

Vorlesung „Mathematik für Physiker III“

Inhaltsverzeichnis:

1 Das Lebesgue-Integral

1.1 Definition des Lebesgue-Integrals im \mathbb{R}^n

1.2 Die Sätze von Levi und Lebesgue, der Satz von Fubini

1.3 Die Banachräume $L_p(D)$

1.4 Hilberträume, Fourierreihen

Kapitel 1

Das Lebesgue-Integral

1.1 Definition des Lebesgue-Integrals in \mathbb{R}^n

Die Bedeutung der Integration wie wir sie in Kapitel 6 kennengelernt haben, liegt zum einen im Ausmessen wenigstens teilweise krummlinig berandeter Flächen, zum anderen in der Umkehrung der Differentiation. Die letzte Operation kann man auch anders charakterisieren. $\int_a^b f(x)dx$ wird in einen Ausdruck umgewandelt, der aus dem „Randterm“ $F(b) - F(a)$ besteht. Es ist ein wichtiges Anliegen dieser Vorlesung, beide Gesichtspunkte in mehrdimensionalen Bereichen weiterzuverfolgen. Beim ersten Gesichtspunkt geht es um Volumenmessung „unterhalb des Graphen einer Funktion“ wie in Kapitel 6. Wir befassen uns zunächst mit diesem geometrischen Aspekt. Sei $I = \{x = (x_1, \dots, x_n) | a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$ ein abgeschlossener Quader des \mathbb{R}^n . Wir zerlegen ihn in abgeschlossene Quader $I_{\nu_1 \dots \nu_n}$, $\nu_1 = 1, \dots, N_1, \dots, \nu_n = 1, \dots, N_n$, deren Konstruktion aus der folgenden Skizze klar wird.

Der markierte Teilquader ist I_{42} .

Die $I_{\nu_1 \dots \nu_n}$ überlappen sich also nicht. Legt man das Volumen eines Quaders durch

$$\mu(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

fest, so ist

$$\mu(I) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{N_1, \dots, N_n} \mu(I_{\nu_1 \dots \nu_n})$$

Das weitere Vorgehen ist nun ganz ähnlich dem in Kapitel 6. Bezeichnen wir die Zerlegung von I in die $I_{\nu_1 \dots \nu_n}$ mit Z , so definieren wir für eine beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Untersumme durch

$$\underline{S}_Z(f) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{N_1, \dots, N_n} m_{\nu_1 \dots \nu_n} \mu(I_{\nu_1 \dots \nu_n}), m_{\nu_1 \dots \nu_n} = \inf\{f(x) : x \in I_{\nu_1 \dots \nu_n}\}$$

und die Obersumme durch

$$\overline{S}_Z(f) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{N_1, \dots, N_n} M_{\nu_1 \dots \nu_n} \mu(I_{\nu_1 \dots \nu_n}), M_{\nu_1 \dots \nu_n} = \sup\{f(x) : x \in I_{\nu_1 \dots \nu_n}\}.$$

Ist $m = \inf\{f(x) : x \in I\}$, $M = \sup\{f(x) : x \in I\}$, so haben wir $m\mu(I) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \overline{S}_Z(f) \leq M\mu(I)$. Wenn $\mathcal{Z}(I)$ die Menge aller Zerlegungen von I bezeichnet, so existieren wieder das Unterintegral

$$U(f) = \sup\{\underline{S}_Z(f) : Z \in \mathcal{Z}(I)\}$$

und das Oberintegral

$$O(f) = \inf\{\overline{S}_Z(f) : Z \in \mathcal{Z}(I)\}.$$

Die beschränkte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt nun wieder (Riemann-) integrierbar, wenn $U(f) = O(f)$ ist und man setzt

$$\int_I f dx = \int_I f(x) dx = U(f) = O(f).$$

Das Integral mißt dann wieder das Volumen, das im \mathbb{R}^{n+1} über I „unterhalb“ des Graphen $\{(x, f(x)) : x \in I\}$ liegt, jedoch heben sich Teile, in denen f positiv ist, mit solchen, in denen f negativ ist, teilweise oder ganz auf. Darauf kommen wir später im Zusammenhang mit dem Lebesgue-Integral zurück. Durch weitere Unterteilung der $I_{\nu_1 \dots \nu_n}$ gewinnt man eine Verfeinerung der Zerlegung Z , es gilt Hilfssatz 6.1.3 und damit das Riemannsches Integralitätskriterium aus Satz 6.1.4. Wie in Kapitel 6 zeigt man, daß auf dem \mathbb{R} -Vektorraum $R(I)$ der beschränkten Riemannintegrierbaren Funktionen das Riemann-Integral eine positive Linearform darstellt (Hilfssatz 6.1.5). Positiv heißt, daß aus $f \leq g$, $f, g \in R(I)$, auch $\int_I f(x) dx \leq \int_I g(x) dx$ folgt. Wie in Kapitel 6 zeigt man, daß jede stetige Funktion f in $R(I)$ liegt. Durch Aufspaltung einer komplexwertigen beschränkten Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ in ihren Real- und Imaginärteil können wir das Riemann-Integral auch für komplexwertige Funktionen erklären und erhalten so den \mathbb{C} -Vektorraum $R(I)$. $R(I)$ ist gegen Multiplikationen abgeschlossen, d.h. mit $f, g \in R(I)$ ist auch $f \cdot g \in R(I)$.

Wir wollen nun den Vektorraum $R(I)$ in einen größeren Raum von Funktionen einbetten. Um die Gründe zu erklären, müssen wir etwas weiter ausholen und beginnen mit der Frage nach der Vertauschbarkeit des Riemann-Integrals mit Grenzübergängen. Sei (f_ν) eine Folge beschränkter Funktionen von I in \mathbb{R} , die dort gleichmäßig gegen ein $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Sind die $f_\nu \in R(I)$, so ist auch $f \in R(I)$ und

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_I f_\nu(x) dx = \int_I f(x) dx, \quad (1)$$

d.h. die Grenzwertbildung vertauscht mit der Integration. Die Forderung der gleichmäßigen Konvergenz ist sehr stark. Will man sie durch eine schwächere, etwa durch punktweise Konvergenz, ersetzen, so benötigt man

Zusatzeigenschaften der Folge (f_ν) . Insbesondere muß die Grenzfunktion f auch in $R(I)$ liegen. Dies ist eine Folge der fehlenden Vollständigkeit von $R(I)$, d.h.: Ähnlich wie die Grenzwertbildung aus den rationalen Zahlen \mathbb{Q} herausführt, tut sie dies bei $R(I)$. Man wird daher, ähnlich zur Einbettung von \mathbb{Q} in den vollständigen Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , $R(I)$ in einen größeren Vektorraum $L_1(I)$ einbetten, dessen Elemente wir als die integrierbaren Funktionen bezeichnen werden. $L_1(I)$ ist vollständig. Die Vollständigkeit der Räume integrierbarer Funktionen hat die moderne Analysis und Funktionalanalysis überhaupt erst ermöglicht. Wir werden dies im Laufe dieser Vorlesung noch sehen, einen ersten Eindruck vermittelt aber bereits 1.4, Satz 1.4.8.. Unser Ausgangspunkt (1), die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration, läßt sich in $L_1(I)$ ebenfalls befriedigender behandeln als in $R(I)$.

