1}{x^2-1}}, \quad |x| < 1$$
$$x \mapsto 0 \quad \text{sonst}.$$

Dann ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Etwas allgemeiner: Sei $\varepsilon > 0$,



$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-\varepsilon^2)} & |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}\varphi = [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Hieraus stellt man leicht ein $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ her indem man $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(|x|)$ setzt.



eindim. φ_ε wie oben

Das heißt:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-\varepsilon^2)}, & |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. $\operatorname{Tr}\varphi$ ist dann $\overline{K_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{R}^n$.

Wir erinnern an Multiindizes

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $1 \le i \le n$, des $\mathbb{R}^n$.

Für hinreichend oft differenzierbare Funktion φ über offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ setzt man

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi .$$

$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ <u>Definition 22.3</u>: $\mathcal{D}$ <u>ist die Menge</u> $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, <u>ausgestattet mit folgendem Konvergenzbegriff</u>: <u>Eine Folge</u> (φ_k) <u>aus</u> $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>konvergiert in</u> $\mathcal{D}$ <u>gegen</u> $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>d.u.n.d.</u>, <u>wenn</u> <u>gilt</u>:

1. <u>Es existiert ein Kompaktum</u> $K \subset \mathbb{R}^n$ <u>derart</u>, <u>daß</u> $\mathrm{Tr}\, \varphi_k \subset K$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}\, \varphi \subset K$ <u>sind</u>.
2. <u>Für alle</u> $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ <u>gilt</u>
$$D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi, \quad k \to \infty$$
<u>gleichmäßig in</u> K <u>und damit in</u> $\mathbb{R}^n$. <u>Wir schreiben</u> $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $k \to \infty$, <u>oder</u> $\varphi_k \Rightarrow \varphi$, $k \to \infty$ (<u>besonders gleichmäßig</u>).

<u>Definition 22.4</u>: <u>Eine Distribution</u> T <u>im</u> $\mathbb{R}^n$ <u>ist eine lineare Abbildung</u> <u>von</u> $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ <u>in</u> $\mathbb{R}$, <u>d.h.</u>

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi), \quad a, b \in \mathbb{R},\ \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

die folgende Stetigkeitseigenschaft besitzt: Wenn $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $k \to \infty$, so gilt

$$T(\varphi_k) \to T(\varphi), \quad k \to \infty.$$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der Distributionen.

Beispiel: die diracsche Delta-Distribution: $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(0)$.
Für $a \in \mathbb{R}^n$ setzt man auch $\delta_a : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(a)$, so daß $\delta = \delta_0$ entsteht.

Satz 22.1: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f.ü. erklärt. Sei f lokal integrierbar, d.h. für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $f|K$ integrierbar, d.h. $\int_K |f|\,dx < +\infty$. 1. Durch

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$$

ist eine Distribution $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ gegeben.

2. Sei auch $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f.ü. erklärt und lokal integrierbar,

sei $T_f = T_g$, d. h. $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f = g$ f.ü.

Beweis: Zu 1.: Wegen

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \cdot M,$$

$$M = \sup|\varphi(x)|,$$

$M|f(x)|$ lokal integrierbar, ist $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx\right|$ [$= \left|\int_K f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right|$, $\operatorname{Tr}\varphi \subset K$, K kompakt] $\leq \int_K |f(x)| \cdot M\,dx < +\infty$. Also ist $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$ wohldefiniert. Die Linearität ist klar. Sei $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, K kompakt wie in Definition 22.3. Dann ist

$$\underbrace{\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)\,dx\right|}_{= |T_f(\varphi) - T_f(\varphi_k)|} =$$

$$= \left|\int_K f(x)\varphi(x)\,dx - \int_K f(x)\varphi_k(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_K f(x)(\varphi(x) - \varphi_k(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_K |f(x)|\,|\varphi(x) - \varphi_k(x)|\,dx$$

$$\leq \int_K |f(x)|\,dx \; \underbrace{\sup_{x \in K} |\varphi(x) - \varphi_k(x)|}_{\xrightarrow[\text{glm. Konv.}]{} 0,\; k \to \infty}.$$

