Vorlesung „Mathematik für Physiker III “

Kapitel 3
Differentialformen

§10. Differentialformen 1. Ordnung

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, V^* sein Dualraum. Zu einer k-dimensionalen Untermannigfaltigkeit M des $\mathbb{R}^n$ und $p \in M$ heißt $(T_p(M))^*$ der Cotangentialraum $T_p^*(M)$.

Definition 10.1: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung*

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$$

$$\text{mit } \omega(p) \in T_p^*(U)$$

heißt Differentialform 1. Ordnung auf (in) U oder Pfaffsche Form auf (in) U.

Definition 10.2: *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar. Das Differential $df(p)$ ist wegen*

$$df(p)(v) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(p) v_\nu, v \in T_p(U)$$

eine lineare Abbildung von $T_p(U)$ in $T_{f(p)=q}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, liegt also in $T_p^*(U)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} df : U \quad &\to \quad \bigcup_{p \in U} T_p^*(U), \\ p \longmapsto \quad &df(p) \end{aligned}$$

heißt das totale Differential von f.

Lemma 10.3: *$dx_1(p), \ldots, dx_n(p)$ ist eine Basis von $T_p^*(U)$.*

Beweis: Die $e_i = (0, \ldots, 0, 1(i{-}\text{te Stelle}), 0, \ldots, 0)^T$ bilden eine Basis von $T_p(U) = \mathbb{R}^n$. Die duale Basis von $T_p^*(U)$ ist gegeben durch

$$e^k \in T_p^*(U),$$

$$e^k(e_i) = \delta_i^k.$$

Wegen $dx_j(p)(v) = v_j$ ist $dx_k(p)(e_i) = \delta_i^k$. $\square$

Mit $\Omega^1(U) = \{\omega | \omega \text{ Differentialform 1. Ordnung auf } U\}$ hat also jedes $\omega \in \Omega^1(U)$ eine Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$$

mit eindeutig bestimmten $f_i : U \to \mathbb{R}$. ω heißt differenzierbar, wenn die f_i es sind.

§11. Differentialformen höherer Ordnung

Wir führen zunächst alternierende Multilinearformen ein.

Definition 11.1: *Sei $k \in \mathbb{N}$, V $n-$dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, $V^k = V \times \ldots \times V$ k-Mal. Eine alternierende k-Form auf V ist eine Abbildung*

$$\omega : V^k \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

i) ω ist linear in jedem Argument, d.h. $\omega(\ldots, \lambda v + \mu\omega, \ldots) = \lambda\omega(\ldots, v, \ldots) + \mu\omega(\ldots, \omega, \ldots)$

ii) Wenn es Indizes $i \neq j$ gibt mit $v_i = v_j$, so ist $\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = 0$.

Die alternierenden k-Formen bilden einen V Raum über $\mathbb{R}$ Er wird mit $\wedge^k V^*$ bezeichnet und hat die Dimension $\binom{n}{k}$. Es ist $\wedge^1 V^* = V^*$, $\wedge^k V^* = \{0\}$ für $k > n$. Sei $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$. Wenn $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ eine Basis in V^* sind, so werden wir eine zu $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ gehörige Basis von $\wedge^k V^*$ angeben.

Lemma 11.1: *Für $\omega \in \wedge^k V^*$ gilt*

$$\omega(\ldots, v', \ldots v'', \ldots) = -\omega(\ldots, v'', \ldots, v', \ldots).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(\ldots, v' + v'', \ldots, v' + v'', \ldots) \\ &= \overbrace{w(\ldots, v', \ldots, v', \ldots)}^{=0} + \\ &\quad +w(\ldots, v'', \ldots v', \ldots) + \\ &\quad +w(\ldots, v', \ldots, v'', \ldots) + \\ &\quad + \underbrace{w(\ldots, v'', \ldots, v'', \ldots)}_{=0} \end{aligned}$$

□

Damit folgt die Behauptung:
Definition 11.2 (Äußeres Produkt): *Für $\varphi_1, \ldots \varphi_k \in V^*$ sei*

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : V^k \to \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \ldots & \varphi_1(v_k) \\ & \vdots & \\ \varphi_k(v_1) & \ldots & \varphi_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Auf Grund der Eigenschaften der Determinante ist $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k \in \wedge^k V^*$. Ist $\varphi_i = \varphi_j$ für $i \neq j$, so folgt $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k = 0$. Die zur Basis $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von V^* gehörige Basis von $\wedge^k V^*$ sind die $\binom{n}{k}$ Elemente

$$\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k},\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n,$$

aus $\wedge^k V^*$.

