Vorlesung „Funktionalanalysis I“

0. Vorkenntnisse, Spezielle Nomenklatur, Literatur. Ziele der Funktionalanalysis I

Vorkenntnisse: Analysis I-III, besonders Teil III. Ich beziehe mich auf die Bücher von O. Forster, Analysis I-III. Lineare Algebra I-II, jedoch knüpfen wir im wesentlichen nur an die Begriffe: Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit Basisdarstellung an. Metrische Räume, vollständige metrische Räume. Zerlegung eines abg. Quaders des $\mathbb{R}^n$, gemeinsame Verfeinerung zweier Zerlegungen eines abg. Quaders.

Bezeichnungen: Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Ein Element $f \in L^2(\Omega)$ ($L^p(\Omega)$ für ein $p \geq 1$) heißt stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar usw., wenn f fast überall mit einer Abbildung $f : \Omega \to \mathbb{C}$ übereinstimmt, die stetig bzw. differenzierbar bzw. stetig differenzierbar usw. ist. Folgen von Elementen irgendeiner Menge etwa $x_1, x_2, \ldots$ werden grundsätzlich mit (x_n) oder (x_p) oder (x_j) usw. bezeichnet. Ist (y_p) eine Teilfolge von (x_n), so schreiben wir $(y_p) \subset (x_n)$. Die Norm eines normierten Vektorraums $\mathcal{N}$ wird zur Vermeidung von Mißverständnissen gelegentlich mit $||.||_{\mathcal{N}}$ bezeichnet, wobei mit dieser Symbolik die Zuordnungsvorschrift gemeint ist. Generell benutzen wir diese Schreibweise auch bei Abbildungen f, indem wir $f(.)$ schreiben.

Literatur

- <u>Achieser-Glazman:</u> Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Akademie-Verlag, Berlin, DDR, 1954.
- <u>Dunford-Schwartz:</u> Linear Operators, Wiley-Interscience, New York, 1958.
- <u>Pflanmann-Unger:</u> Funktionalanalysis I, BI Hochschultaschenbücher Nr. 82/82a.
- <u>Riesz-Nagy:</u> Vorlesungen über Funktionalanalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, DDR, 1956.
- <u>Yosida:</u> Functional Analysis. Springer, 1978.
- Speziell zu Integralgleichungen:
  <u>Jörgens:</u> Integralgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart.
- Speziell für die Verbindungen zwischen Integrationstheorie und Funktionalanalysis:
  <u>Hewitt-Stromberg:</u> Real and Abstract Analysis. Springer, 1965.

Ziele der Funktionalanalysis:

1. Untersuchung **unendlichdimensionaler** Vektorräume. Funktionenräume sind im allgemeinen unendlichdimensionale Vektorräume, z.B. die stetigen Abbildungen von $[a, b]$ in $\mathbb{C}$. Die „Vektoren“sind dann die genannten Abbildungen. Ein anderes Beispiel ist $L^2(\Omega)$.

2. Untersuchung von linearen Abbildungen von unendlichdimensionalen Vektorräumen in solche oder endlichdimensionale Vektorräume, z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Differentialoperatoren wie sie im folgenden Kapitel betratet werden sind z.B: solche Abbildungen.

I. Integralgleichungen

§1. Das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem

Wir führen ein bzw. erinnern an einige Funktionenklassen.

Sei I ein beliebiges endliches oder unendliches Intervall in $\mathbb{R}$. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann ist $C^k(I, \mathbb{C})$ oder einfach $C^k(I)$ die Menge aller k-Mal stetig differenzierbaren Abbildungen von I in $\mathbb{C}$ (stetig im Fall $k = 0$). Handelt es sich um reelwertige Abbildungen, so schreiben wir auch $C^k(I, \mathbb{R})$.

Sei im folgenden $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Definition I.1.1: *Sei $p \in C^1([a,b], \mathbb{R})$, $q \in C^0([a,b], \mathbb{R})$, $p(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mit*

$$c_1^2 + c_2^2 > 0,\ d_1^2 + d_2^2 > 0$$

Der folgende Unterraum von $C^2([a,b], \mathbb{R})$ wird mit $\mathcal{D}(L)$ bezeichnet.

$$\{u | u \in C^2([a,b], \mathbb{C}),\ c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0,\ d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0\}.$$

Die durch $\mathcal{D}(L) \ni u \mapsto Lu = -(pu')' + qu$ definierte Abbildung von $\mathcal{D}(L)$ in $C^0([a,b])$ heißt ein Sturm-Liouvillescher Operator L mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$.

Bei dem soeben eingeführten Sturm-Liouvilleschen Operator handelt es sich um eine lineare Abbildung. Es ist ein einfacher Spezialfall eines Differentialoperators: In Lu treten nur gewöhnliche Ableitungen, jedoch keine partiellen auf. Statt wie früher die Anfangswerte $u(a), u'(a)$ bei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorzuschreiben, sind wir jetzt dazu übergegangen, die Randwerte von u, u' auf $[a,b]$ zu fixieren. Beachte, daß L die Regulartität von u „verschlechtert“, d.h. eine Funktion aus $\mathcal{D}(L) \subset C^2([a,b], \mathbb{C})$ wird in eine solche aus $C^0([a,b], \mathbb{C})$ übergeführt.

Definition I.1.2: *Sei L ein Sturm-Lionvillescher Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von L, wenn es ein $u \in \mathcal{D}(L)$ gibt mit*

$$u \notin 0,\ Lu = \lambda u.$$

u heißt dann Eigenfunktion oder Eigenvektor von L zum Eigenwert λ.

Wir betrachten ein einfaches **Beispiel:** Sei $p \equiv 1$, $q \equiv 0$, $a = 0$, $b = \pi$, $c_2 = d_2 = 0$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L) &= \{u | u \in C^2([a,b], \mathbb{C}),\ u(0) = u(\pi) = 0\}, \\ Lu &= -u''. \end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst, ob $\lambda = 0$ Eigenwert von L ist. $u'' = 0$ impliziert $u(x) = Ax + B$ mit Konstanten A, B. Aus $u(0) = 0$ folgt $B = 0$, aus $u(\pi) = 0$ folgt $A\pi = 0$, also $A = 0$. Sei nun λ reell und > 0. Ist λ Eigenwert, so ist

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{I.1.1}$$

für jede Eigenfunktion u. Jede zweimal stetig differenzierbare Lösung u von (I.1.1) läßt sich in der Form

$$u(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,\ \ A, B \text{ konstant},$$

darstellen ($\cos \sqrt{\lambda}.$, $\sin \sqrt{\lambda}.$ bilden ein Fundamentalsystem). Aus

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \text{ folgt } A = 0, \text{ also} \\ u(x) &= B \sin \sqrt{\lambda} x. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} & u(\pi) = 0 \text{ folgt } B \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0, \text{ also} \\ & \text{wegen } u \not\equiv 0 : \sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{Z} - \{0\},\ \lambda = k^2,\ k \in \mathbb{Z} - \{0\}. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite sind alle Zahlen der Form $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, Eigenwerte, da $u_k(x) = \sin k_x$ nicht identisch verschwindet, in $\mathcal{D}(L)$ liegt und $Lu = k^2 u$ ist. Wie wir später zeigen, sind alle Eigenwerte von L reell und > 0. Also hat L genau die Eigenwerte $\lambda = k^2, k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Uns interessieren die folgenden beiden Probleme:
Problem A: Bestimme alle Eigenwerte von L.
Problem B: Sei $f \in C^0([a,b])$. Kann man in einer noch zu präzisierendne Form

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

schreiben, wobei die c_k komplexe Konstanten sind und die u_k Eigenfunktionen von L zum Eigenwert k^2, $k \in \mathbb{N}$.

Zur Vorbereitung der späteren Lösung dieser Probleme benötigen wir eine Darstellung der Lösung u von $Lu = f$, $u \in \mathcal{D}(L)$, $f \in C^0([a,b])$ vorgegeben, in Form eines Integraloperators. Diese Darstellung soll jetzt hergeleitet werden.

Hilfssatz I.1.1: *Sei L ein Sturm-Lionvillescher Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Dann ist*

$$\int_a^b vLudx = \int_a^b Lvudx,\ v,u \in \mathcal{D}(L).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} v(Lu) - (Lv)u &= v(-(pu')' + qu) - u(-(pv')' + qv) \\ &= u(pv')' - v(pu')' \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{d}{dx}(u(pv)' - v(pu)') = \frac{d}{dx}(pv'u - pu'v) = p'v'u + pv''u + pv'u' - p'u'v - pu''v - pu'v' = u(p'v' + pv'') - v(p'u' + pu'')$, also

$$\begin{aligned} v(Lu) - (Lv)u &= \frac{d}{dx}(u(pv)' - v(pu)'), \\ &= \frac{d}{dx}(p(uv' - u'v)), \\ \int_a^b (v(Lu) - (Lv)u)dx &= [p(uv' - u'v)]_a^b. \end{aligned}$$

Wegen $c_1(u(a) + c_2u'(a) = 0$, $c_1v(a) + c_2v'(a) = 0$ ist $u(a)v'(a) - u'(a)v(a) = 0$. Ebenso ist wegen $d_1u(b) + d_2u'(b) = 0$, $d_1v(b) + d_2v'(b) = 0$ auch $u(b)v'(b) - u'(b)v(b) = 0$. Also ist

$$0 = [p(uv' - u'v)]_a^b = \int_a^b (v(Lu - (Lv)u)dx.$$

$\square$

Hilfssatz I.1.2: *Sei L ein Sturm-Lionvillescher Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von L. Dann ist λ reell.*

Beweis: Mit u ist auch $\overline{u}$ in $\mathcal{D}(L)$ und $L\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$, falls $Lu = \lambda u$ ist. Wegen Hilfssatz I.1.1 ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_a^b (uL\overline{u} - Lu\overline{u})dx, \\
&= (\overline{\lambda} - \lambda) \int_a^b |u|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Als Eigenvektor verschwindet u nicht identisch, so daß $\int_a^b |u|^2 dx > 0$ ausfällt. Also ist $\lambda = \overline{\lambda}$. $\square$

Wir kommen nun zur angekündigten Auflösung der Gleichung $Lu = f$ in $\mathcal{D}(L)$.

Satz I.1.1: *Sei L ein Sturm-Lionvillescher Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Die Gleichung $Lu = 0$ habe in $\mathcal{D}(L)$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$. Dann gibt es eine Funktion*

$$G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. G ist *stetig in* $[a, b] \times [a, b]$,
2. $G(x, y) = G(y, x)$, $y \in [a, b]$, $x \in [a, b]$,
3. $u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) dy \in \mathcal{D}(L)$

für alle $f \in C^0([a, b])$ und $Lu = f$. G heißt Greensche Funktion zum Sturm-Lionvilleschen Operator L.

Beweis: Wir suchen ein spezielles Fundamentalsystem (α, β) von $-(pu')' + qu$, nämlich ein solches, für das

$$
\begin{aligned}
&c_1\beta(a) + c_2\beta'(a) = 0, \\
&d_1\alpha(b) + d_2\alpha'(b) = 0
\end{aligned}
\tag{I.1.2}
$$

gilt. Zu diesem Zweck erhält man eine Lösung α von $-(pu')' + qu = 0$ mit $\alpha(b) = -d_2$, $\alpha'(b) = d_1$ und eine Lösung β von $-(pu')' + qu = 0$ mit $\beta(a) = -c_2$, $\beta'(a) = c_1$. Dann sind zunächst die Gleichungen (I.1.2) erfüllt. Sei nun

$$A \cdot \alpha(x) + B \cdot \beta(x) = 0, \; x \in [a, b],$$

mit Konstanten A, B. Seien A, B nicht gleichzeitig Null. Dann ist $\beta(x) = c \cdot \alpha(x)$ im Falle $B \neq 0$ und $\alpha(x) = c'\beta(x)$ im Falle $A \neq 0$ mit Konstanten c, c'. Im ersten Fall hat man

$$
\begin{aligned}
c_1\beta(a) + c_2\beta'(a) &= 0, \\
cd_1\beta(b) + cd_2\beta'(b) &= 0.
\end{aligned}
$$

Da wegen $c_1^2 + c_2^2 > 0$ die Größe $c \neq 0$ ist, folgt $\beta \in \mathcal{D}(L)$, $L\beta = 0$. Unsere Annahme liefert $\beta \equiv 0$, ein Widerspruch. Der zweite Fall wird ebenso behandelt. Also ist (α, β) ein Fundamentalsystem von $-(pu')' + qu = 0$. Wie im Beweis von Hilfssatz I.1.1 schließt man

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(p(\alpha'\beta - \alpha\beta')) &= \alpha L\beta - \beta L\alpha \equiv 0, \text{ also} \\
p(\alpha'\beta - \alpha\beta') &\equiv \text{ Konstante } - \widetilde{c}.
\end{aligned}
$$

Diese Konstante ist nicht Null. Wäre sie nämlich Null und wäre etwa $c_1 \neq 0$, so folgt aus (I.1.2): $\beta(a) = (-c_2/c_1)\beta'(a)$, also mit $\alpha'\beta - \alpha\beta' \equiv 0$ die Gleichung

$$
-c_2\alpha'(a)\beta'(a) - c_1\alpha(a)\beta'(a) = 0.
$$

Ist $\beta'(a) \neq 0$, so ist dann $c_1\alpha(a) + c_2\alpha'(a) = 0$. Also liefert (I.1.2): $\alpha \in \mathcal{D}(L)$. Wegen $L\alpha = 0$ folgt $\alpha \equiv 0$, ein Widerspruch. Ist $\beta'(a) = 0$, so ist auch $\beta(a) = 0$ und $\beta \equiv 0$, ebenfalls ein Widerspruch. Der Fall $c_2 \neq 0$ wird entsprechend behandelt. Mit (α, β) ist nun auch $(\alpha, \frac{1}{\widetilde{c}}\beta)$ ein Fundamentalsystem, das (I.1.2) erfüllt und darüberhinaus die Eigenschaft

$$
p(\alpha'\tfrac{1}{\widetilde{c}}\beta - \alpha(\tfrac{1}{\widetilde{c}}\beta)') \equiv -1 \tag{I.1.3}
$$

besitzt. Sei $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\beta} = \frac{1}{\widetilde{c}}\beta$. Wir setzen

$$
G(x,y) = \left[\begin{array}{ll} \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\beta}(y), & a \leq y \leq x \leq b, \\ \widetilde{\beta}(x)\widetilde{\alpha}(y), & a \leq x \leq y \leq b, \text{ so daß} \end{array} \right.
$$

G stetig von $[a,b] \times [a,b]$ in $\mathbb{R}$ operiert.

Wir zeigen nun, daß die Funktion $u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy$ die Gleichung $Lu = f$ löst. Es ist

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \widetilde{\alpha}(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy + \widetilde{\beta}(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy,\\
u'(x) &= \widetilde{\alpha}'(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy + \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\beta}(x)fx + \widetilde{\beta}'(x)\\
&\quad \int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy - \widetilde{\beta}(x)\widetilde{\alpha}(x)fx,\\
u''(x) &= \widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy + \widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy +\\
&\quad \widetilde{\alpha}'(x)\widetilde{\beta}(x)f(x) - \widetilde{\beta}'(x)\widetilde{\alpha}(x)f(x),\\
-p(x)u''(x) &= -p(x)\widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy - p(x)\widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy -\\
&\quad -p(x)(\widetilde{\alpha}'(x)\widetilde{\beta}(x) + \widetilde{\beta}'(x)\widetilde{\alpha}(x))f(x),\\
&= -p(x)\widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy - p(x)\widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy + f(x)
\end{aligned}
$$

wegen (I.1.3). Weiter haben wir

$$
\begin{aligned}
-p'(x)u'(x) &= -p'(x)\widetilde{\alpha}'(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy - p'(x)\widetilde{\beta}'(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy,\\
q(x)u(x) &= q(x)\widetilde{\alpha}(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)dy + q(x)\widetilde{\beta}(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy
\end{aligned}
$$

und somit $u \in C^2([a,b])$,

$$
\begin{aligned}
-(pu')' + qu &= [-(p\widetilde{\alpha}')' + q\widetilde{\alpha}]\int_a^x \widetilde{b}(y)f(y)dy +\\
&\quad +[-(p\widetilde{\beta}')' + q\widetilde{\beta}]\int_\alpha^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy + f(x),\\
&= f(x).
\end{aligned}
$$

Weiter ist $G(y,x) = \widetilde{\alpha}(y)\widetilde{\beta}(x) = G(x,y)$, $a \le x \le y \le b$, und $G(y,x) = \widetilde{\beta}(y)\widetilde{\alpha}(x) = G(x,y)$, $a \le y \le x \le b$. Was die Randbedingungen anbetrifft, so ist

$$
\begin{aligned}
c_1u(a) + c_2u'(a) &= c_1\widetilde{\beta}(a)\int_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy + c_2\widetilde{\beta}'(a)\int_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy,\\
&= (c_1\widetilde{\beta}(a) + c_2\widetilde{\beta}'(a))\int_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)dy = 0
\end{aligned}
$$

nach (I.1.2). Analog zeigt man, daß auch $d_1u(b) + d_2u'(b) = 0$ ist. Also ist $u \in \mathcal{D}(L)$ und Satz I.1.1 bewiesen. $\square$

Gemäß unserer Voraussetzung, daß $Lu = 0$ in $\mathcal{D}(L)$ nur die Nulllösung hat, ist

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy$$

die einzige Lösung von $Lu = f$ in $\mathcal{D}(L)$. Aus demselben Grunde ist 0 kein Eigenwert von L. Wenn nun $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ Eigenwert von L ist, so ist in $[a,b]$

$$\mu u(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)dy, \ \mu = \frac{1}{\lambda},$$

falls $u \in \mathcal{D}(L)$, $Lu = \lambda u$. Sei umgekehrt $\mu \neq 0$, $u \in C^0([a,b])$
Gemäß unserer Voraussetzung, daß $Lu = 0$ in $\mathcal{D}(L)$ nur die Nulllösung hat, ist

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy$$

die einzige Lösung von $Lu = f$ in $\mathcal{D}(L)$. Aus demselben Grund ist 0 kein Eigenwert von L. Wenn nun $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ Eigenwert von L ist, so ist in $[a,b]$

$$\mu u(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)dy, \ \mu = \frac{1}{\lambda},$$

falls $u \in \mathcal{D}(L)$, $Lu = \lambda u$. Sei umgekehrt $\mu \neq 0$, $u \in C^0([a,b])$

$$\mu u(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)dy, \ x \in [a,b].$$

Nach Satz I.1.1 ist dann $u \in \mathcal{D}(L)$, $Lu = \frac{1}{\mu}u$. Ist jedoch $0 = \int_a^b G(x,y)u(y)dy = 0$ in $[a,b]$, so folgt $L0 = u$, also $u \equiv 0$. μ wird man als Eigenwert des Integraloperators G, der „Inversen von L“bezeichnen. Allgemeiner geben wir die folgende

Definition I.1.3: *Eine stetige Funktion $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt stetiger Integralkern. Ist $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, so heißt K stetiger hermitescher Integralkern. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, zu der es ein $u \in C^0([a,b])$, $u \not\equiv 0$, gibt mit*

$$\lambda u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy, \ x \in [a,b],$$

heißt Eigenwert von K, u heißt Eigenfunktion oder Eigenvektor von K zum Eigenwert λ.

Definition I.1.4: *Zwei Elemente u, v aus $C^0([a,b])$ heißen orthogonal (zueinander), wenn*

$$\int_a^b u(x)\overline{v(x)}dx = 0$$

ist.

Satz I.1.2: *Alle Eigenwerte eines stetigen hermiteschen Integralkerns sind reell. Seien u, v Eigenfunktionen von K zu den Eigenwerten λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann sind u, v orthogonal zueinander.*

Beweis: Aus

$$\lambda u(x) = \int_a^b K(x,y)u(y)dy,\ u \not\equiv 0,$$

folgt durch Multiplikation mit $\overline{u(x)}$

$$\begin{aligned}
\lambda \int_a^b |u(x)|^2 dx &= \int_a^b \overline{u(x)} \int_a^b K(x,y)u(y)dydx, \\
&= \int_a^b u(y) \int_a^b K(x,y)\overline{u(x)}d(x)dy, \\
&= \int_a^b u(y) \overline{\int_a^b K(y,x)u(x)dx}dy \\
&= \overline{\lambda} \int_a^b |u(x)|^2 dx, \\
\lambda &= \overline{\lambda}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda_1 u(x)\overline{v}(x)dx &= \int_a^b \overline{v(x)} \int_a^b K(x,y)u(y)dydx \\
&= \int_a^b u(y)(\int_a^b K(x,y)\overline{v(x)}dx)dy \\
&= \int_a^b u(y)\overline{(\int_a^b K(y,x)v(x)dx)}dy \\
&= \lambda_2 \int_a^b u(y)\overline{v(y)}dy,\ \text{da } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Also ist $(\lambda_1 - \lambda_2)\int_a^b u\overline{v}dx = 0$. Wegen $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ folgt $\int_a^b u\overline{v}dx = 0$. □

In leicht veränderter Form lassen sich nun Problem A und Problem B im Fall stetiger hermitescher Integralkerne formulieren als

Problem A'**:** Sei K ein stetiger hermitescher Integralkern. Gibt es Eigenwerte von K?

Problem B'**:** Kann man jedes $f \in C^0([a,b])$ in eine Reihe

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$$

in einem noch zu präzisierenden Sinn entwickeln, bei der die u_k Eigenfunktionen von K zu Eigenwerten λ_k sind? Wir weisen darauf hin, daß für die Konstanten $c_k \in \mathbb{C}$ gilt: $c_k = \int_a^b f \overline{u_k} dx$, wie später gezeigt wird.

§2. Die Fredholmsche Integralgleichung

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Fredholmschen Integralgleichung anhand eines Beispiels aus dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen kurz erläutert werden. Sei $B = \{(x, y)|x^2+y^2 < 1\}$. Seien $f, q : \overline{B} \to \mathbb{C}$ stetig. Gesucht ist eine Lösung u von

$$\Delta u + qu = f$$

in B, die in B zweimal stetig differenzierbar ist, d.h. in $C^2(B)$ liegt und in $\overline{B}$ stetig ist, d.h. in $C^0(\overline{B})$ liegt, sowie auf ∂B die Randwerte $u|\partial B = 0$ annimmt. Wir behandeln zunächst den Fall $q \equiv 0$. Sei

$$G(\zeta, z) = -\frac{1}{\pi} \log |\frac{1 - \overline{z}\zeta}{\zeta - z}|, \ z, \zeta \in \mathbb{C}, \ |z| \leq 1, \ |\zeta| \leq 1, \ z \neq \zeta.$$

Differentiation ist i.f. reell zu verstehen, d.h. nach $\xi = \mathcal{R}e\zeta$, $\eta = Im\zeta$; $x = \mathcal{R}ez$, $y = Imz$.

Dann ist $G \in C^2(B \times B - \{\zeta = z\}) \cap C^0(\overline{B} \times \overline{B} - \{\zeta = z\})$, $G(\zeta, z) = 0$, $|z| = 1$, $|\zeta| < 1$, $G(\zeta, z) = G(z, \zeta)$. Die Lösung unseres Problems wird geliefert durch

$$u(z) = \int_B G(\zeta, z)f(\zeta)d\xi d\eta, \ \zeta = \xi + i\eta, \ z = x + iy,$$

so daß man in Anlehnung an §1. die Funktion G als Greensche Funktion zum Randwertproblem $\Delta u = f$ in B, $u|\partial B = 0$, bezeichnen wird. Im allgemeinen Fall $\Delta u = f - qu$ muß demnach

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_B G(\zeta, z)(f(\zeta) - q(\zeta)u(\zeta))d\xi d\eta, \\ &= f^*(z) - \int_B G(\zeta, z)q(\zeta)u(\zeta)d\xi d\eta \end{aligned}$$

sein. Setzt man $K(\zeta, z) = -G(\zeta, z)q(\zeta)$, so führt dies auf die Gleichung

(I.2.1) $$u(z) = \textstyle\int_B K(\zeta, z)u(\zeta)d\xi d\eta + f^*(z),$$

wobei $f^*(z) = \int_B G(\zeta, z)f(\zeta)d\xi d\eta$. Auch jetzt wird die Funktion K als Integralkern bezeichnet. Doch besitzt K im Gegensatz zum eindimensionalen Fall in §1 eine Singularität bei $\zeta = z$. Man kann zeigen, daß etwa für $f, q \in C^1(\overline{B})$[1] jede Lösung der Integralgleichung (I.2.1) eine Lösung von $\Delta u + qu = f$, $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$, $u|\partial B = 0$, ist.

====================

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ der Raum

$C^k(\overline{\Omega})$ die Menge der k-Mal stetig differenzierbaren Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{C}$ derart, daß sich jedes $D^\alpha u$,

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$$

$$D^\alpha u = \prod_{j=1}^{n} D^\alpha ju, \; D^\alpha j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j},$$

mit $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq k$, nach $\overline{\Omega}$ stetig fortsetzen läßt. Der Leser kann für sich zeigen, daß durch

$$||u||_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|$$

eine Norm in $C^k(\overline{\Omega})$ gegeben ist. Die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $D^\alpha u$ auf $\overline{\Omega}$ wird ebenfalls mit $D^\alpha u$ bezeichnet.

$C_0^k(\Omega)$ ist die Menge aller k-Mal stetig differenzierbaren Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{C}$, deren Träger kompakt ist und in Ω liegt. $C_0^\infty(\Omega)$ ist der Durchschnitt aller $C_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\square$

Wir bezeichnen (I.2.1) als **Fredholmsche Integralgleichung 2. Art.** Hingegen wird eine Gleichung der Form

(I.2.2)
$$\int_B K(\zeta, z) u(z) d\xi d\eta = f(z)$$

als **Fredholmsche Integralgleichung 1. Art** bezeichnet.

§3. Orthogonale Funktionensysteme

Definition I.3.1: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene beschränkte Punktmenge. Ein endliches oder abzählbar unendliches System von Funktion $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ bzw. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ mit $\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq k \leq N$ bzw. $k = 1, 2, \ldots$, heißt ortho-normiert, wenn*

$$\int_\Omega \varphi_i(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = \delta_{ik}$$

ist.

Als **Beispiele** dienen uns 1. $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\varphi_k(x) = \frac{e^{\frac{k2\pi ix}{b-a}}}{\sqrt{b-a}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Allgemeiner gilt für $\Omega = \{x | x \in \mathbb{R}^n,\, |x_j| < \pi,\, j = 1, \ldots, n\}$, daß 2. die

$$\varphi_\kappa(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{i\kappa\cdot x},\ \kappa \in \mathbb{Z}^n,\ \kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n),\ \kappa \cdot x = \kappa_1 x_1 + \ldots, \kappa_n x_n$$

ein Orthonormalsystem bilden.

N Funktionen $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ aus $C^0(\overline{\Omega})$ heißen linear unabhängig (über Ω), wenn und nur wenn aus

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x) = 0,\ x \in \overline{\Omega},\ \text{mit Konstanten } \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$$

folgt: $\lambda_i = 0,\ 1 \leq i \leq n.$

Hilfssatz I.3.1: *Seien $\varphi_i \in C^0(\overline{\Omega})$, $1 \leq i \leq N$ orthonormiert. Dann sind die $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ linear unabhängig.*

Beweis: Aus

$$0 = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi_i(x)\right)\overline{\varphi_k(x)}dx,\ 1 \leq k \leq N,$$

folgt $0 = \lambda_k \int_\Omega |\varphi_k(x)|^2 dx = \lambda_k$. □

Hilfssatz I.3.2 (Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt): *Seien $f_1, \ldots, f_N \in C^0(\overline{\Omega})$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ mit*

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= c_{11}\varphi_1(x),\\
f_2(x) &= c_{21}\varphi_1(x) + c_{22}\varphi_2(x),\\
f_N(x) &= c_{N1}\varphi_1(x) + \ldots + c_{NN}\varphi_N(x),
\end{aligned}$$

$x \in \overline{\Omega}$. *Hierbei sind die* $c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{NN}$ *komplexe Konstanten mit* $c_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq N$.

Beweis: Sei $\varphi_1(x) = \gamma_1 f_1(x)$ mit $\gamma_1 = (\int_\Omega |f_1|^2 dx)^{-\frac{1}{2}}$. Man beachte, daß wegen der linearen Unabhängigkeit der $f_1, \ldots, f_N$ sicher $f_1 \not\equiv 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f_1 folgt

$$\int_\Omega |f_1|^2 dx \neq 0.$$

Entsprechendes gilt für die $f_2, \ldots, f_N$. Sei

$$\varphi_2(x) = \gamma_2(f_2(x) - \widetilde{c}_{21}\varphi_1(x))$$

angesetzt. Aus $\int_\Omega \varphi_2(x)\overline{\varphi_1(x)}dx = 0$ folgt: $\widetilde{c}_{21} = \int_\Omega f_2(x)\overline{\varphi_1(x)}dx$, sofern $\gamma_2 \neq 0$ ist. Nun ist

$$\gamma_2 = (\int_\Omega |f_2 - \widetilde{c}_{21}\varphi_1|^2 dx)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn $\int_\Omega |\varphi_2|^2 dx = 1$ sein soll. Man beachte, daß $\int_\Omega |f_2 - \widetilde{c}_{21}\varphi_1|^2 dx > 0$ ausfällt, da sonst $f_2 - \widetilde{c}_{21}\varphi_1 \equiv 0$ und f_1, f_2 linear abhängig wären. Allgemein setzt man an

$$\varphi_k(x) = \gamma_k(f_k(x) - \sum_{l=1}^{k-1} \widetilde{c}_{kl}\varphi_l(x))$$

mit $\mathbf{\widetilde{c}_{kl} = -\int_\Omega f_k\overline{\varphi_l}dx}$, $l = 1, \ldots, k-1$,

$$\gamma_k = (\int_\Omega |f_k - \sum_{l=1}^{k-1} \widetilde{c}_{kl}\varphi_l|^2 dx)^{-\frac{1}{2}}$$

Die letzte Größe ist wohl definiert, da sonst wegen

$$f_k = \sum_{l=1}^{k-1} \widetilde{c}_{kl}\varphi_k$$

die $f_1, \ldots, f_k$ linear abhängig wären. Zunächst ist bei diesem Ansatz $\int_\Omega |\varphi_k(x)|^2 dx = 1$.

Sodann ist für $l = 1, \ldots, k-1$

$$\int_\Omega \varphi_k(x)\overline{\varphi_l(x)}dx = \int_\Omega \varphi_l(x)\overline{\varphi_k(x)}dx = 0,$$

weil

$$\int_\Omega \varphi_k(x)\overline{\varphi_l(x)}dx = \gamma_k(\int_\omega f_k(x)\overline{\varphi_l(x)}dx - \sum_{\widetilde{l}=1}^{k-1}(\int_\Omega f_k(x)\overline{\varphi_{\widetilde{l}}(x)}dx)(\int_\Omega \varphi_{\widetilde{l}}(x)\overline{\varphi_l(x)}dx)),$$

und dieser Ausdruck verschwindet in der Tat, wenn man annimmt, daß $\int_\Omega \varphi_l(x)\overline{\varphi_{l'}(x)}dx = \delta_{ll'}$ ist, $1 \leq l,\, l' \leq k-1$. Durch Auflösen nach f_k ergibt sich

$$f_k(x) = \frac{1}{\gamma^k}\varphi_k(x) + \sum_{l=1}^{k-1} \widetilde{c}_{kl}\varphi_l(x),$$

so daß mit $c_{kk} = \frac{1}{\gamma_k}$, $c_{kl} = \widetilde{c}_{kl}$, $1 \leq l \leq k-1$ $1 \leq k \leq N$ die Aussage des Hilfssatzes I.3.2 folgt. $\square$

Hilfssatz I.3.3: *Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_N \in C^0(\overline{\Omega})$ orthonormiert. Sei $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und sei*

$$f_k = \int_\Omega f(x)\overline{\varphi_k(x)}dx,\ 1 \leq k \leq N.$$

Dann gilt

$$\text{(I.3.1)} \qquad \int_\Omega |f(x) - \sum_{k=1}^N f_k\varphi_k(x)|^2 dx = \int_\Omega |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^N |f_k|^2,$$

$$\text{(I.3.2)} \int_\Omega |f(x) - \sum_{k=1}^N c_k\varphi_k(x)|^2 dx = \int_\Omega |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^N |f_k|^2 + \sum_{k=1}^N |c_k - f_k|^2,$$

wobei $c_1, \ldots, c_N$ irgendwelche komplexe Zahlen sind.

Beweis: Wir haben

$$\int_\Omega (f(x) - \sum_{k=1}^N f_k\varphi_k(x))(\overline{f(x)} - \sum_{k=1}^N \overline{f_k}\overline{\varphi_k(x)})dx =$$

$$= \int_\Omega |f(x)|^2 dx + \sum_{k=1}^N |f_k|^2 - 2\sum_{k=1}^N f_k\overline{f_k},$$

$$= \int_\Omega |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^N |f_k|^2.$$

Damit ist (I.3.1) bewiesen. Zur zweiten Gleichung des Hilfssatzes: Es ist

$$\int_\Omega |f(x)-\sum_{k=1}^N c_k\varphi_k(x)|^2 dx = \int_\Omega |f(x)-\sum_{k=1}^N f_k\varphi_k(x)+\sum_{k=1}^N (f_k-c_k)\varphi_k(x)|^2 dx.$$

Die zweite Summe im letzten Integral nennen wir $G(x)$, den verbleibenden Term in den Betragsstrichen $F(x)$. Dann haben wir

$$\int_\Omega |f(x)-\sum_{k=1}^N c_k\varphi_k(x)|^2 dx = \int_\Omega |F|^2 dx + \int_\Omega |G|^2 dx + \int_\Omega F\overline{G} dx + \int_\Omega \overline{F} G dx.$$

Allgemein ist

$$\int_\Omega F\overline{G} dx + \int_\Omega \overline{F} G dx = 2\mathcal{R}e \int_\Omega F\overline{G} dx,$$

also

$$\int_\Omega (F\overline{G}+\overline{F}G) dx = 2\mathcal{R}e \int_\Omega (f(x)-\sum_{k=1}^N f_k\varphi_k(x)) \cdot \sum_{k=1}^N (\overline{f_k}-\overline{c_k})\overline{\varphi_k(x)} dx,$$

$$= 2\mathcal{R}e[\sum_{k=1}^N f_k(\overline{f_k}-\overline{c_k}) - \sum_{k,l=1}^N f_k(\overline{f_l}-\overline{c_l}) \cdot \int_\Omega \varphi_k(x)\overline{\varphi_l(x)} dx],$$

$$= 0$$

wegen der Orthonormalität der $\varphi_i, \ldots, \varphi_N$. Wie wir bereits ausgerechnet haben, ist

$$\int_\Omega |F|^2 dx = \int_\Omega |f|^2 dx - \sum_{k=1}^N |f_k|^2.$$

Aus der Orthonormalität der $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ folgt leicht

$$\int_\Omega |G|^2 dx = \sum_{k=1}^N |f_k - c_k|^2,$$

so daß auch (I.3.2) bewiesen ist. □

Hilfssatz I.3.3 zeigt bereits, daß die Approximation von f durch den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^N f_k\varphi_k$$

in der Norm von $L^2(\Omega)$ besser ist als jede andere Approximation durch ein Linearkompositum der $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$.