Wir führen zunächst einige weitere Bezeichnungen ein: Folgende Teilmengen des \mathbb{R}^n bezeichnet man ebenfalls als Quader:

$$\begin{aligned} I &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \leq x_1 < b_1, \dots, a_n \leq x_n < b_n\} && \text{(halboffener Quader)} \\ I &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 \leq b_1, \dots, a_n < x_n \leq b_n\} && \text{(halboffener Quader)} \\ I &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_n < x_n < b_n\} && \text{(offener Quader)}. \end{aligned}$$

Das Volumen $\mu(I)$ eines Quaders wird auch hier definiert durch

$$\mu(I) := (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

Ein wichtiger Begriff dieser Theorie ist der der Lebesgue-Nullmenge:

Definition 1.1.1 (Lebesgue-Nullmenge.): Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lebesgue-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Quadern $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gibt mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

Satz 1.1.2 Die Vereinigung abzählbar vieler Lebesgue-Nullmengen ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}$ sei N_j eine Lebesgue-Nullmenge und $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$.

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil N_j eine Lebesgue-Nullmenge ist, gibt es Quader $I_{k,j}$ mit

$$N_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_{k,j}) < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Dann ist

$$N \subset \bigcup_{k,j} I_{k,j} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_{k,j}) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

□

Beispiele Einpunktige Mengen $\{p\}$ mit $p \in \mathbb{R}^n$ sind offensichtlich Lebesgue-Nullmengen; daher sind auch alle abzählbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n Lebesgue-Nullmengen, zum Beispiel \mathbb{Q}^n . Ebenso sind die Seiten und Kanten von Quadern Lebesgue-Nullmengen.

Wir kommen nun zum Begriff „fast überall“ abgekürzt „f. ü.“, das soll bedeuten, dass etwas bis auf eine Lebesgue-Nullmenge gilt. Dies wird folgendermassen präzisiert:

Definition 1.1.3 *Es sei I ein Quader und N eine Lebesgue-Nullmenge, $N \subset I \subset \mathbb{R}^n$. Ist dann $f : I \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so sagt man, f sei fast-überall in I definiert und schreibt:*

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ f. ü.}$$

Sind f und g zwei derartige Funktionen, so sagt man

$$f = g \text{ f. ü.,}$$

wenn eine Lebesgue-Nullmenge \tilde{N} in I existiert, so dass f und g in $I \setminus \tilde{N}$ definiert sind und für alle $x \in I \setminus \tilde{N}$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Analog ist

$$f \leq g \text{ f. ü.}$$

definiert.

Definition 1.1.4 *Für $j \in \mathbb{N}$ sei $f_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. definiert. Es existiere eine Lebesgue-Nullmenge $\tilde{N} \in I$, so dass für jedes $x \in I \setminus \tilde{N}$ die Folge $(f_j(x))_j$ konvergiert. Setzt man $f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$ für $x \in I \setminus \tilde{N}$, so ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. in I definiert und man sagt, dass die Folge $(f_j)_j$ f. ü. in I gegen f konvergiert; dafür schreibt man auch*

$$f = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j \text{ f. ü. in } I.$$

Mit Hilfe von Treppenfunktionen kommen wir nun zum Begriff des Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Definition 1.1.5 (Treppenfunktion.) *Eine Funktion*

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

auf einem Quader $I \subset \mathbb{R}^n$ heisst **Treppenfunktion**, wenn es endlich viele Quader $I_1, \dots, I_r \subset I$ gibt und $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für $j \neq k$ ist $I_j \cap I_k = \emptyset$
- (2) auf jedem I_j ist φ konstant: $\varphi|_{I_j} = c_j$
- (3) ausserhalb $\bigcup_{j=1}^r I_j$ ist $\varphi = 0$.

Man setzt dann

$$\int_I \varphi dx := \sum_{j=1}^r c_j \mu(I_j)$$

Definition 1.1.6: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. erklärt. Wir setzen $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. Dann ist $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. f^+ , f^- nennt man auch Positiv- und Negativteil von f .

Definition 1.1.7: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. erklärt. f heisst meßbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen von I in \mathbb{R} gibt, die f. ü. in I gegen f konvergiert.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. erklärt genau dann meßbar ist, wenn es f. ü. erklärte, $g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt derart, daß $f = g - h$ ist und zu g, h jeweils eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_j)_j, (\psi_j)_j$ existiert mit

$$\varphi_j \leq \varphi_{j+1}, \psi_j \leq \psi_{j+1}, \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = g \text{ f.ü.}, \lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = h \text{ f.ü.}$$

□

Man könnte versucht sein, g, h durch f^+, f^- zu ersetzen, doch ist dies nicht möglich. Es gelten aber für $|f|, f^+, f^-$ die folgenden Formeln, wenn wieder $f = g - h$ ist:

$$|f| = \max(g, h) - \min(g, h), \quad f^+ = \max(g, h) - h = g - \min(g, h),$$

$$f^- = \max(g, h) - g = h - \min(g, h).$$

Da $\max(\varphi_j, \psi_j), \min(\varphi_j, \psi_j)$ ebenfalls monotone Folgen von Treppenfunktionen sind, sind $|f|, f^+, f^-$ insbesondere meßbar.

Der Raum $M(I)$ der meßbaren Funktionen ist gegen Bildung von Linearkombinationen, Maximum- und Minimumbildung endlich vieler Funktionen, f. ü. Konvergenz und Multiplikation abgeschlossen, d.h. diese Operationen führen nicht aus $M(I)$ heraus. Ist $g \in M(I)$ und $g \neq 0$ f. ü. in I , so ist auch $\frac{1}{g} \in M(I)$. $M(I)$ ist sehr groß, d.h. es ist schwierig, eine Funktion zu konstruieren, die nicht in $M(I)$ liegt. Für praktische Zwecke ist es völlig ausreichend, davon auszugehen, daß jede Funktion in $M(I)$ liegt. Aus $M(I)$ werden nun die Lebesgue-integrierbaren Funktionen herausgefiltert.