Beispiele: $k = n$, also $\binom{n}{k} = 1$, $V = \mathbb{R}^n$, $\varphi_1 = e^1 = dx_1, \ldots, \varphi_n = e^n = dx_n$. Es ist bekannt, daß

$$\begin{array}{c} (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \det \begin{array}{ccc} (v_1, & \ldots & v_n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ & \text{Spalten} & \end{array} \end{array}$$

eine alternierende Multilinearform (n-Form) ist. Sie spannt demnach $\wedge^n (\mathbb{R}^n)^*$ auf.

Wir können nun Differentialformen höherer Ordnung erklären.

Definition 11.3: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$. Unter einer Differentialform der Ordnung k (k-Form) versteht man eine Abbildung*

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} \wedge^k T_p^*(U)$$

mit $\omega(p) \in \wedge^k T_p^*(U)$ *für* $p \in U$.

Mit dieser Definition und Lemma 10.3 gilt das

Lemma 11.2: $dx_{i_1}(p) \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}(p) = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, *bilden eine Basis von* $\wedge^k T_p^*(U)$. *Daher ist jede* k*-Form* ω *eindeutig darstellbar als*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

mit Funktionen $f_{i_1 \ldots i_k} : U \to \mathbb{R}$.

ω heißt (stetig) differenzierbar, wenn die $f_{i_1 \ldots i_k}$ es sind. Mit $\Omega^k(U)$ wird die Menge der k-Formen w bezeichnet. $\Omega^0(U)$ ist die Menge der Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$.

Definition 11.4 ($\wedge$-Produkt für Differentialformen): *Sei*

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(U), \\
\sigma &= \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n} g_{j_1 \ldots j_l} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l} \in \Omega^l(U),
\end{aligned}$$

sei

$$\omega \wedge \sigma := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n}} f_{i_1 \ldots i_k} \cdot g_{j_1 \ldots j_l}$$

$$dx_{i_\wedge} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}.$$

Es ist $w \wedge \sigma \in \Omega^{k+1}(U)$.

Definition 11.5 (Äußere Ableitung von Differentialformen): *Für*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

aus $\Omega^k(U)$ *mit (stetig) differenzierbaren Koeffizientenfunktionen* $f_{i_1 \ldots i_k}$ *sei*

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} df_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

so daß vermöge

$$d\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n, \\ 1 \leq \nu \leq n}} \frac{\partial f_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x_\nu} dx_\nu \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

die Form $d\omega$ in $\Omega^{k+1}(U)$ liegt.

Wir merken einige Rechenregeln an: Es ist

$$\begin{aligned} \omega \wedge \sigma &= (-1)^{k \cdot l} \sigma \wedge \omega, \\ d(\omega \wedge \sigma) &= (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma. \end{aligned}$$

Die Definition von $\Omega^0(U)$ als die Menge der Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ steht in formaler Übereinstimmung mit $\wedge^0 V^* = \mathbb{R}$, da dann $\wedge^0 T_p^*(U) = \mathbb{R}$ ist.

Spezialfälle und Beispiele

$$\mathbf{n = 1}$$

$\omega \in \Omega^1(U)$ ist von der Form $\omega = f dx$, $f : U \to \mathbb{R}$ Funktion. Für $h \in \Omega^0(U)$, d.h. $h : U \to \mathbb{R}$ Funktion, und h differenzierbar, ist $dh = h' dx$

$$\mathbf{n = 2}$$

$\omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U)$
$\sigma = h dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$
($\Omega^2(U)$ ist eindimensional, $\Omega^1(U)$ ist zweidimensional). Für $h \in \Omega^0(U)$, h ist stetig differenzierbar, ist $dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy$.

$$\begin{aligned} d\omega &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy, \\ &= f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy \\ &= (g_x - f_y) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

also $\omega = 0 \Leftrightarrow f_y = g_x$.