Hilfssatz I.3.4 (Besselsche Ungleichung): *Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches orthonormiertes System von Funktionen $\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega})$. Dann gilt für jedes $f \in C^0(\overline{\Omega})$ die Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 \leq \int_\Omega |f(x)|^2 dx, \; N = 1, 2, \ldots,$$

wobei wieder $f_k = \int_\Omega f \overline{\varphi_k} dx$ gesetzt ist. Das Gleichheitszeichen gilt nach Übergang zum Grenzwert für $N \to \infty$ in der letzten Ungleichung dann und nur dann, wenn

$$\lim_{N \to \infty} \int_\Omega |f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k|^2 dx = 0.$$

Beweis: Nach Hilfssatz I.3.3 ist

$$\int_\Omega |f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k(x)|^2 dx = \int_\Omega |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2,$$

$N = 1, 2, \ldots$, woraus Hilfssatz I.3.4 in der Tat folgt. □

Definition I.3.2: *Ein abzählbar unendliches orthonormiertes System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Funktionen $\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega})$ heißt vollständig; wenn für jedes $f \in C^0(\overline{\Omega})$ die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx.$$

gilt.

Insbesondere ist damit zum Ausdruck gebracht, daß die Reihe links konvergiert.

Wir beschränken uns jetzt im wesentlichen auf abzählbar unendliche orthonormierte Systeme. Dies ist insofern gerechtfertigt als ein endliches orthonormiertes System $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ nicht vollständig sein kann ($\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega}), \; 1 \leq k \leq N$). Die Abwandlung der obigen Definition im Falle endlicher Orthonormalsysteme liegt auf der Hand. Sei ohne Einschränkung $\Omega \supset \{x | \, |x_i| \leq \pi, \; 1 \leq i \leq N\}$. Dann gibt es ein $\varphi_{N+1} \in C^0(\overline{\Omega})$ derart, daß die $\varphi_1, \ldots, \varphi_{N+1}$ linear unabhängig über $\overline{\Omega}$ sind, da je endlich viele der

Funktionen $e^{i\kappa\cdot x}/(2\pi)^{n/2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^n$, über $\overline{\Omega}$ linear unabhängig sind. Nach dem Beweis von Hilfssatz I.3.2 können wir annehmen, daß die $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{N+1}\}$ orthonormiert sind. Wenn nun $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ vollständig ist, so würde gelten

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\varphi_{N+1}|^2 dx &= 1, \\ &= \sum_{k=1}^N |\int_\Omega \varphi_{N+1}(x)\overline{\varphi_k(x)}dx|^2 = 0, \end{aligned}$$

also ein Widerspruch.

Hilfssatz I.3.5 (Parsevalsche Gleichung): *Sei* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *ein abzählbar unendliches vollständiges orthonormiertes System von Funktionen* $\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega})$. *Seien* $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$. *Dann gilt*

$$\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{k=1}^\infty f_k\overline{g_k}.$$

Beweis: Zunächst ist wegen der Besselschen Ungleichung (Hilfssatz I.3.4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |f_k\overline{g_k}| &\leq (\sum_{k=1}^N |f_k|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{k=1}^N |g_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ &\leq (\int_\Omega |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz der Reihe in Hilfssatz I.3.5 gesichert. Aus der Vollständigkeit folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f+g|^2 dx &= \int_\Omega |f|^2 dx + \int_\Omega |g|^2 dx + 2\mathcal{R}e \int_\Omega f\overline{g}dx, \\ &= \sum_{k=1}^\infty |f_k + g_k|^2, \\ &= \sum_{k=1}^\infty (|f_k|^2 + |g_k|^2) + 2\mathcal{R}e \cdot \sum_{k=1}^\infty f_k\overline{g_k} \end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{R}e \int_\Omega f\overline{g}dx = \mathcal{R}e \sum_{k=1}^\infty f_k\overline{g_k}.$$

Ersetzung von f durch if. liefert die entsprechende Beziehung für $Im \int_\Omega f\overline{g}dx$ und damit den Hilfssatz. □

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist eine leichte Konsequenz aus der Parsevalschen Gleichung. In der Tat hat man $(f, g \in C^0(\overline{\Omega}))$

$$\begin{aligned} |\int_\Omega fg dx| = |\int_\Omega f\overline{\overline{g}} dx| &\leq \sum_{k=1}^\infty |f_k||\overline{g}_k|, \\ &\leq (\sum_{k=1}^\infty |f_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^\infty |\overline{g}_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \\ &= (\int_\Omega |f|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |g|^2 dx)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

sofern es ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, $\varphi_k \in C^0(\overline{\Omega})$, gilt, worauf wir später eingehen.

§4. Lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten

Sei K eine stetige Abbildung von $[a,b] \times [a,b]$ in $\mathbb{C}$. Sei $y \in C^0([a,b])$ vorgegeben. Sei $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Dann betrachten wir die Gleichung (Fredholmsche Integralgleichung 2. Art)

$$\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s)$$

für die unbekannte Funktion $x \in C^0([a,b])$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, $\varphi_p \in C^0([a,b])$, ein vollständiges Orthonormalsystem; ein solches wird zum Beispiel durch die Funktionen $\varphi_k(t) = e^{2\pi ik/(b-a)}/(b-a)^{\frac{1}{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$, geliefert, worauf später eingegangen werden soll. Wir setzen

$$\overline{K_p(s)} = \int_a^b \overline{K}(s,t)\overline{\varphi_p(t)}dt, \; a \leq s \leq b.$$

Dann ist die so definierte Funktion K_p in $C^0([a,b])$, wie sofort aus der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $[a,b] \times [a,b]$ folgt. Nach der Parsevalschen Gleichung ist mit $x_q = \int_a^b x(t)\overline{\varphi_q(t)}dt$, $q \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt = \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q, \; a \leq s \leq b.$$

Dies liefert die Gleichung

$$\lambda x(s) - \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q = y(s), \; a \leq s \leq b \tag{I.4.1}$$

Wir müssen nun das Konvergenzverhalten der letzten Reihe studieren.

Hilfssatz I.4.1: *Die Reihe*

$$\sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q$$

konvergiert gleichmäßig in $[a,b]$.

Beweis: Für $M \geq N+1$, $M, N \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{q=N+1}^{M} |K_q(s)x_q| \leq (\sum_{q=N+1}^{M} |K_q(s)|^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{q=N+1}^{M} |x_q|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist

$$\sum_{q=1}^{\infty} |K_q(s)|^2 = \int_a^b |K(s,t)|^2 dt \leq M,$$

wobei wir etwa $M = \sup\limits_{(s,t)\in[a,b]\times[a,b]} |(b-a)\cdot|K(s,t)|^2)$ wählen können. Mit

$$\sum_{q=N+1}^{M} |K_q(s)x_q| \leq \sqrt{M}\cdot(\sum_{q=N+1}^{\infty} |x_q|^2)^{\frac{1}{2}}$$

folgt jeder Hilfssatz I.4.1. $\square$

Aus (I.4.1) ergibt sich nun nach Multiplikation mit $\overline{\varphi_p(s)}$ und anschließender Integration über $[a,b]$

$$\lambda x_p - \int_a^b \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q\overline{\varphi_p(s)}ds = y_p,$$

also wegen Hilfssatz I.4.1

$$\lambda x_p - \sum_{q=1}^{\infty} \int_a^b K_q(s)\overline{\varphi_p(s)}dsx_q = y_p, \tag{I.4.2}$$

wobei wie üblich $y_p = \int_a^b y(s)\overline{\varphi_p(s)}ds$ gesetzt ist. Weiter sei $K_{pq} = \int_a^b K_q(s)\overline{\varphi_p(s)}ds = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\overline{\varphi_p(s)}\varphi_q(t)dsdt$, so daß aus (I.4.2) die Gleichung

$$\lambda x_p - \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}x_q = y_p,\ p = 1, 2, \ldots, \tag{I.4.3}$$

entsteht. Dies ist eine Gleichung für die unendlich vielen Unbekannten $x_1, x_2, \ldots$. Wie man aus einer Lösung von (I.4.3) eine Lösung unseres ursprünglichen Problems gewinnt, zeigt der folgende

Satz I.4.1: *Sei $y \in C^0([a,b])$, $y_p = \int_a^b y(t)\overline{\varphi_p(t)}dt$. Sei $(x_1, x_2, \ldots)$ eine Lösung von (I.4.3) mit*

$$\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 < \infty.$$

Dann gibt es eine Funktion $x \in C^0([a,b])$ mit

$$\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s),\ s \in [a,b],\ x_p = \int_a x\overline{\varphi}_p ds.$$

x ist bereits eindeutig bestimmt, falls wir fordern

$$x_p = \int_a^b x(s)\overline{\varphi_p(s)}ds.$$

Beweis: Erinnerung: $\lambda \neq 0$. Sei

$$(\mathrm{I}.4.4) \qquad x(s) = \frac{1}{\lambda}(y(s) + \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q), \ s \in [a,b].$$

We im Beweis von Hilfssatz I.4.1 schließt man, daß die Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q$$

gleichmäßig in $[a,b]$ konvergiert, also eine in $[a,b]$ stetige Funktion ist. Nun wird (I.4.4) mit $\lambda\varphi_p(s)$ multipliziert. $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, definiert in (I.4.4), ist stetig wie eben gezeigt. Integration liefert mit (I.4.3)

$$\lambda \int_a^b x(s)\overline{\varphi_p(s)}ds = y_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}x_q = \lambda x_p.$$

Aus (I.4.4) folgt

$$\lambda x(s) - \sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q = y(s)$$

in $[a,b]$ und hieraus, wegen der gleichmäßigen Konvergenz der letzten Reihe in $[a,b]$, $\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s)$ in $[a,b]$. Die Eindeutigkeit von x folgt aus der Vollständigkeit von $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. $\square$

Satz I.4.2: *Sei $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$. stetig. Seien $K_q(s)$, $s \in [a,b]$, und K_{pq} wie vorher definiert. Dann gilt:*

$$\sum_{q=1}^{\infty} |K_q(s)|^2$$

konvergiert gleichmäßig in $[a,b]$ und es ist

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 ds dt = \sum_{p,q=1}^{\infty} |K_{pq}|^2$$

Beweis: Wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ist für **alle** $s \in [a,b]$

$$\int_a^b |K(s,t)|^2 dt = \int_a^b |\overline{K}(s,t)|^2 dt = \sum_{q=1}^{\infty} |\overline{K_q(s)}|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} |K_q(s)|^2.$$

Nach dem Satz von Dini ist die letzte Reihe gleichmäßig konvergenz in $[a,b]$: Man beachte, daß $\int_a^b |K(s,t)|^2 dt$ stetig in $[a,b]$ ist wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $|K(s,t)|^2$ in $[a,b] \times [a,b]$.

Nochmalige Integration der letzten Gleichung und Vertauschung der Integration mit der Reihenbildung liefert

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 dt ds &= \sum_{q=1}^{\infty} \int_a^b |K_q(s)|^2 ds, \\
&= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} |K_{pq}|^2, \\
&= \sum_{p,q=1}^{\infty} |K_{pq}|^2,
\end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Zeile die Vollständigkeit des Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ benutzt haben; da die vorletzte Doppelreihe nur Glieder ≥ 0 hat, kommt es auf die Reihenfolge der Summation nicht an, und es entsteht die letzte Zeile. $\square$

Sei nun eine Folge komplexer Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ gegeben derart, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 \text{ konvergiert.}$$

Wir stellen uns die Frage, in welchem Sinn man

$$x(s) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \varphi_p(s)$$

setzen kann; wenn man die Partialsummen

$$x_n(s) = \sum_{p=1}^{n} x_p \varphi_p(s)$$

betrachtet, so folgt für $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\int_a^b |x_n(s) - x_m(s)|^2 ds = \int_a^b |\sum_{p=m+1}^{n} x_p \varphi_p(s)|^2 ds \tag{I.4.5}$$

$$= \sum_{p=m+1}^{n} |x_p|^2 \to 0,\ m \to \infty.$$

Also ist $\lim_{n,m\to\infty} \int_a^b |x_n(s) - x_m(s)|^2 dx = 0$ und die x_n bilden eine Cauchy-Folge im Raum $L^2((a,b))$ (Siehe hierzu [Forster, Analysis 3, S. 96]). Also gibt es ein eindeutig bestimmtes $x \in L^2((a,b))$ mit

$$||x_n - x||_{L^2((a,b))} \to 0,\ n \to \infty$$

Hieraus folgt

$$||x_n||_{L^2((a,b))} = \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 \to \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 = ||x||^2_{L^2((a,b))}.$$

Ist umgekehrt $x \in L^2((a,b))$ so setzen wir

$$\begin{aligned} x_p &= \int_a^b x(s)\overline{\varphi_p(s)}ds, \\ x_n(s) &= \sum_{p=1}^{n} x_p \varphi_p(s). \end{aligned}$$

Die Inspektion des Beweises von Hilfssatz I.3.4 zeigt, daß dieser Hilfssatz auch unter der Voraussetzung $f \in L^2(\Omega)$ hier $f \in L^2((a,b))$ gilt. Dies liefert

$$||x_N||^2_{L^2((a,b))} = \sum_{p=1}^{N} |x_p|^2 \leq \int_a^b |x(s)|^2 ds,\ N = 1, 2, \ldots$$

und die Konvergenz von

$$\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2.$$

Somit bilden die x_n eine Cauchy-Folge in $L^2((a,b))$ wie die auch jetzt gültige Abschätzung (I.4.5) zeigt. Also gibt es ein $\widetilde{x} \in L^2((a,b))$, das eindeutig bestimmt ist, derart, daß $||x_n - \widetilde{x}||_{L^2((a,b))} \to 0,\ n \to \infty$. Inspektion des Beweises von Hilfssatz I.3.5 zeigt, daß dieser auch für $f, g \in L^2(\Omega)$, d.h. hier $f, g \in L^2((a,b))$, gilt. Anwendung auf $x_n - x$ liefert

$$\text{(I.4.6)} \qquad ||x_n - x||_{L^2((a,b))} = \sum_{p=n+1}^{\infty} |x_p|^2$$

und somit $x = \widetilde{x}$ als Elemente von $L^2((a,b))$.

Definieren wir also

$$l_2 = \{(x_p) | x_p \in \mathbb{C},\ \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 < +\infty\},$$

machen l_2 in evidenter Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$, normieren ihn durch (Beachte, daß

$$(\sum^N |x_i + y_i|^2)^{1/2} \leq (\sum^N |x|^2)^{1/2} + (\sum^N |y_i|^2)^{1/2}$$

ist $N \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{C}$)

$$||(x_p)||^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2,$$

so erhalten wir folgendes Resultat: 1. l_2 (wir bezeichnen die wie eben beschrieben zu einem normierten Vektorraum gemachte Menge l_2 mit demselben Symbol) ist vollständig (dies kann sich der Leser zur Übung überlegen). 2. Die Abbildung J, definiert durch

$$l_2 \ni (x_p) \longmapsto \sum_{p=1}^{\infty} x_p \varphi_p(.) = x(.) \in L^2((a,b)),$$

wobei die $\varphi_p \in C^0([a,b])$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, ist ein Isomorphismus von l_2 auf $L^2((a,b))$ (l_2 und $L^2((a,b))$ als Vektorräume genommen), der normtreu ist, d.h.

$$||(x_p)||^2 = ||J((x_p))||^2 = ||x||^2_{L^2((a,b))} = \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2$$

Nun ist es kaum überraschend, daß Satz I.4.1 die folgende Übertragung auf $L^2((a,b))$ gestattet:

Satz I.4.3: *Seien λ, K wie in Satz I.4.1. Sei $y \in L^2((a,b))$,*

$$y_p = \int_a^b y(s)\overline{\varphi_p(s)}ds.$$

Sei $(x_p) \in l_2$, sei

$$\lambda x_p - \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = y_p.$$

Dann gibt es ein und nur ein $x \in L^2((a,b))$ derart, daß

$$\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s) \text{ f. ü. in } (a,b),$$

$$x_p = \int_a^b x(s)\overline{\varphi_p(s)}ds.$$

Beweis: x wird wie in (I.4.4) angesetzt. Hilfssatz I.4.1 sichert auch hier die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{q=1}^{\infty} K_q(s)x_q$$

in $[a, b]$, so daß die letzte Reihe in $C^0([a, b])$ ist. Wie im Beweis von Satz I.4.1 folgt

$$\lambda \int_a^b x(s)\varphi_p(s)ds = y_p + \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq}x_q = \lambda x_p.$$

Der Rest des Beweises verläuft wie der von Satz I.4.1. $\square$

Die Eindeutigkeit von x in den Sätzen I.4.1 und I.4.3 war eine Konsequenz aus der Forderung

$$x_p = \int_a^b x(s)\overline{\varphi_p(s)}ds.$$

Allgemeiner gilt folgendes: Seien $u, v \in L^2((a, b))$, $\int_a^b u(s)\overline{\varphi_p(s)}ds = \int_a^b v(s)\overline{\varphi_p(s)}ds$. Dann ist $u = v$. Setzt man für die beiden letzten Integrale u_p und v_p, so folgt $J((u_p)) = J((v_p))$, also $u = v$. Weiter sei darauf hingewiesen, daß für jedes $z \in L^2((a, b))$ der Ausdruck $\int_a^b K(s, t)z(t)dt$ aus $C^0([a, b])$ ist. Dies ist einfach eine Konsequenz aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in I.3: Wir haben nämlich

$$|\int_a^b (K(s_1, t) - K(s_2, t))z(t)dt| \leq (\int_a^b |K(s_1, t) - K(s_2, t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \cdot ||z||_{L^2((a,b))},$$

und der erste Ausdruck konvergiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $[a, b] \times [a, b]$ gegen Null, wenn $|s_1 - s_2|$ dies tut.

II. Der Hilbertraum $\mathcal{H}$

§1. Aximatische Definition des Hilbertraums

Wir beginnen mit

Definition II.1.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Es sei eine Abbildung von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ in $\mathbb{C}$ definiert, die jedem Paar $\{f, g\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine komplexe Zahl (f, g) zuordnet und folgende Eigenschaften besitzt:*

(II.1.1) $$(\alpha x, y) = \alpha(x, y),\ x, y \in \mathcal{H},\ \alpha \in \mathbb{C}$$

(II.1.2) $$(x, y) = \overline{(y, x)},\ x, y \in \mathcal{H},$$

(II.1.3) $$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y),\ x_1, x_2, y \in \mathcal{H},$$

(II.1.4) $$(x, x) > 0 \text{ für } x \in \mathcal{H} - \{0\} \text{ und}$$

$$(x, x) = 0 \text{ für } x = 0.$$

$\mathcal{H}$ heißt dann Prähilbertraum, die durch $\{f, g\} \longmapsto (f, g)$ erklärte Abbildung heißt Skalarprodukt in $\mathcal{H}$. Wir bezeichnen diese Abbildung auch einfach als das Skalarprodukt (f, g) in $\mathcal{H}$.

Aus (II.1.1, 2, 3) ergeben sich sofort die trivialen Konsequenzen $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$, $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$, $(0, y) = (x, 0) = 0$, $x, y, y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Außerdem ist (x, x) stets reell. Sei

(II.1.5) $$||x|| = (x, x)^{\frac{1}{2}}, x \in \mathcal{H}$$

Dann gilt

(II.1.6) $$||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||,\ x \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C},.$$

(II.1.7) $$||x|| = 0 \ \text{ dann und nur dann, wenn } x = 0 \text{ ist.}$$

Für $x, y \in \mathcal{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ist

$$||\lambda x + \mu y||^2 = |\lambda|^2 ||x||^2 + |\mu|^2 ||y||^2 + 2\mathcal{R}e\lambda\overline{\mu}(x, y) \geq 0,$$

also

$$-2\mathcal{R}e\lambda\mu(x,y) \leq |\lambda|^2||x||^2 + |\mu|^2||y||^2.$$

Für $x \neq 0$, $y \neq 0$, $\lambda = -1/2||x||$, $\mu = +1/2||y||$ folgt

$$\mathcal{R}e(x,y) \leq ||x||||y||.$$

Trivialerweise gilt dies auch, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist. Also ist $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\mathcal{R}e(x,y) + ||y||^2 \leq (||x|| + ||y||)^2$ und somit

$$\text{(II.1.8)} \qquad ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||, \ x, y \in \mathcal{H}.$$

Dies ist die Dreiecksungleichung. Damit ist $\mathcal{H}$ durch die Festsetzung (II.1.5) zu einem normierten Raum geworden. Durch die Definition

$$\text{(II.1.9)} \qquad \mu(x,y) = ||x-y||, \ x, y \in \mathcal{H}$$

ist $\mathcal{H}$ auch metrisiert, d.h. ein metrischer Raum mit der Metrik μ. Wir erinnern daran, daß eine Konsequenz aus der Dreiecksungleichung die Beziehung

$$\text{(II.1.10)} \qquad ||x-y|| \geq |||x|| - ||y|||, \ x, y \in \mathcal{H},$$

ist.

Wir geben einige **Beispiele für Prähilberträume:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ setzen wir

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

$C^0(\overline{\Omega})$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$, versehen mit dem soeben erklärten Skalarprodukt, ist ein Prähilbertraum. Ein etwas **komplizierteres Beispiel** ist

$$\widetilde{C}^m(\overline{\Omega}) = \{u | u \in C^m(\overline{\Omega}), \ D^\alpha u|\partial\Omega = 0, \ |\alpha| \leq m-1\}.$$

Der Leser vergleiche hierzu die auf Seite 14 gegebene Definition. $\widetilde{C}^m(\overline{\Omega})$ ist offenbar ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Ω wird jetzt zusätzlich als wegweise zusammenhängend vorausgesetzt. Wir definieren ein Skalarprodukt

$$(f,g) = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega (D^\alpha f)(x) \cdot (D^\alpha \overline{g})(x)dx.$$

(f,g) muß als Skalarprodukt im Sinne der Definition II.1.1 nachgewiesen werden. Bis auf (II.1.4) sind alle Eigenschaften trivialerweise erfüllt. Sei nun

$(f,f)^{1/2} = 0$. Dann ist $D^\alpha f = 0$ in $\overline{\Omega}$, $|\alpha| = m$. Da Ω zusammenhängend ist, ist $D^\beta f = c_\beta =$ konstant in $\overline{\Omega}$, $|\beta| = m-1$. Da $D^\beta f$ auf $\partial\Omega$ verschwindet, ist $c_\beta = 0$. Fortsetzung dieses Arguments liefert $f \equiv 0$, also ist f das Nullelement des Vektorraums $\widetilde{C}^m(\overline{\Omega})$ über $\mathbb{C}$.

Wir definieren nun den Begriff des Hilbertraums.
Definition II.1.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. $\mathcal{H}$ heißt Hilbertraum genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jeder Folge (x_n) aus $\mathcal{H}$ mit $||x_n - x_m|| \to 0$, $n, m \to \infty$, gibt es ein x mit $||x_n - x|| \to 0$, $n \to \infty$.*

Es ist trivial, daß x in Definition II.1.2 eindeutig bestimmt ist. Die in Definition II.1.2 zu den Eigenschaften eines Prähilbertraums hinzutretende Eigenschaft ist die sogenannte **Eigenschaft der Vollständigkeit.** Als Beispiel sei erwähnt $L^2(\Omega)$, Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$, mit dem Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g}(x)dx.$$

(Vgl. [Forster, Analysis 3]).

Definition II.1.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. $\mathcal{H}$ heißt separabel, wenn folgendes gilt: Es gibt eine abzählbare Teilmenge $\mathfrak{S} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ von $\mathcal{H}$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $f \in \mathcal{H}$ gibt es ein $f_k \in \mathfrak{S}$ mit*

$$||f - f_k|| < \varepsilon.$$

Man sagt: $\mathfrak{S}$ liegt dicht in $\mathcal{H}$.

Ein einfaches **Beispiel** ist $L^2((a,b))$. Wie in I.4 bewiesen, liegen die endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{p=-k}^{+k} \widetilde{\alpha}_p \varphi_p,\ \widetilde{\alpha}_p \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N},$$

dicht in $L^2((a,b))$. Dann gilt dasselbe von den endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{p=-k}^{+k} \alpha_p \varphi_p;\ k \in \mathbb{N},$$

wobei die α_p komplexe Zahlen mit rationalem Real- und Imaginärteil sind. Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen. Die Menge $\mathfrak{S}$ dieser Linearkombinationen ist abzählbar.

Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und endlichdimensional, so heißt $\mathcal{H}$ unitärer Raum. Mit diesen Räumen befasst man sich in der Vorlesung über Lineare Algebra, so daß wir auf sie nicht mehr einzugehen brauchen. Entsprechend befassen wir uns im wesentlichen nur mit abzählbar unendlichen Orthonormalsystemen, genauer geben wir die

Definition II.1.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Ein abzählbar unendliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Elementen aus $\mathcal{H}$ heißt orthonormiert oder Orthonormalsystem, wenn*

$$(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik},\ i, k = 1, 2, \ldots,$$

ist.

Hilfssatz II.1.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ Elemente aus $\mathcal{H}$, die orthonormiert sind, d.h. $(\varphi_1, \varphi_k) = \delta_{ik}$, $i, k = 1, 2, \ldots, N$. Sei $f \in \mathcal{H}$, seien $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$, sei*

$$f_k = (f, \varphi_k),\ k = 1, \ldots, N.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} ||f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k||^2 &= ||f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k||^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - f_k|^2, \\ &\geq ||f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k||^2, \\ &= ||f||^2 - \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2. \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis entspricht dem des Hilfssatzes I.3.3 und kann daher übergangen werden. □

Hilfssatz II.1.2 (Besselsche Ungleichung): *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ein Orthonormalsystem. Sei $f \in \mathcal{H}$. Dann ist*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \leq ||f||^2,$$

wobei $f_k = (f, \varphi_k)$ ist, $k = 1, 2, \ldots$. Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann

$$\lim_{n\to\infty} ||f - \sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k|| = 0, \text{ d. h.}$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k$$

ist.

Beweis: Entspricht dem von Hilfssatz I.3.4. □

Definition II.1.5: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Das System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ heißt vollständig (in $\mathcal{H}$) dann und nur dann, wenn für jedes $f \in \mathcal{H}$ die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 = ||f||^2$$

gilt. Dabei ist wieder $f_k = (f, \varphi_k)$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ irgendein Orthonormalsystem im Prähilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $f \in \mathcal{H}$. Dann heißen die Zahlen $f_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, die Fourierkoeffizienten von f bezüglich des Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$).

Hilfssatz II.1.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Ein Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ist genau dann vollständig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $f \in \mathcal{H}$ von ε, f abhängige $N = N(\varepsilon, f)$ komplexe Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ gibt mit*

$$||f - \sum_{k=1}^{N(\varepsilon,f)} c_k\varphi_k|| < \varepsilon. \tag{II.1.11}$$

Beweis: ist das System vollständig, so kann man für die ε_k die Zahlen f_k wählen. Gilt umgekehrt (II.1.11), so folgt aus Hilfssatz II.1.1 und Hilfssatz II.1.2 die Gleichheit

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$$

und damit die Vollständigkeit. □

Hilfssatz II.1.4 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung): *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Seien $f, g \in \mathcal{H}$. Dann ist*

$$|(f,g)| \leq ||f||||g||.$$

Beweis: Seien $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$. Sei $a_{jk} = (f_j, f_k)$, $j,k = 1,2$. Dann ist

$$0 \leq ||\xi_1, f_1 + \xi_2 f_2||^2 = (\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2,\ \xi_1 f_1 + \xi_2 f_2)$$

$$= \sum_{1 \leq j,k \leq 2} a_{jk} \xi_j \overline{\xi_k},\ \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}.$$

Wegen $a_{jk} = \overline{a_{kj}}$ folgt $\det(a_{jk}) = ||f_1||^2 ||f_2||^2 - |(f_1, f_2)|^2 \geq 0$, und hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Sei (f_n) eine Folge in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$, f_n konvergiere gegen f, $n \to \infty$. Aus (I.1.10) folgt $||f_n|| \to ||f||$, $n \to \infty$. Insbesondere ist $(||f_n||)$ beschränkt. Hilfssatz II.1.4 liefert jetzt

$$(f_n, g_n) \to (f,g),\ n \to \infty, \tag{II.1.12}$$

falls $f_n \to f$, $g_n \to g$, $n \to \infty$, in $\mathcal{H}$.

Wie in I.3 zeigt man, daß in einem Prähilbertraum $\mathcal{H}$ endlich viele orthonormierte Elemente $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ linear unabhängig sind. Es ist nichtüberraschend, daß auch ein Analogon zum Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt gilt:

Hilfssatz II.1.5: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Seien die Elemente $f_1, \ldots, f_n$ aus $\mathcal{H}$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormiertes System $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ mit*

$$\begin{aligned}
f_1 &= c_{11}\varphi_1, \\
f_2 &= c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2, \\
&\vdots \\
f_n &= c_{n1}\varphi_1 + \ldots + c_{nn}\varphi_n.
\end{aligned}$$

Beweis: Wir setzen $\varphi_1 = f_1/||f_1||, \ldots, \varphi_{k+1} = \gamma_{k+1}(f_{k+1} - \sum_{l=1}^{k}(f_{k+1}, \varphi_l) \cdot \varphi_l)$ und

$$\gamma_{k+1} = ||f_{k+1} - \sum_{l=1}^{k}(f_{k+1}, \varphi_l)\varphi_l||^{-1}.$$

Der Beweis ist somit völlig analog zum Beweis des Hilfssatzes I.3.2, und wir brauchen nicht weiter auf Einzelheiten einzugehen. $\square$

Der Beweis des Hilfssatzes II.1.5 zeigt übrigens, daß alle $c_{jj} > 0$ sind, $1 \leq j \leq n$. Eine Konsequenz dieses Hilfssatzes ist

Satz II.1.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Prähilbertraum. Dann existiert, falls $\mathcal{H}$ nicht endlichdimensional ist, ein abzählbar unendliches vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Für alle $f, g \in \mathcal{H}$ gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g_k},$$

wobei $f_k = (f, \varphi_k)$, $g_k = (g, \varphi_k)$ sind.

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein abzählbar unendliches System $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$, das in $\mathcal{H}$ dicht liegt (Vgl. Definition II.1.3). Nun streichen wir in $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ alle diejenigen ψ_l mit der Eigenschaft, daß es $\psi_{l_1}, \ldots, \psi_{l_N}$ und $c_{l_1}, \ldots, c_{l_N} \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\psi_l = \sum_{j=1}^{N} c_{l_j} \psi_{l_j},$$

$$l_1, \ldots, l_N < l.$$

Das so entstehende System sei $\{f_1, f_2, \ldots\}$. Es sei abzählbar unendlich. Jeweils endlich viele der $f_1, f_2, \ldots$ sind linear unabhängig. Die endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^{N} c_k f_k,\ c_k \in \mathbb{C},\ 1 \leq k \leq N,$$

liegen dicht in $\mathcal{H}$. Nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren gibt es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ derart, daß die endlichen Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \widetilde{c}_k \varphi_k,\ \widetilde{c}_k \in \mathbb{C},\ 1 \leq k \leq \widetilde{N},$$

dicht liegen. Nach Hilfssatz II.1.3 ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ vollständig. Sei nun das System $\{f_1, f_2, \ldots\}$ endlich, d.h. es bestehe aus $\{f_1, \ldots, f_N\}$. Die vorhergehende Schlußweise liefert dann $\overline{N}$ orthonormierte Elemente $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\overline{N}}$ aus $\mathcal{H}$ derart, daß die Linearkombinationen

$$\sum_{k=1}^{\overline{N}} \overline{c}_k \varphi_k,\ \overline{c}_k \in \mathbb{C},\ 1 \le k \le \overline{N}$$

für festes $\overline{N} \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathcal{H}$ liegen. Dann zeigt jedoch Hilfssatz II.1.1, daß

$$f = \sum_{k=1}^{\overline{N}} f_k \varphi_k,\ f \in \mathcal{H},$$

ist, so daß $\mathcal{H}$ die Dimension $\overline{N}$ hat, im Widerspruch zu unserer Annahme. Die Parsevalsche Gleichung folgt wie in Hilfssatz I.3.5. □

Satz II.1.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum nicht endlicher Dimension. Ein abzählbar unendliches orthonormiertes System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Elementen $\varphi_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, \ldots$ ist genau dann vollständig, wenn aus $(f, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, für irgendein $f \in \mathcal{H}$ folgt: $f = 0$.*

Beweis: Sei also $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ vollständig. Sei $x \in \mathcal{H}$ und sei $(x, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Wegen der Vollständigkeit gilt

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x, \varphi_i)|^2 = 0,$$

also $x = 0$. Nun sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ orthonormiert und aus $(x, \varphi_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, folge $x = 0$. Sei $f \in \mathcal{H}$ und sei

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i$$

Die Konvergenz der Reihe rechts folgt aus der Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2,$$

die eine Konsequenz der Besselschen Ungleichung (Hilfssatz II.1.2) ist. (II.1.12) liefert

$$(g, -f, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (f, \varphi_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

also $g - f = 0$ und

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i.$$

Hilfssatz II.1.3 liefert nun die Vollständigkeit von $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. $\square$

In einem separablen Hilbertraum nicht-endlicher Dimension haben wir ein abzählbar unendliches vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Jedem Element $(x_p) \in l_2$ (s. I.4) ordnen wir das in $\mathcal{H}$ liegende Element

$$I(x_p) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i$$

Dann ist I ein Vektorraumhomomorpismus von l_2 in $\mathcal{H}$. Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann ist vermöge der Vollständigkeit von $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi_i, \ x_i = (x, \varphi_i), \ i = 1, 2, \ldots,$$

und $((x, \varphi_i)) = (x_i)$ ist wegen der Besselschen Ungleichung aus l_2.

