Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen gewöhnlicher und Hopf-Verzweigung

Gemeinsamkeiten

Gew. Verzweigung in $\lambda_0 \in \Lambda$	Hopf Verzweigung in $\lambda_0 \in \Lambda$
System nicht autonom, d. h. (1) $x' = f(t, x, \lambda)$	System autonom, d. h. $x' = f(x, \lambda) \exists \lambda_0 \in \Lambda$ mit (1) $\det D_x f(0, \lambda_0) \neq 0$
Nicht-Verzweigungsvariante (Poincarésche Kontinuitätsmethode): $\exists \lambda_0$ mit: $x_{\lambda_0}(t)$ ist nichttriviale $T(\lambda_0)$-periodische Lösung von (1) und (2) $y' = D_x f(t; x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) y$ besitzt nur die triviale periodische Lösung. Dann	In einer Umgebung von $(0, \lambda_0)$ gibt es also keine kritischen Punkte außer $(0, \lambda_0)$. (1) erlaubt durchaus nichttriviale $T(\lambda_0)$-periodische Lösungen von $y' = D_x f(x_{\lambda_0}(t), \lambda_0) y$, da x'_{λ_0} eine nichttriviale $T(\lambda_0)$ periodische Lösung von (1) ist.

$$\begin{array}{lcl} f(t, 0, \lambda) & = & 0 \\ f(0, \lambda) & = & 0 \\ \multicolumn{3}{l}{\text{für Verzweigung}} \end{array}$$

$\exists_1 T(\lambda)$-periodische Lösungen in der Nähe, die dementsprechend auch nichttrivial ist. Verschärfung der Poincaréschen Kontinuitätsmethode auf autonome Systeme $x' = f(x, \lambda)$, das eine nichtkritische periodische Lösung x_{λ_0} der minimalen Periode $T(\lambda_0)$ besitze. Weiter besitze $y' = D_x f(x_{\lambda_0}(x), \lambda_0) y$ 1 als algebraisch einfachen charakteristischen Multiplikator. In der Nähe von λ_0 gibt es dann zu jedem λ eine $T(\lambda)-$periodische Lösung, deren Periode $T(\lambda)$ sich von $T(\lambda_0)$ und die sich selbst von x_{λ_0} nur wenig unterscheiden.	Weiter sei (2) $(D_x f'0, \lambda_0)) \cap \{ai\mathbb{Z}\} = \{\pm ai\}$ für ein $a > 0$. Wir benötigen noch die Annahme: Die Eigenwerte $\pm ai$ mögen die geometrische Vielfachheit 1 besitzen.

Verzweigung heißt: Man kennt $T(\lambda)$-periodische Lösungen x_λ für $\lambda \in U(\lambda_0)$ und sucht weitere $\widehat{T}(\lambda)$-periodische $\widehat{x}_\lambda$ für $\lambda \in U(\lambda_0)$ mit $x_{\lambda_0} = \widehat{x}_{\lambda_0}$, $x_\lambda \neq \widehat{x}_\lambda$, $\lambda \in U(\lambda_0) - \{\lambda_0\}$.

$$\left.\begin{array}{lcl} f(t, 0, \lambda) & = & 0 \\ f(0, \lambda) & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_\lambda(t), \lambda) = (0, \lambda)$$

$=$ triviale periodische Lösungen. $(0, \lambda_0)$ ist also Verzweigungspunkt nichttrivialer periodischer Lösungen. O. E.: $\lambda_0 = 0$.

Hängt f explizit von t ab, so wird die Periode der Lösung in Abhängigkeit von λ festgelegt sein. Man reduziert auf $T(\lambda) = \widehat{T}(\lambda) = 2\pi$ und $f(t, 0, \lambda) = 0$ und damit auf die Situation in Fig. 2.	Die Periode muß mit $\widehat{x}_\lambda$ mitbestimmt werden, da durch f wegen fehlender t-Abhängigkeit nichts festgelegt ist. Durch Einführung eines weiteren freien Parameters ω (außer λ) wird auf den 2π-periodischen Fall reduziert. Dieser Parameter steht für die Periode. Sei $\sigma = (\omega, \lambda)$.

Gemeinsamkeiten

Gew. Verzweigung in $\lambda_0 \in \Lambda$	Hopf Verzweigung in $\lambda_0 \in \Lambda$

Poincaré Abbildung:
$g(z, \overset{\lambda}{\sigma}) = z - x(2\pi, 0, z, \overset{\lambda}{\sigma})$
Die nichttrivialen Nullstellen von g sind die gesuchten Anfangswerte nichttrivialer (nichtkritischer) Lösungen
$N = \ker D_z g(0,0) \neq \{0\}$,
$\mathbb{R}^n = N \oplus N^\perp$, $z = x_N + \widehat{x}_N$.
Allgemeine Ljapunov-Schmidt Reduktion: Auflösung nach
$\widehat{x}_N : g(z, \overset{\lambda}{\sigma}) = 0 \Leftrightarrow h(x_N, \overset{\lambda}{\sigma}) = 0$ mit $\widehat{x}_N = \varphi(x_N, \overset{\lambda}{\sigma})$

Sei
$\dim N = \dim \ker D_z g(0,0) = 1$.
Unter der Nichtentartungsbedingung
$(\frac{\partial}{\partial \lambda} D_z g)(0,0)(N) \not\subset Im D_z g(0,0)$
ist $(0,0)$ Verzweigungspunkt nichttrivialer 2π-periodischer Lösungen. Die Nichtentartungsbedingung ist i.w. die Krasnoselskij-Bedingung für die Verzweigung von (stationären) Lösungen von $g(z, \lambda) = 0$ bei $(0,0)$. Im (x, λ)-Raum kann man den gefundenen Zweig nach einem Kurvenparameter s parametrisieren.

$\dim N = 2$, da auch noch die Periode mitbestimmt werden muß. Mathematisch folgt dies daraus, daß $\pm ai$ Eigenwerte von $D_x f(0,0)$ sind. Sei $a = \frac{2\pi}{T_0}$; man erwartet periodische Lösungen mit der Periode $T_0 + \varepsilon$ für kleine λ
Die Nullstellenmenge von g ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+2}$, auf deren Projektion auf $\mathbb{R}^n$ die abzweigenden nicht kritischen Lösungen liegen. Im (x, λ)-Raum findet man eine Kurve solcher Lösungen, die man nach einem Kurvenparameter s parametrisieren kann. Dasselbe gilt von ihrer Periode.