Dagegen ist immer

$$\begin{aligned} d(dh) &= (h_{xx} dx + h_{xy} dy) \wedge dx + (h_{yx} dx + h_{yy} dy) \wedge dy \\ &= h_{xx} dx \wedge dx + h_{xy} dy \wedge dx + h_{yx} dx \wedge dy + h_{yy} dy \wedge dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{n = 3}$$

$$\begin{aligned} \omega &\in \Omega^1(U) \Rightarrow \\ \omega &= v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \\ \text{Sei } \underline{v} &= (v_1, v_2, v_3) \\ d\underline{s} &= (dx_1, dx_2, dx_3)^T \\ \overset{\text{Formal}}{\Rightarrow} \quad \underline{v} \cdot d\underline{s} &= v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3 \end{aligned}$$

Wir schreiben zur Verdeutlichung $< \underline{v}, d\underline{s} >$ für $\underline{v} \cdot d\underline{s}$.

$\Omega^2(U)$ hat die Basis $dx_2 \wedge dx_3,\ dx_1 \wedge dx_3,\ dx_1 \wedge dx_2$. Demnach ist auch $dx_2 \wedge dx_3,\ dx_3 \wedge dx_1 = -(dx_1 \wedge dx_3),\ dx_1 \wedge dx_2$ eine Basis von $\Omega^2(U)$ $(\dim \Omega^2(U) = \binom{3}{2} = 3)$. Für $\omega \in \Omega^2(U)$ ist

$$\omega = w_1 dx_2 \wedge dx_3 + w_2 dx_3 \wedge dx_1 + w_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Sei

$$\begin{aligned} \underline{w} &= (w_1, w_2, w_3) \\ d\underline{F} &= (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)^T \end{aligned}$$

Dann entsteht

$$\omega = \underline{w} \cdot d\underline{F} =< \underline{w}, d\underline{F} > .$$

$\Omega^3(U)$ hat die Basis $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ $(\dim \Omega^3(U) = \binom{3}{3} = 1)$. Für $\sigma \in \Omega^3(U)$ ist ($h \in \Omega^0(U)$= Funktion)

$$\sigma = h dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Setze

$$dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Dann entsteht

$$\sigma = h dV.$$

Lemma 11.3: *Sei $\omega =< \underline{v}, d\underline{s} >\in \Omega^1(U)$. Dann ist für differenzierbares $\underline{v}$*

$$\begin{aligned} d\omega &= < rot\ \underline{v}, d\underline{F} >, \\ &= rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F}, \end{aligned}$$

wobei

$$rot\ \underline{v} := \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$$

gesetzt ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
d\omega &= (\partial_{x_1}\upsilon_1 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_1 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_1 dx_3) \wedge dx_1 + \\
&\quad (\partial_{x_1}\upsilon_2 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_2 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_2 dx_3) \wedge dx_2 + \\
&\quad (\partial_{x_1}\upsilon_3 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_3 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_3 dx_3) \wedge dx_3 \\
&= \partial_{x_2}\upsilon_1 dx_2 \wedge dx_1 + \partial_{x_3}\upsilon_1 dx_3 \wedge dx_1 \\
&\quad +\partial_{x_1}\upsilon_2 dx_1 \wedge dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_2 dx_3 \wedge dx_2 + \\
&\quad +\partial_{x_1}\upsilon_3 dx_1 \wedge dx_3 + \partial x_2 \upsilon_3 dx_2 \wedge dx_3 \\
&= (\partial_{x_2}\upsilon_3 - \partial_{x_3}\upsilon_2) dx_2 \wedge dx_3 + \\
&\quad +(\partial_{x_3}\upsilon_1 - \partial_{x_1}\upsilon_3) dx_3 \wedge dx_1 + \\
&\quad +(\partial_{x_1}\upsilon_2 - \partial_{x_2}\upsilon_1) dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}$$