Also ist I surjektiv. Mit (II.1.12) folgt, daß I auch injektiv ist. Daher ist I ein Vektorraumisomorphismus. Die Vollständigkeit von $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ zeigt die Normtreue von I, d.h.

$$||I(x_p)|| = ||(x_p)||.$$

Definieren wir in l_2 ein Skalarprodukt durch

$$((x_p), (y_p)) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \overline{y_p},$$

so wird l_2 damit zum Hilbertraum, wie der Leser z.B. aus der Normtreue von I selber herleiten möge, und die Parsevalsche Gleichung zeigt

$$(I(x_p), I(y_p)) = ((x_p), (y_p)).$$

I ist also ein Hilbertraumisomorphismus.

Wir skizzieren nun kurz wie man durch den Standardprozess der Vervollständigung aus einem Prähilbertraum einen Hilbertraum herstellt. Sei also $\mathcal{H}'$ ein Prähilbertraum, sei (f_n') eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}'$, d.h. $||f_n' - f_m'|| \to 0$, $n, m \to \infty$. Sei $f = [(f_n')]$ die Menge aller Cauchy-Folgen (g_n') mit $||g_n' - f_n'|| \to 0$, $n \to \infty$. Sei $f = [(f_n')]$, $g = [(g_n')]$. Dann setzen wir $f + g := [(f_n' + g_n')]$, $0 := [(0'))$, $\alpha f := [(\alpha f_n')]$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Damit haben wir die Menge aller $f = [(f_n')]$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ gemacht. Durch die Festsetzung $(f, g) := \lim_{n\to\infty}(f_n', g_n')$ wird diese Menge auch zu einem Prähilbertraum (Der Leser überzeuge sich selbst, daß alle Definitionen von der Auswahl der Folgen $(f_n'), (g_n')$ unabhängig sind). Wir bezeichnen die eben konstruierte Menge mit $\mathcal{H}$. Nun betrachten wir den Unterraum aller $f = [(f')]$ mit $f' \in \mathcal{H}'$. f ist dann die Menge aller Folgen (f_n') mit $f_n' \in \mathcal{H}$, $f_n' \to f'$, $n \to \infty$. Ordnen wir jedem $f' \in \mathcal{H}'$ das Element $f = [(f')]$ aus $\mathcal{H}$ zu, so erkennt man, daß $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}$ als Vektorräume über $\mathbb{C}$ isomorph sind und darüberhinaus $||f'|| = ||[(f')]||$, $(f', g') = ([(f')], [(g')]$ ist. Wir behaupten nun: I. $\mathcal{H}$ *ist vollständig*, II. $\mathcal{H}$ *ist dicht in* $\mathcal{H}$. Beweis dieser Behauptung: Wir befassen uns zunächst mit II.: Sei $f = [(f_n')] \in \mathcal{H}$, $\widetilde{f}_m = [(f_m')] \in \widetilde{\mathcal{H}}$. Dann ist $f - \widetilde{f}_m = [(f_n' - f_m')]$ und

$$||f - \widetilde{f}_m|| = \lim_{n\to\infty} ||f_n' - f_m'|| =: \varepsilon_m.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nun ist $||f_n' - f_m'|| \leq \varepsilon/2$, $m, n \geq N(\varepsilon)$, also ist $\varepsilon_m \leq \varepsilon/2$, $m \geq N(\varepsilon)$, also $||f - \widetilde{f}_m|| < \varepsilon$, $m \geq N(\varepsilon)$. Nun zu I.: Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit

$$||f_n - f_m|| \to 0,\ n, m \to \infty.$$

Wir wählen eine Folge $(\widetilde{f}_n)$, $\widetilde{f}_n \in \widetilde{\mathcal{H}}$, aus mit $||f_n - \widetilde{f}_n|| < \frac{1}{n}$. Sei $\widetilde{f}_n = [(f_n')]$ mit $f_n' \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$||\widetilde{f}_n - \widetilde{f}_m|| \leq ||f_n - f_m|| + \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

und die rechte Seite konvergiert gegen Null für $n, m \to \infty$. Wegen $||\widetilde{f}_n - \widetilde{f}_m|| = ||f_n' - f_m'||$ folgt, daß auch $||f_n' - f_m'|| \to 0$, $n, m \to \infty$. Sei $f = [(f_n')] \in \mathcal{H}$. Dann ist $\widetilde{f}_m - f = [(f_m' - f_n')]$ (m fest), und es gilt

$$\begin{aligned} ||\widetilde{f}_m - f|| &= \lim_{n\to\infty} ||f_m' - f_n'|| = \varepsilon_m, \\ ||f_m - f|| &\leq ||\widetilde{f}_m - f_m|| + ||\widetilde{f}_m - f||, \\ &\leq ||\widetilde{f}_m - f|| + \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $||f_m' - f_n'|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $m, n \geq N(\varepsilon)$, also $\varepsilon_m \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $m \geq N(\varepsilon)$, also

$$||f_m - f|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{m} < \varepsilon,\ m \geq \max(N(\varepsilon, [\frac{2}{\varepsilon}] + 1).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Bei dieser „Vervollständigung“ von $\mathcal{H}'$ handelt es sich um den gleichen Prozess, mit dem die reellen Zahlen aus den rationalen gewonnen werden.

Allgemeiner gilt folgender Satz über Komplettierungen:

Satz II.1.2: *Sei B ein normierter $\mathbb{C}$-VR (also insbesondere separiert). Dann gibt es bis auf Isomorphie normierter $\mathbb{C}$-V Räume genau einen Banachraum $\widehat{B}$, so daß sich B in $\widehat{B}$ als in $\widehat{B}$ dichter normierter Unterraum (linearer Teilraum) einbetten lässt.*

Beweis: $\widetilde{B}$ sei der $\mathbb{C}$-VR aller Cauchyfolgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{B}$. Durch

$$||(b_n)_n|| := \lim_{n\to\infty} ||b_n|| \in \mathbb{R}$$

(mit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(||b_n||)$ Cauchy-Folge und $\mathbb{R}$ ist vollständig) ist auf $\widetilde{B}$ eine Quasinorm erklärt (Quasinorm $||.|| : ||.|| \geq 0, ||\alpha\xi|| = |\alpha|||\xi||$, $||\xi + \eta|| \leq ||\xi|| + ||\eta||$, aber nicht notwendig $||\xi|| > 0$ für $\xi \neq 0$). Sei $\mathfrak{O}$ der Unter-VR der Elemente von $\widetilde{B}$ mit Quasinorm 0, d.i. die Menge der Nullfolgen. Der Faktorraum $\widetilde{B}/\mathfrak{O} =: \widehat{B}$ ist ein normierter Raum. Man hat eine kanonische Abbildung $B \to \widetilde{B} \to \widehat{B}$ die normtreu und also injektiv ist. Wir fassen B als Teilraum von $\widehat{B}$ auf. Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathfrak{O}$ ein beliebiges Element aus $\widehat{B}$ und $\varepsilon > 0$ ebenfalls beliebig. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest derart, daß

$$||b_m - b_n|| < \varepsilon,\ n \geq m,$$

ist. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} ||b_m - b_n|| \leq \varepsilon$ und daher für $(b_m - b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathfrak{O} \in \widehat{B}$:

$$||(b_m - b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathfrak{O}|| \leq \varepsilon.$$

B liegt also in $\widehat{B}$ dicht. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge aus $\widehat{B}$. Dann gibt es nach dem bereits Bewiesenen eine Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $B \subset \widehat{B}$ derart, daß $||\xi_n - a_n|| \to 0$ in $\widehat{B}$. Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mathfrak{O} \in \widehat{B};$$

ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $||a_m - a_n|| < \varepsilon$, $n \geq m$, woraus

$$||(a_m - a_n)_n + \mathfrak{O}|| \leq \varepsilon,$$

$$||(a_m - ((a_n)_n + \mathfrak{O})|| \leq \varepsilon$$

folgt. Die Eindeutigkeit von $\widehat{B}$ folgt leicht aus den entsprechenden Sätzen über uniforme Strukturen und soll hier nicht gezeigt werden. □

Zum Abschluß dieses Abschnitts befassen wir uns mit der Konstruktion vollständiger Orthonormalsysteme in $L^2((a,b))$ bzw. der Konstruktion vollständiger Orthonormalsysteme in $L^2((a,b))$ bzw. $L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und offen für ein spezielles Ω. Daß die bereits eingeführten Funktionen

$$e^{k2\pi ix/(b-a)}/\sqrt{b-a},\ k \in \mathbb{Z},$$

ein Orthonormalsystem (in $L^2((a,b))$) bilden, ist leicht zu sehen. Zu zeigen ist die Vollständigkeit. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $f \in L^2((a,b))$. Dann gibt es nach [Forster, Analysis 3] ein $\varphi \in C^0([a,b])$ mit

$$||f-\varphi||_{L^2((a,b))} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Durch Abänderung von φ in einem hinreichend kleinen Intervall $[b-\varepsilon, b]$ finden wir ein $\widetilde{\varphi} \in C^0([a,b])$ mit $\widetilde{\varphi}(a) = \widetilde{\varphi}(b)$ und

$$||\varphi - \widetilde{\varphi}||_{L^2((a,b))} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$\widetilde{\varphi}$ setzen wir durch $\widetilde{\varphi}(b+s) := \widetilde{\varphi}(a+s)$, $0 \le s \le b-a$, auf $[b, b+b-a]$ und dann auf $[b, +\infty)$ fort. Durch $\widetilde{\varphi}(a-s) := \widetilde{\varphi}(b-s)$, $0 \le s \le b-a$ setzen wir $\widetilde{\varphi}$ auf $[a-(b-a), a]$und dann auf $(-\infty, a]$ fort. Dadurch erhalten wir eine stetige periodische Funktion $\widetilde{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit der Periode $b-a$. $\widetilde{\varphi} \circ g$ mit $g(x) = \frac{b-a}{2\pi}x$ hat dann die Periode 2π. Nach [Forster, Analysis 1, S. 196, Satz 2] gibt es ein $N = N(\widetilde{\varphi} \circ g, \varepsilon)$ derart, daß mit

$$\widetilde{\varphi} \circ g_k = \int_0^{2\pi} \widetilde{\varphi} \circ g e^{-ikx}/\sqrt{2\pi} dx$$

$$||\widetilde{\varphi} \circ g - \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{\varphi} \circ g_k e^{ikx}/\sqrt{2\pi}||_{L^2((0,2\pi))} < \frac{1}{3}\varepsilon\sqrt{\frac{2\pi}{b-a}}$$

ist. Die Transformationsformel liefert mit $\widetilde{\varphi}_k = \int_a^b \widetilde{\varphi}(y) e^{-2k\pi iy/(b-a)}/\sqrt{b-a} dy$

$$||\widetilde{\varphi} - \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{\varphi}_k e^{2k\pi iy/(b-a)}/\sqrt{b-a}||_{L^2((a,b))} < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Insgesamt folgt

$$||f - \sum_{k=-N}^{N} \widetilde{\varphi}_k e^{2k\pi iy/(b-a)}/\sqrt{b-a}||_{L^2((a,b))} < \varepsilon$$

und nach Hilfssatz II.1.3 die Vollständigkeit. Den mehrdimensionalen Fall reduzieren wir folgendermaßen auf den eindimensionalen: Sei $\Omega \subset Q = \{x| \in \mathbb{R}^n,\ |x_j| < \pi,\ j = 1, \ldots, n\}$, Ω offen. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Durch Fortsetzung von f durch Nullsetzen erhalten wir $f \in L^2(\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$, sei $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ derart, daß

$$||f - \varphi||_{L^2(Q)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

(s. Forster, Analysis 3, p. 92, Satz 3). Wir können $\overline{Q}$ derart in endliche viele achsenparallele Quader $\overline{Q_k}$, $Q_k = \{x | x \in \mathbb{R}^n,\ a_j^{(k)} < x_j < b_j^{(k)},\ j = 1, \ldots, n\}$, $k = 1, \ldots, N$ zerlegen, daß

$$\overline{Q} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{Q_k},$$

$$Q_k \cap Q_{k'} = \phi,\ k \neq k',$$

ist, und gleichzeitig können wir komplexe Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ finden derart, daß

$$\sup_{x \in Q_1 \cup \ldots \cup Q_n} |\varphi(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{Q_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^n}$$

ist. Sei $I_j^{(k)} = (a_j^{(k)}, b_j^{(k)})$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq k \leq N$. Dann ist

$$\chi_{Q_k}(x) = \prod_{j=1}^{n} \chi_{I_j^{(k)}}(x_j).$$

Da $\chi_{I_j^{(k)}} \in L^2((-\pi, +\pi))$ ist, können wir auf diese Funktion unser eindimensionales Resultat anwenden. Tun wir das in einer Weise, die am Ende dieser Darlegungen erläutert wird, für jeden Faktor in der Produktdarstellung für χ_{Q_k} und dann für jeden Summanden $c_k \chi_{Q_k}$ in der letzten Summe, so erkennen wir: Es gibt ein $M \in \mathbb{N}$ und komplexe Zahlen d_κ, $\kappa \in \mathbb{Z}^n$, $|\kappa| = |\kappa_1| + \ldots + |\kappa_n| \leq M$, derart, daß

$$|| \sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{Q_k} - \sum_{|\kappa| \leq M} d_\kappa \frac{e^{i\kappa \cdot x}}{(2\pi)^{n/2}} ||_{L^2(Q)} < \frac{\varepsilon}{3},$$

also insgesamt

$$\text{(II.1.13)} \qquad || f - \sum_{|\kappa| \leq M} d_\kappa \frac{e^{i\kappa \cdot x}}{(2\pi)^{n/2}} ||_{L^2(\Omega)} < \varepsilon,$$

so daß sich die letzte Differenz auch in der $L^2(\Omega)$-Norm in derselben Weise abschätzen läßt (Dieses Resultat benötigen wir später noch). Ebenfalls durch Reduktion auf den eindimensionalen Fal sieht man, daß die Funktionen $e^{i\kappa \cdot x}/(2\pi)^{n/2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^n$ ein Orthonormalsystem in $L^2(Q)$ bilden. Setzen wir $\Omega = Q$, so zeigt (II.1.13) mit Hilfssatz II.1.3 die Vollständigkeit dieses Orthonormalsystems. Wir kommen nun zur Approximation von χ_{Q_k}. Die Funktion $\chi_{I_j^{(k)}} | [-\pi, +\pi]$ wird periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt. Die Periode ist 2π.

Sei

$$S_{\widetilde{N}}^{I_j^{(k)}}(x) = \sum_{\nu=-\widetilde{N}}^{\widetilde{N}} \chi_{I_j^{(k)}\nu} e^{i\nu x_j}/\sqrt{2\pi}$$

($\chi_{I_j^{(k)}\nu}$ sind die Fourierkoeffizienten von $\chi_{I_j^{(k)}}$), $\widetilde{N}$ ist aus $\mathbb{N}$.

Dann ist mit dem Satz von Fubini-Tonelli und der Besselschen Ungleichung

$$(\int_Q |\prod_{j=1}^{n} \chi_{I_j^{(k)}}(x_j) - \prod_{j=1}^{n} S_{\widetilde{N}}^{I_j^{(k)}}(x_j)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_Q |\prod_{l=1}^{j-1} S_{\widetilde{N}}^{I_l^{(k)}}(x_l)(\chi_{I_j^{(k)}}(x_j) - S_{\widetilde{N}}^{I_j^{(k)}}(x_j)) \cdot \prod_{l=j+1}^{n} \chi_{I_l^{(k)}}(x_l)|^2 dx,$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \prod_{l=1}^{j-1} ||S_{\widetilde{N}}^{I_l^{(k)}}||_{L^2((-\pi,+\pi))} ||\chi_{I_j^{(k)}} - S_{\widetilde{N}}^{I_j^{(k)}}||_{L^2((-\pi,+\pi))} \cdot \prod_{l=j+1}^{n} ||\chi_{I_l^{(k)}}||_{L^2((-\pi+\pi))},$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{l=1,\\ l\neq j}}^{n} ||\chi_{I_l^{(k)}}||_{L^2((-\pi,+\pi))} ||\chi_{I_j^{(k)}} - S_{\widetilde{N}}^{I_j^{(k)}}||_{L^2((-\pi,+\pi))}.$$

Dies liefert die gewünschte Approximation für χ_{Q_k} bzw. $c_k\chi_{Q_k}$, falls $\widetilde{N}$ hinreichend groß gewählt wird.

§2. Orthogonale Projektion

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Teilraum $\mathfrak{M}$ (von $\mathcal{H}$) ist ein Untervektorraum (oder einfach Unterraum genannt) des Vektorraums $\mathcal{H}$.

Definition II.2.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum. $\mathfrak{M}$ heißt abgeschlossen, wenn mit einer konvergenten Folge (f_n) von Elementen $f_n \in \mathfrak{M}$, $u = 1, 2, \ldots$, auch das Grenzelement f in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.*

Definition II.2.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum. Sei*

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{f | \exists (f_n),\ f_n \in \mathfrak{M},\ n = 1, 2 \ldots,\ f_n \to f,\ n \to \infty\}$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ heißt die Abschließung von $\mathfrak{M}$ (in $\mathcal{H}$)

Es ist leicht zu sehen, daß $\overline{\mathfrak{M}}$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$ ist mit folgender Eigenschaft:

$$\overline{\mathcal{H}} = \bigcap_{\mathfrak{A} \text{ abg. Teilraum von } \mathcal{H},\, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{M}} \mathfrak{A}.$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ ist also der kleinste abgeschlossene Teilraum von $\mathcal{H}$, der $\mathfrak{M}$ enthält.

Hilfssatz II.2.1: *Sei $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $\mathfrak{M}$ ein Vektorraum endlicher Dimension $n \geq 1$. Dann gibt es eine orthonormierte Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von $\mathfrak{M}$, so daß für jedes $f \in \mathfrak{M}$ gilt:*

$$f = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k.$$

Dabei versteht sich orthonormiert bezüglich des Skalarprodukts in $\mathcal{H}$, mit (f, φ_k) ist ebenfalls das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ gemeint.

Beweis: Aus der Vorlesung Lineare Algebra I oder II bekannt. □

Generell ist ein Teilraum $\mathfrak{M}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, wenn das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ zu Grunde gelegt wird. Ist $\mathfrak{M}$ abgeschlossen, so wird, wie man leicht sieht, $\mathfrak{M}$ dadurch sogar zu einem Hilbertraum. Jeder *endlichdimensionale Teilraum eines Hilbertraums ist abgeschlossen.* Der Beweis sei dem Leser überlassen. Hinweis: Konstruiere eine Orthonormalbasis mit Hilfssatz II.1.5.

Hilfssatz II.2.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{H}$ separabel. Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum. Dann ist auch $\mathfrak{M}$ separabel.*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge von Elementen $f_n \in \mathcal{H}$, $n = 1, 2, \ldots$, die in $\mathcal{H}$ dicht liegen. Sei

$$\Gamma = \{(m,n)|m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N},\ \{g|||f_m - g|| < \frac{1}{n}\} \cap \mathfrak{M} \neq \emptyset\}.$$

Γ ist abzählbar. Zu jedem $(m,n) \in \Gamma$ gibt es ein $g_{mn} \in \mathfrak{M}$ mit $||f_m - g_{mn}|| < \frac{1}{n}$. Wir zeigen, daß die g_{mn} dicht in $\mathfrak{M}$ liegen. Seien $g \in \mathfrak{M}$ und $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein f_m mit $||g - f_m|| < \frac{1}{n}$. Also ist $(m,n) \in \Gamma$, also $||f_m - g_{mn}|| < \frac{1}{n}$, $g_{mn} \in \mathfrak{M}$ wie eben. Somit ist

$$||g - g_{mn}|| \leq ||g - f_m|| + ||f_m - g_{mn}|| < \frac{2}{n}.$$

□

Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathfrak{M}^\perp = \{g|(f,g) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}^\perp$ heißt auch das Orthogonalkomplement zu $\mathfrak{M}$ (in $\mathcal{H}$). $\mathfrak{M}^\perp$ ist abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Nun gilt

Satz II.2.1: *Sei $\mathfrak{M}$ abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein $f_1 \in \mathfrak{M}$ ein $f_1 \in \mathfrak{M}$ und ein $f_2 \in \mathfrak{M}^\perp$ mit*

$$f. = f_1 + f_2.$$

f_1, f_2 sind durch f eindeutig bestimmt.

Beweis: Wir bringen zunächst eine 1. Version, die nur für separable $\mathcal{H}$ gültig ist. Aus der Separabilität von $\mathcal{H}$ folgt gemäß Hilfssatz II.2.2 die Separabilität von $\mathfrak{M}$. Also ist $\mathfrak{M}$ ein separabler Hilbertraum. Sei $\mathfrak{M}$ zunächst nicht endlich dimensional. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{M}$. Sei $f \in \mathcal{H}$. Sei

$$f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k.$$

Die Reihe rechts konvergiert dabei wegen der Besselschen Ungleichung in $\mathcal{H}$. Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, ist $f_1 \in \mathfrak{M}$. Sei $f_2 = f - f_1$. Wir behaupten, daß f_2 in $\mathfrak{M}^\perp$ liegt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}
(f_1, \varphi_l) &= (f, \varphi_l) - (f_1, \varphi_l), \\
&= (f, \varphi_l) - (\sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k, \varphi_l), \\
&= (f, \varphi_l) - (f, \varphi_l) = 0.
\end{aligned}$$

Die so gewonnene Zerlegung ist auch eindeutig bestimmt, denn sei $\mathcal{H} \ni f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2'$, $0 = f_1 - f_1' + f_2 - f_2'$, $f_1, f_1' \in \mathfrak{M}$, $f_2, f_2' \in \mathfrak{M}^\perp$. Dann folgt durch Skalarmultiplikation der letzten Gleichung mit $f_1 - f_1'$ und mit $f_2 - f_2'$, daß

$$||f_1 - f_1'||^2 = 0 = ||f_2 - f_2'||^2$$

ist, also $f_1 = f_1'$, $f_2 = f_2'$. Ist $\mathfrak{M}$ endlichdimensional, so ist der Beweis sinngemäß derselbe. Die 2. Version macht von der Separabilität von $\mathcal{H}$ keinen Gebrauch. Für $f \in \mathcal{H}$ sei

$$d = \inf_{\widetilde{g} \in \mathfrak{M}} ||f - \widetilde{g}||.$$

Sei (g_n) eine in $\mathfrak{M}$ enthaltene Folge mit $||f - g_n|| \to d$, $n \to \infty$. Wir wollen nun zeigen, daß die g_n gegen ein Element $g \in \mathfrak{M}$ konvergieren. Zunächst ist $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2(||x|| + ||y||^2)$, also $||\frac{x-y}{2}||^2 + ||\frac{x+y}{2}||^2 = \frac{1}{2}(||x||^2 + ||y||^2)$, $x, y \in \mathcal{H}$. Sei $x = f - g_n$, $y = f - g_m$. Dann folgt

$$||\frac{g_n - g_m}{2}||^2 + ||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2 = \frac{1}{2}(||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2),$$

$$||\frac{g_n - g_m}{2}||^2 = \frac{1}{2}(||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2) - ||f - \frac{g_n + g_m}{2}||^2.$$

Nun ist $||f - \frac{g_n+g_m}{2}||^2 \geq d^2$, also

$$\begin{aligned} ||\frac{g_n - g_m}{2}||^2 &\leq \frac{1}{2}(||f - g_n||^2 + ||f - g_m||^2) - d^2, \\ &= \frac{1}{2}(||f - g_n||^2 - d^2) + \frac{1}{2}(||f - g_m||^2 - d^2). \end{aligned}$$

Die letzte rechte Seite konvergiert gegen 0 für $n, m \to \infty$. Infolgedessen ist (g_n) eine Cauchy-Folge, also $g_n \to g$, $n \to \infty$. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ liegt g in $\mathfrak{M}$. Insbesondere ist $d = ||f - g||$ und $||f - h|| \geq ||f - g||$ für alle $h \in \mathfrak{M}$. Sei h nun von der folgenden Gestalt:

$$h = g + \varepsilon \cdot e^{i\alpha} \varphi,$$

$\varepsilon > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, φ ein Element aus $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$||f - g - \varepsilon e^{i\alpha} \varphi||^2 \geq ||f - g||^2.$$

Sei $g = f_1$, $f - g = f_2$, so daß $||f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi||^2 \geq ||f_2||^2$ ausfällt, also

$$\begin{aligned} (f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi,\ f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi) &= ||f_2||^2 + \varepsilon^2 ||\varphi||^2 - 2\mathcal{R}e(f_2, \varepsilon e^{i\alpha\varphi}) \\ &= ||f_2||^2 + \varepsilon^2 ||\varphi||^2 - 2\varepsilon \mathcal{R}e e^{-i\alpha}(f_2, \varphi) \\ &\geq ||f_2||^2. \end{aligned}$$

Also ist $\varepsilon^2||\varphi||^2 \geq 2\varepsilon \mathcal{R}ee^{-i\alpha}(f_2, \varphi)$. Division durch ε und Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ liefert $0 \geq 2\mathcal{R}ee^{-i\alpha}(f_2, \varphi)$. Nun sei α so gewählt, daß $e^{-i\alpha}(f_2, \varphi) = |(f_2, \varphi)|$ gilt. Dann folgt $(f_2, \varphi) = 0$. Also ist $f_2 \in \mathfrak{M}^\perp$, $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathfrak{M}$. Die Eindeutigkeit der Zerlegungn folgt wie oben. □

Hilfssatz II.2.3: *Sei $\mathfrak{M}$ Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dann ist*

$$\mathfrak{M}^\perp = \overline{\mathfrak{M}}^\perp.$$

Beweis: Sei $f \in \mathfrak{M}^\perp$, $g \in \overline{\mathfrak{M}}$, $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ mit einer Folge (g_n), deren Elemente in $\mathfrak{M}$ liegen. Dann ist $(g, f) = \lim_{n\to\infty}(g_n, f) = 0$, also $f \in \overline{\mathfrak{M}}^\perp$, $\mathfrak{M}^\perp \subset \overline{\mathfrak{M}}^\perp$. Sei umgekehrt $f' \in \overline{\mathfrak{M}}^\perp$, so ist

$$\begin{aligned} (g, f') &= 0, \quad g \in \overline{\mathfrak{M}}, \\ (g, f') &= 0, \quad g \in \mathfrak{M} \end{aligned}$$

also $f' \in \mathfrak{M}^\perp$, also $\overline{\mathfrak{M}}^\perp \subset \mathfrak{M}^\perp$. □

Der folgende Satz ist eine Folgerung aus Satz II.2.1:
Satz II.2.2: *Sei $\mathfrak{M}$ ein Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. $\mathfrak{M}$ ist genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn aus $(f, g) = 0$, $f \in \mathfrak{M}$, für ein $g \in \mathcal{H}$ folgt: $g = 0$, d.h. $\mathfrak{M}^\perp = \{0\}$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathfrak{M}^\perp = \overline{\mathfrak{M}}^\perp = \mathcal{H}^\perp$ nach Hilfssatz II.2.3. Wie man sofort sieht, ist $\mathcal{H}^\perp = \{0\}$. Sei umgekehrt $\mathfrak{M}^\perp = \{0\}$. Dann ist $\overline{\mathfrak{M}}^\perp = 0$ nach Hilfssatz II.2.3, also $\overline{\mathfrak{M}} = \mathcal{H}$ nach Satz II.2.1.

§3. Beschränkte lineare Funktionale in $\mathcal{H}$

Definition II.3.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $A : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ heißt lineares Funktional (in $\mathcal{H}$, wenn A hologen linear ist, d.h. wenn*

$$A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g),\ f, g \in \mathcal{H},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

ist, und A heißt beschränktes lineares Funktional, wenn

$$|A(f)| \leq c||f||,\ f \in \mathcal{H},$$

ist mit einer nichtnegativen Konstanten c. Statt $A(f)$ schreiben wir auch Af. Für ein lineares Funktional A definieren wir

$$||A|| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}, \\ f \neq 0}} \frac{|Af|}{||f||} = \sup_{||g||=1} |Ag|,$$

wobei wir $||A|| = +\infty$ zulassen.

Hilfssatz II.3.1: *Sei A ein lineares Funktional in $\mathcal{H}$. A ist genau dann beschränkt, wenn $||A||$ endlich ausfällt. A ist genau dann stetig, wenn A beschränkt ist.*

Beweis: Sei A beschränkt. Dann ist offenbar $||A|| \leq c$, also endlich. Sei $||A||$ endlich. Dann ist $|Af|/||f|| \leq ||A||$, $f \neq 0$, also wegen $A(0) = 0$ $|Af| \leq ||A||||f||$. Sei A beschränkt, $f_n \to f$, $n \to \infty$, $f_n, f \in \mathcal{H}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Dann ist $|A(f_n - f)| \leq ||A||||f_n - f||$, also A stetig. Sie umgekehrt A stetig. Dann folgt $Af_n \to 0$, falls (f_n) in $\mathcal{H}$ gegen Null konvergiert. Angenommen, A sei nicht beschränkt. Dann gibt es eine Folge (f_n) in $\mathcal{H}$ mit

$$||f_n|| = 1 \text{ und } c_n = |Af_n| \to +\infty,\ n \to \infty.$$

Also ist (o. E. sei $c_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$)

$$|A(f_n/c_n)| = 1,\ ||f_n/c_n|| \to 0,\ n \to \infty,$$

ein Widerspruch gegen die Stetigkeit. □

Ein **Beispiel** für ein stetiges oder beschränktes lineares Funktional wird durch die Festsetzung

$$Af = (f, g),\ g \in \mathcal{H} \text{ fest},\ f \in \mathcal{H},$$

geliefert, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (x, y), $x, y \in \mathcal{H}$, ist. Der Beweis sei dem Leser überlassen; dabei sieht man, daß $||A|| = ||g||$ ist. Wie der folgende Satz zeigt, beschreibt dieses Beispiel schon die allgemeine Situation:

Satz II.3.1 (Riesz-Fréchet): *Sei A ein beschränktes lineares Funktional in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ derart, daß*

$$Af = (f, g),\ f \in \mathcal{H},$$

ist. Insbesondere ist $||A|| = ||g||$. g heißt das erzeugende Element von A.

Beweis: Sei für die 1. Version wieder $\mathcal{H}$ als separabel vorausgesetzt. Dann existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$. Mit der bekannten Entwicklung

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i$$

gilt

$$\begin{aligned} Af &= Af(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i), \\ &= \lim_{n\to\infty} A(\sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i), \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)A\varphi_i, \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)A\varphi_i, \end{aligned}$$

wobei wir von der Stetigkeit und Linearität von A Gebrauch gemacht haben. Die letzte Zeile folgt einfach aus der Reihendefinition. Für komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ ist

$$\begin{aligned} |A(\sum_{i=1}^{n} z_i\varphi_i)| &\leq ||A|| || \sum_{i=1}^{n} z_i\varphi_i||, \\ &= ||A||(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir $z_i = \overline{A\varphi_i}$, so folgt

$$\begin{aligned} |A(\sum_{i=1}^{n} \overline{A\varphi_i}\varphi_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |A\varphi_i|^2, \\ &\leq ||A||(\sum_{i=1}^{n} |A\varphi_i|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

so daß $\sum_{i=1}^{\infty} |A\varphi_i|^2$ konvergiert und $\leq ||A||^2$ ist. Sei $g = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A\varphi_i}\varphi_i$. Dann ist nach der Parsevalschen Gleichung

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) A\varphi_i = Af$$

Daß es höchstens ein $g \in \mathcal{H}$ mit $(f, g) = Af$, $f \in \mathcal{H}$, gibt, ist trivial. Die Gleichung $||A|| = ||g||$ hatten wir schon vor dem Satz erwähnt. Die 2. Version behandelt den allgemeinen Fall. $\mathfrak{M} = \{f | f \in \mathcal{H},\ Af = 0\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Wir unterscheiden zwei Fälle: $\mathfrak{M} \neq \mathcal{H}$, $\mathfrak{M} = \mathcal{H}$. Zunächst zum ersten Fall: Es ist dann nach Satz II.2.1 $\mathfrak{M}^\perp \neq \{0\}$. Sei also $h \neq 0$, $h \in \mathfrak{M}^\perp$. Wir betrachten $g = \alpha h$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Sei $\alpha = \overline{Ah}/||h||^2$. Zunächst ist $0 = Af = (f, g)$, $f \in \mathfrak{M}$.

Für $f = g$ ist $Af = Ag = (\overline{Ah}/||h||^2)Ah = |Ah|^2/||h||^2$ und $||g||^2 = (|Ah|^2/||h||^4) \cdot ||h||^2 = |Ah|^2/||h||^2 = Ag$, also im Fall $f = g : Af = Ag = ||g||^2 = (f, g)$.

Endlich zeigen wir , daß $Af = (f, g)$, $f \in \mathcal{H}$ ist. Es ist $A(f - cg) = 0$, $c = Af/Ag$, $f \in \mathcal{H}$. Dabei ist zu beachten, daß $Ag \neq 0$ ist, denn wäre $Ag = 0$, so wäre $h \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}^\perp$, also $h = 0$, also ein Widerspruch. Sei $f_1 = f - cg$, also $f = f_1 + cg$, $f_1 \in \mathfrak{M}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} Af &= Af_1 + cAg = (f_1, g) + c(g, g), \\ &= (f_1 + cg, g) = (f, g). \end{aligned}$$

Der Rest folgt wie im separablen Fall. Im Fall $\mathfrak{M} = \mathcal{H}$ wählen wir $g = 0$, der Rest folgt wie eben. $\square$

§4. Lineare Operatoren in $\mathcal{H}$

Wir befassen uns in dieser Vorlesung vorwiegend mit in $\mathcal{H}$ erklärten linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ in sich, doch geben wir für spätere Zwecke eine allgemeinere Definition des Begriffs des linearen Operators.

Definition II.4.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{D}$ ein linearer Teilraum. Ein linearer Operator (lineare Transformation) T in $\mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$, d.h. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}$. $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ heißt Definitionsbereich von T, $T(\mathcal{D}(T)) = \mathcal{R}(T)$ heißt Wertebereich von T.*

Wie man sofort sieht, ist $\mathcal{R}(T)$ ebenfalls ein Teilraum von $\mathcal{H}$. Wir bringen einige **Beispiele**:

1. Sei $\mathcal{H} = L^2((a,b))$, $\mathcal{D} = C^0([a,b])$. Sei $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

aus $C^0([a,b])$, also insbesondere aus $L^2((a,b))$. WIe man leicht sieht, ist T linear.

2. Sei $\mathcal{H} = L^2((a,b))$, $\mathcal{D} = \mathcal{H}$. Sei $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$. Dann ist für fast alle $x \in (a,b)$ die Funktion $K(x,.) \in L^2((a,b))$ (Satz von Fubini). Für $f \in L^2((a,b))$ ist somit die Funktion

$$Tf(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

für fast alle $x \in (a,b)$ erklärt.

