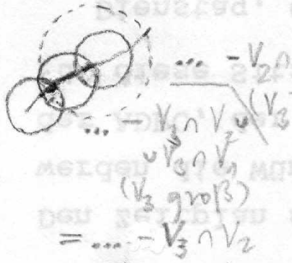
Da wir i.f. nur über kompakte Teilmengen A von M integrieren wollen, setzen wir M als kompakt und den Atlas (T_i, φ_i, V_i) als endlich voraus (vgl. 14.7). Ziel: $B \subseteq M \Rightarrow$ Wir erklären $\int_B \omega$ unabhängig vom Atlas.

Definition 14.2: M präkompakte k-dim. Untermannigf. des $\mathbb{R}^n$, $B \subseteq M$. M besitze den Atlas (T_i, φ_i, V_i), $i = 1, \dots, N$. Dann ist (Σ = disjunkte Vereinigg., $\bigcup_{i=1}^{0} = \emptyset$)

$$B = \bigcup_{j=1}^{N} V_j \cap B = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\Big(V_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \cap V_j\Big)}_{=:\tilde V_j \text{ paarweise disjunkt und } \subset V_j} \cap B$$

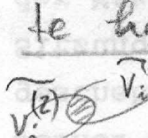


$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \tilde V_j \cap B}_{\text{disjunkt}},$$

und wir setzen für $\omega \in \Omega^k(U)$, $U \supset \bar M$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\int_B \omega = \sum_{j=1}^{N} \int_{\varphi_j^{-1}(\tilde V_j \cap B)} \omega \circ \varphi_j \overset{\text{Def.}}{\underset{\text{S. IV.2}}{=}} \sum_{j=1}^{N} \int_{\tilde V_j \cap B} \omega$$

Definition 14.3: Sei M präkompakte k-dim. Untermannigf. des $\mathbb{R}^n$, es seien $(T_i^{(1)}, \varphi_i^{(1)}, V_i^{(1)})$, $1 \le i \le N^{(1)}$, $(T_j^{(2)}, \varphi_j^{(2)}, V_j^{(2)})$, $1 \le j \le N^{(2)}$ zwei orientierte Atlanten von M. Die Atlanten heißen gleich orientiert, wenn für $V_i^{(1)} \cap V_j^{(2)} \neq \emptyset$ die Abbildung $\psi_{ji} = \varphi_i^{(1)-1} \circ \varphi_j^{(2)} : \varphi_j^{(2)-1}(V_j^{(2)} \cap V_i^{(1)}) \to \varphi_i^{(1)-1}(V_j^{(2)} \cap V_i^{(1)})$ positive Funktionaldeterminante hat.



Für gleich orientierte Atlanten von M erhalten wir dasselbe $\int_B \omega$ wie die folgende kurze Rechnung zeigt: Zu $V_i^{(1)}$, $V_j^{(2)}$ bilden wir $\tilde V_i^{(1)}$, $\tilde V_j^{(2)}$ wie oben. Dann ist $B = \bigcup_{1 \le i \le N^{(1)},\, 1 \le j \le N^{(2)}} \tilde V_i^{(1)} \cap \tilde V_j^{(2)} \llcorner$

$\llcorner \cap B$

$$\boxed{\int_B \omega = \sum_{j=1}^{N^{(1)}} \int_{\tilde V_i^{(1)} \cap B} \omega = \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \int_{\tilde V_i^{(1)} \cap \tilde V_j^{(2)} \cap B} \omega}$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i \le N^{(1)} \\ 1 \le j \le N^{(2)}}} \int_{\varphi_i^{(1)-1}(V_i^{(1)} \cap V_j^{(2)} \cap B)} \omega \circ \varphi_i^{(1)}$$

Bew.

