# Vorlesung „Mathematik für Physiker III “

## Kapitel 2
## Vektorfelder, Tangentialräume

### §5. Das Potential eines Vektorfeldes in $\mathbb{R}^2$

Sei i.f. $D \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge.

**Definition 5.1:** *Eine Abbildung*

$$\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (f(x, y), g(x, y))$$

*heißt Vektorfeld in D. $\underline{v}$ heißt stetig, stetig differenzierbar usw., wenn $f, g$ es sind.*

**Definition 5.2:** *Sei $\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Eine zwei Mal stetig differenzierbare Funktion $U : D \to \mathbb{R}$ heißt Potential zu $\underline{v}$, wenn*

$$\underline{v} = grad\, U$$

*ist.*

**Lemma 5.1:** *Wenn das Vektorfeld $\underline{v}$ ein Potential $U$ besitzt, dann gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

**Beweis:** Aus $\underline{v} = grad\ U$ folgt $f = U_x,\ g = U_y,\ f_y = U_{xy},\ g_x = U_{yx}$ und mit $U_{xy} = U_{yx}$ erhalten wir die Behauptung. □

Wir kommen zu Kurvenintegralen.

**Definition 5.3:** *Sei $\gamma : [a, b] \to D,\ t \longmapsto (x(t),\ y(t))$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve, $\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetiges Vektorfeld wie in Definition 5.1. Dann heißt*

$$\int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{s} := \int_\gamma (f dx + g dy) :$$

$$= \int_a^b (f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + g(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)) dt$$

*das Kurvenintegral von $\underline{v}$ längs $\gamma$.*

Stückweise stetig differenzierbar heißt: $\gamma$ ist stetig in $[a,b]$. Es gibt eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, $\gamma$ ist in $]x_{i-1}, x_i[$ stetig differenzierbar, $\dot{x}, \dot{y}$ sind dort beschränkt, $i = 1, \ldots, n$. Das Kurvenintegral existiert dann im Riemannschen Sinn. $\gamma$ kann also Ecken haben.

**Satz 5.1:** *Das Vektorfeld $\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2$ besitze ein Potential $U$. Dann gilt für jede stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma$ in $D$, daß*

$$\int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{s} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

*ist. Insbesondere ist für geschlossenes $\gamma$ gerade*

$$\int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0.$$

**Beweis:** Aus $\underline{v} = grad\, U$ folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) = \underbrace{f(x(t), y(t))}_{=U_x(\ldots)} \dot{x}(t) + \underbrace{g(x(t), y(t))}_{=U_y(\ldots)} \dot{y}(t)$$

und daraus der Satz. $\square$

**Beispiel:** Die Bedingung $f_y = g_x$ ist nur notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Potentials. Sei $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
(x,y) \quad &\longmapsto \quad \left( \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=:f(x,y)}, \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=:g(x,y)} \right), \\
f_y \quad &= \quad \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
g_x \quad &= \quad \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Also ist $f_y = g_x$ in $D$, aber für $\gamma : [0, 2\pi] \to D$, $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ folgt $\int_\gamma \underline{v} ds = \int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$. Wegen Satz 5.1 hat $\underline{v}$ kein Potential.

## §6. Stokesscher Satz im $\mathbb{R}^2$

Wir wollen ein Integral über ein Gebiet des $\mathbb{R}^2$ in ein Kurvenintegral über die das Gebiet berandende Kurve verwandeln. Seien $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi \leq \psi$, und $D = X = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$. Die Randkurve $\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ definieren wir wie folgt:

$$x(t) = \begin{cases} t \\ 1 \\ 3-t \\ 0 \end{cases},$$

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t),\ 0 \leq t \leq 1, \\ \varphi(1) + (t-1)(\psi(1) - \varphi(1)), 1 \leq t \leq 2 \\ \psi(3-t),\ 2 \leq t \leq 3, \\ \psi(0) - (t-3)(\psi(0) - \varphi(0)), 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

**Satz 6.1 (Spezialfall des Satzes von Stokes):** *Sei $X$ wie oben, sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $X \subset U$. Sei $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (f(x,y), g(x,y))$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_{\partial X} (f dx + g dy) = \int_X \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x,y).$$