Nun ist insbesondere $f \in L^2((a,b) \times (a,b))$, also $Kf \in L^1((a,b) \times (a,b))$, also ist (wieder nach dem Satz von Fubini) die Funktion $Tf \in L^1((a,b))$. Darüberhinaus gilt nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|Tf(x)|^2 = |\int_a^b K(x,y) f(y) dy|^2 \leq \int_a^b |K(x,y)|^2 dy ||f||_{L^2((a,b))}.$$

Die rechte Seite ist für fast alle $x \in (a,b)$ in $L^1((a,b))$. Also ist nach [Forster, Analysis 3, S. 91] $Tf \in L^2((a,b))$ und

$$||Tf||_{L^2((a,b))} \leq (\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dydx)^{\frac{1}{2}} ||f||_{L^2((a,b))}.$$

Die Linearität der Abbildung ist sofort ersichtlich, und wir haben somit gezeigt, daß T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ ist mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D} = \mathcal{H}$. Die Funktion K wird als Kern vom Hilbert-Schmidtschen Typ bezeichnet.

3. Sei $\mathcal{H} = L^2((a,b))$, $\mathcal{D} = C_0^2((a,b))$. Für $f \in \mathcal{D}$ setzen wir

$$Tf = -(pf')' + qf$$

mit Funktionen p, q wie in Definition I.1.1. Dann ist $T(\mathcal{D}) \subset \mathcal{H}$, T ist linear. Also ist T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Da die Funktionen in $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ kompakten Träger haben, erhält man dieses Resultat auch, wenn nur $p \in C^1((a,b))$, $q \in C^0((a,b))$ verlangt wird.

Definition II.4.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. T heißt beschränkt, wenn*

$$||Tf|| \leq c||f||, \ f \in \mathcal{D}(T),$$

ist mit einer Konstanten $c \geq 0$.

In Analogie zu unserem Vorgehen bei linearen Funktionalen setzen wir für einen linearen Operator T in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$

$$||T|| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(T), \\ f \neq 0}} \frac{||Tf||}{||f||} = \sup_{\substack{f \in D(t), \\ ||f||=1}} ||Tf||$$

$||T|| = +\infty$ ist wieder zugelassen.

$\mathcal{D}(T)$, T ist ein linearer Operator in $\mathcal{H}$, ist ein Prähilbertraum. In diesem Sinne gilt

Hilfssatz II.4.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. T ist genau dann beschränkt, wenn $||T||$ endlich ausfällt. Die Abbildung $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ist genau dann stetig, wenn T beschränkt ist.*

Beweis: Der Beweis verläuft völlig parallel zum Beweis des Hilfssatzes II.3.1 und kann daher übergangen werden. $\square$

Betrachten wir die von uns soeben gegebenen Beispiele darauf, ob sie beschränkte Operatoren liefern. In Beispiel 1 ist dies der Fall, denn (c eine positive Konstante, die von Schritt zu Schritt wechseln kann, aber von den variierenden Funktionen unabhängig ist):

$$\begin{aligned} ||Tf||_{L^2((a,b))} &\leq c||Tf||_{C^0([a,b])}, \\ &\leq c \sup_{\substack{x\in[a,b],\\ y\in[a,b]}} |K(x,y)| \cdot ||f||_{L^1((a,b))}, \\ &\leq c \sup_{\substack{x\in[a,b],\\ y\in[a,b]}} |K(x,y)| \cdot ||f||_{L^2((a,b))}. \end{aligned}$$

In Beispiel 2 hatten wir schon gezeigt, daß $||Tf||_{L^2((a,b))} \leq c||f||_{L^2((a,b))}$ ist mit $c = ||K||_{L^2((a,b)\times(a,b))}$. Was Beispiel 3 betrifft, so wird später noch gezeigt, daß ein Differentialoperator im allgemeinen nicht beschränkt ist.

Definition II.4.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$, ebenso $\widetilde{T}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(\widetilde{T})$. $\widetilde{T}$ heißt eine Fortsetzung von T, abgekürzt $T \subset \widetilde{T}$ oder $\widetilde{T} \supset T$, genau dann, wenn*

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\widetilde{T}),$$
$$Tf = \widetilde{T}f,\ f \in \mathcal{D}(T),$$

ist. Weiter setzen wir $T\widetilde{T}f = T(\widetilde{T}f)$, $f \in \mathcal{D}(T\widetilde{T}) = \{g|g \in \mathcal{D}(\widetilde{T}),\ \widetilde{T}g \in \mathcal{D}(T)\}$.

Offenbar ist $T\widetilde{T}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T\widetilde{T})$. Sind $T, \widetilde{T}$ beschränkt, so ist $||T\widetilde{T}f|| \leq ||T||||\widetilde{T}||||f||$, $f \in \mathcal{D}(T\widetilde{T})$, ist darüberhinaus $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\widetilde{T}) = \mathcal{H}$, so ist $T\widetilde{T}$ ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitonsbereich $\mathcal{D}(T\widetilde{T}) = \mathcal{H}$. Auf diese Weise kann man innerhalb der beschränkten linearen Operatoren in $\mathcal{H}$, die in ganz $\mathcal{H}$ erklärt sind, eine (nichtkommutative) Multiplikation einführen und diese Operatoren zu einer Algebra machen.
Als **Beispiel** dient uns zunächst das Beispiel 1 von vorhin. Für $f \in L^2((a,b)) = \mathcal{D}(\widetilde{T})$ sei

$$\widetilde{T}f(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy.$$

Dann ist $\widetilde{T}f$ sogar in $C^0([a,b])$ wie die Rechnung am Ende von I.4 zeigt. Offenbar ist $\widetilde{T}$ eine Fortsetzung von T. Auch bei Beispiel 3 läßt sich leicht eine Fortsetzung konstruieren. Im Fall, daß p, q den Annahmen in Definition I.1.1 genügen, sei $\widetilde{T} = L$, wobei $\mathcal{D}(\widetilde{T}) = \mathcal{D}(L)$ gesetzt ist und $L, \mathcal{D}(L)$ die in Definition I.1.1 angegebene Bedeutung haben. In den meisten Fällen von linearen Operatoren T in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$, die wir noch keinnen lernen, ist $\mathcal{D}(T)$ dicht.

Die wichtigste Art der Fortsetzung ist die durch Abschließung. Hierzu gilt

Satz II.4.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum: Sei T ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. $\mathcal{D}(T)$ sei dicht in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $\overline{T}$ in $\mathcal{H}$ mit*

$$T \subset \overline{T},$$

$$\mathcal{D}(\overline{T}) = \mathcal{H}.$$

$\overline{T}$ heißt die Abschließung von T (in $\mathcal{H}$). Es ist $||\overline{T}|| = ||T||$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\overline{T}$ eindeutig bestimmt ist. Sei nämlich $f \in \mathcal{H}$ und (f_n) eine Folge von Elementen aus $\mathcal{D}(T)$ derart, daß $f_n \to f$, $n \to \infty$. Wegen der Beschränktheit von $\overline{T}$ folgt für jeden Operator $\overline{T}$ mit den im Satz angegebenen Eigenschaften, daß

$$\overline{T}f = \lim_{n\to\infty} \overline{T}f_n = \lim_{n\to\infty} Tf_n.$$

Zur Existenz von $\overline{T}$: Sei $f \in \mathcal{H}$ und (f_n) eine Folge wie eben. Dann ist $||Tf_n - Tf_m|| = ||T(f_n - f_m)|| \leq c||f_n - f_m||$, so daß (Tf_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei $g = \lim_{n\to\infty} Tf_n$. Dieser limes hängt nicht von der Auswahl der Folge (f_n) ab, denn sei (f'_n) eine weitere Folge von Elementen $f'_n \in \mathcal{D}(T)$ mit $f'_n \to f$, so ist $(f_n - f'_n)$ eine Nullfolge und daher auch $(Tf_n - Tf'_n)$. Nun setzen wir

$$\overline{T}f = \lim_{n\to\infty} Tf_n,\ f \in \mathcal{H},\ (f_n) \text{ wie eben.}$$

Dann ist $||\overline{T}f|| = \lim_{n\to\infty} ||Tf_n|| \leq ||T||||f||$. Der Beweis der Linearität sei dem Leser überlassen. □

Satz II.4.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei T ein linearer beschränkter Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Dann gibt es einen und nur einen linearen Operator T^* in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$,*

$$(Tx, y) = (x, T^*y),\ x, y \in \mathcal{H}.$$

T^* ist beschränkt, es gilt $||T^*|| = ||T||$. T^* heißt die Adjungierte zu T oder der zu T adjungierte Operator. Außerdem gilt

$$T^{**} = (T^*)^* = T.$$

Beweis: Die Eindeutigkeit ist trivial: Aus $(x, T^*y) = (x, Sy)$, $x, y \in \mathcal{H}$, folgt $(x, T^*y - Sy) = 0$, $x, y \in \mathcal{H}$, $T^*y = Sy$, $y \in \mathcal{H}$. Nun zur Existenz: Sei $A_y x = (Tx, y)$, $x \in \mathcal{H}$, $y \in \mathcal{H}$ fest aber beliebig. A_y ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ in $\mathbb{C}$, da T linear ist. Weiter ist A_y beschränkt, da

$$|A_y x| \leq ||y||||T||||x||$$

nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz. Nach Satz II.3.1 (Riesz-Frechet) existiert genau ein $y^* \in \mathcal{H}$ mit

$$A_y x = (x, y^*), \ x \in \mathcal{H}$$

Wir ordnen nun $y \in \mathcal{H}$ dieses Element $y^* \in \mathcal{H}$ zu und setzen

$$y^* = T^*y$$

Zunächst ist dadurch ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ gegeben, denn

$$\begin{aligned}
A_{\alpha y_1 + \beta y_2} x &= \overline{\alpha}(Tx, y_1) + \overline{\beta}(Tx, y_2), \\
&= \overline{\alpha}(x, y_1^*) + \overline{\beta}(x, y_2^*), \\
&= (x, \alpha y_1^*) + (x, \beta y_2^*), \\
&= (x, \alpha T^*_{y_1} + \beta T^*_{y_2}), \\
&= (x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2),
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. T^* ist beschränkt, denn aus

$$|(T^*y, x)| = |(Tx, y)| \leq ||T||||x||||y||$$

folgt für $x = T^*y$

$$||T^*y||^2 \leq ||T||||T^*y||||y||, \text{ also } ||T^*|| \leq ||T||.$$

Nun ist $(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, (T^*)^*x)} = (T^{**}x, y)$, also $T^{**} = T$. Wie eben gezeigt, ist $||T|| = ||T^{**}|| \leq ||T^*||$, so daß schließlich $||T^*|| = ||T||$ ist. $\square$

Wir studieren zum Abschluß dieses Abschnitts den Zusammenhang zwischen unendlichen Matrizen und beschränkten, in ganz $\mathcal{H}$ erklärten Operatoren T, sofern $\mathcal{H}$ separabel ist. In diesem Fall existiert in $\mathcal{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, das wir wie üblich als abzählbar unendlich voraussetzen (s. Satz II.1.1). Wir ziehen weiter den Isomorphismus $I : l_2 \to \mathcal{H}$ hinzu (s. II.1). Sei

$$x \in \mathcal{H},\ x = I(x_p),$$

$$y = Tx = I(y_p).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y_i &= (Tx, \varphi_i) \\ &= (T\sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k, \varphi_i) \\ &= (\sum_{k=1}^{\infty} x_k T_{\varphi_k}, \varphi_i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (T\varphi_k, \varphi_i) x_k \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von T und der Stetigkeit des Skalarprodukts bezüglich Normkonvergenz. Setzen wir $T_{ik} = (T_{\varphi_k, \varphi_i})$, so folgt

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} T_{ik} x_k$$

Von der Reihe rechts kennt man zunächst nur ihre Konvergenz. Eine genauere Information liefert

Hilfssatz II.4.2: *Es gilt: Wenn*

$$\mathcal{T}^2 = \sum_{i,k=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < \infty,$$

d.h. die Doppelreihe über die T_{ik}^2, $i, k \in \mathbb{N}$, ist absolut konvergent, so ist $||T|| \leq \mathcal{T}$.

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} ||Tx||^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} T_{i_k x_k}|^2, \\ &\leq \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} ||x||^2 \sum_{k=1}^{\infty} |T_{ik}|^2, \\ &\leq \mathcal{T}^2 ||x||^2, \end{aligned} \tag{II.4.1}$$

woraus der Hilfssatz folgt. □

Die Annahme des Hilfssatzes II.4.2 braucht keineswegst für jeden beschränkten Operator T erfüllt zu sein. Dies zeigt das Beispiel $Tx = x$, $x \in \mathcal{H}$, bei dem $T_{ik} = \delta_{ik}$ ist. Jedoch gelten stets die schwächeren Aussagen, die wir in folgendem Hilfssatz zusammenfassen:

Hilfssatz II.4.3: *Es ist für* $k = 1, 2, \ldots,$ *bzw.* $i = 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{T}_k = \sum_{i=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < +\infty, \; \mathcal{T}_i = \sum_{k=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < +\infty.$$

Beweis: Wählt man für $x \in \mathcal{H}$ das Element, dessen Urbild unter I bei fest vorgegebenem $k \in \mathbb{N}$ gerade eine Eins an k-ter Stelle und sonst lauter Nullen hat, so folgt die erste Aussage des Hilfssatzes aus (II.4.1). Ersetzen wir T durch T^* und führen wir dieselben Rechnungen wie eben vor Hilfssatz II.4.2 durch, so ergibt sich mit $y = T^*x = I(y_p)$

$$\text{(II.4.2)} \qquad y_i = \sum_{k=1}^{\infty} T^*_{ik} x_k, \; T^*_{ik} = (T^*\varphi_k, \varphi_i).$$

Also ist $T^*_{ik} = (\varphi_k, T\varphi_i) = \overline{(T\varphi_i, \varphi_k)} = \overline{T_{ki}}$. Aus

$$||T^*x||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} T^*_{ik} x_k|^2$$

folgt wie eben

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T^*_{ik}|^2 < +\infty \text{ für } k = 1, 2, \ldots, \text{ also}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |T_{ki}|^2 < +\infty \text{ für } k = 1, 2, \ldots.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Der Beweis des Hilfssatzes II.4.3 liefert auch eine Darstellung für die Adjungierte eines beschränkten linearen Operators T in einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. In Analogie zum endlichdimensionalen Fall wird man T als hermitesch bezeichnen, wenn $T_{ik} = \overline{T_{ki}}$ ist, $i, k \in \mathbb{N}$, d.h. $T = T^*$ ist. Dies erheben wir im allgemeinen Fall (nicht notwendig separabler Hilbertraum) zur

Definition II.4.4: *Sei* $\mathcal{H}$ *ein Hilbertraum,* T *ein beschränkter Operator in* $\mathcal{H}$ *mit Definitionsbereich* $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$*.* T *heißt hermitesch genau dann, wenn* $T = T^*$ *ist.*

§5. Die Inverse eines linearen Operators

Definition II.5.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ und Wertebereich $\mathcal{R}(T)$. Die Abbildung $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ sei eineindeutig. Die inverse Abbildung $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ heißt der zu T inverse Operator T^{-1}.*

Zur Rechtfertigung dieser Definition kann sich der Leser leicht selbst davon überzeugen, daß T^{-1} ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$ und Wertebereich $\mathcal{R}(T^{-1}) = \mathcal{D}(T)$ ist. Offenbar gilt wegen der Linearität von T

Hilfssatz II.5.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Notwendig und hinreichend für die Existenz des inversen Operators T^{-1} ist, daß die Gleichung $Tx = 0$ in $\mathcal{D}(T)$ nur die Lösung $x = 0$ hat.*

Eine weitergehendes Kriterium stammt von Toeplitz:
Satz II.5.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Defintionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. T hat genau dann einen in ganz $\mathcal{H}$ definierten beschränkten inversen Operator T^{-1} (insbesondere ist dann $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$), wenn gilt*

$$||Tx|| \geq d||x||, \; x \in \mathcal{H}, \tag{II.5.1}$$

mit einer positiven Konstante d, und

$$T^*x = 0, \text{ hat nur die triviale Lösung } 0. \tag{II.5.2}$$

Falls T hermitesch ist, ist $(II.5.2)$ eine Konsequenz aus $(II.5.1)$ und somit überflüssig.

Bevor wir einen Beweis des Satzes II.5.1 geben, diskutieren wir verschiedene Aspekte dieses Satzes. Zunächst sei $\mathcal{H}$ separabel. Wir bedienen uns der am Ende von II.4 eingeführten Matrizenschreibweise. Sei T gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Dann ist also mit $x = I(x_p)$, $Tx = I(y_p) : y_1 = 0, y_2 = x_1, \dots, y_n = x_{n-1}, \dots$: Somit folgt

$$||Tx||^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |y_p|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 = ||x||^2.$$

Also erfüllt der in $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ erklärte Operator T die Bedingung (II.5.1). Jedoch gilt für $z = I(\delta_{1p})$, daß $||Tx - z|| \geq 1$ ausfällt. Also ist $\mathcal{R}(T) \overset{\subset}{\neq} \mathcal{H}$, und T hat keinen in $\mathcal{H}$ erklärten inversen Operator. In der Tat wird T^* nach unseren Untersuchungen am Ende von II.4 durch die unendliche Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

gegeben, und für $x \in \mathcal{H}$ mit $x = I(\delta_{1p})$ gilt $x \neq 0$, aber $T^*x = 0$. Somit ist (II.5.2) verletzt. (II.5.2) ist also in der Tat notwendig. Wir bemerken, daß (II.5.1) auch im Fall unbeschränkter hermitescher Operatoren nicht ausreichend ist, um die Existenz einer in $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten Inversen zu garantieren (wobei wir den Begriff der Hermitizität noch gar nicht auf den Fall nicht überall erklärter unbeschränkter Operatoren verallgemeinert haben).

Für das folgende ist es zweckmäßig, die Definition der Hermitizität zu erweitern; wir geben die

Definition II.5.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei H ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(H)$. H heißt hermitesch, wenn $\mathcal{D}(H)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und $(Hf, g) = (f, Hg)$, $f, g \in \mathcal{D}(H)$, ist.*

Nun können wir aus Satz II.5.1 die folgende Konsequenz ziehen:
Hilfssatz II.5.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei H hermitesch und beschränkt. Sei weiter $||Hf|| \geq d||f||$, $f \in \mathcal{D}(H)$, mit einer positiven Konstanten d. Dann ist $H : \mathcal{D}(H) \to \mathcal{R}(H)$ eineindeutig, $\mathcal{R}(H) = \mathcal{D}(H^{-1})$ ist dicht in $\mathcal{H}$ und H^{-1} ist beschränkt.*

Beweis des Hilfssatzes II.5.1: Die Abschließung $\overline{H}$ ist ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbersich $\mathcal{D}(\overline{H}) = \mathcal{H}$. Außerdem ist $||\overline{H}f|| \geq d||f||$, $f \in \mathcal{H}$, d ist eine Konstante aus unserer Voraussetzung. Für $f, g \in \mathcal{H}$ sei $f_n \to f$, $g_n \to g$, $n \to \infty$, $f_n, g_n \in \mathcal{D}(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, $Hf_n \to \overline{H}f$, $Hg_n \to \overline{H}_g$, $n \to \infty$. Dann ist $(\overline{H}f, g) = \lim_{n\to\infty}(Hf_n, g_n) = \lim_{n\to\infty}(f_n, Hg_n) = (f, \overline{H}g)$. Also ist $\overline{H}$ hermitesch.

Satz II.5.1 liefert den inversen Operator $\overline{H}^{\,-1}$ mit $\mathcal{R}(\overline{H}) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(\overline{H}^{\,-1}) = \mathcal{D}(\overline{H}) = \mathcal{R}(\overline{H}^{\,-1})$. Wir brauchen $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(H)}$. Nach Definition der Abschließung gibt es zu jedem $g = \overline{H}f \in \mathcal{R}(\overline{H})$ eine Folge (f_n), $f_n \in \mathcal{D}(H)$, $n = 1, 2, \ldots$, mit $Hf_n \to \overline{H}f$, $f_n \to f$, $n \to \infty$ Also ist $\overline{\mathcal{R}(H)} = \mathcal{H}$. Daher ist $\mathcal{D}(H^{-1}) = \mathcal{R}(H)$ dicht in $\mathcal{H}$; die Existenz von H^{-1} ist übrigens trivial. Aus $||Hf|| \geq d||f||$, $f \in \mathcal{D}(H)$, folgt für $f = H^{-1}g$, $g \in \mathcal{R}(H) = \mathcal{D}(H^{-1})$

$$\frac{1}{d}||g|| \geq ||H^{-1}g||.$$

□

Hilfssatz II.5.1 wird falsch, wenn man die Voraussetzung der Beschränktheit fallen läßt: Dies zeigt das folgende Beispiel: Sei $\mathcal{H} = L^2((a, b))$, $Hf = -f'' + f$, $f \in \mathcal{D}(H) = C_0^2((a, b))$. Wie wir bereits in I.1 gesehen hatten, ist $(Hf, g) = (f, Hg)$. Weiter haben wir $(Hf, f) \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}(H)$,

$$||Hf||||f|| \geq |(Hf, f)| \geq (Hf, f) = \int_a^b (-f''\overline{f} + |f|^2)dt,$$

$$= \int_a^b f'\overline{f}'dt + \int_a^b |f|^2 dt = \int_a^b (|f'|^2 + |f|^2)dt \geq ||f||^2,$$

also $||Hf|| \geq ||f||$. Jedoch ist $\mathcal{R}(H)$ nicht dicht, denn für $g(t) = e^t$, $a \leq t \leq b$, $f \in \mathcal{D}(H)$ ist

$$(Hf, g) = \int_a^b (-f'' + f)\overline{g}dt = \int_a^b f(-g'' + g)dt = 0;$$

Hilfssatz II.2.2 liefert jetzt in der Tat, daß $\mathcal{R}(H)$ nicht dicht ist.

Beweis des Satzes II.5.1: Angenommen, T hat einen in $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten inversen Operator T^{-1}. Dann ist $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$,

$$||T^{-1}f|| \leq c||f||, \ f \in \mathcal{H},$$

mit einer positiven Konstanten c. Für $g \in \mathcal{H}$, $f = Tg$ ist

$$\frac{1}{c}||g|| \leq ||Tg||,$$

so daß (II.5.1) mit $d = \frac{1}{c}$ folgt. Angenommen, es gibt ein $g \neq 0$ mit $T^*g = 0$, so folgt $(Tf, g) = (f, T^*g) = 0$, $f \in \mathcal{H}$. Also ist $g \in \mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$, ein Widerspruch. Nun mögen umgekehrt (II.5.1) und (II.5.2) gelten. Wir zeigen zunächst, daß $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist. Sei (g_n) eine Folge von Elementen $g_1, g_2, \ldots$ aus $\mathcal{R}(T)$ mit $g_n \to g$, $n \to \infty$. Sei $g_n = Tf_n$.

Aus (II.5.1) folgt, daß die f_n eindeutig bestimmt sind und eine Cauchy-Folge bilden. Also gilt: $f_n \to f$, $n \to \infty$. Aus der Beschränktheit von T folgt: $Tf_n \to Tf = g, n \to \infty$, so daß $\mathcal{R}(T)$ in der Tat abgeschlossen ist. Sei nun $\mathcal{R}(T) \overset{\subset}{\neq} \mathcal{H}$. Dann gibt es nach Satz II.2.1 ein g in $\mathcal{H}$, $g \neq 0$, derart, daß $(Tf, g) = 0$, $f \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(T)$. Wegen Satz II.4.2 ist $(Tf, g) = (f, T^*g) = 0$, $f \in \mathcal{H}$, also $T^*g = 0$, also nach (II.5.2) $g = 0$. Also ist $\mathcal{R}(T)^\perp = \{0\}$, also $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$. Aus (II.5.1) folgt $||g|| \geq d||T^{-1}g||$, indem man $x = T^{-1}g$ setzt, $g \in \mathcal{H}$. Also ist T^{-1} beschränkt. $\square$

Satz II.5.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. T^* sie der zu T adjungierte Operator gemäß Satz II.4.2. T bilde $\mathcal{H}$ eineindeutig auf sich ab, also existiert der inverse Operator T^{-1} und ist auf $\mathcal{H}$ erklärt. T^{-1} sei beschränkt. Dann bildet auch T^* den Hilbertraum $\mathcal{H}$ eineindeutig auf sich ab. Der in $\mathcal{H}$ erklärte Operator $(T^*)^{-1}$ ist beschränkt, und es ist*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Beweis: Es ist $(Tf, g) = (f, T^*g)$, $f, g \in \mathcal{H}$, und nach Satz II.5.1 gilt: $||Tf|| \geq d||f||$, $f \in \mathcal{H}$, d eine positive Konstante. Sei $f = T^{-1}g$. Dann folgt $||g||^2 = |(T^{-1}g, T^*g)| \leq ||T^{-1}||||g||||T^*g|| \leq d^{-1}||T^*g||||g||$, also $||T^*g|| \geq d||g||$. Nun ist nach Satz II.4.2 noch $T^{**} = T$, so daß $T^{**}g = 0$ nur für $g = 0$ eintreten kann. Satz II.5.1 liefert nun, daß T^* einen in $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten inversen Operator hat. Sei

$$f = T^{-1}u, \ g = (T^*)^{-1}v, \ u, v \in \mathcal{H}.$$

Dann ist $(u, (T^*)^{-1}v) = (Tf, g) = (f, T^*g) = (T^{-1}u, v) = (u, (T^{-1})^*v)$, so daß in der Tat $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ folgt. $\square$

Aus dem vorstehenden Beweis folgt unter den Voraussetzungen des Satzes II.5.2, daß $||T^*f|| \geq d||f||$, $f \in \mathcal{H}$, ist mit derselben Konstante $d > 0$ wie für T anstelle von T^*.

§6. Unitäre Operatoren. Projektoren

Wir beginnen mit einer geringfügigen Erweiterung des Begriffs der linearen Operatoren:

Definition II.6.1: *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ zwei Hilberträume. Eine Abbildung $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ heißt linearer Operator von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$, wenn*

$$V(\alpha x + \beta y) = \alpha V x + \beta V y$$

ist, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{H}$. V heißt beschränkter linearer Operator (von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$), wenn

$$||Vx||' \leq c||x||, \; x \in \mathcal{H},$$

mit einer nichtnegativen Konstante c. Dabei ist $||Vx||'$ die Norm in $\mathcal{H}'$, $||x||$ die Norm in $\mathcal{H}$. Bezeichnen wir die Skalarprodukte in $\mathcal{H}$ mit (x, y), $x, y \in \mathcal{H}$, und in $\mathcal{H}'$ mit $(x', y')', x', y' \in \mathcal{H}'$ so nennen wir einen beschränkten linearen Operator V (von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$) isometrisch, wenn

$$(Vf, Vg)' = (f, g), \; f, g \in \mathcal{H},$$

ist.

Wie in II.4. zeigt man: Ein linearer Operator V von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$ ist genau dann beschränkt, wenn $||V|| = \sup\limits_{\substack{f \in \mathcal{H}, \\ f \neq 0}} ||Vf||'/||f|| = \sup\limits_{\substack{f \in \mathcal{H}, \\ ||f||=1}} ||Vf||'$ endlich ausfällt, und dies wiederum ist äquivalent mit der Stetigkeit der Abbildung $V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$. Die beschränkten linearen Operatoren V von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$ können zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$ gemacht werden, indem man Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl in der üblichen Weise erklärt. Diesen Vektorraum bezeichnen wir mit $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, im Falle $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ (d.h. $||x|| = ||x||'$, $(x, y) = (x, y)', x, y \in \mathcal{H}$ mit $L(\mathcal{H})$.

Definition II.6.2: *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ Hilberträume. Sei $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ein beschränkter linearer Operator. U heißt unitär genau dann, wenn 1. U isometrisch ist, und 2. die Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ surjektiv ist*

Die Injektivität von U folgt aus der Isometrie. Im Falle $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ gilt für zwei unitäre Operatoren U_1, U_2, daß $(U_1 U_2 f, U_1 U_2 g) = (U_2 f, U_2 g) = (f, g)$ ist; außerdem ist $U_1 U_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ eine Bijektion und ein beschränkter linearer Operator, also selbst unitär. Ist $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär, so ist die Inverse U^{-1} ein überall erklärter beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ (Die Beschränktheit von U^{-1} folgt sofort aus $||Uf|| = ||f||$, $f \in \mathcal{H}$) Setzt man für $f, g \in \mathcal{H}$

$$f = U^{-1}\varphi,\ g = U^{-1}\psi,$$

so folgt aus $(Uf, Ug) = (f, g)$ die Beziehung $(\varphi, \psi) = (U^{-1}\varphi, U^{-1}\psi)$. Die unitären Operatoren $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bilden also eine Gruppe.

Wir geben ein **Beispiel:** Sei $\mathcal{H}'$ ein separabler Hilbertraum, sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}'$. Es ist leicht zu zeigen, daß l_2 durch die Festsetzung

$$((x_p), (y_p)) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \overline{y_p},\ (x_p), (y_p) \in l_2,$$

zu einem Hilbertraum wird, für den wir die Bezeichnung l_2 beibehalten. Aufgrund der Parsevalschen Gleichung folgt, daß die bereits in II.1 eingeführte Abbildung $I : \mathcal{H} = l_2 \to \mathcal{H}'$ unitär ist (Wir hatten schon in II.1 gezeigt, daß $((x_p), (y_p)) = (I(x_p), I(y_p))'$ ist). Dabei war I erklärt durch

$$(x_p) \longmapsto \sum_{p=1}^{\infty} x_p \varphi_p.$$

Einen beschränkten linearen Operator T' in $\mathcal{H}'$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T') = \mathcal{H}'$ konnten wir durch die Größen $T'_{ik} = (T'_{\varphi_k}, \varphi_i)'$, $i, k \in \mathbb{N}$, beschreiben. Definieren wir einen linearen Operator T in l_2 durch

$$(x_p) \longmapsto (\sum_{k=1}^{\infty} T'_{pk} x_k),$$

so haben wir damit einen in ganz $\mathcal{H} = l_2$ erklärten linearen beschränkten Operator T definiert, denn

$$\sum_{p=1}^{\infty} |\sum_{k=1}^{\infty} T'_{pk} x_k|^2 = ||T'_x||^2,$$

$$\leq c||x||^2,$$

$$= c \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

gemäß (II.4.1). Offenbar ist $I^{-1}T'x = TI^{-1}x$, also $T' = ITI^{-1}$ und $T = I^{-1}TI$ im Sinne des Hintereinanderausführens von Abbildungen. Dies gibt VEranlassung zur folgenden

Definition II.6.3: *Es seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ zwei Hilberträume, es seien T, T'*

zwei beschränkte lineare Operatoren in $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$ mit den Definitionsbereichen $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(T') = \mathcal{H}'$. Dann heißen T und T' unitär äquivalent, wenn es einen unitären Operator U von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}'$ gibt mit

$$T' = UTU^{-1}$$

oder, gleichbedeutend,

$$T = U^{-1}T'U.$$

Eine Rechtfertigung wird auch die folgende Bemerkung geliefert: Sei $Tx = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $x \in \mathcal{H}$. Dann ist $U^{-1}T'Ux = \lambda x$, also $T'Ux = \lambda Ux$, sofern T und T' unitär äquivalent sind im Sinne der vorhergehenden Definition. Insbesondere haben also T und T' dieselben Eigenwerte.

Ein Kriterium für Unitarität liefert der
Satz II.6.1: *Ein beschränkter linearer Operator V in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$ ist dann und nur dann unitär, wenn $VV^* = V^*V = I$ ist, wobei I die identische Abbildung in $\mathcal{H}$ ist.*

Beweis: Sei zunächst V unitär. Dann ist $(Vf, Vg) = (f, g) = (f, V^*Vg)$, $f, g \in \mathcal{H}$. Also ist $V^*V = I$. Nun ist V^{-1} auch unitär, wie wir in diesem Abschnitt schon gezeigt haben. Also ist $(f, V^*g) = (Vf, g) = (V^{-1}Vf, V^{-1}g) = (f, V^{-1}g)$, $V^* = V^{-1}$, $VV^* = I$. Nun sei umgekehrt $VV^* = V^*V = I$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} (V^*f, V^*g) &= (VV^*f, g) = (f, g), \\ (Vf, Vg) &= (V^*Vf, g) = (f, g), \end{aligned}$$

wobei wir Satz II.4.2 benutzt haben. Also sind V, V^* isometrisch. Nach Satz II.5.1 ist V^* der zu V inverse Operator, insbesondere ist $\mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$, V unitär. □

Wir haben gleichzeitig gezeigt, daß ein Operator $V \in L(\mathcal{H})$ dann und nur dann unitär ist, wenn $V^* = V^{-1}$ ist; dies wiederum ist äquivalent damit, daß V und V^* isometrisch sind.

Wir führen jetzt eine neue Klasse von Operatoren ein, die Projektoren. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz, der die schon behandelte Orthogonalzerlegung eines Hilbertraums betrifft (Satz II.2.1).

Hilfssatz II.6.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{M}$. Sei*

$$\text{(II.6.1)} \qquad f = f_1 + f_2,\ f \in \mathfrak{M}, f_2 \in \mathfrak{M}^{\perp}$$

die Zerlegung von $\mathcal{H}$ gemäß Satz II.2.1. Ordnen wir jedem $f \in \mathcal{H}$ das Element $f_1 \in \mathfrak{M}$ in der Zerlegung (II.6.1) zu, so ist dadurch ein linearer beschränkter Operator $P_{\mathfrak{M}} = P$ in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(P_{\mathfrak{M}}) = \mathcal{H}$ gegeben, der folgende Eigenschaften besitzt:

$$P_{\mathfrak{M}}^2 = P_{\mathfrak{M}},\ P_{\mathfrak{M}}^* = P_{\mathfrak{M}},\ \mathcal{R}(P_{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}.$$

Beweis: Die erste und dritte Eigenschaft sind klar. Seien $f, g \in \mathcal{H}$, $Pf = f_1$, $Pg = g_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} (Pf, g) &= (f_1, g_1), \\ (f, Pg) &= (f_1, g_1), \end{aligned}$$

also $(Pf, g) = (f, Pg)$, $f, g \in \mathcal{H}$, $P = P^*$. □

Dies Ergebnis verallgemeinern wir in der
Definition II.6.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, P ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(P) = \mathcal{H}$. P heißt ein Projektor (in $\mathcal{H}$ genau dann, wenn P hermitesch ist, d.h. $P^* = P$ gilt, und $P^2 = P$ ist.*

Bezüglich der soeben eingeführten Klasse der Projektoren gilt
Satz II.6.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, P ein Projektor in $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, und $\mathcal{H}$ hat die folgende Orthogonalzerlegung*

$$f = Pf + (f - Pf),\ f \in \mathcal{H},\ Pf \in \mathcal{R}(P),\ f - Pf \in \mathcal{R}(P)^{\perp}.$$

Beweis: Es ist klar, daß $\mathcal{R}(P)$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$ ist. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $\mathcal{R}(P)$. Sei (g_n) eine Folge aus $\mathcal{R}(P)$ mit $g_n \to g$, $n \to \infty$. Dann gibt es $f_n \in \mathcal{H}$ mit $g_n = Pf_n$, $n \in \mathbb{N}$. Also ist $Pg_n = P^2 f_n = Pf_n = g_n \to g$, $n \to \infty$. Nun haben wir, weil P beschränkt ist, $Pg_n \to Pg$, $n \to \infty$, also $g = Pg$, also $g \in \mathcal{R}(P)$. Weiter ist $(Pf, f - Pf) = (Pf, f) - (Pf, Pf) = (Pf, f) - (Pf, f) = 0$ wegen der Hermitizität von P. Mit der Eindeutigkeit der Zerlegung in Satz II.2.1 folgt der Satz. □

§7. Sesquilinearformen

Wir beginnen mit der Definition einer Sesquilinearform, die einem Operator zugeordnet ist.