Definition 1.1.8: Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ f. ü. auf I erklärt, so sagt man

$$f \in L^+(I),$$

wenn es eine Folge $(\varphi_j)_j$ von Treppenfunktionen $\varphi_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ gilt mit folgenden Eigenschaften

(1) $\varphi_j \leq \varphi_{j+1}$ f. ü.,

(2) $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = f$ f. ü.,

(3) es gibt ein $M > 0$ mit $\int_I \varphi_j dx \leq M$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Man setzt dann

$$\int_I f dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_I \varphi_j dx.$$

Kurz zusammengefasst: Eine Funktion f ist genau dann in $L^+(I)$, wenn sie Grenzwert (f.ü.) einer monoton wachsenden Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge ist; die Integralfolge konvergiert, weil sie monoton wachsend und beschränkt ist.

Nun kommen wir zum Grundbegriff dieser Theorie, dem Lebesgue-Integral:

Definition 1.1.9 Eine f. ü. definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst **Lebesgue-integrierbar**, wenn es Funktionen $g, h, \in L^+(I)$ gibt mit $f = g - h$; man setzt

$$\int_I f dx := \int_I g dx - \int_I h dx.$$

Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen bezeichnet man mit $L(I)$.

Man zeigt nun: $L(I)$ ist gegen Bildung von Linearkombinationen abgeschlossen und es gilt:

Satz 1.1.10 Für $f_1, f_2 \in L(I)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ haben wir

(1) $\int_I (c_1 f_1 + c_2 f_2) dx = c_1 \int_I f_1 dx + c_2 \int_I f_2 dx,$

(2) aus $f_1 \leq f_2$ f. ü. folgt $\int_I f_1 dx \leq \int_I f_2 dx$.

Beispiel 1.1.11 Sei $I = [0, 1]$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt durch $f(x) = 1$, $x \in [0, 1]$ und irrational, $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ und rational. Dann ist f nicht in $R(I)$: Da die rationalen Zahlen in $[0, 1]$ dicht liegen, ist $U(f) = 0$; ebenso gilt dies von den irrationalen Zahlen, so daß $0(f) = 1$ ist. Jedoch bilden die rationalen Zahlen eine Nullmenge und f ist daher f. ü. gleich der Treppenfunktion $\varphi \equiv 1$. Also ist $f \in L(I)$ und $\int_I f dx = 1$.

In allen vorhergehenden Betrachtungen dürfen die halboffenen oder offenen Quader I auch uneigentlich sein, d.h. einer der Endpunkte a_i, b_i darf $-\infty$ oder $+\infty$ sein. So erhalten wir etwa für $n = 2$ mit $I = \{-\infty < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2\}$ einen zur x_1 -Achse parallelen Halbstreifen der Breite $b_2 - a_2$, mit $I = \{-\infty < x_1 < +\infty, a_2 < x_2 \leq b_2\}$ einen Streifen der Breite $b_2 - a_2$. Für beliebiges n ist $I = \{-\infty < x_1 < +\infty, \dots, -\infty < x_N < +\infty\}$ der ganze \mathbb{R}^n . Damit können wir Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auch über unbeschränkte I integrieren. Ein Vergleich mit den uneigentlichen Riemann-Integralen aus Kapitel 6 drängt sich auf. Wir gehen im nächsten Abschnitt darauf ein. In diesem Zusammenhang merken wir noch an:

Satz 1.1.12: *I sei eigentlicher oder uneigentlicher Quader. f aus $M(I)$ ist dann und nur dann aus $L(I)$, wenn $|f|$ es ist.*

Beweis: f sei aus $L(I)$. Dann sind nach (2) die Funktionen $f^+, f^- \in L(I)$. Mit $|f| = f^+ + f^-$ folgt die erste Richtung. Sein nun $|f| \in L(I)$. Im Rahmen einer erweiterten Theorie kann man den Integralbegriff auf meßbare Funktionen $f \geq 0$ f. ü. ausdehnen, indem man Funktionen, die im bisherigen Sinn nicht integrierbar sind, als Integral $\int_I f dx = +\infty$ zuordnet. Dann gilt weiter (2) aus Satz 1.1.10 und wir erhalten $f^+, f^- \in L(I)$ und damit $f = f^+ - f^- \in L(I)$. \square

Wir stellen noch einige Sätze über $L(I)$ zusammen, die häufig nützlich sind.

Satz 1.1.13: *Sei I eigentlich oder uneigentlich. Seien $f \in L(I)$, sei $f = g$ f. ü. in I . Dann ist $g \in L(I)$ und*

$$\int_I f(x) dx = \int_I g(x) dx.$$

Ist $f = 0$ f. ü. in I , so ist $f \in L(I)$ und $\int_I f dx = 0$. Sei $f \in L(I)$. Dann gibt es zu f eine Folge von Treppenfunktionen (φ_j) von I in \mathbb{R} mit $\int_I |f - \varphi_j| dx \rightarrow 0$, $\varphi_j \rightarrow f$ f. ü., $j \rightarrow \infty$.

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen aus der Definition von $L(I)$, die dritte können wir hier nicht beweisen. \square

Insbesondere kommt es bei der Integration auf Nullmengen nicht an und die Treppenfunktionen liegen in $L(I)$ dicht bezüglich der „Norm“ $\int_I |f| dx$.

Definition 1.1.14: Ist D eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine f . ü. erklärte Funktion. Dann liegt D im uneigentlichen Quader \mathbb{R}^n und wir setzen

$$\tilde{f} = \tilde{f}_D : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D, \\ 0 & \text{für } \mathbb{R}^n - D. \end{cases}$$

Man nennt f meßbar bzw. Lebesgue integrierbar über D , wenn $\tilde{f} \in M(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\in L(\mathbb{R}^n)$ ist, und setzt

$$\int_D f dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f} dx.$$

Mit Hilfe der integrierbaren Funktionen können wir beschränkten Mengen ein endliches Maß zuordnen.

Definition 1.1.15: Sei D eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . D heißt meßbar, wenn $f \equiv 1$ über D integrierbar ist, und

$$\mu(D) = \int_D 1 dx \geq 0$$

heißt das Lebesgue-Maß der Menge D .

Die Nullmengen, die wir in 1.1 eingeführt haben, sind genau die Mengen mit Maß 0. Es ist klar, daß beschränkte meßbare Mengen ein Maß haben, daß nicht größer als der Inhalt eines Quaders ist, der sie einschließt. Das Beispiel einer Hyperebene im \mathbb{R}^n zeigt, daß unbeschränkte sogar das Maß 0 haben können, wenn sie „hinreichend dünn“ sind. Analog zur Klasse der meßbaren Funktionen ist die Klasse der meßbaren Mengen sehr groß, so daß wir für praktische Zwecke jede Teilmenge einer meßbaren Menge und insbesondere jede beschränkte Menge als meßbar ansehen können.

Wir merken eine Regel für Integrale und Maße an.