**Beweis:**

I. Zunächst ist

$$\begin{aligned} \int_X f_y d(x,y) &= \int_0^1 (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_y dy) dx \\ &= \int_0^1 (f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x)) dx. \end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\int_{\partial X} f dx &= \int_0^4 f(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt, \\
&= \int_0^1 f(t, \varphi(t))dt + \underbrace{\int_1^2 \ldots \cdot \dot{x}(t)dt}_{=0} + \\
&\quad + \int_2^3 f(3-t, \psi(3-t))(-1)dt + \underbrace{\int_3^4 \ldots \cdot \dot{x}(t)dt}_{=0} \\
&= \int_0^1 f(t, \varphi(t))dt - \int_0^1 f(t, \psi(t))dt \\
&= \int_0^1 f(x, \varphi(x))dx - \int_0^1 f(x, \psi(x))dx \\
&\Rightarrow \int_X f_y d(x,y) = -\int_{\partial X} f dx
\end{aligned}$$

II. „Analog“ zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}
\int_X g_x d(x,y) &= \int_0^1 (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g_x(x,y)dy)dx \\
&= \int_0^1 \partial x(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} g(x,y)dy)dx + \\
&\quad + \int_0^1 \varphi'(x)g(x, \varphi(x))dx - \\
&\quad - \int_0^1 \psi'(x)g(x, \psi(x))dx \\
&= \int_I g dy + \int_{III} g dy + \int_{\varphi(1)}^{\psi(1)} g(1,y)dy - \\
&\quad - \int_{\varphi(0)}^{\psi(0)} g(0,y)dy \\
&= \int_{\partial X} g dy \Rightarrow \\
\int_X (g_x - f_y)d(x,y) &= \int_{\partial X} (g dy + f dx).
\end{aligned}$$

□

Insbesondere folgt für $f_y = g_x$ aus Satz 6.1, daß $\int_{\partial X}(fdx+gdy) = 0$ ist.

**Beispiele:**

1.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Q} \overbrace{(x^2y)}^{f}\, dx \overbrace{-xy}^{g}\, dy) &= \int_Q (-y - x^2) d(x,y), \\
&= -\int_{x=0}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx - \int_{x=0}^{1} x^2 dx, \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

2.a)

$$f(x,y) = 0,\ g(x,y) = x,$$
$$\Rightarrow \mu(X) = \int_X d(x,y) = \int_{\partial X} xdy.$$

2.b)

$$f(x,y) = -y,\ g(x,y) = 0,$$
$$\Rightarrow \mu(x) = \int_X d(x,y) = -\int_{\partial X} ydx.$$

a),b) $\Rightarrow$

$$\mu(X) = \frac{1}{2}\int_{\partial X}(xdy - ydx)$$

**Definition 6.1:**

1. *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen. $D$ heißt sternförmig bezüglich $p \in D$, falls für alle $x \in D$ die Strecke $px$ in $D$ liegt, d. h. $\{p + t(x-p) | 0 \le t \le 1\} \subset D$.*
2. *Für $p, q \in \mathbb{R}^2$ sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto p + t(q-p)$. Dann setzen wir*

$$\int_p^q \underline{v} \cdot d\underline{s} := \int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{s}.$$

Zur Existenz eines Potentials gilt

**Satz 6.2:** *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und sternförmig bezüglich irgendeines Punktes $\widetilde{p} \in D$. Sei $\underline{v} : D \to \mathbb{R}^2$. ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $f_y = g_x$. Dann besitzt $\underline{v}$ ein Potential $U$.*

**Beweis:** Sei ohne Einschränkung $\widetilde{p} = 0$. Sei $U$ definiert durch

$$U : D \to \mathbb{R},\ p \longmapsto \int_0^p \underline{v} ds.$$

Mit $p = (x, y)$ gilt

$$\begin{aligned} U(p) &= \int_0^1 (f\overbrace{(tx, ty)}^{\gamma(t)=tp} \cdot \frac{d}{dt}(tx) + g(tx, ty)\frac{d}{dt}(ty))dt \\ &= \int_0^1 (xf(tx, ty) + yg(tx, ty))dt. \end{aligned}$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$ so, daß $K_\varepsilon(p) \subset \mathcal{D}$ ist. Für ein $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ gilt: Das Dreieck $\Delta$ mit den Ecken $0, p, (x + h, y),\ 0 < |h| < \rho$ liegt in $D$.

Nach Satz 6.1 ist $\int_{\partial\Delta} \underline{v} \cdot ds = -\int_\Delta (f_y - g_x)d(x, y) = 0$. Also

$$\begin{aligned} \int_0^{(x+h,y)} \underline{v} \cdot ds &= \int_0^p \underline{v} \cdot ds + \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} \underline{v} ds, \\ U(x + h, y) - U(x, y) &= \int_{(x,y)}^{(x+h,y)} (f dx + g dy) \\ &= \int_0^1 f(x + th, y)h dt, \\ &= h \int_0^1 f(x + th, y)dt, \\ \frac{U(x + h, y) - U(x, y)}{h} &= \int_0^1 f(x + th, y)dt \end{aligned}$$