Zu 2.: <u>Idee:</u> Seien f, g lokal quadratisch integrierbar. Dann sind f, g insbesondere lokal integrierbar. Es folgt aus $T_f = T_g$:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{K_R(0)} (f-g)(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$/|K_R(0)$ $K_R(0) \supset \mathrm{Tr}\,\varphi$. Also ist $(f-g)| \perp$ (in $L_2(K_R(0))$ über $\mathbb{R}$) zu φ, $\varphi \in C_0^\infty(K_R(0)) = \{\varphi \mid \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{Tr}\,\varphi \subset K_R(0)\}$. $C_0^\infty(K_R(0))$ ist dicht in $L_2(K_R(0))$: Zu $h \in L_2(K_R(0))$ existiert eine Folge (φ_k) mit

$$\varphi_k \to h \text{ in } L_2(K_R(0)),\quad k \to \infty.$$

Also ist

$$0 = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{K_R(0)} (f-g)(x)\,\varphi_k(x)\,dx}_{=0}$$

$/\lim_{k\to\infty}$ $$= /\big((f-g)|K_R(0),\ \varphi_k\big)_{L_2(K_R(0))},$$

$$= \big((f-g)|K_R(0),\ h\big)_{L_2(K_R(0))}.$$

Stetigkeit des Skalar-Produkts

Also $(f-g)|K_R(0) \perp L_2(K_R(0)) \Rightarrow$
$f-g=0$ f.ü. in <u>jeder</u> Kugel
/, $R>0$ $K_R(0)$/ $\Rightarrow$ $f-g=0$ f.ü. in $\mathbb{R}^n$. □

T_f heißt die von der lokal integrierbaren Funktion f <u>erzeugte Distribution</u>.

Wir wollen nun Distributionen
/ der Ableitung von T differenzieren. Die Definition / soll so gewählt werden, daß folgendes gilt: Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ etwa stetig differenzierbar, so soll für die von f erzeugte Distribution T_f gelten: $T_f' = T_{f'}$.

<u>Definition 22.5</u>: <u>Für</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ <u>sei</u>

$$\frac{\partial T}{\partial x_\nu} : \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$
$$\varphi \mapsto -\underbrace{T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right)}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

<u>oder allgemeiner</u>

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \overbrace{T(D^\alpha \varphi)}^{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}.$$

Es ist klar, daß $D^\alpha T$ aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist. D^α vertauscht also bis auf das Vorzeichen mit T. Hierbei handelt es sich um eine

Verallgemeinerung der partiellen Integration wie i. f. klar wird.

<u>Satz 22.2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt</u>

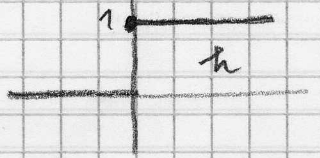
$$T_f' = T_{f'}$$

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr} \varphi \subset [a,b]$, also $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{f'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &= \int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \underbrace{[f\varphi]_a^b}_{\substack{=0 \text{ wegen } \varphi(a)= \\ =\varphi(b)=0}} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &= -T_f(\varphi') = T_f'(\varphi). \quad \square \end{aligned}$$

<u>Beispiel:</u> Wir wollen eine Sprungfunktion als Distribution auffassen und differenzieren. Sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$



(sogenannte Heaviside-Funktion).

h erzeugt die Distribution $T_h =: H$. Sei $\operatorname{Tr} \varphi \subset [a, b]$, $b > 0$. Dann haben wir

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\varphi'(x)\,dx$$
$$= -\int_0^b \varphi'(x)\,dx = -(\varphi(b) - \varphi(0))$$
$$= \varphi(0) = \delta(\varphi).$$

Im Sinne von S. V̲. 44 ist dies die richtige Formel.