Satz 1.1.16: Sei $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$. Sei $f \in L(B)$, $f \geq 0$ f . ü.. Dann ist

$$\int_A f dx \leq \int_B f dx \text{ und } \mu(A) \leq \mu(B), \text{ falls } B \text{ meßbar ist.}$$

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Sei $A \cap B$ eine Nullmenge. Sei $f \in L(A \cup B)$. Dann ist

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx \text{ und } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ falls } A, B \text{ meßbar sind.}$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $f \geq 0$ f. ü. auf D , $\int_D f dx = 0$. Dann ist $f = 0$ f. ü. in D .

Beweis: Wir erklären \tilde{f} wie in Definition 1.1.14. Dann haben wir im ersten Fall $\tilde{f}_A \leq \tilde{f}_B$ f. ü., woraus die erste Behauptung folgt. Im zweiten Fall ist $\tilde{f}_A + \tilde{f}_B = \tilde{f}_{A \cup B}$ f. ü. Daraus folgt die zweite Behauptung. Der Beweis der dritten Behauptung ist etwas schwieriger. Es ist

$$\{x | \tilde{f}_D(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = \left\{ x | \tilde{f}_D(x) \geq \frac{1}{m} \right\}$$

und mit der Meßbarkeit der D_m folgt

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_D dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}_{D_m} dx \geq \frac{1}{m} \mu(D_m).$$

Also ist $\mu(D_m) = 0$ und mit Satz 1.1.2 folgt, daß $\{x | \tilde{f}_D(x) > 0\}$ eine Nullmenge ist. \square

Wie in Satz 1.1.12 kann man sich ein wichtiges Kriterium für die Integrierbarkeit einer Funktion verschaffen.

Satz 1.1.17: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, \tilde{f}_D meßbar, $g \in L(D)$, $|f| \leq g$. Dann ist $f \in L(D)$. Insbesondere sind mit $f, g \in L(D)$ auch $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ aus $L(D)$.

1.2 Die Sätze von Levi und Lebesgue, der Satz von Fubini

Die Menge aller Treppenfunktionen auf I , I eigentlich oder uneigentlich, wurde zu $L^+(I)$ und dann zu $L(I)$ erweitert, indem man die Grenzwerte von monotonen konvergenten Folgen mit beschränkter Integralfolge hinzunimmt. Nun stellt sich die Frage, ob man durch einen analogen Prozess die Menge $L(I)$ nochmals erweitern kann. Der folgende Satz von B. Levi (?) besagt, dass derartige Grenzfunktionen bereits in $L(I)$ liegen:

Satz 1.2.1 (Satz von B. Levi) Es sei $(f_m)_m$ eine Folge von Funktionen $f_m \in L(I)$ und es gelte:

$$(1) f_m \leq f_{m+1} \text{ f. ü.,}$$

(2) es existiert ein $M > 0$ mit $\int_I f_m dx \leq M$ für $m \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein $f \in L(I)$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f \text{ f. ü. und } \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I f_m dx = \int_I f dx.$$

Satz 1.2.2 (Konvergenzsatz von Lebesgue.) Es sei (f_m) eine Folge, $f_m : I \rightarrow \mathbb{R}$, die f. ü. gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert; es existiere ein $g \in L(I)$ mit $|f_m| \leq g$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f \in L(I) \text{ und } \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I f_m dx = \int_I f dx.$$

Daraus folgt:

Satz 1.2.3 Es seien

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I \subset \mathbb{R}^n$$

Intervalle mit $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m = I$ Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es gelte

(1) für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist $f|_{I_m}$ Lebesgue-integrierbar

(2) es gibt ein $M > 0$ mit $\int_I |f_m| dx \leq M$ für alle $m \in \mathbb{N}$

Dann gilt

$$f \in L(I) \text{ und } \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{I_m} f dx = \int_I f dx.$$

Wir erläutern die Beweisidee: Für $f \geq 0$ setzt man

$$f_m : I \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in I_m \\ 0 & \text{für } x \notin I_m \end{cases}$$

und wendet den Satz von Levi an.

Daß die Lebesgue-Integration eine echte Erweiterung der Riemann-Integration ist, zeigt zusammen mit Beispiel 1.1.11 der

Satz 1.2.4: Sei I ein abgeschlossener Quader, $f \in R(I)$. Dann ist $f \in L(I)$ und

$$\int_I f(x) dx \text{ (Riemann)} = \int_I f(x) dx \text{ (Lebesgue)}.$$

Bevor wir den Beweis geben, führen wir eine gebräuchliche Bezeichnungsweise ein. Ist D eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n , so schreiben wir statt der

bereits in 1.1 verwendeten Fortsetzung von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, durch 0 das Symbol

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D, \\ 0, & x \notin D, \end{cases}$$

und bezeichnen χ_D als die charakteristische Funktion von D .

Beweis des Satzes 1.2.4: Sei (Z_λ) eine Folge von Zerlegungen des abgeschlossenen Quaders I mit

$$\underline{S}_{Z_\lambda}(f) \uparrow \int_I f(x) dx \text{ (Riemann)}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

$$\overline{S}_{Z_\lambda}(f) \downarrow \int_I f(x) dx \text{ (Riemann)}, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

die nach dem Riemannschem Integritätskriterium existiert. $\underline{S}_{Z_\lambda}(f)$, $\overline{S}_{Z_\lambda}(f)$ sind gleichzeitig die Riemann- und Lebesgue-Integrale über die Treppenfunktion

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(x) &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{N_1(\lambda), \dots, N_n(\lambda)} M_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(\lambda)} \chi_{I_{\nu_1 \dots \nu_n}}^{(\lambda)}(x), \\ \varphi_\lambda(x) &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n=1}^{N_1(\lambda), \dots, N_n(\lambda)} m_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(\lambda)} \chi_{I_{\nu_1 \dots \nu_n}}^{(\lambda)}(x), \quad \lambda = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

wenn Z_λ bedeutet, daß I in die Quader $I_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(\lambda)}$ mit $M_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(\lambda)}$, $m_{\nu_1 \dots \nu_n}^{(\lambda)}$ als Suprema bzw. Infima von f über diese Quader, zerlegt wird. Dann haben wir $\Phi_\lambda \geq \Phi_{\lambda+1}$, $\varphi_\lambda \leq \varphi_{\lambda+1}$ und die Folgen $(\int_I \Phi_\lambda(x) dx)$, $(\int_I \varphi_\lambda(x) dx)$ sind nach unten bzw. oben beschränkt. Aus Satz 1.2.1 folgt die Existenz von \overline{h} , $\underline{h} \in L(I)$ mit

$$\overline{h} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Phi_\lambda \text{ f. ü.}, \quad \int_I \overline{h} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I \Phi_\lambda dx = \int_I f dx \text{ (Riemann)}$$

$$\underline{h} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda \text{ f. ü.}, \quad \int_I \underline{h} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_I \varphi_\lambda dx = \int_I f dx \text{ (Riemann)}$$