$\overset{\text{Satz 3.2}}{\Rightarrow}$

$$U_x(x, y) = f(x, y).$$

Analog zeigt man $U_y = g$. $\square$

Wie findet man nun ein Potential für Vektorfelder $v = (f, g)$ mit $f_y = g_x$? Zunächst suchen wir ein $F$ mit

$$F_x = f.$$

Dann machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} U(x, y) &= F(x, y) + \varphi(y), \text{ also} \\ \varphi' &= \varphi_y = U_y - F_y. \end{aligned}$$

Wegen $g = U_y$ lösen wir dann

$$\varphi' = g - F_y$$

mit der Unbekannten $\varphi$. Der Ansatz, daß $\varphi$ nur von $y$ abhängt, ist vernünftig, denn $\frac{\partial}{\partial x}(U_y - F_y) = U_{xy} - F_{xy} = (U_y)_x - f_y = g_x - f_y = 0$ nach Annahme.

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
\underline{v}(x,y) &= \begin{pmatrix} y+x \\ \\ x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow f_y = 1 = g_x. \\
F_x(x,y) &= y+x, \\
\Rightarrow F(x,y) &= yx + \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi' &= g - Fy = x+1-x = 1, \\
\Rightarrow \varphi &= y,
\end{aligned}$$

$$U(x,y) = yx + \frac{1}{2}x^2 + y.$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen bringen wir noch ein zu Satz 6.2 analoges Resultat in $n$ Dimensionen. Der Begriff der Sternförmigkeit wird dabei in naheliegender Weise übertragen.

**Satz 6.3:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig bezüglich $0$. Sei $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^n$, $x \longmapsto (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i,\ j \leq n.$$

*Dann ist $h : U \to \mathbb{R}$ mit*

$$h(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i v_i(tx)dt$$

*ein Potential von $\underline{v}$.*

**Beweis:** Mit der Kettenregel erhält man auf Grund der Annahme $\partial v_i/\partial x_\nu = \partial v_\nu/\partial x_i$ leicht

$$\frac{d}{dt}(tv_i(tx)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{\nu=1}^n x_\nu v_v(tx)).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}h(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{\nu=1}^n x_\nu v_\nu(tx))dt, \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(tv_i(tx))dt, \\
&= v_i(x).
\end{aligned}$$

□

Satz 6.3 bleibt für einfach zusammengängendes $D$ richtig in der Form, daß $v$ ein Potential besitzt, das aber nicht mehr die einfache Form des Satzes 6.3 darstellbar ist.

## § 7. Untermannigfaltigkeiten

Wir studieren Flächen im $\mathbb{R}^n$ oder allgemeiner ,,gebogene" Gebilde des $\mathbb{R}^n$.

**Definition 7.1**: *Sei $k \epsilon \mathbb{N}$, $k \leq n$, $M \subset \mathbb{R}^n$. $M$ heißt Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k$ genau dann, wenn es zu jedem $p \epsilon M$ eine offene Umgebung $U$ von $p$ im $\mathbb{R}^n$ und (wenigstens) stetig differenzierbare Funktionen $f_1, ... f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ gibt mit*

$$M \cap U = \{x | x \epsilon U, f_1(x) = ... = f_{n-k}(x) = 0\},$$

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(p) & \dots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} =$$

$$= maximal = n - k$$

*ist. Insbesondere sind also grad $f_1(p), \dots,$ grad $f_{n-k}(p)$ linear unabhängig.*

Eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist also lokal das simultane Nullstellengebilde von $n - k$ Funktionen, deren Funktionalmatrix maximalen Rang hat, und zwar in $p$. Bei Verkleinerung von $U$ können wir erreichen, daß Rang $((\partial f_i / \partial x_j)(p)) = n - k$ ist für alle $p \epsilon U$. Ist $M$ etwa kompakt, so gibt es $U_1, \dots, U_N$ mit

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \qquad U_i \cap M,$$

$U_1$ wie oben mit Funktionensytemen $\mathbf{f}^{(i)} = (f^{(i)}, \dots, f_{n-k}^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. In jedem Fall reichen abzählbar viele $U_1, U_2, \dots$ der oben beschriebenen Art aus.

**Beispiele:**

1. $S_{n-1} = \{x | x \epsilon \mathbb{R}^n, |x| = 1\}$. $k = n - 1$, $n - k = 1$. $f_1 = f$, $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$, grad $f(x) = 2x \neq 0, |x| = 1$. $U = \mathbb{R}^n$, $S_{n-1} \cap U = \{x | x \epsilon U,$ $f(x) = 0\}$. $M = S_{n-1}$ ist $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

2a. Der Graph einer Funktion.
Sei $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\widetilde{U}$ offen, $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Sei
$M = G_g = \{(x, y) | x \epsilon \widetilde{U}, y \epsilon \mathbb{R}, y = g(x)\}$.