□

Lemma 11.4: *Ist* $\omega =< \underline{\upsilon}, d\underline{F} > \in \Omega^2(U)$*, so ist für differenzierbares* $\underline{\upsilon}$

$$d\omega = div\ \underline{\upsilon} \cdot dV,$$

wobei

$$div\ \underline{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$$

gesetzt ist.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
d\omega &= (\partial_{x_1}\upsilon_1 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_1 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_1 dx_3) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\
&\quad +(\partial_{x_1}\upsilon_2 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_2 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_2 dx_3) \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \\
&\quad +(\partial_{x_1}\upsilon_3 dx_1 + \partial_{x_2}\upsilon_3 dx_2 + \partial_{x_3}\upsilon_3 dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2, \\
&= \partial_{x_1}\upsilon_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\
&\quad +\partial_{x_2}\upsilon_2 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 + \\
&\quad +\partial_{x_3}\upsilon_3 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2.
\end{aligned}$$

□

Lemma 11.5: *Ist* $h : U \to \mathbb{R}$ *differenzierbar, also insbesondere* $h \in \Omega^0(U)$*, so ist*

$$dh =< grad\ h, d\underline{s} > .$$

D. h.

$$\textbf{d. bedeutet} \begin{cases} grad. & \text{für} \quad k = 0 \\ div. & \text{für} \quad k = 2 \\ rot. & \text{für} \quad k = 1 \end{cases}$$

Lemma 11.6: *Sei* $\omega =< \underline{v}, d\underline{s} >\in \Omega^1(U)$, $\tau =< \underline{w}, d\underline{s} >\in \Omega^1(U)$. *Dann ist*

$$w \wedge \tau =< \underline{v} \times \underline{w}, d\underline{F} >,$$

wobei

$$\underline{v} \times \underline{w} = \left(\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ & \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & w_3 \\ & \\ v_1 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ & \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

gesetzt ist.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} w \wedge \tau &= (v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3) \wedge (w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3) \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) dx_2 \wedge dx_3 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) dx_3 \wedge dx_1 + \\ &\quad (v_1 w_2 - v_2 w_1) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Damit folgt das Lemma. $\square$

§12. Das Lemma von Poincaré

Es gilt

Satz 12.1: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 0$. Sei $\omega \in \Omega^k(U)$ zwei Mal (stetig) differenzierbar. Dann ist*

$$d(d\omega) = 0,$$

wofür wir auch $d \circ d = 0$ schreiben.

Beweis: $k = 0$. $\omega = f \in \Omega^0(U)$, d.h. $f : U \to \mathbb{R}$. Dann ist (f 2-Mal stetig diffbar)

$$\begin{aligned} df &= \sum_{\nu=1}^{n} f_{x_\nu} dx_\nu, \\ d(df) &= \sum_{\nu=1}^{n} df_{x_\nu} \wedge dx_\nu, \\ &= \sum_{\nu,\mu=1}^{n} f_{x_\nu x_\mu} dx_\mu \wedge dx_\nu, \\ &\overset{dx_\nu \wedge dx_\nu = 0}{=} \sum_{1 \leq \nu < \mu \leq n} (f_{x_\nu x_\mu} - f_{x_\mu x_\nu}) dx_\mu \wedge dx_\nu, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Für $k \geq 1$ betrachte man einen Summanden in Lemma 11.2. Wir setzen

$$\omega = f\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \\ d(d\omega) &= d(df) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} - df \wedge d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \\ &\quad \text{nach der Rechenregel für } d(\omega \wedge \sigma) \text{ auf S. III.5,} \\ &= -df \wedge d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \text{ wie eben gezeigt.} \end{aligned}$$

Nun ist $d(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) = 0$. Z. B. haben wir

$$\begin{aligned} d(dx_1 \wedge dx_2) &= d(1 \cdot dx_1 \wedge dx_2) \\ &= d1 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 0. \end{aligned}$$

□

Die Umkehrung von Satz 12.1 ist

Satz 12.2 (Poincaré-Lemma): *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig (bezüglich* *eines Punktes $p \in U$). Sei $k \geq 1$ und $\omega \in \Omega^k(U)$ (stetig) differenzierbar mit*

$$d\omega = 0.$$

Dann existiert ein (stetig) differenzierbares $\sigma \in \Omega^{k-1}(U)$ mit

$$d\sigma = \omega$$

Diesen wichtigen Satz können wir hier nicht beweisen. Stattdessen wollen wir uns mit Anwendungen der Sätze 12.1 und 12.2 beschäftigen. Zunächst haben wir im Fall $k = 1$, $n = 2$ für $w \in \Omega^1(U)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \omega &= f dx + g dy, \\ d\omega &= (-f_y + g_x) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

(Vgl. S. III.8). Falls $f_y = g_x$ ist, existiert wegen $dw = 0$ nach dem Lemma von Poincaré für sternförmiges U ein $\sigma = h \in \Omega^0(U)$ mit $dh = w$, d.h. $gradh = (f, g)$.