Nun ist $\overline{h} \geq \underline{h}$ f. ü., weil $\Phi_\lambda \geq \varphi_\lambda$ f. ü. ist, und $\int_I (\overline{h} - \underline{h}) dx = 0$. Nach Satz 1.1.16 ist $\overline{h} = \underline{h} = h$ f. ü.. Mit

$$\phi_\lambda \geq f \geq \varphi_\lambda \text{ und } \phi_\lambda \geq h \geq \varphi_\lambda, \quad \phi_\lambda \downarrow h, \quad \varphi_\lambda \uparrow h, \quad \lambda \rightarrow \infty \text{ f. ü.}$$

folgt $f = h$ f. ü.. Satz 1.1.13 zeigt $f \in L(I)$,

$$\int_I f dx \text{ (Riemann)} = \int_I f dx \text{ (Lebesgue)}.$$

□

Mit dem Lebesgue-Integral haben wir das Riemann-Integral auf den größtmöglichen Bereich von Funktionen fortgesetzt, über dem noch sinnvoll Integration betrieben werden kann. Als Kandidaten für einen Test auf Integrierbarkeit stehen mit den meßbaren Funktionen praktisch alle Funktionen zur Verfügung.

Beispiel 1.2.5: Sei $I =]0, 1[$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\lambda} \cdot \frac{1}{(1-x)^\mu}$ mit Exponenten $\lambda, \mu, 0 \leq \lambda, \mu < 1$. Dann ist $f \in L(I)$, denn sei $I_m =]\frac{1}{m}, 1 - \frac{1}{m}[$, $m \geq 3$, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{m}}^{1-\frac{1}{m}} \frac{1}{x^\lambda(1-x)^\mu} dx &= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\lambda(1-x)^\mu} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{1}{m}} \frac{1}{x^\lambda(1-x)^\mu} dx \leq \\ &\leq \frac{2^\mu}{(1-\lambda)2^{1-\lambda}} + \frac{2}{(1-\mu)2^{1-\mu}} =: M \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus Satz 1.2.3 durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$. Ist jedoch einer der Exponenten λ, μ größer oder gleich 1, so ist $f \notin L(I)$. Dagegen ist $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^\lambda}$ für $\lambda > 1$ in $L([a, +\infty))$, $a > 0$, aber für $\lambda \leq 1$ nicht mehr in $L([a, +\infty))$. $f(x) = \frac{1}{x}$ trennt also gerade die folgenden Bereiche: Die Funktionen, die etwa auf $]0, +\infty[$ erklärt, auf jedem Intervall $[a, b]$, $0 < a < b < +\infty$ beschränkt sind, bei Null schwächer aufsteilen als $\frac{1}{x}$ und für $x \rightarrow +\infty$ schwächer oder wie $\frac{1}{x}$ abfallen, sind zwar aus $L(]0, a[)$ für alle $a > 0$, aber in keinem $L(]a, +\infty[)$, $a > 0$. Man sagt, sie sind bei Null integrierbar, aber nicht im Unendlichen. Steilen die Funktionen bei Null stärker oder wie $\frac{1}{x}$ auf und fallen sie im Unendlichen schneller ab als $\frac{1}{x}$, so sind die Verhältnisse umgekehrt. Die Funktionen des Beispiels werden häufig als Majoranten im Sinn von Satz 1.2.2 benutzt, um Funktionen auf Integrierbarkeit zu testen.

Wir befassen uns nun mit Methoden zur Berechnung mehrfacher Integrale.

Satz 1.2.6 (Satz von Fubini). *Gegeben seien Quader*

$$I_1 \subset \mathbb{R}^p, \quad I_2 \subset \mathbb{R}^q, \quad I := I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^n, \quad n := p + q,$$

und eine Lebesgue-integrierbare Funktion

$$f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Dann gilt:

(1) Es existiert eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset I_2$, so dass für alle $y \in I_2 \setminus N$ die Funktion

$$I_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x, y),$$

Lebesgue-integrierbar ist,

(2) Die fast-überall auf I_2 definierte Funktion

$$g : I_2 \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \int_{I_1} f(x, y) dx,$$

ist Lebesgue-integrierbar,

(3) es ist

$$\int_{I_2} g(y) dy = \int_I f d(x, y),$$

also

$$\int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_I f d(x, y),$$

analog gilt

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_I f d(x, y).$$

Der Satz besagt für $p = q = 1$ und $n = 2$, dass man das Integral von $f(x, y)$ über ein Rechteck $I = [a, b] \times [c, d]$ so ausrechnen kann: Man integriert bei festem y zuerst nach der Variablen x (nach (1) ist das fast immer möglich), man bildet also $\int_a^b f(x, y) dx$. Das Ergebnis hängt von y ab und nun integriert man nach y ((2) besagt, dass dieses Integral existiert), dann erhält man $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$. Nach (3) ist dies gleich dem gesuchten Integral $\int_I f(x, y) d(x, y)$. Man darf auch zuerst nach y und dann nach x integrieren.

Oft weiß man nicht, daß $f : I = I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ über $I_1 \times I_2$ integrierbar ist und möchte durch Ausführung einer iterierten Integration auf die Integrierbarkeit über $I_1 \times I_2$ und damit die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Integrationen schließen. Hier ist der folgende Satz nützlich.

Satz 1.2.7 (Satz von Tonelli): Sei $f : I = I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die $f \geq 0$ ist. Sei $f(x, \cdot)$ für fast alle $x \in I_1$ aus $L(I_2)$. Die f in I_1 erklärte Funktion $\int_{I_2} f(x, y) dy$ sei aus $L(I_1)$. Dann ist $f \in L(I_1 \times I_2)$ und

$$\int_I f d(x, y) = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dx \right) dy$$

Dasselbe gilt, wenn $f(\cdot, y)$ für fast alle $y \in I_2$ aus $L(I_1)$ und $\int_{I_1} f(x, y) dx$ aus $L(I_2)$ ist.

Beispiel 1.2.8: Sei $I_1 = I_2 =]0, 1[$, $f(x, y) = \frac{1}{x+y^2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x+y^2} dy \right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^2} dy \right) dx, \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} \sqrt{x} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

und nach Beispiel 1.2.5 ist $f \in L(I_1 \times I_2)$. Dagegen ist $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ nicht in $L(I_1 \times I_2)$, weil sonst das iterierte Integral

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2+y^2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} x \arctan \frac{1}{x} dx$$

endlich ausfallen würde. M. a. W., die Funktion $\frac{1}{x^2+y^2}$ steigt bei Null zu schnell auf, um noch integrierbar zu sein.