$k = n$, $U = \widetilde{U} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$,
$f_1(x,y) = f(x,y) = g(x) - y$, $\operatorname{grad} f(x,y) = (\partial g/\partial x_1(x), \ldots, (\partial g/\partial x_n)(x), -1) \neq 0$.
Also: $M$ ist n-dim. Umf. des $\mathbb{R}^{n+1}$.

2b. $g : \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{diffb.}]{\text{stetig}} \mathbb{R}^k$, $M = \{(x, y_1, \ldots, y_n) | y_i = g_i(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$

$$\begin{array}{rcl} f_1(x,y) & = & g_1(x) - y_1 \\ & \vdots & \\ f_k(x,y) & = & g_k(x) - y_k \end{array}$$

$U = \widetilde{U} \times \mathbb{R}^k$

$M$ ist $n$-dimen. Umf. von $\mathbb{R}^{n+k}$, beachte: $n + k - k = n$.

Mit Graphen erfassen wir alle Untermannigfaltigkeiten, denn es gilt

**Satz 7.1 (Jede Untermannigfaltigkeit ist lokal ein Graph)**: *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Dimension $k$. Sei $p \epsilon M$. Dann gibt es nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten offene Mengen.*

$$\begin{array}{ccccccc} U' & \subset & \mathbb{R}^k & mit & p' & = (p_1, \ldots, p_k) & \epsilon & U', \\ U'' & \subset & \mathbb{R}^{n-k} & mit & p'' & = (p_{k+1}, \ldots, p_n) & \epsilon & U'' \end{array}$$

*und eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$g : U' \to U''$$

*mit*

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') | x' = (x_1, \ldots, x_k) \epsilon U',$$
$$x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \epsilon U'', x'' = g(x')\}.$$

Graphisch sieht Satz 7.1 so aus:

Man vergleiche hierzu Beispiel 2b).

**Bew. Satz 7.1:** $p \epsilon M$
$U(p) \subset \mathbb{R}^n$
$M \cap U(p) = \{x | f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0$

$p' = p_{i_1}, \ldots, p_{\iota k}, p'' =$Rest entspricht $j_l$, $\widehat{U}'(p') \times \widehat{U}''(p'') \subset U(p)$ so, dass

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_{n-k}}} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x_{j_{n-k}}} \end{pmatrix} = n-k \quad (\Leftrightarrow \det(\ldots) \neq 0)$$

$$\text{in } \widehat{U}'(p') \times \widehat{U}''(p'').$$

Also

$$\mathbf{f}(x) = (f_i(x)) = 0$$

und

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-k})}{\partial(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}})} \neq 0$$

$$x \epsilon (\widehat{U}'(p') \times \widehat{U}''(p'')) \cap M$$

Mit $x' = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, $x'' = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-k}})$ schreiben wir $x = (x', x'')$ und denken uns dabei die Komponenten in der natürlichen Reihenfolge aneinandergereiht.

$$\overset{\text{Impl.Funktth.}}{\Rightarrow} \quad \exists \left\{ \begin{array}{c} \widetilde{U}', \widetilde{U}'', \widetilde{U}' \subset \widehat{U}', \widetilde{U}'' \subset \widehat{U}'' \\ g : \widetilde{U}' \to \widetilde{U}'' \text{ stetig diffbar} \end{array} \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} M \cap (\widetilde{U}' \times \widetilde{U}'') &= \{(x', x'') | x'' = g(x')\} \\ &= \{(x', x'') | \mathbf{f}(x', x'') = 0\} \end{aligned}$$

Numeriere um, setze $U' = \widetilde{U}', U'' = \widetilde{U}''$ □

***Beispiele***

1. "Obere" $S_{n-1}, k = n-1, f_1 = f$, wie in Beispiel 1.II.7, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}), x'' = x_n, |x'| < 1, \nabla f = 2x \neq 0$ für $x_n > 0$.

   Obere Sphäre

   $x_n = x'' = g(x') = \sqrt{1 - x_n^2 - \ldots - x_{n-1}^2}$
   $\widetilde{U}'' = \{x | x' \epsilon \mathbb{R}^{n-1}, |x'| < 1\}$
   $\widetilde{U}' = ]0, 2[$

Ingesamt: Es geht mit diffb. g. nicht auf einmal unter Einschluß des Äquators. Obere Halbsphäre ohne Äquator.