Satz 12.3 (Folgerungen aus Satz 12.1 $d(d\omega) = 0$): *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen. Für jede 2-Mal (stetig) differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gilt*

$$rot\ grad\ f = 0.$$

Für jedes 2-Mal stetig differenzierbare Vektorfeld $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$div\ rot\ \underline{v} = 0.$$

Beweis: Sei $f \in \Omega^0(U)$. Dann ist

$$\begin{aligned} df &= grad\ f \cdot d\underline{s} \text{ nach Lemma 11.5} \\ &= < grad\ h, d\underline{s} >, \\ d(df) &= 0 \text{ nach Satz 12.1,} \\ d(df) &= rot\ grad\ f \cdot d\underline{F} \text{ nach Lemma 11.3;} \end{aligned}$$

Sei $\omega = \underline{v} \cdot d\underline{s} \in \Omega^1(U)$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= 0 \text{ nach Satz 12.1} \\ d(d\omega) &= d(rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F}) \\ &= div\ rot\ \underline{v} dV \text{ nach Lemma 11.4} \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Satz 12.4 (Folgerungen aus Satz 12.2, Lemma von Poincaré): *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig und offen. Dann gilt*

i) *Ist $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld mit rot $\underline{v} = 0$, so existiert eine (stetig) diffbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ mit $\underline{v} = grad\ h$.*

ii) *Ist* $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ *ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld mit div* $\underline{v} = 0$, *so existiert ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld* $\underline{w} : U \to \mathbb{R}^3$ *mit* $\underline{v} = rot\ \underline{w}$.

Beweis:

Zu i): $\omega = \underline{v} \cdot d\underline{s} \in \Omega^1(U)$. Dann ist $d\omega = rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} = 0$, $d\omega \in \Omega^2(U)$. Also existiert ein $h \in \Omega^0(U)$ mit $dh = \omega$, d.h. $grad\ h \cdot d\underline{s} = \underline{v} \cdot d\underline{s}$.

Zu ii): $\omega = \underline{v} \cdot d\underline{F}$ ist aus $\Omega^2(U)$. Dann ist $d\omega = div\ \underline{v} dV = 0$ und $d\omega$ aus $\Omega^3(U)$. Daher existiert ein $\sigma = \underline{w} \cdot d\underline{s} \in \Omega^1(U)$ mit $d\sigma = \omega$, d.h. $rot\ \underline{w} \cdot d\underline{F} = \underline{v} \cdot d\underline{F}$. □

Satz 12.5: *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sternförmig und* $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto (v_1(x), \dots v_n(x))$ *ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld mit*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \text{ für } 1 \leq i,\ j \leq n,$$

so existiert eine (stetig) differenzierbare Funktion h mit

$$\underline{v} = grad\ h$$

Beweis: Sei

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} v_1 dx_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=1}^{n} dv_1 \wedge dx_i, \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i, \\ &= \sum_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \cdot dx_j \wedge dx_i, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher existiert $h \in \Omega^0(U)$ mit h stetig diffbar,

$$\begin{aligned} dh &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i, \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i dx_i. \end{aligned}$$

□

§13. Integration von Differentialformen

Wir untersuchen jetzt das Verhalten von Differentialformen bei Variablensubstitutionen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\varphi : U \to V$ differenzierbar, $w \in \Omega^k(V)$. Dann ist

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Wir geben die

Definition 13.1: *Unter den obigen Voraussetzungen sei*

$$\omega \circ \varphi := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi \cdot d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Damit ist $\omega \circ \varphi \in \Omega^k(U)$.