Aus Kap. 6, Satz 6.4.2 (Substitutionsregel) wissen wir schon bei einer Variablen, daß die Einführung neuer Variablen bei der Auswertung von Integralen oft hilfreich ist. Für Lebesgue-Integrale im \mathbb{R}^n trifft dies ebenfalls zu, doch muß man sich auf umkehrbar stetig differenzierbare Variablensubstitutionen beschränken. Es gilt

Satz 1.2.9 (Transformationsformel): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $g : U \rightarrow V$ bijektiv und stetig differenzierbar. Sei g^{-1} stetig differenzierbar. Sei $f \in L(U)$. Dann ist $f \circ g \cdot |\det J_g|$ aus $L(V)$ und umgekehrt. In diesem Fall ist

$$\int_V f(y) dy = \int_U f \circ g |\det J_g| dx.$$

Da g^{-1} stetig differenzierbar in U ist, folgt sofort $\det J_g \neq 0$ in U . Durch eine Variablentransformation g versucht man oft, eine krumm berandete Menge U auf einen Quader V abzubilden, da man nach dem Satz 1.2.6 von Fubini ein Integral über einen Quader durch sukzessive Integration über Intervalle ausführen kann. Bei der Integration über Intervalle hat man eventuell die Möglichkeit, auf Kenntnisse aus Kapitel 6 zurückzugreifen (z.B. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung).

Beispiel 1.2.10:

- a) Wir führen Polarkoordinaten in der Ebene ein. $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dann ist $\det J_g = r$. Sei $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0\}$, $U = \{(r, \varphi) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$. Dann genügt g den

Voraussetzungen des Satzes 1.2.9. Mit $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ folgt

$$\begin{aligned} \int_V f(x, y) d(x, y) &= \int_U f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi), \\ &= \int_U \sqrt{1 - r^2} r d(r, \varphi) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \sqrt{\sigma} d\sigma = \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

wobei wir die eindimensionale Substitutionsregel mit $\sigma = 1 - r^2$ verwendet haben.

- b) Wir berechnen das Lebesgue-Maß (Volumen) der dreidimensionalen Kugel. Wir führen Kugelkoordinaten ein. $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, \vartheta) \mapsto (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, z = r \cos \vartheta)$, $0 \leq r$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Sei $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1, x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0\}$, $U = \{(r, \varphi, \vartheta) : 0 < r < 1, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi\}$. Bis auf die Nullmenge $\{x = 0, y = 0\}$ der z -Achse ist V die offene Einheitskugel $K_1(0)$ um 0 des \mathbb{R}^3 . $g : U \rightarrow V$ genügt den Voraussetzungen des Satzes 1.2.9. Es ist $\det J_g = r^2 \sin \vartheta$, und wir erhalten für das Kugelvolumen

$$\begin{aligned} \mu(K_1(0)) = \mu(V) &= \int_V d(x, y, z) \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Wir integrieren nun die Funktion f , $f(x, y, z) = 1(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^\lambda$ für $\lambda > 0$ über V . Diese Funktion stellt bei Annäherung an den Nullpunkt auf. Wir erhalten aus Satz 1.2.9 die Formel

$$\int_V \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^\lambda} dx dy dz = 4\pi \int_0^1 \frac{1}{r^{\lambda-2}} dr$$

Nach Beispiel 1.2.5 ist genau dann aus $L(V)$, wenn $\lambda < 3$ ist.

- c) Im Fall $n = 1$, $U = V$ offene Intervalle, $f \in R(\bar{U})$ folgt aus Satz 1.2.9

$$\int_V f(y) dy = \int_U f \circ g(x) |g'(x)| dx$$

Ist $V =]a, b[$, $U =]a', b'[$, so ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_V f(y) dy &= \int_{\bar{V}} f(y) dy = \int_a^b f(y) dy = \int_U f(g(x)) \cdot |g'(x)| dx \\ &= \int_{\bar{U}} f(g(x)) |g'(x)| dx = \int_{a'}^{b'} f(g(x)) |g'(x)| dx \end{aligned}$$

Dies ist die aus Satz 6.4.2 bekannte Substitutionsregel, falls g sogar auf $[a', b']$ stetig differenzierbar und $g' \neq 0$ in $]a', b'[$ ist. Die letzte Voraussetzung wird jedoch in einer Dimension nicht benötigt.

Nun vergleichen wir das in 6.5 eingeführte uneigentliche Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral.

Satz 1.2.11: *Sei I ein eigentliches oder uneigentliches Intervall. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Es existiere das uneigentliche Riemann-Integral $\int_I f(x)dx$. Existiert auch $\int_I |f|dx$ als uneigentliches Riemann Integral, so ist $f \in L(I)$ und uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral von f stimmen überein.*

Beweis: Sei etwa $I = (0, \infty)$, $I_m = (\frac{1}{m}, m)$, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\int_{I_m} f(x)dx \text{ (Riemann)} = \int_{I_m} f(x)dx \text{ (Lebesgue)}$$

nach Satz 1.2.4. Wegen $|f\chi_{I_m}| \leq |f|$ ist $\int_{I_m} |f|dx \leq M = \int_I |f|dx$ und Satz 1.2.3 liefert die Behauptung. \square

Beispiel 1.2.12: Uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit und Lebesgue-Integrierbarkeit fallen also auseinander, wenn $|f|$ nicht in $L(I)$ ist. Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$, $I =]0, +\infty[$. Dann ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{\nu=0}^\infty \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{1}{x} \sin x dx$$

und die letzte Reihe konvergiert, da sie alternierend ist und ihre Glieder eine Nullfolge bilden. Dagegen ist die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^\infty \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{1}{x} |\sin x| dx \text{ divergent und daher } |f| \notin L(I).$$

Bei der uneigentlichen Riemann-Integrierbarkeit dürfen sich also positive Berge und negative Täler ausgleichen.

Wie wir bereits erwähnt haben, ist für einen kompakten Quader I mit $f, g \in R(I)$ auch $f \cdot g \in R(I)$. Dies gilt schon nicht mehr für uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen über einen Intervall und erst recht nicht für Lebesgue-integrierbare Funktionen (s. Beispiel I.2.5).