Dies Ergebnis kann man sich auch anders veranschaulichen. Dazu geben wir die

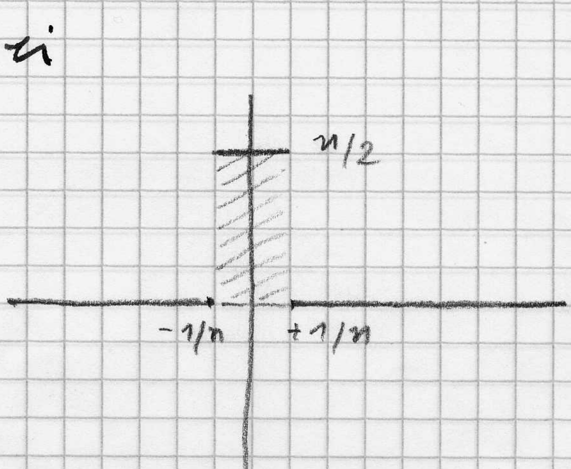
Definition 22.6 (Konvergenz von Distributionen): Sei (T_k) eine Folge aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. (T_k) heißt konvergent gegen T, wenn

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$$

ist für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben: $T_k \to T$, $k \to \infty$.

Beispiele: 1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}n, & |x| \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Sei

$T_n := T_{f_n}$.



Hinweis für später: Es ist
$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$. Wir wollen zeigen,
daß $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \delta$ ist. Dazu ist

$$T_n(\varphi) = T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}\,(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx + \varphi(0).$$

Wegen $|\varphi(x)-\varphi(0)| \underset{MWS}{\le} |\varphi'(\xi)|\,|x| \le D_\varphi \frac{1}{n}$ folgt

$/ = 0$ $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}\,(\varphi(x)-\varphi(0))\,dx /,$$

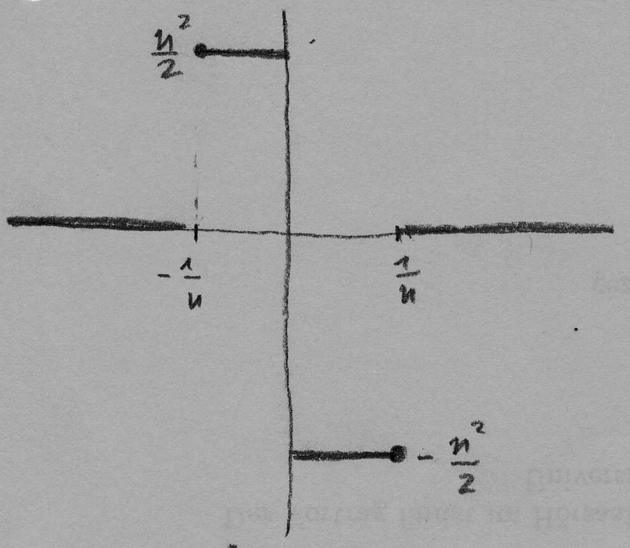
also $T_n \to \delta$, $n \to \infty$.

$/$ in $\mathbb{R}$ 2. Die Dipol-Distribution/. Sie ist erklärt durch

$$T_{Dipol}(\varphi) := \varphi'(0)$$

Also ist $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$,
$\delta' = -T_{Dipol}$. Der Name Dipol-Distribution ist nur aus der Approximation dieser Distribution zu erklären.
Jedoch ist die Analogie zum Dipol

unvollkommen. Wir approximieren also die Dipol-Distribution:



f_n

$$T_n(\varphi) := T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}\varphi(x)\,dx - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(x) - \varphi(-\tfrac{1}{n})\right)dx + \frac{n}{2}\left(\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \varphi(\tfrac{1}{n})\right) - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(x) - \varphi(+\tfrac{1}{n})\right)dx$$