Hierzu gilt

Lemma 13.1: *Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ differenzierbar, sei $\omega \in \Omega^n(V)$, d.h.*

$$\omega = f\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die Variablen in V bezeichnen. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ die Variablen in U sind, so ist

$$\omega \circ \varphi = (f \circ \varphi) \det J_\varphi(t) \cdot dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$$

Beweis: Für $n = 2$.

$$\varphi : U \to V$$
$$t = (t_1, t_2) \longmapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$

$$\begin{aligned} d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 &= (\partial_{t_1}\varphi_1 dt_1 + \partial_{t_2}\varphi_1 dt_2) \wedge (\partial_{t_1}\varphi_2 dt_1 + \partial_{t_2}\varphi_2 dt_2) \\ &= \partial_{t_2}\varphi_1 \partial_{t_1}\varphi_2 dt_2 \wedge dt_1 + \partial_{t_1}\varphi_1 \partial_{t_2}\varphi_2 dt_1 \wedge dt_2 \\ &= (\partial_{t_1}\varphi_1 \partial_{t_2}\varphi_2 - \partial_{t_2}\varphi_1 \partial_{t_1}\varphi_2) \cdot dt_1 \wedge dt_2 \end{aligned}$$

□

Integration von Differentialformen bedeutet folgendes:

Definition 13.2: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ kompakt, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig,*

$$\omega = f\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \in \Omega^n(U).$$

Wir setzen

$$\int_A \omega := \int_A f\ dx_1 \ldots dx_n.$$

Anmerkung Beweis Lemma 13.1: Rechnung wie in §11. Wir leiten die Transformationsformel für Differentialformen her. Das ist kaum Mehrarbeit. Es ist

$$\begin{aligned} \omega \circ \varphi &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_{\nu'}} dt_{\nu'} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_{\nu'}} dt_{\nu'} \right) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi \sum_{\nu_1', \ldots, \nu_k' = 1}^{n} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_{\nu_1'}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_{\nu_k'}} dt_{\nu_1'} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_k'} \end{aligned}$$

$\nu_1', \ldots, \nu_k' = P(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ mit $1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_k \le n$ (P = Permutation)
$dt_{\nu_1'} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_k'} = sign\, \underbrace{(\nu_1', \ldots, \nu_k')}_{=P(\nu_1, \ldots, \nu_k)} dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_k}$, also

$$= \sum_{1 \le \nu_1 < \ldots < \nu_k \le n} \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} (f_{i_1 \ldots i_k} \circ \varphi) \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_k})} \right) \cdot dt_{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dt_{\nu_k}$$

mit $J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_n} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(t_{\nu_1}, \ldots, t_{\nu_k})}$ sind die $k \times k$-reihigen Untermatrizen von J_φ

$k = n = m \Rightarrow 1$ Summand $\Rightarrow$ Beh. $\square$

Hinweis: Assoziativität des „pull-back ": $(\omega \circ \varphi) \circ \psi = \omega \circ (\varphi \circ \psi)$. Tensorcharakter von d : $(d\omega) \circ \varphi = d(\omega \circ \varphi)$.

Bezüglich der Integration von Differentialformen gilt

Satz 13.2: *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi : U \to V$ stetig differenzierbar und bijektiv mit* $\det J_\varphi > 0$ *in U. Ist dann $A \subset U$ kompakt und $\omega \in \Omega^n(V)$ stetig, so gilt*

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \int_A \omega \circ \varphi.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A)} \omega &\overset{\text{Def. 13.2}}{=} \int_{\varphi(A)} f(x)dx_1 \dots dx_n, \\
&= \int_A f(\varphi(t))|\overbrace{\det J_\varphi(t)}^{>0}| \cdot dt_1 \dots dt_n, \\
&= \int_A f \circ \varphi \det J_\varphi dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n, \\
&= \int_A \omega \circ \varphi.
\end{aligned}$$

□

Beispiel: Polarkoordinaten in der Ebene.

$$\begin{aligned}
x = r\cos\varphi, &\quad dx = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi, \\
y = r\sin\varphi, &\quad dy = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi,
\end{aligned}$$

$$\int f(x,y)dx \wedge dy = \int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r dr \wedge d\varphi.$$

Das Verschwinden der Funktionaldeterminante auf der „dünnen“Menge $\{r = 0\}$ ändert an der Gültigkeit des Satzes 13.2 nichts.