1.3 Die Banachräume $L_p(I)$.

Die meßbaren Funktionen $M(I)$ und die integrierbaren Funktionen $L(I)$ sind zwar gegen die Bildung von Linearkombinationen $c_1 f_1 + c_2 f_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in M(I)$ oder $L(I)$ abgeschlossen; da jedoch f_1, f_2 nur fast überall erklärt sind, ist etwa die Lösung $w = f_1 - f_2$ der Gleichung $f_2 + w = f_1$

f.ü. auch nur fast überall erklärt. Abänderung von w auf einer Nullmenge liefert immer noch eine Lösung von $f_2 + w = f_1$ f. ü.. Das Nullelement bezüglich der Addition besteht also eigentlich aus allen Funktionen, die f. ü. verschwinden. Diese Mehrdeutigkeit beseitigen wir jetzt durch einen Prozess, der der Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen gleicht. Er liefert gleichzeitig die in 1.1 angekündigte Einbettung von $R(I)$ in einen vollständigen Raum integrierbarer Funktionen, aus dem also die Grenzwertbildung nicht herausführt.

Definition 1.3.1: Für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ setzt man

$$\mathcal{L}_p(I) := \{f \in M(I) \mid |f|^p \in L(I)\}$$

und definiert für $f \in \mathcal{L}_p$

$$\|f\|_p := \left(\int_I \|f\|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Es gilt:

Satz 1.3.2 \mathcal{L}_p ist gegen Bildung von Linearkombinationen abgeschlossen für $f, g, \in \mathcal{L}_p$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

- (1) $\|c \cdot f\|_p = |c| \cdot \|f\|_p$,
- (2) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,
- (3) $\|f\|_p = 0$ ist äquivalent zu $f = 0$ f. ü.

Beweis: (1) ist klar, (2) können wir hier nicht zeigen, (3) folgt aus Satz 1.1.16. □

Damit hat man in $\mathcal{L}_p(I)$ eine „Pseudonorm“ definiert: bei einer Norm folgt aus $\|f\| = 0$, dass $f = 0$ ist. Nun identifiziert man zwei Funktionen, $f, g \in \mathcal{L}_p(I)$, wenn $f = g$ f. ü. gilt; genauer: Man setzt $\mathcal{N}_p(I) := \{f \in \mathcal{L}(I) \mid f = 0 \text{ f. ü.}\}$ und definiert den Quotientenraum (nach 7.11)

$$L_p(I) := \mathcal{L}_p(I) / \mathcal{N}_p(I).$$

Dann induziert $\|\cdot\|_p$ eine Norm in $L_p(I)$, die wir ebenfalls mit $\|\cdot\|_p$ bezeichnen. Somit ist $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$ oder kurz $L_p(I)$ ein normierter Raum (vgl. 7.9.1). Man kann die Begriffe Konvergenz und Cauchy-Folge definieren:

Eine Folge (f_j) mit $f_j \in L_p(I)$ für $j \in \mathbb{N}$ heisst konvergent gegen $f \in L_p(I)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_j - f\|_p < \varepsilon$ für $j \geq N$.

Eine Folge (f_j) in $L_p(I)$ heisst Cauchy-Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\|f_j - f_k\| < \varepsilon$ für $j, k \geq N$.

Definition 1.3.3 Ein normierter Raum heisst vollständig oder ein **Banachraum**, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Satz 1.3.4 Für jedes $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ ist $L_p(I)$ ein Banachraum.

Es gilt:

Satz 1.3.5 Für $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $q > 1$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt: Aus $f \in L_p(I)$ und $g \in L_q(I)$ folgt:

$$f \cdot g \in L_1(I) \quad \text{und} \quad \|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Wir bemerken noch, daß $\mathcal{L}_1(I) = L(I)$ ist.

Mit den Elementen aus $L_p(I)$ rechnet man einfach, indem man mit den Repräsentanten $f \in L_p(I)$ einer Äquivalenzklasse aus $L_p(I)$ rechnet. Ein Repräsentant bestimmt eindeutig die Äquivalenzklasse, in der er liegt, und alle Operationen, die wir bisher mit meß- oder integrierbaren Funktionen eingeführt haben sind von der Auswahl der Repräsentanten einer Äquivalenzklasse unabhängig. Da wir also statt mit den Äquivalenzklassen mit ihren Repräsentanten wie bisher rechnen, sprechen wir von den Elementen von $L_p(I)$ ebenfalls als Funktionen. Was bedeutet nun die Konvergenz in $L_p(I)$ für die punktweise Konvergenz der beteiligten Funktionen f_j ? Diese naheliegende Frage beantwortet

Satz 1.3.6: Die Folge (f_j) konvergiere für ein $p \geq 1$ in $L_p(I)$ gegen f . Dann gibt es eine Teilfolge (f_{j_ν}) von (f_j) , die fast überall in I gegen f konvergiert.

Ist I uneigentlich, also in wenigstens einer Richtung unendlich ausgedehnt, so muß ein $f \in L^p(I)$ im Unendlichen gegen Null streben. Auf eine Präzision verzichten wir hier.

Ersetzt man I durch eine Teilmenge D des \mathbb{R}^n , so gelten entsprechende Aussagen.

1.4 Hilberträume, Fourierreihen

Definition 1.4.1 Ein euklidischer Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der, versehen mit der Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

vollständig ist, heisst **Hilbertraum**.

Ein Hilbertraum H ist also ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt definiert ist. Das Skalarprodukt genügt der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

und ist daher stetig in beiden Faktoren, d.h. aus $x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_j$, $y = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j$ folgt $\langle x, y \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle x_j, y_j \rangle$.

Ein einfaches Beispiel eines Hilbertraum ist der \mathbb{R}^n , versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Das für die Analysis wichtige Beispiel ist der $L_2(I)$.

Satz 1.4.2 Für jeden Quader $I \subset \mathbb{R}^n$ ist $L_2(I)$ ein Hilbertraum.

Beweis: Aus 1.3.5 folgt mit $p = q = 2$: Sind $f, g \in L_2(I)$, so ist $f \cdot g \in L_1(I) = L(I)$, also ist $f \cdot g$ Lebesgue-integrierbar und man kann definieren:

$$\langle f, g \rangle := \int_I f \cdot g \, dx.$$

Die durch dieses Skalarprodukt definierte Norm ist

$$\|f\| = \left(\int_I f^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2.$$

Nach Satz 1.3.4 ist $L_2(I)$, versehen mit dieser Norm, vollständig, also ein Hilbertraum. \square

Es sei nun H immer ein Hilbertraum.

Definition 1.4.3 Eine **Hilbert-Basis** in H ist eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist $\langle b_m, b_n \rangle = \delta_{mn}$ (Orthonormalität),
- (2) ist $f \in H$ und gilt $\langle f, b_n \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ so folgt $f = 0$.