2. $E_k = \{x | x \epsilon \mathbb{R}^n, x_{k+1}, \dots, x_n = 0\}$ ist k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, da$f_1(x) = x_{k+1}, \dots, f_{n-k}(x) = x_n$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\ 0\dots0 & 0 & 1 \quad 0 \\ \underbrace{\quad 0 \quad}_{k} & & \underbrace{\quad \ddots 1}_{n-k} \end{pmatrix}$$

haben.

3. Zu $M = \{x || x| = 1\} = S^{n-1}, f = f_1$, wie in Beispiel 1 vorher, $k = 1$

Betrachte $\{x | x \epsilon S^{n-1}, x_n > 0\}$. $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x'' = x_n$
$\widetilde{U}' = \{x' || x'| < 1\}$
$\widetilde{U}'' = ]0, 2[$

$$\left.\begin{array}{l} g(x') = \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2} \\ x'' = x_n = g(x') \end{array}\right\}$$
Auflösung von $f(x) = 0$ nach $x_n$

$M \cap (\widetilde{U}' \times \widetilde{U}'') = \{(x', x'') | x'' = g(x')\} =$
$\{x | x \epsilon S^{n-1}, x_n > 0\}$

Ich kann nur $\{x | x \epsilon S^{n-1}, x_n > 0\} = M \cap \{x_n > 0\}$ als Graph darstellen ($M$ ist nur lokal als Graph darstellbar, also nur teilweise). Will man den Äquator einbeziehen, so gibt es Probleme, z.B.:

$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{-x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}} \to -\infty$ für

Das heißt: Will ich den Äquator und seine Umgebung als Graph darstellen, so brauche ich andere $\widetilde{U}', \widetilde{U}'', g$! Um jeden Punkt von $M$ herum kann man $M$ als Graph darstellen, aber <u>nicht auf einmal!</u>

Wir wollen nun zeigen, daß jede k-dimensionale Untermannigfaltigkeit lokal sich wie $E_k$ verhält.

**Definition 7.2**: *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. $F : U \to V$ heißt Diffeomorphismus, falls $F$ bijektiv ist, $F$ und $F^{-1}$ (beliebig oft) stetig differenzierbar sind.*

**Satz 7.2 (Jede $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist lokal diffeomorph $E_k$):** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit, sei $p \epsilon M$. Dann existieren eine offene Umgebung $U$ von $p$ im $\mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V$ im $\mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus*

$$F : U \to V$$

*mit*

$$F(U \cap M) = E_k \cap V$$

Graphisch sieht Satz 7.2 so aus:

**Beweis Satz 7.2:** *$g$ aus Satz 7.1. Sei*

$$\begin{aligned}
F_1(x', x'') &= x_1 =: t_1 \\
&\vdots \\
F_k(x', x'') &= x_k =: t_k \\
F_{k+1}(x', x'') &= x_{k+1} - g_1(x') =: t_{k+1} \\
&\vdots \\
F_n(x', x'') &= x_n - g_{n-k}(x') =: t_n
\end{aligned}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & & \\ & 1 & & & 0 \\ 0 & & & & \\ & & & 1 & \\ \text{irgendwas} & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$F : U \to V \quad \text{bijektiv, auf für Verkleinerung}$$
$$U = \widetilde{U}' \times \widetilde{U}'' \text{ (Bew. Satz 7.1)}$$
$$F(M \cap U) = F(\widetilde{U}' \times \{x'' = g(x') | x' \epsilon \widetilde{U}'\}$$
$$= \widetilde{U}' \times \underbrace{(0, \ldots, 0)}_{(n-k)-mal} = \text{ genau die Punkte, die in } E_k \text{ sind } = E_k \cap V$$

Graphisch sieht unsere Rechnung so aus: □

Wir führen nun den Begriff der Karte und des Atlanten ein

**Definition 7.3**: *Sei $T \subset \mathbb{R}^k$, $T$ offen, $k \leq n$,*

$$\varphi : T \to \mathbb{R}^n$$

*eine Abbildung. Dann heißt*

1. *$\varphi$ eine Immersion, falls $\varphi$ stetig differenzierbar und*

$$\text{Rang } J_\varphi = maximal = k \ in \ T$$

   *ist.*

2. *$\varphi$ eine topologische Abbildung (Homomöorphismus) von $T$ auf $\varphi(T)$, wenn*

$$\varphi : T \to \varphi(T)$$

   *injektiv ist und $\varphi, \varphi^{-1}$ beide stetig sind.*

**Satz 7.3 (Existenz lokaler Karten):**
*Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $k$, sei $p \epsilon M$. Dann existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \epsilon U$ und $W \subset \mathbb{R}^k$ und eine Immersion*

$$\varphi : W \to \mathbb{R}^n$$

*derart, dass*

$$\varphi : W \to U \cap M$$

*topologisch ist. $\varphi : W \to U \cap M$ heißt eine (lokale) Karte von $M$.*

**Beweis:** Nach dem Beweis von Satz 7.2 ist

$$M \cap U \ = \ F^{-1}(E_k \cap V);$$

Sei

$$\begin{aligned} W &= \text{Projektion von } E_k \cap V \text{ auf } \mathbb{R}^k \\ &= \{x' | x' \epsilon \mathbb{R}^k, \quad (x', \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k)\text{-Mal}}) \epsilon E_k \cap V\}, \end{aligned}$$