Substitution im ersten Integral: $-y = x$, $y = -x$

$\Rightarrow$

$$T_{f_n}(\varphi) = -\int_{\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(-y) - \varphi(-\tfrac{1}{n})\right)dy + \frac{n}{2}\left(\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \varphi(\tfrac{1}{n})\right) - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(y) - \varphi(+\tfrac{1}{n})\right)dy$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(-y) - \varphi(-\tfrac{1}{n}) - \left(\varphi(y) - \varphi(+\tfrac{1}{n})\right)\right)dy + \frac{n}{2}\left(\varphi(-\tfrac{1}{n}) - \varphi(\tfrac{1}{n})\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}\left(\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{-\frac{1}{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi(0) - \varphi(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right]$$

$$= -\varphi'(0)$$

Die Taylorentwicklung (MWS) von $\varphi(-y) - \varphi(-\frac{1}{n})$ um $y = +\frac{1}{n}$ bzw. von $\varphi(y) - \varphi(\frac{1}{n})$ um $y = \frac{1}{n}$ liefern für $y \in [0, \frac{1}{n}]$ gerade

$$\varphi(-y) - \varphi(-\tfrac{1}{n}) = \tilde{\varphi}'(\eta_1)(y - \tfrac{1}{n}) \text{ mit}$$

$$\tilde{\varphi}(y) = \varphi(-y), \quad 0 < \eta_1 < \tfrac{1}{n}$$

$$= -\varphi'(-\eta_1)(y - \tfrac{1}{n})$$

$$\varphi(y) - \varphi(\tfrac{1}{n}) = \varphi'(\eta_2)(y - \tfrac{1}{n}), \quad 0 < \eta_2 < \tfrac{1}{n}$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi(-y) - \varphi(-\tfrac{1}{n}) - \left(\varphi(y) - \varphi(\tfrac{1}{n})\right)\right) dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi'(\eta_2) + \varphi'(-\eta_1)\right)(y - \tfrac{1}{n})\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\left(\varphi'(\eta_2) + \varphi'(-\eta_1) - 2\varphi'(0)\right)(y - \tfrac{1}{n})\, dy \to 0, \quad n \to \infty.$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 (y - \tfrac{1}{n})\, dy \cdot \varphi'(0) \to -\tfrac{1}{2}\varphi'(0), \quad n \to \infty$$

Also ist $(-T(\varphi) = T(-\varphi),\ T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$

$|(\varphi)$ $$-\tfrac{2}{3}T_n| \to +\varphi'(0)\ ,\quad n \to \infty,$$

$$-\tfrac{2}{3}T_n \to T_{\text{dipol}}\ ,\quad n \to \infty.$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

f ist stetig, hat aber einen Knick bei $x = 0$. Es ist

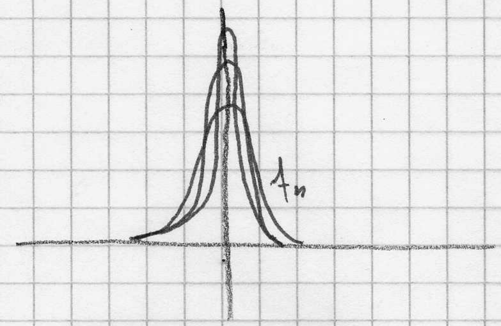
$$T_f' = H\ , \text{ denn}$$

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_0^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\ &= -[f\varphi]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= T_h(\varphi)\ , \quad h = \text{Heavyside-Funktion}. \end{aligned}$$

Die Approximation der Distributionen in den Beispielen 1. und 2. braucht
| die von keineswegs durch / Sprungfunktionen erzeugten Distributionen zu erfolgen. Man kann auch glatte Funktionen nehmen. Das sieht dann so aus:

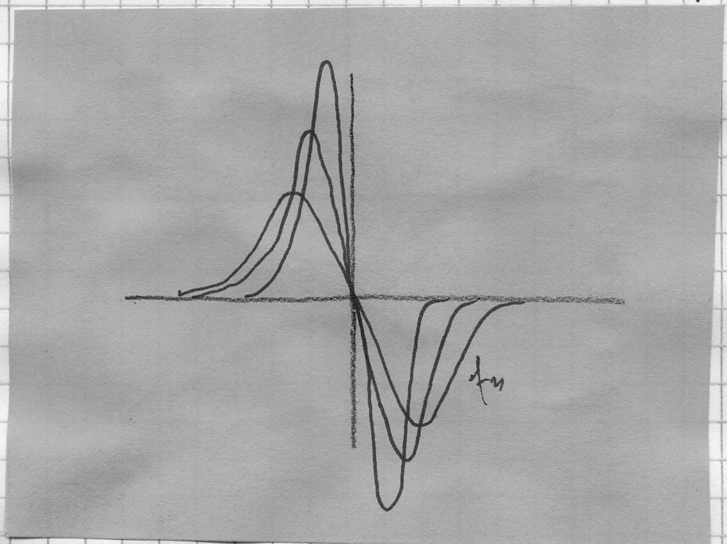
Zu Beispiel $\underline{1}$: δ

— Funktion
— diffbare Approximation



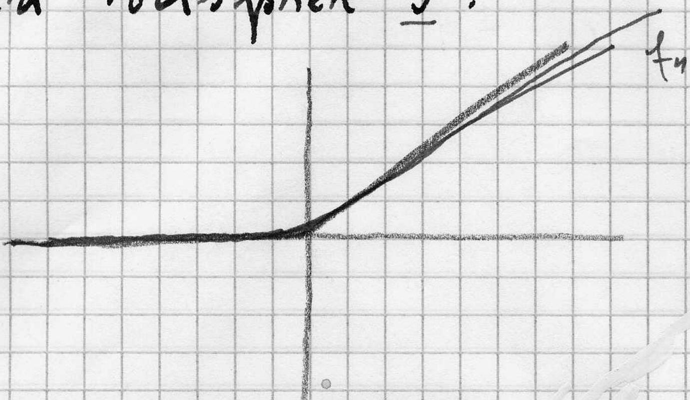
$T_{f_n} \to \delta$

Zu Beispiel $\underline{2}$: $-T_{\text{Dipol}}$



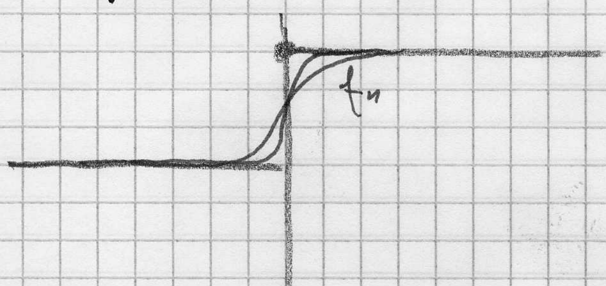
$T_{f_n} \to -T_{\text{Dipol}}$

Zu Beispiel $\underline{3}$:



$T_{f_n} \to T_f$

Heavyside - Funktion



$T_{f_n} \to T_h = H$

Hierauf kommen wir später im Zusammenhang mit der δ-Distribution zurück.

<u>Satz 22.3:</u> <u>Seien</u>

$$f_1 : \left]-\infty, 0\right[\to \mathbb{R}, \quad f_2 : \left[0, +\infty\right[\to \mathbb{R}$$

<u>stetig differenzierbar</u>, <u>sei</u>

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

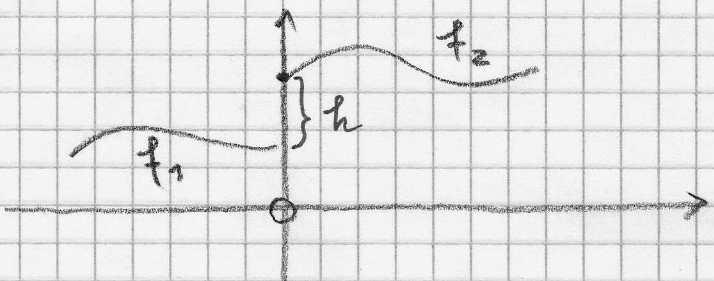
<u>Sei</u>

$$h = f_2(0) - f_1(0)$$

<u>Wenn man</u> $f'(0)$ <u>beliebig definiert</u>, <u>so gilt</u>

$$T_f' = T_{f'} + h \cdot \delta$$

Satz 22.2 wird auf stetige f verallgemeinert, li. u. re. diffb. f ist <u>nicht</u> stetig $\Longrightarrow$ $T_f' = T_{f'}$ ist nicht zu erwarten!