Dabei bedeutet wieder

$$\delta_{mn} := \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases}$$

Satz 1.4.4 (Charakterisierung der Hilbert-Basis.) *Es sei (b_n) eine Folge im Hilbertraum H mit $\langle b_m, b_n \rangle = \delta_{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (1) (b_n) ist eine Hilbert-Basis in H ,
- (2) die abgeschlossene Hülle von $\text{span}\{b_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist gleich H ,
- (3) für jedes $f \in H$ gilt $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle \cdot b_n$ (Fourierreihe),
- (4) für alle $f, g \in H$ ist $\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle \cdot \langle g, b_n \rangle$ (Parsevalsche Gleichung),
- (5) für jedes $f \in H$ gilt $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n \rangle)^2$.

Beweis: Wir zeigen die Äquivalenz von (1) und (3). Sei also (b_n) eine Hilbert-Basis und $f \in H$. Aus

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, b_n \rangle b_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N (\langle f, b_n \rangle)^2,$$

$$\sum_{n=1}^N (\langle f, b_n \rangle)^2 \leq \|f\|^2, N \in \mathbb{N},$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n \rangle)^2$ und die sogenannte Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\langle f, b_n \rangle)^2 \leq \|f\|^2,$$

für die also nur die Orthonormalität der b_n benötigt wurde. Die Folge

$(\sum_{n=1}^N \langle f, b_n \rangle b_n)_N$ ist wegen

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N \langle f, b_n \rangle b_n - \sum_{n=1}^M \langle f, b_n \rangle b_n \right\|^2 &= \sum_{n=M+1}^N \langle f, b_n \rangle b_n \|^2 \\ &= \sum_{n=M+1}^N (\langle f, b_n \rangle)^2, \quad N \geq M+1 \end{aligned}$$

eine Cauchy-Folge und konvergiert wegen der Vollständigkeit von H gegen ein Element $g \in H$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle b_n$. Nun ist wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\begin{aligned} \langle f - g, b_m \rangle &= \langle f, b_m \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, b_n \rangle \langle b_n, b_m \rangle, \\ &= \langle f, b_m \rangle - \langle f, b_m \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und da (b_n) eine Hilbert-Basis ist, folgt $f = g$. Die zweite Richtung ist klar. \square

Der neue Gesichtspunkt bei Hilberträumen ist also, daß wir es mit unendlichen Basen zu tun haben. Einen solchen Hilbertraum wird man als unendlichdimensional bezeichnen. Alle uns interessierenden Funktionenräume, z.B. $L^2(I)$, sind unendlichdimensional. Demnach wird man für die Entwicklung einer Funktion nach einer Hilbertbasis die Konvergenz der Reihe (3) in 1.4.4 und insbesondere die Vollständigkeit des Funktionenraums benötigen. Wir werden das gleich bei den klassischen Fourierreihen sehen. Zunächst bringen wir das einfache

Beispiel 1.4.5: Es sei

$$l_2 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ konvergiert}\}.$$

Im Vektorraum l_2 definiert man das Skalarprodukt

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum x_n y_n.$$

Man kann zeigen, dass l_2 ein Hilbertraum ist. Setzt man $b_n := (0, \dots, 1, 0, \dots)$ so ist (b_n) eine Hilbert-Basis in l_2 .

Zu den wichtigen Fragestellungen der Analysis gehört die Frage, wann

man eine Funktion in eine trigonometrische Reihe, die Fourierreihe entwickeln kann. In 7.9 haben wir Fourier-Polynome behandelt; nun gehen wir auf die Frage ein, ob die Fourierreihe einer Funktion f gegen f konvergiert. Hier unterscheidet man zwischen verschiedenen Konvergenzbegriffen: punktweise Konvergenz, gleichmässige Konvergenz oder die noch zu erläuternde Konvergenz im quadratischen Mittel. Aussagen über punktweise oder gleichmäßige Konvergenz gelten nur unter speziellen Voraussetzungen. Dagegen sind im Rahmen der Lebesgue-Theorie allgemeine Aussagen möglich.

Über punktweise Konvergenz hat man zum Beispiel die Aussage:

Satz 1.4.6 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe). *Die Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ sei von beschränkter Variation und es sei $f(-\pi) = f(\pi)$; f werde periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt und die Fortsetzung ebenfalls mit f bezeichnet. Wenn f in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, dann konvergiert die Fourierreihe in x gegen $f(x)$.*

Dabei heisst f von beschränkter Variation, wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = \pi$ gilt

$$\sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M.$$

Unter ziemlich einschneidenden Voraussetzungen gibt es eine Aussage über gleichmäßige Konvergenz:

Satz 1.4.7 (Gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe.) *Wenn die Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourierreihe der periodischen Fortsetzung von f gleichmäßig gegen f .*

Allgemeine Aussagen ergeben sich, wenn man die Theorie der Fourierreihen in $L_2([-\pi, \pi])$ betrachtet: Es sei $L_2([-\pi, \pi])$ der im vorhergehenden Abschnitt definierte Hilbertraum mit dem Skalarprodukt und der Norm

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot g \cdot dx, \quad \|f\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir Funktionen $u_n : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ u_{2n_1}(x) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \quad n \in \mathbb{N} \\ u_{2n}(x) &:= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Man rechnet nach (vgl. Aufgabe ???):

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}.$$

Es gilt:

Satz 1.4.8 *Im Hilbertraum $L_2([-\pi, \pi])$ ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Hilbert-Basis. Für jedes $f \in L_2([-\pi, \pi])$ gilt daher*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n \quad \text{mit } c_n = \langle f, u_n \rangle.$$

Explizit bedeutet die Aussage dieses Satzes:

Definiert man

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f dx \\ a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \\ b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

so ist

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Diese Gleichung darf nicht so interpretiert werden, dass für gewisse x diese Reihe reeller Zahlen gegen $f(x)$ konvergiert. Die Konvergenz der auf der rechten Seite stehenden Fourierreihe ist natürlich bezüglich der in $L_2([-\pi, \pi])$ definierten Norm gemeint. Die Gleichung bedeutet also:

Ist

$$s_m(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

die m -te Partialsumme, so gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 dx < \varepsilon \quad \text{für } m \geq N.$$

Nach Satz 1.3.6 konvergiert lediglich eine Teilfolge der Folge der Partialsummen f. ü. gegen f . Es war lange Zeit ein offenes Problem ob die Folge der Partialsummen selbst f. ü. gegen f konvergiert bis diese Frage bejahend beantwortet wurde. Da es sich bei der in den Sätzen 1.4.6, 1.4.7 geforderten Periodizitätsbedingung $f(-\pi) = f(\pi)$ um eine punktweise Eigenschaft von f handelt, spielt sie in Satz 1.4.7 keine Rolle. Dieser Satz handelt nämlich nur von der L_2 -Konvergenz der Fourierreihe. Es ist offensichtlich, daß wegen Satz 1.4.3 (3) die Vollständigkeit des Hilbertraums $L_2([-\pi, \pi])$ von entscheidender Bedeutung für den allgemeinen Satz 1.4.8 ist.