Definition II.7.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Dann heißt die durch*

$$B(f, g) = (Tf, g), \; f, g \in \mathcal{H}$$

definierte Abbildung $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ die zu T gehörige Sesquilinearform.

Satz II.7.1: *Sei T ein linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. T ist dann und nur dann beschränkt, wenn für die zugehörige Sesquilinearform B gilt:*

$$\text{(II.7.1)} \qquad |B(f, g)| \leq c||f||||g||, \; f, g \in \mathcal{H},$$

mit einer nichtnegativen Konstante c. In diesem Fall ist $||T|| \leq c$.

Beweis: (II.7.1) folgt sofort aus der Beschränktheit von T. Gelte umgekehrt (II.7.1). Dann ist $|B(f, Tf)| = ||Tf||^2 \leq c||f||||Tf||$, also $||Tf|| \leq c||f||$, also $T \in L(\mathcal{H})$ und $||T|| \leq c$. □

Satz II.7.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein hermitescher linearer Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ im Sinne von Definition II.5.2. Sei $\mathcal{D}(H) = \mathcal{H}$. H ist beschränkt dann und nur dann, wenn für die zu H gehörige Sesquilinearform B gilt (c eine nichtnegative Konstante):*

$$\text{(II.7.2)} \qquad |B(f, f)| \leq c||f||^2, \; f \in \mathcal{H}.$$

In diesem Falle ist $||H|| \leq c$.

Beweis: Es gelte (II.7.2). Seien $f, g \in \mathcal{H}$. Dann ist $B(f+g, f+g) = (Hf + Hg, f + g) = (Hf, f) + (Hg, g) + (Hg, f) + (Hf, g) = (Hf, f) + (Hg, g) + 2\mathcal{R}e(Hf, g)$. Weiter gilt $B(f - g, f - g) = (Hf, f) + (Hg, g) - 2\mathcal{R}e(Hf, g)$. Also ist

$$\mathcal{R}e(Hf, g) = \frac{1}{4}[(H(f + g), f + g) - (H(f - g), f - g)],$$

$$|\mathcal{R}e(Hf, g)| \leq \frac{c}{4}(||f + g||^2 + ||f - g||^2),$$

sofern (II.7.2) vorausgesetzt wird. Hieraus folgt

$$|\mathcal{R}e(Hf,g)| \leq \frac{c}{4}(2||f||^2 + 2||g||^2) = \frac{c}{2}(||f||^2 + ||g||^2)$$

Sei $||f|| = ||g|| = 1$. Dann ist also

$$|\mathcal{R}e(Hf,g)| \leq c,$$

woraus im allgemeinen Fall $|\mathcal{R}e(H\frac{f}{||f||}, \frac{g}{||g||})| \leq c$, $f, g \in \mathcal{H}-\{0\}$, und endlich

$$|\mathcal{R}e(Hf,g)| \leq c||f||||g||, \; f, g \in \mathcal{H},$$

folgt. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\mathcal{R}e(Hf, \overline{\alpha}g) = \mathcal{R}e(\alpha(Hf,g))$. Halten wir $f, g \in \mathcal{H}$ fest und bestimmen α so, daß $|\alpha| = 1$ und $\alpha(Hf,g) = |(Hf,g)|$ sind. Dann ist

$$\begin{aligned} |(Hf,g)| &= \mathcal{R}e(\alpha(Hf,g)) = \mathcal{R}e(Hf, \overline{\alpha}g), \\ &\leq |\mathcal{R}e(Hf, \overline{\alpha}g)| \leq c||f||||\overline{\alpha}g|| = c||f||||g|| \end{aligned}$$

Satz II.7.1 liefert jetzt die Beschränktheit von H und $||H|| \leq c$. Ist umgekehrt H beschränkt, etwa $||H|| \leq c$, so folgt trivialerweise $|(Bf,f)| \leq c||f||^2$. □

Definition II.7.2: *Eine Abbildung $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, heißt Sesquilinearform genau dann, wenn*

$$\begin{aligned} B(c_1f_1 + c_2f_2, g) &= c_1B(f_1,g) + c_2B(f_2,g), \\ B(f, c_1g_1 + c_2g_2) &= \bar{c}_1B(f,g_1) + \bar{c}_2B(f,g_2), \end{aligned}$$

$f, g, f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{H}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, ist. Die Sesquilinearform B heißt hermitesch, wenn

$$B(f,g) = \overline{B(g,f)}, \; f, g \in \mathcal{H},$$

ist, sie heißt beschränkt, wenn

$$|B(f,g)| \leq c||f||||g||, \; f, g \in \mathcal{H},$$

ist.

Satz II.7.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, B eine beschränkte Sesquilinearform in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau einen beschränkten linearen Operator T in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ derart, daß*

$$B(f,g) = (f, Tg), f, g \in \mathcal{H}.$$

Die oben eingeführte Sesquilinearform ist dann und nur dann hermitesch, wenn T es ist.

Beweis: Sei $g \in \mathcal{H}$ fest und

$$L_g(f) = B(f, g), \; f \in \mathcal{H}.$$

Dann ist dadurch ein lineares Funktional L_g gegeben, das wegen $|L_g(f)| \leq c||g||||f||$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet (Satz II.3.1) gibt es genau ein $g^* \in \mathcal{H}$ mit

$$L_g(f) = (f, g^*) = B(f, g).$$

Nun ordnen wir g das eindeutig bestimmte Element g^* zu und haben zu zeigen, daß dadurch ein beschränkter linearer Operator T in $\mathcal{H}$ erklärt ist. Für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $g_1, g_2 \in \mathcal{H}$ ist

$$\begin{aligned} L_{c_1 g_+ c_2 g_2}(f) &= (f, (c_1 g_1 + c_2 g_2)^*), \\ &= B(f, c_1 g_1 + c_2 g_2), \\ &= \bar{c}_1 B(f, g_1) + \bar{c}_2 B(f, g_2), \\ &= \bar{c}_1 (f, g_1^*) + \bar{c}_2 (f, g_2^*), \\ &= (f, c_1 g_1^* + c_2 g_2^*), \; f \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

so daß $(c_1 g_1 + c_2 g_2)^* = c_1 g_1^* + c_2 g_2^*$ wird. Damit ist die Zuordnung $g \longmapsto g^*$ als linearer Operator T in $\mathcal{H}$ erkannt mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Wegen $|(f, Tg)| \leq c||f||||g||$ folgt für $f = Tg$ die Ungleichung $||Tg|| \leq c||g||$, also $||T|| \leq c$. Daß T eindeutig bestimmt ist, ist trivial. Sei T hermitesch. Dann ist $(f, Tg) = (Tf, g) = \overline{(g, Tf)}$, also $B(f, g) = \overline{B(g, f)}$, also ist B hermitesch. Wenn B hermitesch ist, so ist $(f, Tg) = B(f, g) = \overline{B(g, f)} = \overline{(g, Tf)} = (Tf, g)$, $f, g \in \mathcal{H}$. Also ist T hermitesch. $\square$

Für die Anwendungen wichtig ist der folgende Satz von Lax und Milgram.
Satz II.7.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine beschränkte Sesquinearform, d.h.*

$$|B(f, g)| \leq b||f||||g||, \; f, g \in \mathcal{H}, \tag{II.7.3}$$

mit einer Konstanten $b > 0$. Weiter sei B auch nach unten beschränkt, d.h.

$$|B(f, f)| \geq a||f||^2, \; f \in \mathcal{H},$$

mit einer Konstanten $a > 0$. Sei L ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ derart, daß

$$L(f) = B(f, g), f \in \mathcal{H}. \tag{II.7.4}$$

Beweis: Zunächst folgt aus Satz II.7.3, daß

$$B(u, v) = (u, Tv), u, v \in \mathcal{H},$$

ist mit einem beschränkten linearen Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Aus (II.7.4) ergibt sich

$$|(Tf, f)| \geq a||f||^2,\ f \in \mathcal{H},$$

also mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $||Tf|| \geq a||f||$, $f \in \mathcal{H}$. Ebenso folgt $||T^*f|| \geq a||f||$, $f \in \mathcal{H}$. Also hat die Gleichung $T^*f = 0$ nur die Lösung $f = 0$. Satz II.5.1 liefert den inversen Operator T^{-1}, der beschränkt und in ganz $\mathcal{H}$ definiert ist ($||T^{-1}|| \leq 1/a$). Nach Riesz-Fréchet (Satz II.3.1) gibt es ein und nur ein $h \in \mathcal{H}$ mit $L(f) = (f, h)$, $f \in \mathcal{H}$. Setzt man $g = T^{-1}h$, so folgt

$$L(f) = (f, h) = (f, Tg) = B(f, g),\ f \in \mathcal{H}.$$

Daß g eindeutig bestimmt ist, ist eine Konsequenz aus $0 = B(f, g - g')$, $f \in \mathcal{H}$, und (II.7.4), sofern g, g' zwei Elemente aus $\mathcal{H}$ sind, die das Gewünschte leisten. □

§8. Das Theorem von Fourier-Plancherel

Eins der wichtigsten Beispiele für einen unitären Operator ist die Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sie verwandelt die Operation der Differentiation in eine algebraische Operation. Sei $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ oder $C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dann bezeichnet man

$$Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy$$

als die Fouriertransformierte von f. Dabei ist

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k, \; x, y \in \mathbb{R}^n,$$

gesetzt. Es ist leicht zu sehen ([Forster, Analysis 3, Satz von Gauß), daß

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \frac{\partial}{\partial y_j} f(y)dy = ix_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy, \text{ also}$$

$$T\frac{\partial}{\partial y_j} f = ix_j Tf$$

ist, sofern $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ist. Wir wollen zunächst die Fouriertransformierte einer Treppenfunktion, also einer Funktion f mit kompaktem Träger studieren. Es ist unmittelbar klar, daß das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy$ einen Sinn macht. Zunächst wird ein Hilfssatz in der Dimension 1 bewiesen.

Hilfssatz II.8.1: *Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, sei*

$$\chi_{[a,b](x)} = \left[\begin{array}{ll} 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{array} \right.$$

Dann ist

$$T\chi_{[a,b]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} \chi_{[a,b]}(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-ix)}(e^{-ibx} - e^{-iax}),$$

$T\chi_{[a,b]}$ ist aus $L^2(\mathbb{R})$, und für das $L^2(\mathbb{R})$-Skalarprodukt

$$I(a, b, c, d) = \int_{-\infty}^{\infty} T\chi_{[a,b]}(y)\overline{T\chi_{[c,d]}(y)}dy, \; a \leq b, c \leq d,$$

gilt

$$I(a, b, c, d) = \left[\begin{array}{ll} 0 & \textit{wenn } [a, b], [c, d] \textit{ höchstens Randpunkte gemeinsam haben} \\ b - a, & \textit{wenn } [a, b] = [c, d] \textit{ ist.} \end{array} \right.$$

Beweis: Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} T\chi_{[a,b]}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-ixy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ixy}}{-ix}\right]_a^b \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-ix)}\left(e^{-ixb}-e^{-iax}\right) \end{aligned}$$

Wegen $|e^{-ixb}| = |e^{-ixa}| = 1$, $x \in \mathbb{R}$, existieren die Integrale $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} |T_{\chi[a,b]}(y)|^2 dy$, $\int_{\varepsilon}^{+\infty} |T_{\chi[a,b]}(y)|^2 dy$ für alle $\varepsilon > 0$. Nun ist $|e^{-ixb} - e^{-iax}|^2 = -e^{-ix(b-a)} - e^{ix(b-a)} + 2 = 2 - 2\mathcal{R}e e^{ix(b-a)} = 2 - 2\cos(b-a)x$. Wegen

$$\frac{1}{x^2}(2\cos(b-a)x - 2) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(b-a)^{2k}}{(2k!)}(-1)^k x^{2(k-1)}$$

existiert auch $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |T_{\chi_{[a,b]}}(y)|^2 dy$. Also ist $T_{\chi_{[a,b]}}\overline{T_{\chi[c,d]}} \in L^1(\mathbb{R})$. Für $I(a,b,c,d)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} I(a,b,c,d) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x^2}(e^{i(d-b)x} - e^{i(d-a)x} - e^{i(c-b)x} + e^{i(c-a)x})dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1}{x^2}(e^{i(d-b)x} - e^{i(d-a)x} - e^{i(c-b)x} + e^{i(c-a)x})dx, \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left(\frac{e^{i(d-b)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(d-a)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(c-b)x}-1}{x^2} + \right. \\ &\quad \left.\frac{e^{i(c-a)x}-1}{x^2}\right)dx + \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\frac{e^{i(d-b)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(d-a)x}-1}{x^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{i(c-d)x}-1}{x^2} + \frac{e^{i(c-a)x}-1}{x^2}\right)dx. \end{aligned}$$

Nun ist $\int_{-\varepsilon}^{-\delta}(1/x^2)(e^{ihx}-1)dx + \int_{\delta}^{\varepsilon}(1/x^2)(e^{ihx}-1)dx = \int_{\delta}^{\varepsilon}(1/x^2)(2\cos hx - - 2)dx < \rho$, $\varepsilon, \delta < \varepsilon_0(\rho), \delta_0(\rho)$, $h \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \varepsilon$. Greifen wir wieder auf die Reihenentwicklung für $\cos(hx)$ zurück, so erkennen wir, daß nach dem Cauchy-Kriterium für $h \in \mathbb{R}$ der Grenzwert

$$⨍_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ihx}-1}{x^2}dx := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ \varepsilon>0}}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{e^{ihx}-1}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{e^{ihx}-1}{x^2}dx\right)$$

existiert, und wir erhalten die Formel

$$\begin{aligned} 2\pi I(a,b,c,d) &= ⨍_{-\infty}^{+\infty}[(e^{i(d-b)x}-1)/x^2]dx - ⨍_{-\infty}^{+\infty}[(e^{i(d-a)x}-1)/x^2]dx - \\ &\quad - ⨍_{-\infty}^{+\infty}[(e^{i(c-b)x}-1)/x^2]dx + ⨍_{-\infty}^{+\infty}[(e^{i(c-a)x}-1)/x^2]dx. \end{aligned}$$

Durch Zurückgehen auf die Definition von $\oint_{-\infty}^{+\infty}[(e^{ihx}-1)/x^2]dx$ sieht man sofort, daß

$$\oint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ihx}-1}{x^2}dx=\oint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i|h|x}-1}{x^2}dx=|h|\oint_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-1}{t^2}dt$$

ist, wobei die letzte Gleichung durch Anwendung der Substitution $t=|h|x$ sowohl auf $\int_{-\infty}^{-\varepsilon}(e^{ihx}-1)/x^2dx$ als auch auf $\int_{\varepsilon}^{+\infty}[(e^{ihx}-1)/x^2]dx$ folgt. Setzen wir also $\alpha=\oint_{-\infty}^{+\infty}[(e^{it}-1)/t^2]dt$, so folgt

$$2\pi I(a,b,c,d)=\alpha(|d-b|-|d-a|-|c-b|+|c-a|).$$

Mit dieser Formel läßt sich bereits der Fall behandeln, daß $[a,b]$ und $[c,d]$ nur Randpunkte gemeinsam haben. Dann ist $a\le b\le c\le d$ oder $c\le d\le a\le b$. Im ersten Fall erhält man $2\pi I(a,b,c,d)=\alpha\cdot((d-b)-(d-a)-(c-b)+(c-a))=0$. Eine analoge Rechnung liefert auch im zweiten Fall $2\pi I(a,b,c,d)=0$; also haben wir die Behauptung des Hilfssatzes im Fall, daß $[a,b]$ und $[c,d]$ höchstens Randpunkte gemeinsam haben, bewiesen. Im Fall $[a,b]=[c,d]$, i.e. $a=c$, $b=d$ liefert unsere Formel für $2\pi I(a,b,c,d)$ die Beziehung

$$\begin{aligned}2\pi I(a,b,c,d)&=\alpha(-2(b-a))=-2\alpha(b-a);\ \text{also}\\ I(a,b,c,d)&=-\frac{\alpha}{\pi}(b-a).\end{aligned}$$

Zur Vollendung des Beweises habn wir $\oint_{-\infty}^{+\infty}[(e^{it}-1)/t^2]dt=-\pi$ zu zeigen. Dies geschieht mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (II.3 in meiner Vorlesung Analysis IV (Funktionentheorie)). Wir wählen als Integrationsweg die im folgenden skizzierte Kurve l_ε mit den in der Figur näher bezeichneten Kurvenstücken $l_{\varepsilon,R},l_{R,R},l_{-R,-\varepsilon},l_{\varepsilon,\varepsilon}$: Es ist $0<\varepsilon<R$,

Die Funktion $f(z)=(e^{iz}-1)/z^2$ ist in $\mathbb{C}-\{0\}$ holomorph. Die dort gültige Reihenentwicklung

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!},\\ &=\frac{i}{z}+\sum_{k=2}^{\infty}i^k\frac{z^{k-2}}{k!},\end{aligned}$$

zeigt, daß f in $z=0$ einen Pol der Ordnung 1 mit dem Residuum i besitzt. Zunächst ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\begin{aligned}\int_{l_\varepsilon} f(z)dz = 0 &= \int_{l_{-R,-\varepsilon}} f(z)dz + \int_{l_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{l_{R,R}} f(z)dz + \int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)dz,\\ &= \int_{-R}^{-\varepsilon}[(e^{ix}-1)/x^2]dx + \int_{\varepsilon}^{R}[(e^{ix}-1)/x^2]dx +\\ &\quad + \int_{l_{R,R}} f(z)dz + \int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)dz.\end{aligned}$$

Wegen $\int_{l_{R,R}} |f(z)||dz| \leq \pi R \frac{2}{R^2}$ folgt: $\lim_{R\to\infty}\int_{l_{R,R}} f(z)dz = 0$. Also ist $\int_{-\infty}^{-\varepsilon}[(e^{ix}-1)/x^2]dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}[(e^{ix}-1)/x^2]dx = -\int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)dz$. Mit Hilfe der Reihenentwicklung für f sieht man sofort

$$\lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)dz = -\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}} \frac{1}{z}dz,$$

sofern der Grenzwert rechts existiert. Dies ist in der Tat der Fall, dann mit der Parametrisierung $z = \varepsilon e^{i\varphi}$ folgt $\int_{l_{\varepsilon,\varepsilon}}(1/z)dz = -\int_0^{\pi}(\varepsilon i e^{i\varphi}/\varepsilon e^{i\varphi})d\varphi = -i\pi$; man beachte, daß $l_{\varepsilon,\varepsilon}$ im negativen Sinn durchlaufen wird. Damit folgt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}[(e^{ix}-1)/x^2]dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty}[(e^{ix}-1)/x^2]dx\Big) = -\pi, \text{ also}$$

$$\oint_{-\infty}^{+\infty}[(e^{it}-1)/t^2]dt = -\pi,$$

was zu zeigen war. □

Der Fall der charakteristischen Funktion eines n-dimensionalen achsenparallelen Quaders wird durch Reduktion auf den eindimensionalen Fall behandelt. Wir betrachten einen n-dimensionalen achsenparallelen Quader

$$\overline{Q} = \{x | a_j \leq x_j \leq b_j,\ 1 \leq j \leq n\}.$$

Q ist der offene Kern von $\overline{Q}$. Zerlegen wir jedes Intervall $\overline{I}_j = [a_j, b_j]$ in Intervalle

$$[a_j^{k_j}, b_b^{k_j}],\ k_j = 1,\dots,p_j,\ \text{d.h.}$$

$$[a_j, b_j] = \bigcup_{j=1}^{p_j}[a_j^{k_j}, b_j^{k_j}]$$

$$(a_j^{k_j}, b_j^{k_j}) \cap (a_j^{k_j'}, b_j^{k_j'}) = \emptyset,$$

$$k_{j2}k_j' = 1,\dots,p_j,\ k_j \neq k_j',$$

so erhalten wir eine Zerlegung von $\overline{Q}$, d.h.

$$\overline{Q} = \bigcup_{\substack{k=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n,\\ 1\le k_j\le p_j,\ j=1,\ldots,n}} \overline{I_k},$$

wobei $\overline{I}_k = \overline{I_{k_1}} \times \ldots \times \overline{I_{k_n}}$ gesetzt ist; seien $k, k' \in \mathbb{N}^n$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k' = (k'_1, \ldots, k'_n)$, $1 \le k_j, k'_j \le p_j$ und es sei $k \ne k'$; dann ist

$$I_k \cap I_{k'} = \emptyset,$$

wenn $I_k, I_{k'}$ die offenen Kerne von $\overline{I_k}, \overline{I_{k'}}$ bezeichnen. Mit diesen Bezeichnungen gilt

Hilfssatz II.8.2: *Sei*

$$\chi_{\overline{I_k}}(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & x \in \overline{I_k} \\ & \\ 0, & \text{sonst}, \end{array}\right.$$

$k \in \mathbb{N}^n$, $1 \le k_j \le p_j$, $j = 1, \ldots, n$, sei

$$T\chi_{\overline{I_k}}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \chi_{\overline{I_k}}(y) dy.$$

Dann ist $T\chi_{\overline{I_k}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und für zwei Multiindizes $k, l \in \mathbb{N}^n$ mit $1 \le k_j, l_j \le p$, $j = 1, \ldots, n$ gilt die folgende Formel für das $L^2(\mathbb{R}^n)$-Skalarprodukt

$$\begin{aligned} (T\chi_{\overline{I_k}}, T\chi_{\overline{I_l}} &= \left[\begin{array}{l} 0, \text{ falls } k \ne l \text{ ist}, \\ \prod_{j=1}^n (b_j^{k_j} - a_j^{k_j}), \text{ falls } k = l \text{ ist}, \end{array}\right. \\ &= \left[\begin{array}{l} 0, \text{ falls } k \ne l \text{ ist}, \\ (\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}}, \text{ falls } k = l \text{ ist}, \end{array}\right. \\ &= (\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}}). \end{aligned}$$

Beweis: Offenbar ist

$$\begin{aligned} T\chi_{\overline{I}_k}(x) &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_j y_j} \chi_{[a_j^{k_j}, b_j^{k_j}]}(y) dy\right) \\ &= \prod_{j=1}^n T\chi_{[a_j^{k_j}, b_j^{k_j}]}(x_j) \end{aligned}$$

(Vgl. die Rechnungen am Ende von II.1 zum Nachweis der Vollständigkeit des Orthonormalsystem $e^{i\kappa\cdot x}$, $\kappa \in \mathbb{Z}^n$, in $L^2(Q)$). Der Satz von Fubini-Tonelli zeigt mit Hilfssatz II.8.1, daß $T\chi_{\overline{I_k}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Für das Skalarprodukt liefert die obige Formel

$$(T\chi_{\overline{I_k}}, T\chi_{\overline{I_l}} = \prod_{j=1}^{n}(T\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}, T\chi_{[a_j^{l_j},b_j^{l_j}]}),$$

wobei jetzt hinter dem Produktzeichen die $L^2(\mathbb{R})$-Skalarprodukte von $T\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}$ mit $T\chi_{[a_j^{l_j},b_j^{l_j}]}$ stehen. Wenn $k \neq l$ ist, so gibt es ein j_0 mit $k_{j_0} \neq l_{j_0}$. In diesem Fall haben $[a_{j_0}^{k_{j_0}}, b_{j_0}^{k_{j_0}}]$ und $[a_{j_0}^{l_{j_0}}, b_{j_0}^{l_{j_0}}]$ keine inneren Punkte gemeinsam, nach Hilfssatz II.8.1 verschwindet der j_0-te Faktor im letzen Produkt und damit das gesamte Produkt. Nochmalige Anwendung von Hilfssatz II.8.1 im Fall $k = l$ liefert die erste Formel für $(T\chi_{\overline{I_k}}, T\chi_{\overline{I_l}})$. Wegen

$$(\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}}) = \prod_{j=1}^{n}(\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}, \chi_{[a_j^{l_j},b_j^{l_j}]}),$$

$$(\chi_{[a,b]}, \chi_{[c,d]}) = \left[\begin{array}{l} 0, \text{ falls } (a,b) \cap (c,d) = \emptyset, \\ \\ b-a, \text{ falls } a = c, b = d, \end{array}\right.$$

folgen nun auch die letzten beiden Formeln. □

Nun betrachten wir Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ bezüglich einer Zerlegung $\mathfrak{Z} = \{\overline{I_k} | k \in \mathbb{N}^n,\ 1 \leq k_j, p_j, j = 1, \ldots, n\}$ wie wir sie vorhin eingeführt hatten. Darunter verstehen wir Funktionen

$$\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^n, \\ 1 \leq k_j \leq p_j, j=1,\ldots,n}} c_k \chi_{I_k},$$

wobei die c_k komplexe Konstanten sind. Wir setzen

$$T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{N}^n, \\ 1 \leq k_j \leq p_j,\, j=1,\ldots,n}} c_k T\chi_{\overline{I_k}}.$$

Dann folgt aus Hilfssatz II.8.2 sofort, daß

$$\text{(II.8.1)} \qquad (T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}}, T\mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}}) = (\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}}, \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}})$$

ist, wenn $\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}}, \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}}$ Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ bezüglich derselben Zerlegung $\mathfrak{Z}$ sind. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig, außerhalb $\overline{Q}$ verschwinde f identisch. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}_\varepsilon$ von Q und eine Treppenfunktion $\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\varepsilon}$ derart, daß

$$\sup_{x \in \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}^n,\\ 1\le k_j\le p_j, j=1,\ldots,n}} I_k} |f(x) - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\varepsilon}| < \varepsilon/|Q|^{1/2}$$

ist, also insbesondere $||f - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_E}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ ausfällt.

Hilfssatz II.8.3: *Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, f verschwinde außerhalb des achsenparallelen Quaders Q. Seien $(\mathfrak{z}_\nu), (\mathfrak{z}'_\nu)$ Folgen von Zerlegungen vonvon Q, seien $(\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}), (\mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu})$. Folgen von Treppenfunktionen $\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}, \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}$ in $\overline{Q}$ bezüglich der Zerlegungen $\mathfrak{Z}_\nu, \mathfrak{Z}'_\nu$. Es gelte*

$$||f - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ \nu \to \infty,$$

$$||f - \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Dann haben wir auch

$$T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} - T\mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Beweis: Nehmen wir die gemeinsame Verfeinerung $\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu$ von $\mathfrak{Z}_\nu$ und $\mathfrak{Z}'_\nu$. Dann ist (die genaue Bedeutung wird am Ende des Beweises erklärt)

$$\text{(II.8.2)} \qquad \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}(x) = \mathfrak{t}_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu}(x),$$

$$\text{(II.8.3)} \qquad \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}(x) = \mathfrak{t}'_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu}(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Aus (II.8.1) folgt

$$||T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} - T\mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||T\mathfrak{t}_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu} - T\mathfrak{t}'_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

$$= ||\mathfrak{t}_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu} - \mathfrak{t}'_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}'_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

$$= ||\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} - \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

woraus der Hilfssatz folgt. Mit (II.8.2) meinen wir natürlich folgendes: Wenn

$$\mathfrak{t}_{Q,\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n\\ 1\le k_j\le \widetilde{p}_j^{(\nu)},\ j=1,\ldots,n}} \widetilde{c}_k^{(\nu)} \chi_{\widetilde{I}_k^{(\nu)}}$$

ist, wobei $\widetilde{\mathfrak{Z}}_\nu = \{\overline{\widetilde{I}_k^\nu} | k \in \mathbb{N}^n,\ 1 \le k_j \le \widetilde{p}_j^{(\nu)},\ j = 1, \ldots, n\}$ und $\widetilde{c}_k^{(\nu)} = \mathfrak{t}_{Q,\zeta_\nu}|(\widetilde{I}_k^{(\nu)} - \mathcal{R}_\nu)$, $\mathcal{R}_\nu$ die Vereinigung aller Ränder aller Elemente $I_k^{(\nu)}$ von

$\mathfrak{Z}_\nu$ ist, so ist $\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}(x) = \mathfrak{t}_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}(x)$ fast überall in $\mathbb{R}^n$; für (II.8.3) gilt entsprechendes. $\square$

Somit ergibt die folgende Definition, die jedoch wegen ihrer Abhängigkeit von Q nur vorläufig ist und daher nicht numeriert wird, einen Sinn: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig und verschwinde außerhalb eines achsenparallelen Quaders $\overline{Q}$ identisch. Sei $(\mathfrak{t}_{Q\mathfrak{Z}_\nu})$ eine Folge von Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ bezüglich der Zerlegungen $\mathfrak{Z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ mit

$$||f - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ \nu \to \infty.$$

Dann setzen wir

$$Tf = \lim_{\nu\to\infty} T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} \tag{II.8.4}$$

sin $L^2(\mathbb{R}^n)$ Sinn. Zunächst existiert der letzte Grenzwert, denn nehmen wir die Zerlegungen $\mathfrak{Z}_\nu, \mathfrak{Z}_n$, bilden ihre gemeinsame Verfeinerung $\mathfrak{Z}_{\nu\mu}$ und setzen im Sinn von (II.8.2), (II.8.3) $\mathfrak{t}^\nu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}} = \mathfrak{t}^\nu_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}, \mathfrak{t}^\mu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}} = \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\mu}$, so folgt mit (II.8.1)

$$||T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} - T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\mu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||T\mathfrak{t}^\nu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}} - T\mathfrak{t}^\mu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

$$= ||\mathfrak{t}^\nu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}} - \mathfrak{t}^\mu_{Q,\mathfrak{Z}_{\nu\mu}}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu} - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\mu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

Daher bilden die $T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und sind demnach konvergent. Die Unabhängigkeit des Grenzwertes in (II.8.4) von der Auswahl der Folge $(\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu})$ wird durch Hilfssatz II.8.3 garantiert. Um uns von der Abhängigkeit von Q zu befreien beweisen wir

Hilfssatz II.8.4: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig und verschwinde außerhalb eines achsenparallelen Quaders $\overline{Q}$ identisch. Dann gilt für die in (II.8.4) eingeführte Funktion Tf die Formel*

$$Tf(x) = \tfrac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy. \tag{II.8.5}$$

Darüberhinaus ist Tf unendlich oft stetig differenzierbar. Für irgendeinen Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt die Abschätzung

$$|D^\alpha Tf(x)| \le \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} ||y^\alpha f||_{L^1(Q)},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$,

$$y_\alpha = \prod_{j=1}^{n} y_j^{\alpha j}$$

sind.

Beweis: Sei $(\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}$ eine Folge von Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ bezüglich der Zerlegungen $\mathfrak{Z}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, mit $f = \lim_{\nu\to\infty} A_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}$, $Tf = \lim_{\nu\to\infty} T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}$. Dann ist

$$|T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}(x) - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy|$$

$$\leq (|Q|^{\frac{1}{2}}/(\sqrt{2\pi})^n)||f - \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, x \in \mathbb{R}^n,$$

woraus der erste Teil des Hilfssatzes folgt, da eine Teilfolge von $(T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu})$ fast überall in $\mathbb{R}^n$ gegen Tf konvergiert ([Forster, Analysis 3, S. 96]). Der zweite Teil des Hilfssatzes folgt aus [Forster, Analysis 3, S. 98,99] und der sich aus diesem Zitat ergebenden Formel

$$D^\alpha Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \prod_{j=1}^{n}(-iy_j)^{\alpha_j} f(y)dy.$$

□

Hilfssatz II.8.4 zeigt, daß die Definition (II.8.4) auch unabhängig von Q ist. Unsere bisherigen Ergebnisse fassen wir zusammen in

Hilfssatz II.8.5: Sei $\mathcal{D}(T)$ derjenige Teilraum von $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, der aus allen stetigen Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger besteht. $\mathcal{D}(T)$ ist dicht in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Auf $\mathcal{D}(T)$ ist durch

$$Tf = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy$$

eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ gegeben. Es gilt

$$(Tf, Tg) = (f, g),\ f, g \in \mathcal{D}(T).$$

Durch Abschließung wird T zu einem linearen Operator $\overline{T} \in L(\mathcal{H})$ für den

$$(\overline{T}f, \overline{T}g) = (f, g),\ f, g \in \mathcal{H},$$

gilt, der also isometrisch ist. Für $f \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft, daß f außerhalb eines achsenparallelen Quaders $\overline{Q}$ fast überall verschwindet, gilt

(II.8.6) $$\overline{T}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y)dy$$

fast überall in $\mathbb{R}^n$. $\overline{T}f$ *ist beliebig of stetig differenzierbar auf* $\mathbb{R}^n$ *und für irgendeinen Multiindex* $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ *gilt die Abschätzung*

$$|D^\alpha \overline{T}f(x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} ||y^\alpha f||_{L^1(Q)}$$

Insbesondere ist für die früher eingeführten Funktionen $T\chi_{\overline{I}_k}$ *und* $T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}}$,

$$\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}^n,\\ 1\leq k_j\leq p_j, j=1,\ldots,n}} c_k \chi I_k$$

auch $\overline{T}\chi_{\overline{I_k}} = T\chi_{\overline{I_k}}$, $\overline{T}\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}} = T\mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}}$.