$$\underset{\substack{\text{Satz 14.1} \\ \det \mathcal{J}_{\varphi_{ji}} > 0}}{=} \sum_{\substack{1 \le i \le N^{(1)} \\ 1 \le j \le N^{(2)}}} \int_{\varphi_j^{(2)-1}(V_i^{(1)} \cap V_j^{(2)} \cap B)} \omega \circ \varphi_j^{(2)}$$

$$\boxed{= \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \int_{V_j^{(2)} \cap B} \omega}$$

$\boxed{\text{Kurzfassung:}}$ Teilung der 1

M k-dim. Umf. des $\mathbb{R}^n$, $M = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ mit

$$\left.\begin{matrix}(T_i, \varphi_i, V_i) \\ \text{or. Atlas}, 1 \le i \le N\end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists \left\{\begin{matrix}\zeta_i : M \to \mathbb{R},\ 0 \le \zeta_i \le 1,\ \zeta_i \text{ stetig}, \zeta_i = 0 \text{ auf } M - V_i, \text{z.B.} \\ \zeta_i \circ \varphi_i \in C_0^0(T_i),\ \sum_{i=1}^{N} \zeta_i(x) = 1,\ x \in M. \\ 1 \le i \le N\end{matrix}\right.$$

$$\underset{\varphi\ k\text{-Form}}{B \subseteq M} \Rightarrow \int_B \varphi = \sum_{i=1}^{N} \int_{T_i} (\chi_B \zeta_i \varphi) \circ \varphi_i$$

Anderer Atlas ebenso orientiert $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ haben pos. Det. $\int_B \varphi$ hat denselben Wert

Invariante Integration

Anderer Weg: Triangulierung, v. Blatt 9, Aufg. 2, Übg. zu "Analysis III".

$$= \int_{\partial A} (f\,dx + g\,dy)$$

L, y(t)

$$\overset{\text{Def. 13.2}}{=} \int_a^b \big(f(x(t))\,\dot x(t) + g(x(t))\,\dot y(t) \big)\,dt$$

Γ einfach geschlossene

∂A ist eine Γ Kurve $(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, die in positivem Sinn durchlaufen wird mit $(\dot x(t), \dot y(t)) \neq 0$. A liegt also immer zur Linken. $\partial A - \{p = L$ hat also nur eine einzige Karte L.

L $\begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(b) \\ y(b) \end{pmatrix}$

L, nicht aber ∂A

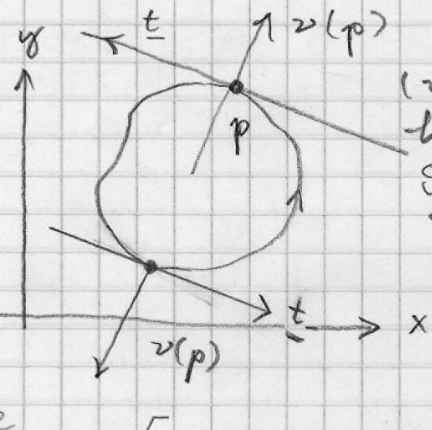
Als äußere Normale stehen zunächst

$$\frac{(\dot y(t), -\dot x(t))}{(\dot x^2(t) + \dot y^2(t))^{\frac12}}$$

$$\frac{(-\dot y(t), \dot x(t))}{(\dot x^2(t) + \dot y^2(t))^{\frac12}}$$

in gleicher Weise zur Verfügung. Die Orientierung ist in der Forderung gegeben, daß A zur Linken liegt und wählt den ersten Vektor als äußere Normale aus, weil dann die Basis $\{\nu(p), \underline{t}\}$ positiven Schraubungssinn hat und $\nu(p)$ somit nach außen weist.

1. ν durch Parametr.



$(\nu(p), \underline{t})$ hat pos. Schraubungssinn!

$p = p(t)$

$\underline{t} = (\dot x(t), \dot y(t))$

$\det(\nu(p), \underline{t}) > 0$

Vgl. Satz 6.1, Ecken sind zugelassen.

Γ siehe li. ←

Γ