$x' = (x_1, \dots, x_k), t_1 = x_1, \dots, t_k = x_k$. Wir setzen $\varphi : W \to F^{-1}(E_k \cap V)$,

$$\varphi(t_1, \dots, t_k) = F^{-1}(t_1, \dots, t_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k)-Mal}).$$

$\varphi$ ist bijektiv, $\varphi$, $\varphi^{-1}$ sind stetig, s. die folgende Veranschaulichung:

$\square$

Durch Verkleinerung von $U, V$ erreichen wir, daß $W$ immer eine Kugel des $\mathbb{R}^k$ ist. Dann können wir auch zunächst $(t_1, \ldots, t_k)$ einer Translation unterwerfen so, daß $W$ eine Kugel des $\mathbb{R}^k$ mit 0 als Mittelspunkt ist. M läßt sich in der Form

$$M = \bigcup_{j \epsilon J} M \cap U_j$$

mit

$$\varphi_j : W_j \to M \cap U_j,\ U_j, W_j \text{ wie oben,}$$

ist eine (lokale) Karte von $M, j\epsilon J$, darstellen. Die Indexmenge $J$ ist abzählbar. Sie ist endlich, wenn $M$ kompakt ist, und eventuell abzählbar unendlich, wenn $M$ nicht kompakt ist. **Das System der** $W_j, \varphi_j,: W_j \to M \cap U_j, V_j = M \cap U_j, j\epsilon J$, **heißt ein Atlas von** $M$. Wir kommen darauf in §14 zurück.

**Beispiel für eine (lokale) Karte:**

$$k = n-1, W = U' = \{x' | x' \epsilon \mathbb{R}^{n-1}, |x'| < 1\}, \quad U'' = ]0, 2[$$

Wir verschaffen uns eine Karte der "oberen" $S_{n-1}$ ohne den Äquator $(x_n > 0)$.Sei $g(x') =$
$= \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2},\ x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U'$.
$U = U' \times U'', \quad x' = (t_1, \ldots, t_{n-1}),\ U' = W$,
$t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)$ ist der allgem. Punkt in
$U' \times \{0\} = W \times \{0\}, V = U' \times ]-1, 2[= W \times ]-1, 2[$.

$$\left.\begin{array}{rcccc} F_1(x', x'' = x_n) & = & t_1 & = & x_1 \\ \vdots & & & & \\ F_{n-1}(x', x'' = x_n) & = & t_{n-1} & = & x_{n-1} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = (t_1, \ldots, t_{n-1}), \\ t = x' \end{array}$$

$$F_n(x', x'' = x_n) \quad = \quad x'' - g(x') \quad = \quad x_n - g(t) =: t_n$$

$$F^{-1}(t, t_n) \quad = \quad \begin{pmatrix} t \\ x_n = t_n + g(t) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) \quad = \quad F^{-1}(t, 0) \quad = \quad \begin{pmatrix} t \\ x_n = g(t) \end{pmatrix}$$

Bei der "unteren" $S_{n-1}(x_n < 0)$ verfährt man entsprechend.

## §8. Tangentialräume

Wir konstruieren nun die Tangentenvektoren an eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

**Definition 8.1:** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Sei $p \in M$. Dann heißt*
*$T_p(M) = \{v | v \in \mathbb{R}^n$, es existiert eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha :$ $]-\varepsilon, \varepsilon[ \to M$ mit $\alpha(0) = p, \dot{\alpha}(0) = v\}$*
*der Tangentialraum an $M$ in $p$.*

Die Vektoren des Tangentialraums in $p$ sind also gerade die Tangentenvektoren der auf $M$ liegenden Kurven durch $p$.