Beweis: Daß $\mathcal{D}(T)$ linearer Teilraum von $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, ist klar. Die Dichtheit von $\mathcal{D}(T)$ in $\mathcal{H}$ wurde in [Forster, Analysis 3, S. 92] bewiesen. Die Linearität von T bedarf keines Beweises. Seien $f, g \in \mathcal{D}(T)$,

$$\begin{aligned} f &= \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{t}_{Q,\mathfrak{Z}_\nu}, \\ g &= \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{t}'_{Q,\mathfrak{Z}'_\nu}. \end{aligned}$$

Indem wir (II.8.2) und (II.8.3) benutzen, erhalten wir $f = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{t}_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}$, $g = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{t}'_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}$, $Tf = \lim_{\nu\to\infty} T\mathfrak{t}_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}$, $Tg = \lim_{\nu\to\infty} T\mathfrak{t}'_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}$,

$$\begin{aligned} (Tf, Tg) &= \lim_{\nu\to\infty} (T\mathfrak{t}_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}, T\mathfrak{t}'_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}) \\ &= \lim_{\nu\to\infty} (\mathfrak{t}_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}, \mathfrak{t}'_{Q,\tilde{\mathfrak{Z}}_\nu}) \\ &= (f, g), \end{aligned}$$

wobei wir (II.8.1) benutzt haben. Diese Relation bleibt bei Bildung der Abschließung $\overline{T}$ gemäß Satz II.4.1 erhalten. Sei nun $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wie im Satz beschrieben. Sei Q' ein weiterer offenerachsenparalleler Quader mit $\overline{Q} \subset Q'$. Dann gibt es nach [Forster, Analysis 3, S. 23] eine Funktion $\zeta \in C_0^\infty(Q')$ mit $\zeta|\overline{Q} \equiv 1$. Sei (φ_ν) eine Folge von Funktionen aus $C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit $||f - \varphi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$, $\nu \to \infty$.

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\nu - f|^2 dx = \int_Q |\varphi_\nu - f|^2 dx + \int_{\mathbb{R}-Q} |\varphi_\nu|^2 dx,\ \nu \in \mathbb{N},$$

folgt $||\varphi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^n-Q)} \to 0,\ \nu \to \infty$. Also ist $(||\zeta\varphi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^n-Q)})$ eine Nullfolge und die Größen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta\varphi_\nu - f|^2 dx = \int_Q |\varphi_\nu - f|^2 dx + \int_{\mathbb{R}-Q} |\zeta\varphi_\nu|^2 dx$$

konvergieren ebenfalls gegen Null, wenn $\nu \to \infty$. Nun ist

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}(f(y) - \zeta(y)\varphi_\nu(y))dy| \leq (|Q'|^{1/2}/(\sqrt{2\pi})^n)||f - \zeta\varphi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^n)}, x \in \mathbb{R}^n.$$

Gleichzeitig ist $||\overline{T}f - T\zeta\varphi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0,\ \nu \to \infty$, so daß eine Teilfolge von $(T\zeta\varphi_\nu)$ fast überall gegen $\overline{T}f$ konvergiert. Nach (II.8.6) ist somit in der Tat

$$\overline{T}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y) dy$$

fast überall in $\mathbb{R}^n$. Die Aussagen betreffend die Differenzierbarkeit von $\overline{T}f$ folgen wie schon im Beweis von Hilfssatz II.8.4 aus [Forster, Analysis 3, S. 98, 99]. Der letzte Teil des Hilfssatzes ist eine Konsequenz aus (II.8.6). □

Unser nächstes Ziel ist das Studium der Adjungierten $\overline{T}^*$ von T. Wir behalten die Bezeichnungen aus Hilfssatz II.8.5 bei und setzen

(II.8.7) $\qquad Sf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} f(y) dy,\ f \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S).$

Dann ist

$$Sf(x) = \overline{T\overline{f}(x)},\ f \in \mathcal{D}(T) = D(S).$$

Infolgedessen ist S ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(S)$, den wir durch Abschließung auf $\mathcal{H}$ fortsetzen. Die Abschließung wird mit $\overline{S}$ bezeichnet. Wir haben

$$\begin{aligned}
(Sf, Sg) &= (\overline{T\overline{f}}, \overline{T\overline{g}},\ f, g \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S) \\
&= \overline{(T\overline{g}, T\overline{f})}, \\
&= (T\overline{g}, T\overline{f}) \\
&= (\overline{g}, \overline{f}) = \overline{(\overline{f}, \overline{g})} = \overline{(\overline{f}, \overline{g})} = (f, g)
\end{aligned}$$

und somit auch

$$(\overline{S}f, \overline{S}g) = (f, g), f, g \in \mathcal{H}.$$

Auch $\overline{S}$ ist also isometrisch. Weiter ist

$$\begin{aligned}(Tf, g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y) dy \cdot \overline{g}(x) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} \overline{g}(x) dx dy\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini-Tonelli, wobei $f, g \in \mathcal{D}(T)$ sind. Also ist $(Tf, g) = (f, Sg)$, $f, g \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$, und somit auch

$$\begin{aligned}(\overline{T}f, g) &= f(\overline{S}g),\ f, g \in \mathcal{H}, \\ \overline{T}^* &= \overline{S}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $(\overline{T} * \overline{T}f, g) = (\overline{T}f, \overline{T}g) = (f, g) = (\overline{S}f, \overline{S}g) = (\overline{S}^*\overline{S}f, g) = (\overline{T}\,\overline{T}^* f, g)$, $f, g \in \mathcal{H}$, so daß nach Satz II.6.1 der Operator T unitär ist. Wir schließen unsere Erörterungen mit dem folgenden Satz ab:

Satz II.8.1 (Theorem von Fourier-Plancherel): *Der in Hilfssatz II.8.5 eingeführte Operator $\overline{T}$ heißt die Fourier-Transformation. $\overline{T}$ ist unitär, eine Adjungierte (und Inverse) ist die Abschließung $\overline{S}$ des in (II.8.7) eingeführten Operators S. Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und fast überall Null außerhalb eines Quaders $\overline{Q}$ so ist*

$$\overline{T}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} f(y) dy,$$

$$\overline{S}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y} f(x) dy,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Sei (R_m) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $R_m \to +\infty$, $m \to \infty$. Sei $K_{R_m} = \{x | x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < R_m\}$. Dann ist

$$\overline{T}f = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{K_{R_m}(0)} e^{-i.y} f(y) dy,$$

$$\overline{S}f = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{K_{R_m}(0)} e^{i\cdot y} f(y) dy$$

in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis: Der erste Teil des Satzes bis zur Formel für $\overline{T}f(x)$ einschließlich folgt aus Hilfssatz II.8.5. Die Formel für $\overline{S}f(x)$ ergibt sich aus $Sf(x) = \overline{T\overline{f}(x)}$, $f \in \mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(S)$, und ausschließendem Grenzübergang wie im zweiten Teil des Beweises von Hilfssatz II.8.5. Zum Nachweis der letzten beiden Formeln bedenken wir, daß

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{K_{R_m}(0)} e^{-ix\cdot y} f(y)dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}\chi_m(y)f(y)dy$$

ist. Dabei ist $\chi_m(y) = 1$, $y \in K_{R_m}(0)$ und $\chi_m(y) = 0$ Sonst: Wegen $\chi_m \to 1$ fast überall in $\mathbb{R}^n$ folgt: $||\chi_m f - f||_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$, $m \to \infty$, nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Mit der Beschränktheit von $\overline{T}$ folgt die Formel des Satzes für $\overline{T}f$. $\overline{S}f$ wird analog behandelt. □

Wir weisen darauf hin, daß man statt der $K_{R_m}(0)$ auch Quader $Q_m = \{x|a_j^{(m)} < x_j b_j^{(m)},\ j = 1,\dots,n\}$ nehmen kann mit $a_j^{(m)} \to -\infty$, $m \to \infty$, $j = 1,\dots,n$, $b_j^{(m)} \to +\infty$, $m \to \infty$, $j = 1,\dots,n$.

Hinweis zur Vereinfachung:

Hilfssatz II.8.2: *Seien $\overline{Q}, \overline{Q'}$ abgeschlossene Quader des $\mathbb{R}^n$, $\overline{Q} = \{x|a_j \leq x_j \leq b_j\}$, $\overline{Q}' = \{x|d_j \leq x_j \leq b_j\}$ mit offenen Kernen Q, Q'. Sei*

$$T\chi_{\overline{Q}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} l^{-ixy}\chi_{\overline{Q}}(y)dy.$$

Dann ist

$$(T\chi_{\overline{Q}}, T\chi_{\overline{Q}'})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\chi_{\overline{Q}}, \chi_{\overline{Q}})_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

also insbesondere

$$||T\chi_{\overline{Q}}||_{L^2(\mathbb{R}^n)} = ||\chi_{\overline{Q}}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis: Es ist

$$T\chi_{\overline{Q}}(x) = \prod_{j=1}^n T\chi_{[a_j,b_j]}(x_j),\ x = (x_1,\dots,x_n),\ \text{also}$$

$$(T\chi_{\overline{Q}}, T\chi_{\overline{Q}'})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \prod_{j=1}^n (T\chi_{[a_j,b_j]}, T\chi_{[a_j',b_j']})_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$= \prod_{j=1}^n (\chi_{[a_j,b_j]}, \chi_{[a_j',b_j']})_{L^2(\mathbb{R})} = (\chi_{\overline{Q}}, \chi_{\overline{Q}'})$$

□

Sei

$$\mathfrak{t} = \sum_{i\in I, I \text{ endlich}} \alpha_i \chi_{\overline{Q}_i},\ \alpha_i \in \mathbb{C} \text{ konstant},\ \overline{Q}_i \text{ wie } \overline{Q},\ Q_i \cap Q_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j \in I$$

eine Treppenfunktion des $\mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$T\mathfrak{t} = \sum_{i\in I} \alpha_i T \chi_{\overline{Q}_i}$$

Für zwei Treppenfunktionen $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}'$ ist nach Hilfssatz II.8.2

$$(T\mathfrak{t}, T\mathfrak{t}')_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\mathfrak{t}, \mathfrak{t}')_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

$\mathcal{D}(T)$ sei derjenige Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$, der aus den Äquivalenzklassen besteht, die durch eine Treppenfunktion repräsentiert werden. $T\mathfrak{t}$ setzen wir wie oben fest: Nullmengen haben keinen Einfluß auf die Definition von $T\mathfrak{t}$, d.h. hier, wir können jedes $\overline{Q}_i = \{a_j^{(i)} \leq x_j \leq b_j^{(i)}\}$ ersetzen durch

$$\widetilde{Q}_i = \prod_{j=1}^{n} I_j^{(i)},$$

jedes $I_j^{(i)}$ kann die Form $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)}]$ oder $(a_j^{(i)}, b_j^{(1)}]$ oder $(a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$ oder $[a_j^{(i)}, b_j^{(i)})$ haben.

$\mathcal{D}(T)$ ist dichter Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$.

§9. Ergänzung: Orthonormalbasen in beliebigen Hilberträumen

Sei $(X_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie von Mengen. Das *kartesische Produkt von* $(X_\iota)_{\iota\in I}$ besteht aus allen Familien $(x_\iota)_{\iota\in I}$, wo $x_\iota \in \chi_\iota$ ist für alle $\iota \in I$, und wird notiert als $\prod_{\iota\in I} X_\iota$. I wird auch als Indexmenge bezeichnet. Ist die Indexmenge endlich, etwa $I = \{I, \ldots, n\}$, so schreibt man auch $\prod_{\iota=1}^n X_\iota = X_1 \times \ldots \times X_n$. Allgemein gibt es zu jedem $\kappa \in I$ eine kanonische Projektion $\pi_\kappa : \prod_{\iota\in I} X_\iota \to X_\kappa$, welche einer Familie $(x_\iota)_{\iota\in I}$ die κ-te Komponente x_κ zuordnet. Eine Abbildung f von einer Menge W nach $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ ist dadurch festgelegt, daß für jedes $\iota \in I$ eine Abbildung $f_\iota (= \pi_\iota \circ f) : W \to X_\iota$ vorgegeben wird. Ein kartesisches Produkt ist gleich der leeren Menge, falls ein X_ι leer ist. Daß $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ nicht leer ist, wenn alle $X_\iota \neq \emptyset$ sind, ist Inhalt des Auswahlaxioms. Ist $X_\iota = X$, $\iota = I$, und $\gamma = |I|$, die Kardinalzahl von I, so schreiben wir auch X^γ oder $X^{|I|}$ für das kartesische Produkt von $(X_\iota)_{\iota\in I}$.

Zu jeder Kardinalzahl $\alpha = |K|$ (K Indexmenge) geben wir nun einen Hilbertraum $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ an. Wir setzen

$$\mathbb{C}^{(\alpha)} = \{\mathfrak{z} = (z_\kappa)_{\kappa\in K} \in \mathbb{C}^\alpha | ||\mathfrak{z}||^2 := \sum_{\kappa\in K} |z_\kappa|^2 < \infty\}.$$

Dabei ist wie üblich $\sum_{\kappa\in K} \zeta_\kappa$ absolut konvergent, wenn

$$\sum_{\kappa\in K} |\zeta_\kappa| := \sup_{\substack{K_0\subset K\\ K_0 \text{ endlich}}} \sum_{\kappa\in K_0} |\zeta_\kappa|$$

endlich ausfällt. Zunächst ist in naheliegender Weise $\mathbb{C}^\alpha$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$; und $\mathbb{C}^{|\alpha|}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{C}^\alpha$, denn: Mit $\mathfrak{z} \in C^{(\alpha)}$ ist auch $\lambda\mathfrak{z} \in \mathbb{C}^{(\alpha)}$, $\lambda \in \mathbb{C}$; seien $\mathfrak{z}_1 = (z_\kappa^1)_{\kappa\in K}$, $\mathfrak{z}_2 = (z_\kappa^2)_{\kappa\in K} \in \mathbb{C}^\alpha$, sei $K_0 \subset K$ endlich. Dann ist

$$\sum_{\kappa\in K_0} |z_\kappa^1 + z_\kappa^2|^2 \leq \sum_{\kappa\in K_0} (|z_\kappa^1|^2 + |z_\kappa^2|^2 + 2|z_\kappa^1||z_\kappa^2|)$$

$$\leq ||\mathfrak{z}_1||^2 + ||\mathfrak{z}_2||^2 + 2(\sum_{\kappa\in K_0} |z_\kappa^1|^2)^{1/2}(\sum_{\kappa\in K_0} |z_\kappa^2|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= ||\mathfrak{z}_1||^2 + ||\mathfrak{z}_2||^2 + 2||\mathfrak{z}_1||||\mathfrak{z}_2||.$$

Nun müssen wir ein Skalarprodukt in $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ einführen. Wir zeigen, daß für $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{C}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{z}_1 = (z_\kappa^1)_{\kappa\in K}$, $\mathfrak{z}_2 = (z_\kappa^2)_{\kappa\in K}$, der Ausdruck

(II.9.1) $$\sum_{\kappa\in K} z_\kappa^1 \overline{z_\kappa^2} =: (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$$

absolut konvergent ist. Dazu ist zu beweisen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine endliche Menge $K_0 \subset K$ derart, daß für alle K_1, $K_1 \subset K$, K_1 endlich, $K_1 \cap K_0 = \emptyset$, gilt

$$\sum_{\kappa \in K_1} |z_\kappa^1||\overline{z_\kappa^2}| < \varepsilon$$

Nun existieren nach Konstruktion von $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ ein $K_0^1(\varepsilon) \subset K$, $K_0^1(\varepsilon)$ endlich, und ein $K_0^2(\varepsilon) \subset K$, $K_0^2(\varepsilon)$ endlich, derart, daß

$$\sum_{\kappa \in K_1^j} |z_\kappa^j|^2 < \varepsilon, K_1^j \subset K,\ K_1^j \text{ endlich,}$$

$$K_1^j \cap K_0^j(\varepsilon) = \emptyset,\ j = 1, 2$$

ist. Sei $K_0 = K_0^1(\varepsilon) \cup K_0^2(\varepsilon)$. Die Höldersche Ungleichung für Summen liefert sofort

$$\sum_{\kappa \in K_1} |z_\kappa^1 \overline{z_\kappa^2}| < \varepsilon.$$

Aus $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = 0$ folgt $\mathfrak{z} = 0$, es ist $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = ||\mathfrak{z}||^2$. Mit der in (II.9.1) eingeführten Größe $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$, für die offenbar $(\lambda\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \lambda(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2) = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) + (\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2)$, $(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) = \overline{(\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_1)}$ gilt, $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2 \in \mathbb{C}^{(\alpha)}$, haben wir somit ein Skalarprodukt in $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ gewonnen und $\mathbb{C}^{(a)}$ zu einem Prähilbertraum gemacht. Wir haben nur noch die Abgeschlossenheit zu zeigen: Sei also $||\mathfrak{z}_\nu - \mathfrak{z}_\mu||^2 \to 0$, $\nu, \mu \to \infty$ für eine Folge $(\mathfrak{z}_\nu)$ aus $\mathbb{C}^{(\alpha)}$. Sei $\mathfrak{z}_\nu = (z_\kappa^{(\nu)})$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0 derart, daß

$$\sum_{\alpha \in K} |z_\kappa^{(\nu)} - z_\kappa^{(u)}|^2 < \varepsilon^2$$

ist, $\mu, \nu \geq n_0$. Für festes κ ist also $(z_\kappa^{(\nu)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert a_κ. Ist $K_0 \subset K$, K_0 endlich, so gilt

$$\sum_{\kappa \in K_0} |a_\kappa - z_\kappa^{(\mu)}|^2 \leq \varepsilon^2,\ \mu \geq n_0$$

Daher gilt

$$\sum_{\kappa \in K} |a_\kappa - z_\kappa^{(\mu)}|^2 \leq \varepsilon^2,\ \mu \geq n_0.$$

Mit $\mathfrak{a} = (a_\kappa)_{\kappa \in K}$ kann man aus $\mathfrak{a} - \mathfrak{z}_{n_0}, \mathfrak{z}_{n_0} \in \mathbb{C}^{(\alpha)}$ schließen, daß $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}^{(\alpha)}$. Ferner gilt $\mathfrak{z}_\nu \to \mathfrak{a}$, $\nu \to \infty$, in $\mathbb{C}^{(\alpha)}$.

Satz II.9.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Es gibt genau eine Kardinalzahl α derart, daß $\mathcal{H}$ isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ ist, d.h. es gibt einen Vektorraumisomorphismus $I : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^{(\alpha)}$, der eine Isometrie ist (in Zeichen $\mathcal{H} \underset{=}{\sim} \mathbb{C}^{(\alpha)}$, $\underset{=}{\sim}$ steht für isometrische Vekorraumisomorphie).*

Beweis: Beim Beweis beschränken wir uns auf die Existenzaussage, da der Nachweis der Eindeutigkeit von α einen mengentheorretischen Satz erfordert, der hier nicht gegeben werden kann. Für $\alpha \leq |\mathbb{N}|$ ist die Eindeutigkeit in dem Sinn trivial, daß nie $\mathbb{C}^{(\alpha_1)} \underset{=}{\sim} \mathbb{C}^{(\alpha_2)}$ für $\alpha_1, \alpha_2 \leq |\mathbb{N}|$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, gelten kann. Eine Menge $\mathfrak{L} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{L} = \{\varphi, \psi, \ldots\}$ heißt orthonormal, wenn

$$(\psi, \varphi) = 0,\ \psi, \varphi \in \mathcal{L},\ \psi \neq \varphi,$$

$$||\psi||^2 = 1,\ \psi \in \mathcal{L},$$

ist. In dem System $L = \{\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{O}, \ldots\}$ der orthonormalen Menge führen wir eine Halbordnung „$\prec$“durch die Mengeninklusion ein ($\mathcal{L} \prec \mathfrak{M}$ genau dann, wenn $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}$). Wenn $L' \subset L$ nach der Relation $\prec$ geordnet ist, so ist

$$\bigcup_{\mathcal{L}' \in L'} \mathcal{L}'$$

eine obere Schranke von L'. Daher hat nach dem Lemma von Kuratowski-Zorn L ein maximales Element $\mathfrak{K}$. Die Elemente von $\mathfrak{K}$ mögen als injektiv indizierte Menge $\{\psi_\kappa | \kappa \in \mathfrak{K}\}$ geschrieben werden. Wir zeigen: Ist $\varphi \in \mathcal{H}$ beliebig, so gibt es genau eine Darstellung

$$\varphi = \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}} a_\kappa \psi_\kappa,\ a_\kappa \in \mathbb{C},\ \kappa \in \mathfrak{K},$$

derart, daß die rechte Seite in $\mathcal{H}$ summierbar ist. Darunter wollen wir verstehen, daß

$$\sup_{\substack{\mathfrak{K}_0 \subset \mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0 \\ \text{endlich}}} || \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_0} a_\kappa \psi_\kappa ||$$

endlich ausfällt. Offenbar ist dies letztere äquivalent damit, daß

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}} |a_\kappa|^2$$

endlich ist, da die $\{\varphi_\kappa | \kappa \in \mathfrak{K}\}$ orthonormal sind. Seien komplexe Zahlen a_κ, $\kappa \in \mathfrak{K}$, gegeben derart, daß

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$$

summierbar ist. Von einem Element $\varphi \in \mathcal{H}$ sagen wir, daß

$$\varphi = \textstyle\sum_{\kappa\in K} a_\kappa\psi_\kappa \tag{II.9.2}$$

ist dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathfrak{K}_0(\varepsilon,\varphi) \subset \mathfrak{K}$ gibt derart, daß

$$||\varphi - \textstyle\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1} a_\kappa\psi_\kappa|| < \varepsilon \tag{II.9.3}$$

ist für alle endlichen Teilmengen $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}$, die $\mathfrak{K}_0(\varepsilon,\varphi)$ enthalten. Wir geben nun einige Erläuterungen zu diesen Definitionen. Offenbar ist φ in (II.9.2) eindeutig bestimmt, denn sind φ, ψ zwei Elemente aus $\mathcal{H}$ mit $(II.9.2)$, so ist $||\varphi-\psi|| \leq ||\varphi-\sum_{\substack{\kappa\in\mathfrak{K}_0(\varepsilon/2,\varphi)\cup\\ \cup\mathfrak{K}_0(\varepsilon/2,\psi).}} a_\kappa\psi_\kappa||+||\psi-\sum_{\substack{\kappa\in\mathfrak{K}_0(\varepsilon/2,\varphi)\cup\\ \cup\mathfrak{K}_0(\varepsilon/2,\psi)}} a_\kappa\psi_\kappa|| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig, also $\varphi = \psi$. $\displaystyle\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$ ist nun summierbar dann und nur dann, wenn es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathcal{H}$ mit (II.9.3) gibt. Dies sieht man folgendermaßen: Sei $\displaystyle\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$ summierbar. Dann wählen wir eine Folge $(\mathfrak{K}_\nu)$ von endlichen Teilmengen $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$, $\nu \in \mathbb{N}$, derart, daß $\mathfrak{K}_\nu \subset \mathfrak{K}_{\nu+1}$, $||\sum_{\mathfrak{K}_1\subset\complement\mathfrak{K}_\nu} a_\kappa\psi_\kappa|| < 1/\nu$ für alle endlichen $\mathfrak{K}_1 \subset \complement\mathfrak{K}_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Dies ist nach der vorhin gegebenen Charakterisierung der Summierbarkeit sicher möglich. Nun erkennt man sofort, daß $(\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_\nu} a_\kappa\psi_\kappa)$ eine Cauchyfolge ist. Ihr Grenzwert wird mit φ bezeichnet. Wir behaupten, daß $\varphi = \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$ ist. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\nu_0 \in \mathbb{N}$, K_{ν_0} mit $||\varphi - \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_{\nu_0}} a_\kappa\psi_\kappa|| < \varepsilon/2$ und $\frac{1}{\nu_0} < \varepsilon/2$. Sei $\mathfrak{K}_1$ eine beliebige endlich Teilmenge von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{K}_1 \supset \mathfrak{K}_{\nu_0}$. Dann ist $||\varphi-\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1} a_\kappa\psi_\kappa|| \leq ||\varphi-\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_{\nu_0}} a_\kappa\psi_\kappa||+||\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1-\mathfrak{K}_{\nu_0}} a_\kappa\psi_\kappa|| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\nu_0} < \varepsilon$, so daß (II.9.3) folgt. Umgekehrt folgt aus (II.9.3): $(\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1} |a_\kappa|^2)^{1/2} < \varepsilon+||\varphi||$, $\mathfrak{K}_1 > \mathfrak{K}_0(\varepsilon,\varphi)$, $\mathfrak{K}_1$ endliche Teilmenge von $\mathfrak{K}$, also die Summierbarkeit von $\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$. Wir zeigen nun noch: Wenn $\varphi = \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa$ ist, so ist $a_\iota = (\varphi,\psi_\iota)$, $\iota \in \mathfrak{K}$. Man hat nämlich für $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{K}_1 > \mathfrak{K}_0(\varepsilon,\varphi)\cup\{\iota\}$ die Beziehung $0 = |(\varphi-\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa\psi_\kappa,\ \psi_\iota)| = |(\varphi-\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1} a_\kappa\psi_\kappa,\psi_\iota)+(\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_1} a_\kappa\psi_\kappa-\varphi,\psi_\iota)| \geq |(\varphi,\psi_\iota) - a_\iota| - \varepsilon$, und hieraus folgt die Behauptung. Wir kehren nun zum eigentlichen Beweis zurück. Aus dem zuletzt Gesagten folgt die Eindeutigkeit der Darstellung. Der von den $\{\psi_\kappa|\kappa \in \mathfrak{K}\}$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{H}$ wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Sein Abschluß $\overline{\mathfrak{M}}$ muß $\mathcal{H}$ sein, da sonst nach Satz II.2.2 das System $\mathcal{L} = \{\psi_\kappa|\kappa \in \mathfrak{K}\}$ nicht maximal wäre. Zu einem beliebigen $\varphi \in \mathcal{H}$ setzen wir $a_\kappa = (\varphi,\psi_\kappa)$. Die Besselsche Ungleichung liefert

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_1} |a_\kappa|^2 \leq ||\varphi||^2, \ \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}, \ \mathfrak{K} \text{ endlich},$$

und damit die Summierbarkeit von

$$\widetilde{\varphi} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}} a_\kappa \psi_\kappa.$$

Nun ist $(\varphi - \widetilde{\varphi}, \psi_\iota) = 0$, $\iota \in \mathfrak{K}$, denn wählen wir $\mathfrak{K}_1$ wie eben, so wird (ι fest)

$$|(\varphi - \widetilde{\varphi}, \psi_\iota)| \leq |(\varphi - \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_1} a_\kappa \psi_\kappa, \psi_\iota)| + ||\widetilde{\varphi} - \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_1} a_\kappa \psi_\kappa|| < \varepsilon$$

da der erste Summand rechts in der vorletzten Ungleichung wegen $\iota \in \mathfrak{K}_1$ verschwindet. Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt $(\varphi - \widetilde{\varphi}, \psi_\iota) = 0$, $\iota \in \mathfrak{K}$, und hieraus $\varphi = \widetilde{\varphi}$. Die Zuordnung $\varphi \longmapsto ((\varphi, \psi_\kappa))_{\kappa \in \mathfrak{K}}$ ist also ein Vektorraumisomorphismus von $\mathcal{H}$ auf $\mathbb{C}^{(\alpha)}$ gegeben, der mit J bezeichnet sei. Wir wollen zeigen, daß J isometrisch ist. Sei

$$\varphi_1 = \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}} a_\kappa \psi_\kappa, \ a_\kappa = (\varphi_1, \psi_\kappa), \ \kappa \in \mathfrak{K},$$

$$\varphi_2 = \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}} b_\kappa \psi_\kappa, \ b_\kappa = (\varphi_2, \psi_\kappa), \kappa \in \mathfrak{K}.$$

Seite 87 zeigt nun: Es gibt eine Folge $(\mathfrak{K}_\nu^{(1)})$ von endlichen Teilmengen von $\mathfrak{K}$ derart, daß $\mathfrak{K}_\nu^{(1)} \subset \mathfrak{K}_{\nu+1}^{(1)}$, $\nu \in \mathbb{N}$, ist,

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_\nu^{(1)}} a_\kappa \psi_\kappa \to \varphi_1, \ \nu \to \infty$$

$$|| \sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_\nu^{(1)}} a_\kappa \psi_\kappa || < \frac{1}{\nu} \text{ für alle endlichen Teilmengen } \mathfrak{K}_\nu^{(1)} \text{ von } \complement \mathfrak{K}_\nu.$$

Sei $(\mathfrak{K}_\nu^{(2)})$ die entsprechende Folge von endlichen Teilmengen von $\mathfrak{K}$, die zu φ_2 gehört. Dann haben wir

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{K}_\nu^{(1)} \cup \mathfrak{K}_\nu^{(2)}} a_\kappa \psi_\kappa \to \varphi_1, \ \nu \to \infty,$$

$$\sum_{\nu \in \mathfrak{K}_\nu^{(1)} \cap \mathfrak{K}_\nu^{(2)}} b_\kappa \psi_\kappa \to \varphi_2, \ \nu \to \infty.$$

Hieraus folgt sofort

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_\nu^{(1)}\cup\mathfrak{K}_\nu^{(2)}} a_\kappa \bar{b}_\kappa.$$

Nach Seite 85 wissen wir bereits, daß

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa \overline{b_\kappa} \text{ absolut konvergent ist.}$$

Mit

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} |a_\kappa|^2 = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_\nu^{(1)}\cup\mathfrak{K}_\nu^{(2)}} |a_\kappa|^2$$

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} |b_\kappa|^2 = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_\nu^{(1)}\cup\mathfrak{K}_\nu^{(2)}} |b_\kappa|^2$$

folgt sofort

$$\sum_{\kappa\in\mathfrak{K}} a_\kappa \overline{b_\kappa} = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\kappa\in\mathfrak{K}_\nu^{(1)}\cup\mathfrak{K}_\nu^{(2)}} a_\kappa \overline{b_\kappa},$$

woraus in der Tat die Isometrie von I folgt. □

Definition II.9.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine maximale orthonormale Teilmenge von $\mathcal{H}$ heißt auch eine orthonormierte Basis von $\mathcal{H}$. Die Mächtigkeit einer orthonormierten Basis heißt die Dimension von $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ heißt endlichdimensional, falls $\mathcal{H}$ eine endliche orthonormierte Basis besitzt, andernfalls heißt $\mathcal{H}$ unendlichdimensional oder nicht endlichdimensional. Falls $\mathcal{H}$ eine orthonormierte Basis mit der Mächtigkeit von $\mathbb{N}$ besitzt, so heißt $\mathcal{H}$ präziser abzählbar unendlichdimensional.*

Satz II.9.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. $\mathcal{H}$ ist dann und nur dann endlichdimensional oder abzählbar unendlichdimensional, wenn $\mathcal{H}$ separabel ist. $\mathcal{H}$ ist dann und nur dann separabel, wenn die Topologie in $\mathcal{H}$ eine abzählbare Basis besitzt.*

Beweis: Die letzte Äquivalenz gilt für jeden metrischen Raum. Sei $\mathcal{H}$ endlichdimensional oder abzählbar unendlichdimensional. Sei $\{\psi_n\}$ eine orthonormierte Basis von $\mathcal{H}^{n=1,\ldots,m}$, oder $n = 1, 2, \ldots$.

Die Elemente

$$\sum_{k\in\mathfrak{K}} c_k\psi_k,\ c_k \in \mathbb{C},\ \ \mathfrak{K} \subset \{1, \ldots, m\} \text{ oder } \mathfrak{K} \text{ endlich }, \mathfrak{K} \subset \mathbb{N},$$

liegen nach Hilfssatz II.1.3 dicht in $\mathcal{H}$, da nach Satz II.9.1 die Vollständigkeitsrelation aus Definition II.1.5 gilt. Dann liegen jedoch auch die Linearkombinationen

$$\sum_{k\in\mathfrak{K}} \widetilde{c_k}\psi_k, \quad \widetilde{c_k} = \xi_k + i\eta_k,\ \xi_k \in \mathbb{Q}, \eta_k \in \mathbb{Q}, \mathfrak{K} \subset \{1,\dots,m\} \text{ oder } \mathfrak{K} \text{ endlich}, \mathfrak{K} \subset \mathbb{N},$$

dicht in $\mathcal{H}$; die Menge dieser Linearkombinationen ist jedoch abzählbar. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so enthält nach Satz II.1.1 der Hilbertraum $\mathcal{H}$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\psi_1, \dots \psi_m\}$ oder $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$. Wir beschränken uns auf den letzten Fall. Wir haben in II.1 bereits bewiesen, daß $\mathcal{H}$ dann isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^{(|\mathbb{N}|}$ ist. $\square$

III. Vollstetige oder Kompakte Operatoren

§1. Schwache Konvergenz

Wir beginnen mit einem **Beispiel**. Wir betrachten den bereits eingeführten Hilbertraum l_2 (s. II.7, II.1). Für ein Element $x = (x_p)$ wird die Norm $||x||$ erklärt durch

$$||x||^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2$$

Sei $(x^{(k)})$ mit $x^{(k)} = (x_p^{(k)})$ eine Folge in l_2 mit $||x^{(k)}|| \leq c$, $k = 1, 2, \ldots$, und c eine feste nichtnegative Zahl. Wir sagen, daß die $x^{(k)}$ schwach (in l_2) gegen ein $x^* = (x_p^*) \in l_2$ konvergieren, wenn $x_p^{(k)} \to x_p^*$, $k \to \infty$, $p = 1, 2, \ldots$. Man sieht sofort, daß auch $||x^*|| \leq c$ ist. Das abzählbar unendliche Orthonormalsystem mit den Elementen ($k \in \mathbb{N}$) $x^{(k)} = (\delta_{pk})$ konvergiert nach dieser Definition schwach gegen Null, obwohl $||x^{(k)}|| = 1$ ist.

Im Fall des allgemeinen Hilbertraums $\mathcal{H}$ geben wir die
Definition III.1.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)$ und Norm $||.||$. Sei (x_n) eine Folge von Elementen aus $\mathcal{H}$. Man sagt, (x_n) konvergiert schwach gegen $x^* \in \mathcal{H}$ (in Zeichen: $x_n \rightharpoonup x^*$, $n \to \infty$), wenn folgendes gilt:*

$$||x_n|| \leq c, \ n = 1, 2, \ldots$$

mit einer nichtnegativen Zahl c, und

$$(x_n, y) \to (x^*, y), \ n \to \infty, \ y \in \mathcal{H}.$$

Wir knüpfen an an unsere Bemerkung von eben über gewisse Orthonormalsysteme in l_2. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Wegen $||\varphi_n|| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, ist die Folge $(||\varphi_n||)$ beschränkt. Für irgendein $y \in \mathcal{H}$ ist nach der Besselschen Ungleichung (Hilfssatz II.1.2)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 \leq ||y||^2.$$

Insbesondere folgt $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n, y) = 0$, so daß wir erhalten: $\varphi_n \rightharpoonup 0$, $n \to \infty$.