<u>Beweis</u>: Es ist

$$\begin{aligned} T_f'(\varphi) &= -T_f(\varphi') \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\,\varphi'(x)\,dx - \\ &\quad - \int_{0}^{+\infty} f_2(x)\,\varphi'(x)\,dx \end{aligned}$$

$$= -\left[f_1 \varphi\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f_1'(x)\,\varphi(x)\,dx \; -$$
$$- \left[f_2 \varphi\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f_2'(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx + \left(f_2(0) - f_1(0)\right) \cdot$$
$$\cdot\, \varphi(0)$$
$$= T_{f'}(\varphi) + h\,\delta(\varphi). \qquad \square$$

Beispiele: 1. Sei

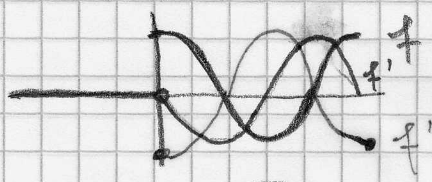
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \overbrace{0}^{=f_1(x)}, & x < 0 \\ \underbrace{\cos x}_{=f_2(x)}, & x \geq 0 \end{cases},$$

also

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\sin x, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{stetig in } 0$$

$$f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\cos x, & x \geq 0 \end{cases} = -f(x)$$

$$T_f' \underset{\substack{\text{Satz} \\ 22.3 \text{ mit} \\ h=1}}{=} T_{f'} + \delta$$



$$T_{f'}' \underset{\substack{\text{Satz} \\ 22.3 \text{ mit} \\ h=0}}{=} T_{f''} = T_{-f} = -T_f.$$

2. Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases},$

also

$$g'(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ \cos x , & x \geq 0 \end{cases} \underset{\text{Beisp. 1.}}{=} f(x)$$

$$g''(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ -\sin x , & x \geq 0 \end{cases}$$

(1) $\quad T_g' \underset{\substack{\text{Satz} \\ 22.3 \text{ mit } k=0}}{=} T_{g'}$

$$T_{g'}' = T_f' \underset{\text{Beisp. 1.}}{=} T_{f'} + \delta$$

(2) $\quad = T_{g''} + \delta = T_{-g} + \delta$

$$T_g'' \overset{(1)}{=} T_{g'}' \overset{(2)}{=} T_{-g} + \delta ,$$

$$= - T_g + \delta ,$$

$$T_g'' + T_g = \delta$$

T_g löst also die Differentialgleichung

$$\boxed{y'' + y = \delta}$$

für Distributionen $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Wir kommen zum Rechnen mit Distributionen. Für $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist $T_1 + T_2$, definiert durch

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wieder eine Distribution. Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$, definieren wir wie schon benutzt, aT durch

$$aT(\varphi) = T(a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. – Darüberhinaus gilt für Grenzprozesse

Satz 22.4: Sei (T_k) eine Folge aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $T_k \to T$, $k \to \infty$. Dann gilt

$$D^\alpha T_k \to D^\alpha T \quad \text{für jeden Multiindex } \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ k \to \infty.$$

Konvergiert insbesondere die Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k \quad \text{gegen } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

so ist

$$D^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} D^\alpha T_k.$$

Beweis: Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Aus $T = \lim_{k\to\infty} T_k$ folgt (Definition 22.5)

$$D^\alpha T_k(\varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} T_k(\overbrace{D^\alpha \varphi}^{\in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)})$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} T(D^\alpha \varphi)$$

$$= D^\alpha T(\varphi). \qquad \square$$

Satz 22.5: Sei (f_κ) eine Folge von Funktionen $f_\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften f. ü. def., meßbar