**Lemma 8.1:** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Sei $p \in M$. Dann gilt:*

1. *$T_p(M)$ ist $k$-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$*

2. *Ist $\varphi : W \to V = M \cap U$ eine Karte, $\varphi(0) = p$, so ist*
$$(\partial\varphi/\partial t_1)(0), \ldots, (\partial\varphi/\partial t_k)(0)$$
*eine Basis von $T_p(M)$*

3. *Sind $f_1, \ldots, f_{n-k} : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $M \cap U = \{x | x \in U,\ f_1(x) = \ldots = f_{n-k}(x) = 0\}$, Rang $J_{\underline{f}} = n - k(\underline{f} = (f_1, \ldots, f_{n-k}))$, so gilt*
$$T_p(M) = \{v | v \in \mathbb{R}^n, v \perp \mathit{grad}\ f_j(p), j = 1, \ldots, n-k\}.$$

**Beweis:** Sei
$$\begin{aligned} T_1 &= \langle(\partial\varphi/\partial t_1)(0), \ldots, (\partial\varphi/\partial t_k)(0)\rangle, \\ T_2 &= \langle \mathit{grad}\ f_1(p), \ldots, \mathit{grad}\ f_{n-k}(p)\rangle^{\perp}. \end{aligned}$$

$T_1$ ist Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim T_1 = \text{Rang } J_\varphi(0) = k$, $T_2$ ein solcher mit $\dim T_2 = n - \dim\langle \text{ grad } f_1(p), \ldots, \text{ grad } f_{n-k}(p)\rangle = k$. Wir zeigen
$$T_1 \subset T_p(M) \subset T_2.$$

Dann folgt $T_1 \subset T_2$, $\dim T_1 = \dim T_2$, also $T_1 = T_2 = T_p(M)$. Zunächst ist $T_1 \subset T_p(M)$. Sei nämlich
$$v = \sum_{\kappa=1}^{k} \lambda_\kappa \frac{\partial\varphi}{\partial t_\kappa}(0).$$

Sei $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to M$, $t \longmapsto \varphi(0+\lambda_1 t, \ldots, 0+\lambda_k t)$. Dann ist $\gamma(0) = \varphi(0) = p$,

$$\dot\gamma(0) = \sum_{\kappa=1}^{k} \lambda_\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial t_\kappa}(0) = v,$$

also $v \in T_p(M)$. Nun müssen wir noch $T_p(M) \subset T_2$ nachweisen. Zu $v \in T_p(M)$ existiert eine Kurve $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \to M$ mit $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$. Aus $\gamma(t) \in M \cap U$, $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$, folgt $f_j(\gamma(t)) = 0$, $|t| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n-k$,

$$\frac{d}{dt} f_j(\gamma(t)) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_\nu(t) = 0, \; |t| < \varepsilon.$$

Insbesondere ist $\dot\gamma(0)$ orthogonal zu allen *grad* $f_j(p)$, so daß $T_p(M) \subset T_2$ ist. $\square$

**Definition 8.2:** *$N_p(M) = T_p(M)^\perp$ heißt der Normalenvektorraum an $M$ in $p$. Er wird von grad $f_1(p)$, $\ldots$, grad $f_{n-k}(p)$ aufgespannt und hat die Dimension $n - k$.*

**Beispiel:** Der Normalenvektorraum an $S_{n-1}$ in $p = x$ wird nach Beispiel 1, S. ...., von $x$ aufgespannt.

Eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ wird man als Fläche bezeichnen. Eine Karte der oberen bzw. unteren $S_2$ ohne den Äquator haben wir im Beispiel auf S. .... angegeben. Für die obere Halbkugel hatten wir

$$\varphi(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \sqrt{1 - t_1^2 - t_2^2} \end{pmatrix}, \; |t| < 1,$$

gefunden. Die Tangentialebenen werden also von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{t_1}{\sqrt{1-t_1^2-t_2^2}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{t_2}{\sqrt{1-t_1^2-t_2^2}} \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Man findet leicht, daß $\partial\varphi/\partial t_1 \times \partial\varphi/\partial t_2$ proportional zu $\varphi$ ist.

## § 9. Das Differential einer differenzierbaren Abbildung

Wir befassen uns mit der folgenden Situation: $M_1, M_2$ sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bzw. des $\mathbb{R}^m$ irgendeiner Dimension. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M_1 \subset U$. Sei $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, $F(M_1) \subset M_2$. Wir sprechen von einer stetig differenzierbaren Abbildung $F : M_1 \to M_2$.