Weiter bemerken wir, daß aus $x_n \rightharpoonup x^*$, $n \to \infty$, und $x_n \rightharpoonup \widetilde{x}^*$, $n \to \infty$ sofort folgt: $(x^* - \widetilde{x}^*, y) = 0$, $y \in \mathcal{H}$, also $x^* = \widetilde{x}^*$. Der schwache Grenzwert ist also eindeutig bestimmt. Das wichtigste Resultat im Zusammenhang mit schwacher Konvergenz ist der folgende

Satz III.1.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathcal{H}$, d.h. $||x_n|| \leq c$, $n = 1, 2, \ldots$, mit einer nichtnegativen Konstante c. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j}) \subset (x_n)$, die schwach gegen ein $x^* \in \mathcal{H}$ konvergiert.*

Beweis: Wegen $|(x_n, x_1)| \leq c||x_1||$ gibt es eine Teilfolge $(x_n^{(1)}) \subset (x_n)$ derart, daß $(x_n^{(1)}, x_1)$ konvergiert. Nun betrachten wir $(x_n^{(1)}, x_2)$ und schließen ebenso: Es gibt eine Teilfolge $(x_n^{(2)}) \subset (x_n^{(1)}) \subset (x_n)$ derart, daß $(x_n^{(2)}, x_2)$ konvergiert. Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Kette von Folgen

$$\subset \ldots (x_n^{(p)}) \subset \ldots \subset (x_n^{(2)}) \subset (x_n^{(1)}) \subset (x_n)$$

mit der Eigenschaft, daß $(x_n^{(p)}, x_q)$ für alle q, $p \geq q$ konvergiert, $n \to \infty$. Betrachten wir das folgende Schema

$$\begin{array}{cccc} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Wir betrachten nun die „Diagonalfolge“$(x_n^{(n)})$ und setzen $x'_n = x_n^{(n)}$.

Dann ist (x'_n, x_q) für $n \to \infty$ konvergent, und zwar für alle $q \in \mathbb{N}$. Im zweiten Schritt untersuchen wir (x'_n, y) für $y \in \overline{\mathfrak{M}}$; dabei ist $\overline{\mathfrak{M}}$ die Abschließung des Teilraums

$$\mathfrak{M} = \{f | f \in \mathcal{H},\ \exists N(f) \in \mathbb{N} \text{ derart, daß}$$

$$f = \sum_{k=1}^{N(f)} c_k x_k \text{ mit gewissen } c_1, \ldots, c_{N(f)} \in \mathbb{C}\}.$$

Wir behaupten nun: (x'_n, y) ist konvergent für alle $y \in \overline{\mathfrak{M}}$. Zunächst konvergiert (x'_n, y) für alle $y \in \mathfrak{M}$. Ist $y \in \overline{\mathfrak{M}}$, $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $y' \in \mathfrak{M}$ mit $||y - y'|| < \varepsilon$. Also ist

$$\begin{aligned} |(x'_n, y) - (x'_m, y)| &\leq |(x'_n, y') - (x'_m, y')| + |(x'_n, y - y')| + |(x'_m, y - y')|, \\ &\leq |(x'_n, y') - (x'_m, y')| + 2c\varepsilon. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir ein $N(\varepsilon, y')$ derart, daß $|(x'_n, y') - (x'_m, y)| < \varepsilon$, $n, m \geq N(\varepsilon, y')$. Insgesamt ist dann

$$|(x'_n, y) - (x'_m, y)| < (1 + 2c)\varepsilon,\ n, m \geq N(\varepsilon) = N(\varepsilon, y')$$

Also ist in der Tat $((x'_n, y))$ konvergent für alle $y \in \overline{\mathfrak{M}}$. Im dritten und letzten Schritt untersuchen wir $((x'_n, y))$ für $y \in \mathcal{H}$. Sei

$$y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \overline{\mathfrak{M}},\ y_2 \in \overline{\mathfrak{M}}^{\perp} = \mathfrak{M}^{\perp}$$

(Satz II.2.1, Hilfssatz II.2.3). Dann ist

$$(x'_n, y) = (x'_n, y_1),$$

so daß $((x'_n, y))$ konvergiert für jedes $y \in \mathcal{H}$. Damit konvergiert auch $((y, x'_n))$, $y \in \mathcal{H}$, und wir setzen

$$L(y) = \lim_{n \to \infty} (y, x'_n)$$

Dadurch ist beschränktes lineares Funktional $L : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ gegeben, die Linearität kann sich der Leser leicht selbst überlegen, die Beschränktheit ergibt sich aus $|(y, x'_n)| \leq ||y||\,||x'_n| << c||y||$. Nach Satz II.3.1 (Riesz-Fr'echet) gibt es ein und nur ein $x* \in \mathcal{H}$ mit $L(y) = (y, x^*)$, so daß

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} (y, x'_n) &= (y, x^*) \\ (x^*, y) &= \lim_{n \to \infty} (x'_n, y) \end{aligned}$$

ist. $\square$

Satz III.1.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, (x_n) eine Folge aus $\mathcal{H}$, die schwach gegen $x \in \mathcal{H}$ konvergiert, (y_n) eine Folge aus $\mathcal{H}$, die in $\mathcal{H}$ gegen y konvergiert. Dann konvergiert $((x_n, y_n))$ gegen (x, y). Eine Folge (x_n) aus $\mathcal{H}$ konvergiert dann und nur dann schwach gegen $x \in \mathcal{H}$, wenn*

$$||x_n|| \leq c,\ n = 1, 2, \ldots$$

mit einer Konstanten $c \geq 0$, und

$$(x_n, y) \to (x, y),\ n \to \infty$$

für alle y aus einem dichten Teilraum $\mathcal{D}$ von $\mathcal{H}$.

Beweis: Sei $||x_n|| \leq c$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)|, \\
&\leq c||y_n - y|| + |(x_n - x, y)|.
\end{aligned}
$$

$(||y_n - y||)$ ist eine Nullfolge, $((x_n - x, y))$ ebenfalls. Damit folgt der erste Teil des Satzes. Der zweite folgt, indem man zu $y \in \mathcal{H}$ eine Folge (y_m) aus $\mathcal{D}$ wählt mit $y_m \to y$, $m \to \infty$. Dann folgt aus dem angegebenen Kriterium für schwache Konvergenz, daß $(x_n, y_m) \to (x, y_m)$, $n \to \infty$, für jedes feste $m \in \mathbb{N}$. Nun wählen wir m so groß, daß zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ erstens $||y - y_m|| \leq \varepsilon/3(c+1)$ und zweitens $||y - y_m|| \leq \varepsilon/3(||x||+1)$. Dann erhält man

$$
\begin{aligned}
|(x_n, y) - (x, y)| &\leq |(x_n, y) - (x_n, y_m)| + |(x_n, y_m) - (x, y_m)| + |(x, y_m) - (x, y)|, \\
&\leq ||x_n|| \, ||y - y_m|| + ||x|| \, ||y - y_m|| + |(x_n, y_m) - (x, y_m)|, \\
&< 2\varepsilon/3 + |(x_n, y_m) - (x, y_m)|.
\end{aligned}
$$

Nun können wir zu festem m die Zahl n so groß wählen, daß $|(x_n, y_m) - (x, y_m)| < \varepsilon/3$ wird. Die umgekehrte Richtung ist trivial. □

Wir kommen nun zum Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Dies ist eine „Verallgemeinerung“einer Aussage von Osgood, die folgendermaßen lautet: Seien $f_n \in C^0([a, b])(a < b)$, $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $x \in [a, b]$ gebe es eine nichtnegative Zahl $M(x)$ derart, daß $|f_n(x)| \leq M(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann gibt es ein Teilintervall $[\alpha, \beta]$ $(\alpha < \beta)$ von $[a, b]$ derart, daß $|f_n(x)| \leq M$ ist mit einer nichtnegativen Konstanten M, und zwar für alle $x \in [\alpha, \beta]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz III.1.3: *Sei $\{A_\iota | \iota \in I\}$, I eine beliebige Indexmenge, eine Menge von beschränkten linearen Funktionalen in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und es gelte*

$$
|A_\iota(x)| < M(x) < +\infty, \ \iota \in I, \ x \in \mathcal{H},
$$

mit einer geeigneten Zahl $M(x)$, die von x abhängen kann. Dann gilt

$$
||A_\iota|| \leq M < +\infty, \ \iota \in I
$$

mit einer geeigneten Konstante$M$.

Dieser Satz stammt von Banach und Steinhaus. Zum Beweis benötigen wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz III.1.1: *Sei A ein beschränktes lineares Funktional im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $x_0 \in \mathcal{H}$. Sei $\varepsilon > 0$,*

$$|A(x)| \leq c, \ ||x - x_0|| \leq \varepsilon.$$

Dann ist

$$||A|| \leq \frac{2c}{\varepsilon}$$

Beweis: Sei $z \in \mathcal{H}$, $||z|| = 1$. Sei $\overline{K_\varepsilon(x_0)} = \{x | x \in \mathcal{H}, ||x - x_0|| \leq \varepsilon\}$ also $x_0 + \varepsilon z \in \overline{K_\varepsilon(x_0)}$. Also ist $|A(x_0 + \varepsilon z)| \leq c$, $|A(x_0) + \varepsilon A(z)| \leq c$, $\varepsilon|A(z)| \leq c + |A(x_0)| \leq 2c$, $|A(z)| \leq \frac{2c}{\varepsilon}$ und somit $||A|| \leq \frac{2c}{\varepsilon}$. □

Hilfssatz III.1.2: *Sei (A_n) eine Folge beschränkter linearer Funktionale im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Die Folge $(||A_n||)$ sei nicht beschränkt. Zu $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ existieren dann in jeder Kugel $K_\varepsilon(x_0) = \{x| \in \mathcal{H}, ||x - x_0|| < \varepsilon\}$, $x_0 \in \mathcal{H}$, $\varepsilon > 0$, ein y und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ derart, daß $|A_n(y)| > c$.*

Beweis: Wir nehmen an, die Aussage des Hilfssatzes sei falsch. Dann ist von einem $n_0 \in \mathbb{N}$ an

$$\begin{aligned} |A_n(y)| &\leq c, \quad y \in K_\varepsilon(x_0), \text{ also} \\ |A_n(y)| &\leq c, \quad y \in \overline{K_\varepsilon(x_0)} \end{aligned}$$

für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes Element $x_0 \in \mathcal{H}$. Nach Hilfssatz III.1.1 ist $||A_n|| \leq 2c/\varepsilon$, die Folge $(||A_n||)$ ist somit beschränkt, also ein Widerspruch. □

Beweis des Satzes III.1.3: Da sonst nichts zu beweisen ist, können wir annehmen, daß I unendlich ist. Wenn die Aussage des Satzes falsch ist, existiert eine Folge (A_{ι_n}), $\iota_n \in I$, $n \in \mathbb{N}$, von beschränkten linearen Funktionalen derart, daß $(||A_{\iota_n}||)$ nicht beschränkt ist. Sei $A_n = A_{\iota_n}$. In der Kugel $K_{\varepsilon_0}(x_0) = \{x|||x - x_0|| < \varepsilon_0\}$ existiert ein $y = x_1(\varepsilon_0 > 0, \ x_0 \in \mathcal{H})$, und es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, daß $|A_{n_1}(y)| = |A_{n_1}(x_1)| > 1$ ist (s. Hilfssatz III.1.2). Dann gibt es auch eine Kugel $\overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} = \{x|||x - x_1|| \leq \varepsilon_1\} \subset K_{\varepsilon_0}(x_0)$ mit $\varepsilon_1 > 0$ derart, daß $|A_{n_1}(x)| > 1$ ist, $x \in \overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)}$. Ohne Einschränkung sei $\varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$. Nach Hilfssatz III.1.2 gibt es in $K_{\varepsilon_1}(x_1)$ ein $y = x_2$ und es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ derart, daß $|A_{n_2}(y)| = |A_{n_2}(x_2)| > 2$ ist. Wieder gibt es eine Kugel $\overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} = \{x|||x - x_2|| < \varepsilon_2\} \subset K_{\varepsilon_1}(x_1)$ mit $|A_{n_2}(x)| > 2$, $x \in \overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)}$. Ohne Einschränkung sei $\varepsilon_2 < \varepsilon_1/2 < \varepsilon_0/4$. Es gibt also eine Folge von Kugeln $\overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)} = \{x|||x - \alpha_p|| \leq \varepsilon_p\}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, derart, daß

$$\varepsilon_p \to 0, p \to \infty,$$

$$\overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)} \supset \overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} \supset \overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} \supset \ldots \supset \overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)} \supset \overline{K_{\varepsilon_{p+1}}(x_{p+1})} \supset \ldots,$$

$$|A_{n_p}(x)| > p,\ x \in \overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)}.$$

Für $q, p \in \mathbb{N}$, $q \geq p$, ist somit $||x_q - x_p|| \leq \varepsilon_p$. Also ist (x_p) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$ und somit existiert ein $x^* \in \mathcal{H}$ mit $x_p \to x^*$, $p \to \infty$. Wegen $\lim_{q\to\infty} ||x_q - x_p|| = ||x^* - x_p|| \leq \varepsilon_p$, $p \in \mathbb{N}$ fest, ist

$$x^* \in \bigcap_{p=0}^{\infty} \overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)},\ \text{also}$$

$$|A_{n_p}(x^*)| > p,\ p \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme des Satzes. □

Indem man die Beträge der Werte der linearen Funktionale durch die Normen von Bildern von Elementen aus $\mathcal{H}$ unter stetigen linearen Abbildungen ersetzt, erhält man sofort

Satz III.1.4: *Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ zwei Hilberträume. Sei $\{T_\iota | \iota \in I\}$, I eine beliebige Indexmenge, eine Menge von beschränkten linearen Operatoren $T_\iota : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$. Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ gebe es eine Zahl $M(x)$, die von x abhängen kann, derart, daß*

$$||T_\iota x||' \leq M(x),\ \iota \in I$$

($||.||'$ ist die Norm in $\mathcal{H}'$). Dann gibt es eine Zahl $M \geq 0$ derart, daß

$$||T_\iota|| < M, \iota \in I.$$

Dieser Satz ist auch als „uniform boundedness principle" in der englischen Literatur bekannt. Der Beweis zeigt uns, daß wir vom Hilbertraum nur seine Vollständigkeit benutzt haben. Auf diese Bemerkung kommen wir noch zurück. Eine erste Konsequenz aus Satz III.1.3 ist

Satz III.1.5: *Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ derart, daß die Folge $((x_n, y))$ für jedes $y \in \mathcal{H}$ konvergiert. Dann gibt es ein $x^* \in \mathcal{H}$ derart, daß*

$$x_n \to x^*,\ n \to \infty.$$

Beweis: Sei $A_n(y) = (y, x_n)$. Dann ist A_n ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Sei $M(y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(y, x_n)|$. Also folgt $|A_n(y)| \leq M(y)$, $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathcal{H}$. Nach Satz III.1.3 ergibt sich $||A_n|| = ||x_n|| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$A(y) = \lim_{n\to\infty} A_n(y).$$

Dann ist A eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ in $\mathbb{C}$. Wegen $|A_n(y)| \leq M||y||$ ist auch $|A(y)| \leq M||y||$, $y \in \mathcal{H}$. A ist somit ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Nach Satz II.3.1 gibt es genau ein $x^* \in \mathcal{H}$ mit

$$A(y) = (y, x^*) = \lim_{n\ni\infty}(y, x_n), \text{ also}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x^*, y),$$

womit der Satz bewiesen ist. $\square$

§2. Vollstetigkeit, Kompaktheit

Wir beginnen mit der Definition kompakter Mengen.

Definition III.2.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Eine Teilmenge $\sum \subset \mathcal{H}$ heißt präkompakt, wenn jede Folge (x_n) aus $\sum$ eine Teilfolge (x_{n_k}) enthält mit $||x_{n_k} - x_{n_j}|| \to 0$, $k, j \to \infty$.*

Definition III.2.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine präkompakte Teilmente $\sum \subset \mathcal{H}$ heißt kompakt, wenn der Grenzwert der Teilfolge (x_{n_k}) nach Definition III.2.1 in $\sum$ liegt.*

Die letzte Definition steht in Übereinstimmung mit der Definition der Kompaktheit in topologischen Räumen. (Überdeckungseigenschaft - siehe den folgenden Abschnitt III.3.). Ist $\sum$ eine präkompakte Teilmenge eines Hilbertraums $\mathcal{H}$, so ist $\overline{\sum}$ kompakt.

Definition III.2.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Sei $\mathcal{D}$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$. Sei $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung. V heißt vollstetig oder kompakt, wenn $\sum = \{Vx | x \in \mathcal{D},\ ||x|| \leq 1\}$ präkompakt ist.*

V in Definition III.2.3 ist demnach dann nur dann vollstetig, wenn man aus jeder Folge (x_n) mit $||x_n|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$, c eine Konstante > 0, $x_n \in \mathcal{D}(V)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Teilfolge (x_{n_k}) auswählen kann derart, daß $||Vx_{n_k} - Vx_{n_l}|| \to 0$, $k, l \to \infty$. Bevor wir abstrakte Sätze über vollstetige Operatoren beweisen, studieren wir einige **Beispiele.**

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum der ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ enthält. Dann ist die identische Abbildung $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ jedenfalls nicht vollstetig, da $||\varphi_i - \varphi_k||^2 = 2$ ist, $i \neq k$, $i, k \in \mathbb{N}$.

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum, sei $P_{\mathfrak{M}}$ der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathfrak{M}$. $P_{\mathfrak{M}}$ ist dann und nur dann vollstetig, wenn $\mathfrak{M}$ endlichdimensional (d.h. nicht endlichdimensional). Nach Hilfssatz II.2.2 ist $\mathfrak{M}$ separabel, also insbesondere separabler Hilbertraum (s. II.1) Nach Satz II.1.1 gibt es ein abzählbar unendliches vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\mathfrak{M}$,

$$P_{\mathfrak{M}} f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i,\ f \in \mathcal{H}.$$

Da $P_{\mathfrak{M}}$ eingeschränkt auf $\mathfrak{M}$ die Identität ist, ist nach dem ersten Beispiel

$P_{\mathfrak{M}}$ sicher nicht vollstetig. Ist nun andererseits $\mathfrak{M}$ endlichdimensional, etwa von der Dimension N, so ist

$$P_{\mathfrak{M}}f = \sum_{i=1}^{N}(f, \varphi_1)\varphi_1.$$

Sei nun (f_n) eine Folge aus $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq c$. Dann ist $|(f'_n, \varphi_i)| \leq c$, und wir können eine Teilfolge (f_{n_k}) finden derart, daß $(f_{n_k}, \varphi_i) \to c_i$, $K \Rightarrow \infty$, $i = 1, \ldots, N$, mit gewissen komplexen Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ (Bolzano-Weierstraß!). Dann gilt

$$P_{\mathfrak{M}}f_{n_K} \to \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i, \ k \to \infty,$$

und $P_{\mathfrak{M}}$ ist in der Tat als vollstetig erkannt.

In unserem dritten Beispiel behandeln wir einen stetigen Integralkern K, d.h. $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ ist stetig. $\mathcal{H}$ ist der Prähilbertraum $C^0([a, b])$. Sei die lineare Abbildung $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, die definiert ist durch

$$Kf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \ f \in \mathcal{H}.$$

Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq C$, sei $g_n = Kf_n$. Für $x_1, x_2 \in [a, b]$ haben wir

$$\begin{aligned}
|g_n(x_1) - g_n(x_2)| &\leq |\int_a^b (K(x_1, y) - K(x_2, y))f_n(y)dy|, \\
&\leq (\int_a^b |K(x_1, y) - K(x_2, y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} \cdot ||f_n||, \\
&\leq c(\int_a^b |K(x_n, y) - K(x_2, y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\epsilon) > 0$ derart, daß $|K(x_1, y) - K(x_2, y)| < \varepsilon/(b - a)c$ ist, $y \in [a, b]$, wenn nur $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ ist. Dies folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $[a, b) \times [a, b]$. Also ist

$$|g_n(x_1) - g_n(x_2)| < \varepsilon,$$

wenn $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ ist, $n \in \mathbb{N}$. Man rechnet wie eben leicht nach, daß

$$|g_n(x)| \leq (\int_a^b |K(x,y)|^2 dy)^{\frac{1}{2}} ||f_n|| \\ \leq \ (b-a) \sup_{\substack{x\in[a,b],\\ y\in[a,b]}} |K(x,y)|c$$

ist. Die Folge (g_n), $g_n \in C^0([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, ist daher gleichgradig stetig und gleichartig beschränkt. Nach dem Satz von Ascoli-Arzelá gibt es daher eine Teilfolge (g_{n_k}) von (g_n), die gleichmäßig gegen eine Funktion $g \in C^0([a,b])$ konvergiert. Insbesondere ist

$$||g_{n_k} - g_{n_l}|| \leq \sqrt{b-a} \cdot \sup_{x\in[a,b]} |g_{n_k}(x) - g_{n_l}(x)| \to 0,\ k,l \to \infty,$$

und wir haben gezeigt, daß K vollstetig ist.

Satz III.2.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Sei $K : \mathcal{D} = \mathcal{D}(K) \to \mathcal{H}$ vollstetig. Dann ist*

$$||K|| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{D}(K),\\ ||f||=1}} ||Kf|| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{D}(K),\\ f\neq 0}} ||Kf||/||f||$$

endlich (K ist beschränkt).

Beweis: Wäre $||K||$ nicht endlich, so gäbe es eine Folge (f_n), $f_n \in \mathcal{D}(K)$, $||f_n|| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, derart, daß $||Kf_n|| \to +\infty$, $n \to \infty$. Insbesondere enthält (f_n) keine Teilfolge (f_{n_k}) mit $||Kf_{n_k} - Kf_{n_l}|| \to 0$, $k,l \to \infty$, denn für eine solche gälte, daß die $||Kf_{n_k}||$ beschränkt bleiben. □

Satz III.2.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. K sei ein vollstetiger linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(K)$. Dann ist die Abschließung $\overline{K}$ ebenfalls vollstetig ($\mathcal{D}(\overline{K}) = \mathcal{H}$).*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge von Elementen aus $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$. Zu f_n bestimmen wir ein $f'_n \in \mathcal{D}(K)$ mit $||f_n - f'_n|| < 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $||f'_n|| \leq c + 1$. Da K vollstetig ist, gibt es eine Teilfolge (f'_{n_j}) von (f'_n) und ein $g \in \mathcal{H}$ mit

$$Kf'_{n_j} \to g,\ j \to \infty,\ \text{also}$$
$$\overline{K}f'_{n_j} \to g,\ j \to \infty.$$

Nun ist

$$||\overline{K}f_{n_j} - \overline{K}f_{n_i}|| \leq ||\overline{K}(f'_{n_j} - f'_{n_i})|| + ||(\overline{K}(f'_{n_j} - f_{n_j})|| + ||\overline{K}(f'_{n_i} - f_{n_i})||.$$

Da nach Satz III.2.1 der Operator K beschränkt ist, ist die Abschließung $\overline{K}$ wohldefiniert und ein beschränkter Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(\overline{K}) = \mathcal{H}$, s. Satz II.4.1. Also ist

$$||\overline{K}f_{n_j} - \overline{K}f_{n_i}|| \leq ||\overline{K}||(1/n_i + 1/n_j) + ||\overline{K}(f'_{n_j} - f'_{n_i})||.$$

Also ist $(\overline{K}f_{n_j})$ eine Cauchy-Folge. □

Der vorhergehende Satz gibt uns Veranlassung zur folgenden Bemerkung: Sei $\mathcal{H}'$ ein Prähilbertraum, $K : \mathcal{D} = \mathcal{D}(K) \to \mathcal{H}'$ eine vollstetige lineare Abbildung, $\mathcal{D}(K)$ sei dicht in $\mathcal{H}'$. Nach II.1 können wir aus $\mathcal{H}'$ durch Vervollständigung einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ machen, in den $\mathcal{H}'$ „eingebettet" ist und in dem $\mathcal{H}'$ dicht ist. $\mathcal{D}(K)$ geht dann in einen dichten Teilraum von $\mathcal{H}$ über. In $\mathcal{H}$ definieren wir K durch $Kf' = [(Kf')]$, $f' \in \mathcal{D}(K)$. K ist ein vollstetiger linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit dichtem Definitionsbereich. Die Abschließung $\overline{K}$ ist nach Satz III.2.2 ebenfalls vollstetig. Es ist $\overline{K}f = [(Kf'_n)]$, (f'_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}'$ mit $f'_n \in \mathcal{D}(K, n \in \mathbb{N}$, wie der Leser zeigen möge.

Satz III.2.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei V ein vollstetiger linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$, sei T ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Dann sind die in $\mathcal{H}$ erklärten linearen Operatoren VT und TV vollstetig.*

Es wird aus dem Beweis klar werden, daß eine entsprechende Version in einem Prähilbertraum gilt. Nach dem obigen Rückgriff auf die Vervollständigung beschränken wir uns im folgenden auf Hilberträume.

Beweis des Satzes III.2.3: Zur Vollstetigkeit von VT: Sei (f_n) eine Folge von $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $||Tf_n|| \leq ||T|| \cdot c$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $g_n = Tf_n$, also $Vg_n = VTf_n$. Wegen der Vollstetigkeit von V gibt es eine Teilfolge (g_{n_j}) von (g_n) derart, daß die Folge (Vg_{n_j}) konvergiert, d.h. für die Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) konvergiert (VTf_{n_j}). Die zweite Aussage des Satzes möge der Leser zeigen. □

Satz III.2.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, K ein vollstetiger linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H}$. Dann ist auch K^* vollstetig.*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq c$. Der Operator KK^* ist nach Satz III.2.4 vollstetig. Demnach ist $(KK^*f_{n_j})$ eine Cauchy-Folge für eine geeignete Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n). Nun ist

$$
\begin{aligned}
||K^*(f_{n_j} - f_{n_i})||^2 &= (K^*(f_{n_j} - f_{n_i}),\ K^*(f_{n_j} - f_{n_i})), \\
&= |(KK^*(f_{n_j} - f_{n_i}), f_{n_j} - f_{n_i})|, \\
&\leq 2c||KK^*(fn_j - fn_i)||,
\end{aligned}
$$

so daß auch $(K^* f_{n_j})$ eine Cauchy-Folge ist. □

Das wichtigste Kriterium für Vollstetigkeit im Hilbertraum ist
Satz III.2.5: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, V ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$. V ist dann und nur dann vollstetig in $\mathcal{H}$, wenn für jede schwach konvergente Folge (x_n) in $\mathcal{H}$ mit $x_n \rightharpoonup x$, $n \to \infty$, gilt: $Vx_n \to Vx$, $n \to \infty$.*

Beweis: Es gelte das Kriterium. Zu zeigen ist die Vollstetigkeit. Sei (x_n) einer Folge in $\mathcal{H}$ mit $||x_n|| \leq c$. Nach Satz III.1.1 gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) und ein $x^* \in \mathcal{H}$ derart, daß $x_{n_j} \rightharpoonup x^*$, $j \to \infty$. Dann folgt nach unserer Annahme, daß $Vx_{n_j} \to Vx^*$, und V ist somit vollstetig. Sei umgekehrt V vollstetig, (x_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $x_n \rightharpoonup x$, $n \to \infty$. Sei $y_n = x_n - x$. Dann folgt $y_n \rightharpoonup 0$, $n \to \infty$. Zu zeigen ist: $Vy_n \to 0$, $n \to \infty$. Angenommen, es ist $||Vy_n'|| \geq d > 0$, $n \in \mathbb{N}$, für eine Teilfolge (y_n') von (y_n). Da die Folge $(||x_n||)$ beschränkt ist, ist es auch die Folge $(||y_n||)$, also auch die Folge $(||y_n'||)$. Wegen der Vollstetigkeit von V gibt es eine Teilfolge (y_n'') von (y_n') derart, daß die Folge (Vy_n'') gegen ein Element $z \in \mathcal{H}$ konvergiert. Also gilt: $||Vy_n''|| \to ||z||$, $n \to \infty$, $||z|| \geq d > 0$. Nun ist $0 < d^2 \leq (z, z) = lim_{n\to\infty}(Vy_n'', z) = \lim_{n\to\infty}(y_n'', V^*z) = 0$, und dies ist ein Widerspruch. □

§3. Die Fredholmschen Sätze für vollstetige Operatoren im Hilbertraum

Wir erinnern an die Fredholmschen Gleichungen 2. Art aus I.4. Sie hatten die Gestalt ($\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$)

$$\lambda x(s) - \int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s) \tag{III.3.1}$$

mit gegebenen Funktionen $y \in C^0([a,b])$ und K, wobei K stetig von $[a,b] \times [a,b]$ in $\mathbb{C}$ war. Gesucht war eine stetige Funktion $x : [a,b] \to \mathbb{C}$, die (III.3.1) in $s \in [a,b]$ erfüllt. Umschreibung auf „unendliche Matrizen bzw. Vektoren“lieferte die äquivalente Formulierung

$$\lambda x_p - \sum_{q=1}^{\infty} K_{pq} x_q = y_p,\ p = 1, 2, \ldots. \tag{III.3.2}$$

mit $K_{pq} = (K\varphi_q, \varphi_p)$, wobei $Kf(s) = \int_a^b K(s,t)f(t)dt$, $s \in [a,b]$, $f \in C^0([a,b])$ gesetzt ist. Wir betrachten statt (III.3.2) das System

$$\lambda x_p - \sum_{q=0}^{n} K_{pq} x_q = y_p,\ p = 1, 2, \ldots, n. \tag{III.3.3}$$

Ist $\mathfrak{M}_n$ der von $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ aufgespannte abgeschlossene Teilraum von $\mathcal{H} = L^2((a,b))$, so ist (III.3.3) gerade äquivalent mit

$$\lambda P_{\mathfrak{M}_n} x - P_{\mathfrak{M}_n} K P_{\mathfrak{M}_n} x = P_{\mathfrak{M}_n} y, \tag{III.3.4}$$

wobei $P_{\mathfrak{M}_n}$ der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathfrak{M}_n$ ist. Es fragt sich nun inwieweit (III.3.4) bzw. (III.3.3) die Gleichungen (III.3.1) bzw. (III.3.2) approximieren und ob $P_{\mathfrak{M}_n} K$ in der Operatorennorm K approximiert, d.h. ob $||P_{\mathfrak{M}_n} K - K|| \to 0$, $n \to \infty$. Diese Fragen werden im folgenden abstrakt studiert, und aus den Ergebnissen ziehen wir Rückschlüsse auf die Lösbarkeit von $x - Kx = y$, d.h. von (III.3.1).

Hilfssatz III.3.1: *Sei V ein vollstetiger linearer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, sei $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$. Sei $z \in \mathcal{H}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein endlichdimensionaler Teilraum $\mathfrak{M}$ mit $z \in \mathfrak{M}$ und $||P_{\mathfrak{M}} V - V|| < \varepsilon$; hierbei ist $P_{\mathfrak{M}}$ der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathfrak{M}$.*

Zum Beweis benötigen wir einen Hilfssatz, nämlich:
Hilfssatz III.3.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Sei $\sum \subset \mathcal{H}$ eine präkompakte Teilmenge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Elemente*

$z_1, \ldots, z_n \in \sum$ *mit*

$$\sum \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} K_\varepsilon(z_\nu),$$

$K_\varepsilon(z) = \{y | y \in \mathcal{H}, ||y - z|| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $z \in \mathcal{H}$.

Beweis: Sei $z_1 \in \sum$. Wenn $K_\varepsilon(z_1)$ die Menge $\sum$ enthält, sind wir fertig. Anderenfalls gibt es ein $z_2 \in \sum$ mit $||z_2 - z_1|| \geq \varepsilon$. Wenn $\sum \subset K_\varepsilon(z_1) \cup K_\varepsilon(z_2)$, so folgt die Behauptung. Andernfalls gibt es ein $z_3 \in \sum$ mit $||z_1 - z_3|| \geq \varepsilon$, $||z_2 - z_3|| \geq \varepsilon$, usw. Wenn die Behauptung des Hilfssatzes falsch ist, so gibt es eine Folge (z_n) aus $\sum$ mit $||z_n - z_i|| \geq \varepsilon$, $i = 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, also $||z_i - z_j|| \geq \varepsilon$, $i \leq j$, $i, j \in \mathbb{N}$. Eine solche Folge enthält keine Cauchy-Folge, und dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß $\sum$ präkompakt ist. $\square$

Beweis des Hilfssatzes III.3.1: Sei $\sum = \{y | y = Vx,\ ||x|| \leq 1\}$. Dann ist wegen der Vollstetigkeit von V die Menge $\sum$ präkompakt. Nach Hilfssatz III.3.1 gibt es Elemente $z_1, \ldots, z_n \in \sum$ mit

$$\sum \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} K_\varepsilon(z_\nu). \tag{III.3.5}$$

Sei $z_0 = z$ und

$$\mathfrak{M} = \{f | f = \sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa z_\kappa,\ c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}\},$$

d.h. der von $z_0, z_1, \ldots, z_n$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{H}$. $\mathfrak{M}$ ist endlichdimensional. Aus (III.3.5) folgt, daß es zu jedem $y \in \sum$ komplexe Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ gibt mit

$$||y - \sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa z_\kappa|| < \varepsilon.$$

Zu $y \exists z_\kappa$ mit $||y - z_\kappa|| < \varepsilon$.
Wenn m die Dimension von $\mathfrak{M}$ ist, die wir offenbar ohne Einschränkung als ≥ 1 voraussetzen können, so hat nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren $\mathfrak{M}$ eine orthonormierte Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ (Hilfssatz II.1.5). Insbesondere gibt es komplexe Zahlen $d_1, \ldots, d_m$ mit

$$||y - \sum_{\kappa=1}^{m} d_\kappa \varphi_\kappa|| < \varepsilon.$$

Nach Hilfssatz II.1.1 ist dann auch

$$||y - \sum_{\kappa=1}^{m} (y, \varphi_\kappa)\varphi_\kappa|| < \varepsilon.$$

Nun ist gerade

$$P_{\mathfrak{M}}\widetilde{y} = \sum_{\kappa=1}^{m} (\widetilde{y}, \varphi_\kappa)\varphi_\kappa, \widetilde{y} \in \mathcal{H},$$

also

$$\begin{aligned} &||P_{\mathfrak{M}}y - y|| < \varepsilon,\ y \in \sum, \\ &||P_{\mathfrak{M}}Vx - Vx|| < \varepsilon, ; ||x|| \leq 1, \\ &||P_{\mathfrak{M}}V - V|| < \varepsilon, \end{aligned}$$

womit alles bewiesen ist. □

Für einen vollstetigen Operator V in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ setzten wir

$$T = I - V,\ \mathcal{D}(T) = \mathcal{H},$$

wobei wir $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$ annehmen. $\mathcal{R}(T)$ ist der Wertebereich von T, $\mathfrak{N}(T)$ ist sein Kern oder Nullraum, d.h. $\{x | x \in \mathcal{H}, Tx = 0\}$. $\mathfrak{N}(T)$ ist offenbar abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$.