1. Jedes f_κ ist lokal integrierbar,
2. Es gibt ein lokal integrierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit f. ü. def.
$\int_K |f_\kappa - f| \, dx \to 0, \kappa \to \infty,$
für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, d. h. $\| f_\kappa - f \|_{L_1(K)} \to 0$ für jedes Kompaktum K.

Dann gilt: $T_{f_\kappa} \to T_f, \ \kappa \to \infty$.

Beweis: Wir haben

$$|T_{f_\kappa}(\varphi) - T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_\kappa - f) \varphi \, dx \right|$$

$$\leq \int_K |f_\kappa - f| \, dx \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|,$$

$K \supset \mathrm{Tr}\, \varphi$

$$\to 0, \quad \kappa \to \infty. \qquad \square$$

Wenn etwa die f_κ gleichmäßig in jedem Kompaktum des $\mathbb{R}^n$ gegen f konvergieren, so sind die Voraussetzungen des Satzes 22.5 erfüllt.

Definition 22.7: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar (man schreibt $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann setzt man

$$(f \cdot T)(\varphi) := T(f\varphi)$$

Durch diese Definition ist ein Element $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

Hinweis: $\mathrm{Tr}(f \cdot \varphi) \subset \mathrm{Tr}\,\varphi$, $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wenn $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind, so ist $T_1 \cdot T_2$ im allgemeinen nicht definiert. Daher kann man mit Distributionen i. a. keine nichtlinearen Probleme behandeln.

Satz 22.6: Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist (Leibniz-Regel)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(fT) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T + f \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} T, \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

Beweis: Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f \cdot T)(\varphi) = -(f \cdot T)\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right) =$$

$$= -T\left(f \frac{\partial}{\partial x_\nu}\varphi\right) = -T\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot \varphi\right)$$

$$= -T\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f\varphi)\right) + T\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot \varphi\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\nu} T(f\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T(\varphi)$$

$$= f \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} T(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T(\varphi). \quad \square$$

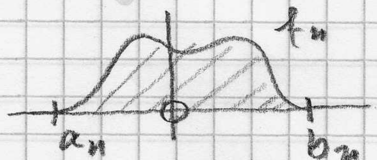
Wir kommen nun zur angekündigten Approximation der δ-Distribution durch von glatten Funktionen erzeugte Distributionen. Wir behandeln dieses Problem in einer Variablen. Es gilt

<u>Satz 22.7</u>: <u>Sei</u> $a_n < 0 < b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. <u>Sei</u> $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>unendlich oft differenzierbar</u> (stetig), $\operatorname{Tr} f_n \subset [a_n, b_n]$, $f_n \geq 0$ <u>und</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Dann gilt</u>

$$T_n := T_{f_n} \to \delta, \quad n \to \infty.$$



$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx = 1$$

<u>Beweis</u>: Wir haben

$$T_{f_n}(\varphi) = \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot \varphi\,dx$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))\,dx$$

$$+ \varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f_n\,dx}_{=1}$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))\,dx$$

$$+ \varphi(0).$$

$$\left| \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))\,dx \right| \leq \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx}_{=1} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sup_{a_n \leq x \leq b_n} |\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\xrightarrow{MWS} 0,\ n \to \infty}$$

$$\to 0, \quad n \to \infty. \quad \square$$

Beispiel: Sei φ_ε wie im Beispiel nach Definition 22.1, also

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2 - \varepsilon^2)}, & |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei
$$c_n = \frac{1}{\int_{-1/n}^{1/n} e^{1/(x^2 - (\frac{1}{n})^2)}\,dx},$$

$$f_n(x) = c_n \cdot \varphi_{1/n}(x).$$