**Definition 9.1:** *Sei $F : M_1 \to M_2$ eine differenzierbare Abbildung. Seien $p \in M_1$, $q = F(p) \in M_2$. Dann definieren wir*

$$dF(p) : T_p(M_1) \to T_q(M_2) \text{ durch } \dot{\alpha}(0) \longmapsto \dot{\overbrace{F \circ \alpha}}(0).$$

*$dF(p)$ heißt das Differential von $F$ in $p$.*

Damit diese Definition sinnvoll ist, muß sie von $\alpha$ unabhängig sein. Dies zeigt

**Lemma 9.1:** *Für $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in T_p(M_1)$ gilt*

$$dF(p)(v) = J_F(p)v.$$

**Beweis:** Sei $v = \dot{\alpha}(0)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$. Dann ist

$$\frac{d}{dt} F_j \circ \alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_\nu} \dot{\alpha}_\nu, \text{ also}$$

$$\left( \frac{d}{dt} F \circ \alpha \right)(0) = J_F(p)v.$$

□

Hieraus folgt

**Lemma 9.2:** *$dF(p)$ ist eine lineare Abbildung von $T_p(M_1)$ in $T_{F(p)}(M_2)$.*

**Beispiel:** $\mathbb{R}^n$ ist $n-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $t = x$, $\varphi = \text{id.}$ als Karte; wegen $n - k = 0$ treten keine Funktionen $f_j$ in Definition 7.1 auf. Sei also

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ x &\longmapsto (F_1(x), \dots, F_m(x)) \end{aligned}$$

stetig differenzierbar. Es ist $T_p(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, $T_q(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$,

$$dF(p)(v) = J_F(p)v$$

**Satz 9.1:** *Seien $M_1, M_2, M_3$ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l$ irgendeiner Dimension. Sei*

$$\begin{aligned} F : M_1 &\rightarrow M_2 \text{ stetig differenzierbar} \\ G : M_2 &\rightarrow M_3 \text{ stetig differenzierbar} \end{aligned}$$

*Dann ist*

$$H = G \circ F : M_1 \rightarrow M_3$$

*stetig differenzierbar und mit $q = F(p)$ gilt*

$$dH(p) = dG(q) \circ dF(p)$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} dH(p)(v) &= J_H(p)v, \\ &= J_G(F(p))J_F(p)v, \\ &= (dG(q) \circ dF(p))(v). \end{aligned}$$

□

**Lemma 9.3 (Corollar zu Satz 9.1, Invarianz der Dimension):** *Sei $M_1$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $M_2$ eine solche der Dimension $l$. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M_1 \subset U$, $M_2 \subset V$. Sei $F : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus mit $F(M_1) = M_2$. Dann ist $k = l$.*

**Beweis:**

$$dF(p) : T_p(M_1) \rightarrow T_q(M_2),\ q = F(p),$$
$$dF^{-1}(q) : T_q(M_2) \rightarrow T_p(M_1),$$
$$dF(p) \circ dF^{-1}(q) = d(F \circ F^{-1})(q) = \text{ Identität.}$$

Also ist $dF(p)$ Vektorraumisomoprhismus, also ist $k = l$. □

Wir geben einige Hinweise zu Lemma 9.3 (Invarianz der Dimension).

Situation 1: $M_1$ $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $M_2$ $l$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$. $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,
$M_1 \subset U$, $F : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar
$F(M_1) \subset M_2$.
$F(U)$ offen
$F : U \to F(U)$ bijektiv
$F^{-1} : F(U) \to F(U)$ stetig differenzierbar.
Dann ist nach dem Beweis von Lemma 9.3 jedenfalls $k = 1$.
Vermutlich ist von selbst $m = n$!

Situation 2: $m = n$ wie in Lemma 9.3.
$F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar,
$J_F \neq 0$ in $U$. Dann ist $F(U)$ offen.
Ist also $F : U \to F(U)$ bijektiv, so ist F Diffeomorphismus.

Wir kommen zum Differential einer Funktion als Spezialfall von Definition 9.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. $U$ ist $n$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $t = x$, $\varphi = id.$ als Karte. Sei $M_1 = U$, $M_2 = \mathbb{R}$. Dann ist

$$df(p) : T_p(U) \to T_q\mathbb{R} = \mathbb{R},$$
$$v \longmapsto gradf(p) \cdot v.$$

Mit den speziellen Abbildungen

$$f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_j,\ 1 \leq j \leq n,$$

folgt:

**Lemma 9.4:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Für die eben speziellen eingeführten Funktionen $f_j$ schreiben wir $x_j$, $1 \leq j \leq n$. Dann ist mit der Abbildung $dx_j$, definiert durch $dx_j(v) := dx_j(p)(v) = v_j$, $1 \leq j \leq n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $p \in U$, gerade*

$$\begin{aligned} df(p) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{df}{dx_\nu}(p) dx_v(p), \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{df}{dx_\nu}(p) dx_\nu,\ p \in U. \end{aligned}$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} dx_j(v) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}(p) v_\nu, \\ &= v_j,\ 1 \leq j \leq n \\ df(p)(v) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(p) v_\nu, \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\nu}(p) dx_v(v). \end{aligned}$$

$\square$

Im Spezialfall $n = 1$ folgt $df(p) = f'(p)dx$.