Hilfssatz III.3.3: $\mathfrak{N}(T)$ *ist endlichdimensionaler Teilraum von* $\mathcal{H}$.

Beweis: Angenommen, $\mathfrak{N}(T)$ sei nicht endlichdimensional. Dann gibt es eine abzählbar unendliche Menge $\{f_1, f_2, \ldots\} \subset \mathfrak{N}(T)$ derart, daß jeweils endlich viele Elemente dieser Menge linear unabhängig sind. Nach Hilfssatz II.1.5 können wir hieraus ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ konstruieren, für dessen Elemente gilt:

$$T\varphi_i = 0, \quad \text{also } \varphi_i = V\varphi_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Die Folge (φ_i) müßte also wegen der Vollstetigkeit von V eine konvergente Teilfolge (φ_{i_k}) enthalten, was wegen $||\varphi_i - \varphi_k||^2 = 2$, $i \neq k$, nicht möglich ist. □

Hilfssatz III.3.4: *Für alle* $x \in \mathfrak{N}(T)^\perp$ *gilt eine Abschätzung der Form*

$$||Tx|| \geq d||x||$$

mit einer positiven Konstante d.

Beweis: Angenommen, es gibt eine Folge (x_n) von Elementen aus $\mathfrak{N}(T)^\perp$ mit $||x_n|| = 1$ und $Tx_n \to 0$, $n \to \infty$. Wegen der Vollstetigkeit von V gibt es eine Teilfolge (x_{n_j}) von (x_n) mit $Vx_{n_j} \to z$, $j \to \infty$ z ein geeignetes Element aus $\mathcal{H}$. Wegen $Tx_{n_j} \to 0$, $j \to \infty$, $T = I - V$, folgt $x_{n_j} \to z$, $j \to \infty$. Da V stetig ist, folgt $Vx_{n_j} \to Vz$, $j \to \infty$, $Tz = 0$, gleichzeitig ist somit $||z|| = 1$, $z \in \mathfrak{N}(T)^\perp$, $z \in \mathfrak{N}(T)$. Dann muß aber auch $z = 0$ sein, so daß sich ein Widerspruch ergeben hat. $\square$

Hilfssatz III.3.5: $\mathcal{R}(T)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis: Sei (y_n) eine Folge aus $\mathcal{R}(T)$ mit $y_n \to y$, $n \to \infty$. Sei $y_n = Tx_n$ mit einem geeigneten $x_n \in \mathcal{H}$, $n \in \mathbb{N}$. Sei P der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathfrak{N}(T)$. Sei $x'_n = x_n - Px_n$. Dann ist $(y \in \mathcal{H})$ $(x_n - Px_n, Py) = (Px_n, y) - (P^2x_n, y) = 0$, also $x'_n \in \mathfrak{N}(T)^\perp$. Weiter gilt $Tx'_n = Tx_n - TPx_n = Tx_n = y_n$. Die Folge (Tx'_n) ist somit eine Cauchy-Folge, also auch die Folge (x'_n) wie aus Hilfssatz III.3.4 folgt. Also gilt $x'_n \to x'$, $n \to \infty$ mit einem $x' \in \mathfrak{N}(T)^\perp$, und $y = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Tx'_n = Tx' \in \mathcal{R}(T)$. $\square$

Hilfssatz III.3.6: *Die Gleichung $Tx = 0$ habe nur die Lösung $x = 0$. Dann hat T eine in ganz $\mathcal{H}$ definierte beschränkte Inverse. Es ist dann*

$$T^{-1} = I - W$$

mit einem vollstetigen, in ganz $\mathcal{H}$ erklärten Operator W.

Beweis: Angenommen, T^{-1} sei in ganz $\mathcal{H}$ definiert und beschränkt. Aus $x - Vx = y$ folgt $x = T^{-1}y = y + VT^{-1}y = y - Wy$ mit $W = -VT^{-1}$. Nach Satz III.2.3 ist W vollstetig. Wir haben nun die Existenz von T^{-1} nachzuweisen sind, insbesondere zu zeigen, daß T^{-1} aus $L(\mathcal{H})$ ist. Die Existenz von T^{-1} als linearer Operator in $\mathcal{H}$ von $\mathcal{R}(T)$ in $\mathcal{H}$ ist durch unsere Voraussetzung gesichert. Sei $y \in \mathcal{H}$. Zu zeigen ist $y \in \mathcal{R}(T)$. Nach Hilfssatz III.3.4 gilt $||Tx|| \geq d||x||$, $x \in \mathcal{H}$, mit einem $d > 0$. Nach Hilfssatz III.3.1 gibt es eine Folge $(\mathfrak{M}_j)$ von endlichdimensionalen Teilräumen $\mathfrak{M}_j$ mit $y \in \mathfrak{M}_j$ und $||P_{\mathfrak{M}_j}V - V|| \to 0$, $j \to \infty$ ($P_{\mathfrak{M}_j}$ der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathfrak{M}_j$). Sei j_0 so gewählt, daß $||P_{\mathfrak{M}_j}V - V|| \leq d/2$ ist für $j \geq j_0$. Sei $T_j = I - P_jV$. Dann ist $T_j(\mathfrak{M}_j) \subset \mathfrak{M}_j$. Wir betrachten die Gleichung $T_j\widetilde{x} = y$ in $\widetilde{x} \in \mathfrak{M}_j$. Es ist $||T_jx|| = ||x - PVx|| \geq ||x - Vx|| - ||Vx - P_{\mathfrak{M}_j}v_x|| \geq d||x|| - ||P_{\mathfrak{M}_j}V - V||||x|| \geq d/2||x||$, $j \geq j_0$, $x \in \mathcal{H}$. Also hat die Gleichung $T_jx = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$. Wegen $T_j(\mathfrak{M}_j) \subset \mathfrak{M}_j$ liefert die endlichdimensionale Theorie linearer Abbildungen die Existenz eines und nure eines $x_j \in \mathfrak{M}_j$

mit $T_jx_j = y$. Dann ist $||y|| = ||T_jx_j|| \geq (d/2)||x_j||$, also $||x_j|| \leq (2/d)||y||$, $||Tx_j - y|| = ||Tx_j - T_jx_j|| \leq ||T - T_j|| \cdot ||x_j|| \leq ||P_{\mathfrak{M}_j}V - V||||x_j|| \leq (2/d)||y||||P_{\mathfrak{M}_j}V - V||$. Daher konvergieren die Tx_j gegen y für $j \to \infty$. Insbesondere ist y in $\overline{\mathcal{R}(T)}$. Da nach Hilfssatz III.3.5 der Raum $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist, folgt in der Tat $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$. T^{-1} hat als Definitionsbereich den ganzen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wegen $||Tx|| \geq d||x||$ folgt mit $y = Tx$, $x = T^{-1}y$ die Ungleichung $||T^{-1}y|| \leq (1/d)||y||$, $x, y \in \mathcal{H}$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Entscheidend für den Beweis des letzten Hilfssatzes war die Approximation von V durch Operatoren $P_{\mathfrak{M}_j}V$, wobei die $P_{\mathfrak{M}_j}$ Projektoren von $\mathcal{H}$ auf endlichdimensionale Teilräume $\mathfrak{M}_j$ waren. Wir studieren im nächsten Hilfssatz die Beziehungen zwischen T und T^* für Operatoren $T = I - V$, V vollstetig. Den Kern von T^* bezeichnen wir mit $\mathfrak{N}(T^*)$. Natürlich ist auch $\mathfrak{N}(T^*)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$.

Hilfssatz III.3.7: *Es ist die Dimension von $\mathfrak{N}(T)$ gleich der Dimension von $\mathfrak{N}(T^*)$.*

Beweis: Sei d = Dimension von $\mathfrak{N}(T)$. Wegen $T^* = I - V^*$ und Satz III.2.4 ist die Dimension d^* von $\mathfrak{N}(T^*)$ ebenfalls endlich. Wir müssen nur den Fall $d < d^*$ ausschließen, da d = Dimension von $\mathfrak{N}(T^{**})$ ist. Sei $d = 0$. Dann hat $Tx = 0$ nur die triviale Lösung und nach Hilfssatz III.3.5 hat $Tx = y$ für jedes $y \in \mathcal{H}$ genau eine Lösung x. Sei $z \in \mathfrak{N}(T^*)$, $||z|| = 1$. Dann ist $(Tx, z) = (x, T^*z) = 0$, und dies ergibt für $Tx = z$ einen Widerspruch. Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\}$, $d \geq 1$, eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{N}(T)$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_{d^*}\}$ eine solche von $\mathfrak{N}(T^*)$. Sei

$$Wx = Vx + \sum_{i=1}^{d}(x, \varphi_i)\psi_i,\ x \in \mathcal{H}.$$

Dann ist W ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(W) = \mathcal{H}$ und wie man leicht sieht, vollstetig, da wir nur einen „endlichdimensionalen“Anteil zu V hinzugefügt haben. Sei $(I - W)x = 0$, also

$$Tx - \sum_{i=1}^{d}(x, \varphi_i)\psi_i = 0,$$

$$(Tx, \psi_j) - (x, \varphi_j) = 0,\ (x, T^*\psi_j) - (x, \varphi_j) = 0,$$

$$(x, \varphi_j) = 0,\ j = 1, \ldots, d.$$

Somit ist $Wx = Vx$, $(I - W)x = (I - V)x = Tx = 0$,

$$x = \sum_{i=1}^{d} (x, \varphi_i)\varphi_i = 0.$$

Nach Hilfssatz III.3.6 hat die Gleichung $x - Wx = y$ für jedes $y \in \mathcal{H}$ eine und nur eine Lösung x in $\mathcal{H}$. Dann ist

$$Tx - \sum_{i=1}^{d} (x, \varphi_i)\psi_i = y.$$

Wir setzen, was wegen unserer Annahme $d < d^*$ möglich ist, $y = \psi_{d+1}$. Für das zugehörige x folgt aus der vorletzten Gleichung

$$1 = ||\psi_{d+1}||^2 = (Tx, \psi_{d+1}) = (x, T^*\psi_{d+1}) = 0,$$

und dies ist ein Widerspruch. □

Die sogenannten Fredholmschen Sätze für den Hilbertraum fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz III.3.1: *Sei V ein vollstetiger Operator in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$, sei $T = I - V$, sei $\mathfrak{N}(T)$ der Nullraum von T, $\mathfrak{N}(T^*)$ der Nullraum von $T^* = I - V^*$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Die Dimension d von $\mathfrak{N}(T)$ ist endlich und stimmt mit der Dimension von $\mathfrak{N}(T^*)$ überein,*

(b) *Wenn $d = 0$ ist, so hat T einen in $\mathcal{H}$ definierten beschränkten inversen Operator T^{-1}, der die Form $T^{-1} = I - W$ besitzt, wobei W ein vollstetiger Operator in $\mathcal{H}$ ist mit $\mathcal{D}(W) = \mathcal{H}$,*

(c) *Wenn $d > 0$ ist, so hat zu vorgegebenem $y \in \mathcal{H}$ die Gleichung $Tx = y$ dann und nur dann eine Lösung $x \in \mathcal{H}$, wenn $y \in \mathfrak{N}(T^*)^\perp$ ist.*

Beweis: Es ist nur noch (c) zu zeigen. Nach Hilfssatz III.3.5 ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, sei $y = Tx$ und $z \in \mathfrak{N}(T^*)$. Dann ist $(y, z) = (Tx, z) = (x, T^*z) = 0$, also $z \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Sei umgekehrt $z \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Dann ist $(Tx, z) = 0$, $x \in \mathcal{H}$, also $(x, T^*z) = 0$, $x \in \mathcal{H}$, also $T^*z = 0$, $z \in \mathfrak{N}(T^*)$. Somit ist $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathfrak{N}(T^*)$ und Teil (c) bewiesen. □

Es sei noch darauf hingewiesen, daß für $y \in \mathcal{R}(T)$, T wie in Satz III.3.1, die Gleichung $Tx = y$ gemäß Hilfssatz III.3.4 eine und nur eine Lösung in $\mathfrak{N}(T)^\perp$ hat.

§4. Anwendungen auf Integraloperatoren. Vorbereitendes über Banachräume

Wir stellen einige abstrakte Aussagen an den Anfang, die unmittelbar für die Anwendungen von Bedeutung sind.

Hilfssatz III.4.1: *Sei (K_n) eine Folge vollstetiger Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(K_n) = H$. Sei K ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H}$. Sei*

$$||K_n - K|| \to 0,\ n \to \infty.$$

Dann ist K vollstetig.

Die Aussage des Hilfssatzes III.4.1 kann dahingehend verstanden werden, daß die Vollstetigkeit bei Konvergenz in der Operatorennorm erhalten bleibt.

Beweis des Hilfssatzes III.4.1: Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{H}$ mit $||f_n|| \leq c$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_n^{(1)})$ von (f_n) derart, daß $(K_1 f_n^{(1)})$ konvergiert. Ebenso gibt es Teilfolgen

$$(f_n^{(p)}) \subset (f_n^{(p-1)}) \subset \ldots \subset (f_n^{(1)}) \subset (f_n) \text{ mit}$$

$$(K_{\widetilde{p}} f_n^{(\widetilde{p})}) \text{ konvergent}, p \in \mathbb{N}, \widetilde{p} \in \mathbb{N}, 1 \leq \widetilde{p} \leq p.$$

Wir setzen $f_p' = f_p^{(p)}$. Dann ist die Folge $(K_l f_p')$ konvergent für jedes $l \in \mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, daß auch $(K f_p')$ konvergiert. Es ist

$$||K f_p' - K f_q'|| \leq ||K_l f_p' - K_l f_q'|| + ||K_l - K|| ||f_p'|| + ||K_l - K|| ||f_q'||,$$

$$\leq ||K_l f_p' - K_l f_q'|| + 2c||K_l - K||.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $l_0 = l_0(\varepsilon)$ derart, daß $2c||K_{l_0} - K|| < \varepsilon/2$ wird. Für $p, q > q_0 = q_0(l_0, \varepsilon)$ ist $||K_{l_0} f_p' - K_{l_0} f_q'|| < \varepsilon/2$. Also ist $||K f_p' - K f_q'|| < \varepsilon$, $p, q \geq q_0$ und K vollstetig. $\square$

Satz III.4.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein in $\mathcal{H}$ definierter beschränkter linearer Operator V ist dann und nur dann vollstetig, wenn es eine Folge (V_n) von in $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten linearen Operatoren V_n, $n \in \mathbb{N}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

Die Dimension von $\mathcal{R}(V_n)$ ist endlich,

$$||V_n - V|| \to 0, \ n \to \infty.$$

Beweis: Sei V vollstetig. Die Existenz der Folge (V_n) ist eine unmittelbare Konsequenz aus Hilfssatz III.3.1. Sei umgekehrt (V_n) eine Folge mit den im Satz angegebenen Eigenschaften $\mathcal{R}(V_n)$ ist endlichdimensional und somit abgeschlossen. Sei P_n der Projektor von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{R}(V_n)$. Nach III.2 ist P_n vollstetig, nach Satz III.2.3 ist $P_n V_n$ vollstetig ($n \in \mathbb{N}$). Wegen $V_n = P_n V_n$, $n \in \mathbb{N}$, ist auch V_n vollstetig. Hilfssatz III.4.1 vollendet den Beweis. $\square$

Unsere erste Anwendung beschäftigt sich mit **Integralkernen vom Hilber-Schmidtschen Typ.** Solche hatten wir bereits in II.4 in einer Raumdimension studiert. Sei Q ein offener achsenparalleler Quader im $\mathbb{R}^n$. Sei

$$K \in L^2(Q \times Q).$$

Dann heißt K **Integralkern vom Hilbert-Schmidtschen Typ.** Nach dem Satz von Fubini ([Forster, Analysis 3, S. 73]) ist $|K(x,.)|^2$ für fast alle $x \in Q$ über Q integrierbar. Für $f \in L^2(Q)$ ist

$$g(x) = Kf(x) = \int_Q K(x,y)f(y)dy \tag{III.4.1}$$

demnach nach [Forster, Analysis 3, S. 90]) für fast alle x wohldefiniert; insbesondere haben wir

$$\begin{aligned} |g(x)| &\le \int_Q |K(x,y)||f(y)|dy, \\ |g(x)|^2 &\le \int_Q |K(x,y)|^2 dy \cdot ||f||^2_{L^2(Q)}, \end{aligned}$$

und nach Fubini und der Argumentation in II.4 ([Forster, Analysis 3, S. 73,91]) folgt

$$||g||_{L^2(Q)} \le ||K||_{L^2(Q\times Q)} ||f||_{L^2(Q)}$$

Somit ist durch (III.4.1) ein linearer Operator in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ erklärt, dessen Definitionsbereich $\mathcal{D}(K)$ gerade $\mathcal{H} = L^2(Q)$ ist, der beschränkt ist und dessen Norm $||K||$ der Abschätzung

$$||K|| \le ||K||_{L^2(Q\times Q)} \tag{III.4.2}$$

genügt. K heißt Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Nach

[Forster, Analysis 3, Seite 92] gibt es eine Folge von Funktionen $K_n \in C_0^0(\mathbb{R}^{2n})$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$||K_n - K||_{L^2(Q\times Q)} \to 0,\ n \to \infty. \tag{III.4.3}$$

Die Einschränkung $\widetilde{K_n}$ von K_n auf $Q \times Q$ ist natürlich wieder ein Kern von Hilbert-Schmidtschen Typ. Durch

$$\widetilde{K_n}f(x) = \int_Q \widetilde{K}_n(x,y)f(y)dy,\ f \in L^2(Q)$$

ist jedoch ein vollstetiger Operator in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ gegeben mit $\mathcal{D}(\widetilde{K}_n) = \mathcal{H}$; da nämlich die Funktion $\widetilde{K}_n$ eine stetige Fortsetzung auf $\overline{Q}\times\overline{Q}$ besitzt (man nehme die Einschränkung von K_n auf $\overline{Q} \times \overline{Q}$), kann man so argumentieren wie im dritten Beispiel in III.2.. Da $K - \widetilde{K}_n$ ebenfalls vom Hilbert-Schmidtschen Typ ist, folgt aus (III.4.3), daß $||\widetilde{K}_n - K|| \to 0$, $n \to \infty$, also mit Hilfssatz III.4.1 die Vollstetigkeit von K. Wenn K ein Integraloperator von Hilbert-Schmidtschen Typ ist mit Integralkern K, so ist

$$\begin{aligned}
(Kf,g) &= \int_Q (\int_Q K(x,y)f(y)dy)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_Q f(y)\overline{(\int_Q \overline{K(x,y)}g(x)dx)}dy \\
&= (f, K^*g),\ f,g \in \mathcal{H} = L^2(Q).
\end{aligned}$$

Also ist K^* ebenfalls ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ mit Integralkern

$$K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}.$$

Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen, soweit sie Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ betreffen, in

Hilfssatz III.4.2: *Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Dann ist K vollstetig mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H}$. Wenn K durch den Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$ gegeben wird, so hat K^* den Integralkern $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$, ist also ebenfalls vom Hilbert-Schmidtschen Typ.*

Hinsichtlich der Dimension von $\mathfrak{N}(T)$, $T = I - K$, K vom Hilbert-Schmidtschen Typ, gilt

Hilfssatz III.4.3: *Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$, so gilt für die nach Hilfssätzen III.4.2, III.3.3 endliche Dimension d von $T = I - K$ die Abschätzung:*

$$d \le \int_Q \int_Q |K(x,y)|^2 dy dx.$$

Beweis: Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_d\}$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{N}(T)$. Aus $T\varphi_i = 0$ folgt

$$\varphi_i(x) = \int_Q K(x,y)\varphi_i(y) dy$$

fast überall in Q. Also ist nach der Besselschen Ungleichung (Hilfssätze II.1.1 oder II.1.2)

$$\sum_{i=1}^d |\varphi_i(x)|^2 = \sum_{i=1}^d |\int_Q K(x,y)\overline{\overline{\varphi_i(y)}} dy|^2 \le \int_Q |K(x,y)|^2 dy$$

fast überall in Q. Nochmalige Integration über Q liefert

$$d = \int_Q \sum_{i=1}^d |\varphi_i(x)|^2 dx \le \int_Q \int_Q |K(x,y)|^2 dy dx,$$

was zu zeigen war. $\square$

Die Fredholmschen Sätze für Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ formulieren wir in

Satz III.4.2: *Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ im Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$. Seien $\mathfrak{N}(T), \mathfrak{N}(T^*)$ die Nullräume von $T = I - K$ bzw. $T^* = I - K^*$. Für $\varphi \in \mathfrak{N}(T)$, $\psi \in \mathfrak{N}(T^*)$ gilt*

(III.4.4) $\qquad \varphi(x) - \int_Q K(x,y)\varphi(y) dy = 0$ *fast überall in* Q,

(III.4.5) $\qquad \psi(x) - \int_Q \overline{K(y,x)}\psi(y) dy = 0$ *fast überall in* Q,

und umgekehrt ist jedes $\varphi \in L^2(Q)$ mit (III.4.4) in $\mathfrak{N}(T)$ und jedes $\psi \in L^2(Q)$ mit (III.4.5) in $\mathfrak{N}(T^*)$. Weiter gilt: Dimension $\mathfrak{N}(T)$ = Dimension $\mathfrak{N}(T^*) \le ||K||_{L^2(Q\times Q)} < +\infty$. Zu gegebenem $f \in L^2(Q)$ ist die inhomogene Gleichung

$$u(x) - \int_Q K(x,y)u(y) dy = f(x)$$

genau dann in $L^2(Q)$ lösbar, wenn $\int_Q f(x)\overline{\psi(x)} dx = 0$ ist für alle $\psi \in \mathfrak{N}(T^*)$.

Als nächsten Punkt führen wir die v. Neumannsche Norm für lineare Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ein.

Definition III.4.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sei A ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$, das wir wie üblich als abzählbar unendlich annehmen. Wir sagen, A ist von endlicher v. Neumannscher Norm, wenn*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2 < +\infty$$

ist, und bezeichnen

$$N(A) = (\sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2)^{1/2}$$

als die v. Neumannsche Norm von A.

Damit diese Definition einen Sinn macht, müssen wir ihre Unabhängigkeit von der Auswahl des Orthonormalsystems nachweisen. Dies geschieht in

Hilfssatz III.4.4: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, sei A ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Seien $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ und $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ zwei abzählbar unendliche vollständige Orthonormalsysteme. Dann gilt stets*

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||A\psi_i||^2 \qquad \text{(III.4.6)}$$

Die Gleichung ist so zu verstehen, daß eine Seite dann und nur dann endlich ist, wenn es die andere ist, und, daß dann beide Seiten übereinstimmen.

Beweis: Sei also die rechte Seite in (III.4.6) endlich. Dann ist wegen der Vollständigkeit von $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |(A\varphi_i, \psi_k)|^2,\\
&= \sum_{i,k=1}^{\infty} |(A\varphi_i, \psi_k)|^2,\\
&= \sum_{i,k=1}^{\infty} |(\varphi_i, A^*\psi_k)|^2,\\
&= \sum_{k,i} |(A^*\psi_k, \varphi_i)|^2,\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} ||A^*\psi_i||^2,
\end{aligned}
$$

wobei wir zuletzt die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ benutzt haben. Wieder mit der Vollständigkeit von $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} ||A^*\psi_i||^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(A\psi_k, \varphi_i)|^2,\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ||A\psi||^2.
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Rechnung führt man durch, falls die rechte Seite in (III.4.6) endlich ist. $\square$

Aus dem vorangehenden Beweis folgt $N(A) = N(A^*)$. Im folgenden Hilfssatz vergleichen wir die bereits eingeführte Operatorennorm $||A||$ mit $N(A)$.

Hilfssatz III.4.5: *Sei A ein beschränkter linearer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, den wir als separabel voraussetzen, mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. Dann ist*

$$||A|| \leq N(A)$$

($N(A) = +\infty$ *ist hier zugelassen.*)

Beweis: Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann haben wir

$$f = \sum_{i=1}^{\infty}(f, \varphi_i)\varphi_i,\ f \in \mathcal{H}.$$

Nun ist

$$\sum_{i=N}^{N+M} ||(f,\varphi_i)A\varphi_i|| \leq (\sum_{i=N}^{N+M} |(f,\varphi_i)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=N}^{N+M} ||A\varphi_i||^2)^{1/2},\ N, M \in \mathbb{N}.$$

Wenn also $N(A)$ endlich ist, so haben wir

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)A\varphi_i,$$

da die rechte Seite konvergiert und A stetig ist. Dieselbe Rechnung wie eben zeigt $||Af|| \leq N(A)||f||$, $f \in \mathcal{H}$, also $||A|| \leq N(A)$. Der Fall $N(A) = +\infty$ ist trivial. □

Eine weitere Eigenschaft der Operatoren mit endlicher v. Neumannscher Norm geben wir in

Hilfssatz III.4.6: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, sei A ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$. A besitze endliche v. Neumannsche Norm $N(A)$. Dann ist A vollstetig.*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$, die für $n \to \infty$ schwach gegen $f \in \mathcal{H}$ konvergiere. Aus dem Beweis des vorhergehenden Hilfssatzes folgt

$$Af_n - Af = \sum_{i=1}^{\infty}((f_n,\varphi_i) - (f,\varphi_i))A\varphi_i,$$

also

$$\begin{aligned}
||Af_n - Af|| &\leq \sum_{i=1}^{m} |(f_n - \varphi_i) - (f,\varphi_i)|\ ||A\varphi_i|| + \sum_{i=m+1}^{\infty} (|(f_n,\varphi_i)| + |(f,\varphi_i)|)||A\varphi_i||, \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |(f_n,\varphi_i) - (f,\varphi_i)|\ ||A\varphi_i|| + [(\sum_{i=m+1}^{\infty} |(f_n,\varphi_i)|^2)^{1/2} + \\
&\quad +(\sum_{i=m+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2)^{1/2}] \cdot (\sum_{i=m+1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

$$\text{(III.4.7)} \quad \leq \sum_{i=1}^{m} |(f_n,\varphi_i) - (f,\varphi_i)|\ ||A\varphi_i|| + (c + ||f||) \cdot (\sum_{i=m+1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2)^{1/2},$$

$m \in \mathbb{N}$.

Hierbei ist $c = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||f_n||$, und diese Größe fällt nach Satz III.1.5 endlich aus. Wegen $N(A) < +\infty$ können wir zu $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$ wählen derart, daß der zweite Ausdruck in (III.4.7) rechts kleiner als $\varepsilon/(c + ||f|| + 2)$ wird für $m = m_0$. Für $n \geq n_0 = n_0(m_0, \varepsilon)$ wird die erste Summe in (III.4.7) dann $< \varepsilon/2$, da $|(f_n, \varphi_i) - (f, \varphi_i)| \to 0$, $n \to \infty$, $i \in \mathbb{N}$ und $||A\varphi_i|| \leq ||A||$ sind. Also folgt: $Af_n \to Af$, $n \to \infty$. Anwendung des Satzes III.2.5 vollendet den Beweis. $\square$

Sei Q ein offener achsenparalleler Quader des $\mathbb{R}^n$, $K \in L^2(Q \times Q)$ ein Integralkern vom Hilbert-Schmidtschen Typ, K der zugehörige Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ in $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Es ist keine Einschränkung anzunehmen, daß $\overline{Q} \subset \{x | x \in \mathbb{R}^n,\ |x_j| < \pi,\ j = 1, \ldots n\}$. Wir führen eine geeignete Variablentransformation aus. Aus (I.1.13) folgt, daß $L^2(Q)$ separabel ist, da wir für die d_κ Elemente aus den komplexen Zahlen mit rationalen Real- und Imaginärteilen wählen können, man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen in II.7.

Wir wollen nun den eben eingeführten Begriff der v. Neumannschen Norm auf Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ anwenden. Unser Ergebnis ist

Hilfssatz III.4.7: *Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$. Dann gilt: $N(K)^2 = \int_Q \int_Q |K(x,y)|^2 dydy$*

Beweis: Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(Q)$. Sei ($i \in \mathbb{N}$)

$$\psi_i(x) = \int_Q K(x,y)\varphi_i(y)dy;$$

dann ist ψ_i fast überall in Q erklärt und aus $L^2(Q)$.

$$\begin{aligned} N(K)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} ||K\varphi_i||^2, \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_Q |\psi_i(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Levi ([Forster, Analysis 3, S. 81]) ist somit

$$\begin{aligned} N(K)^2 &= \int_Q \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2 dx, \\ &= \int_Q \sum_{i=1}^{\infty} |\int_Q \overline{K(x,y)\varphi_i(y)} dy|^2 dx. \end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ist für fast alle $x \in Q$

$$\int_Q |K(x,y)|^2 dy = \int_Q |\overline{K(x,y)}|^2 dy = \sum_{i=1}^{\infty} |\int_Q |\overline{K(x,y)\varphi_i(y)} dy|^2,$$

so daß in der Tat $N(K)^2 = \int_Q \int_Q |K(x,y)|^2 dydy$ ist. $\square$

Im Spezialfall, daß $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ ist, gestattet der Beweis des vorhergehenden Hilfssatzes eine einfachere Argumentation. Dann ist nämlich $\psi_i \in C^0(\overline{Q})$, wie das Beispiel drei in III.2 zeigt (Man erkennt sofort, daß die Rechnung im n-dimensionalen Fall dieselbe wie im eindimensionalen Fall ist, siehe auch II.1). Zunächst haben wir wie im Beeweis des vorhergehenden Hilfssatzes

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2 = \int_Q |K(x,y)|^2 dy,$$

aber jetzt überall in $\overline{Q}$. Der Satz von Dini zeigt die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2$$

in $\overline{Q}$, da durch $\int_Q |K(x,y)|^2 dy$, $x \in \overline{Q}$, eine stetige Funktion auf $\overline{Q}$ gegeben ist. Daher können wir Integration und Reihenbildung vertauschen, erhalten

$$N(K)^2 = \int_Q \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2 dx$$

und daraus das gewünschte Ergebnis.

Als nächste Anwendung behandeln wir die sogenannten **schwachsingulären Kerne.** Es erweist sich als zweckmäßig, bereits jetzt den Begriff des Banachraums einzuführen, obwohl wir diesen erst später genauer studieren werden.

Definition III.4.2: *Sei $\mathfrak{B}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, d.h. insbesondere, es ist eine Abbildung $x \longmapsto ||x||$ von B in die nichtnegativen reellen Zahlen gegeben mit folgenden Eigenschaften: $||x|| = 0$ dann und nur dann, wenn $x = 0$ ist, $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in B$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, $x, y \in \mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ heißt Banachraum dann und nur dann, wenn $\mathfrak{B}$ vollständig ist, d.h.: Wenn (x_n) eine Cauchy-Folge von Elementen $x_n \in \mathfrak{B}$ ist, $n \in \mathbb{N}$,* *also* $||x_n - x_m|| \to 0,\ n, m \to \infty$, *so gibt es ein und nur ein* $x \in \mathfrak{B}$ *mit* $||x_n - x|| \to 0,\ n \to \infty$. *Im letzten Fall sagt man, daß die Folge* (x_n) *gegen* x *(in* $\mathfrak{B}$*) konvergiert für* $n \to \infty$, *in Zeichen* $x_n \to x,\ n \to \infty$ *oder* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. x *heißt Grenzwert von* (x_n).

Natürlich ist der Grenzwert einer konvergenten Folge (x_n) eindeutig bestimmt. Wir führen nun einige Begriffe für einen Banachraum ein, deren Definition in völliger Analogie zu den entsprechenden Definitionen im Hilbertraum steht, so daß wir uns kurz fassen können. Seien $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}'$ zwei Banachräume, sei $\mathbb{C}$ ein Teilraum, d.h. Untervektorraum von $\mathfrak{B}$. Sei $T : \mathcal{D} \to \mathfrak{B}'$ eine lineare Abbildung, d.h. $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T f + \beta T g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in B$. Dann heißt $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ der Definitionsbereich von T, der Teilraum $\mathcal{R}(T) = \{Tx | x \in B\}$ von $\mathfrak{B}'$ heißt Wertebereich von T, T heißt linearer Operator von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ (in $\mathfrak{B}$, wenn $\mathfrak{B}'$ als Banachraum mit $\mathfrak{B}$ übereinstimmt). T heißt beschränkt, wenn ($||.||'$ ist die Norm von $\mathfrak{B}'$)

$$||T|| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{D}(T),\\ f\neq 0}} \frac{||Tf||'}{||f||} = \sup_{\substack{f\in\mathcal{D}(T),\\ ||f||=1}} ||Tf||'$$

endlich ausfällt. T ist dann und nur dann beschränkt, wenn $||Tf||' \leq c||f||$, $f \in \mathcal{D}(T)$, ist mit einer nichtnegativen Konstanten c. Letzteres ist wiederum äuqivalent mit der Stetigkeit von T. Ist $\mathcal{D}(T) = \mathfrak{B}$, T beschränkt, so sagen wir T ist Element von $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$, und bezeichnen $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ als den Raum aller beschränkten linearen Operatoren T von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathfrak{B}$. Man zeigt leicht, daß $L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ wird, wenn man die Addition zweier Operatoren $T, T' \in L(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ und αT, $\alpha \in \mathbb{C}$, in naheliegender Weise definiert. Die Dichtheit einer Teilmenge eines Banachraums $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ ist wie im Hilbertraum erklärt (Definition II.1.3).

Dir Präkompaktheit einer Teilmenge $\sum$ eines Banachraums B wird ebenso erklärt wie im Fall eines Prählibertraums (Definition III.2.1). Entsprechend lautet auch die Definition eines vollstetigen Operators.

Definition III.4.3: *Sei* $\mathfrak{B}$ *ein Banachraum, sei* V *ein linearer Operator in* $\mathfrak{B}$ *mit* $\mathcal{D}(V) = \mathfrak{B}$. V *heißt vollstetig oder kompakt genau dann, wenn* $\sum = \{Vx | x \in \mathfrak{B}, ||x|| \leq 1\}$ *präkompakt ist.*
Natürlich können wir die Menge $\sum_1 = \sum$ in der obigen Definition ersetzen durch $\sum_c = \{Vx | x \in \mathfrak{B},\ ||x|| \leq c\}$ für irgendein $c > 0$. Beispiele für vollstetige Operatoren werden wir gleich kennenlernen. Wir benötigen noch ein Kriterium für Vollstetigkeit, das dem Hilfssatz III.4.1 entspricht. Doch zunächst merken wir an

Hilfssatz III.4.8: *Sei $\mathfrak{B}$ ein Banachraum, sei V ein vollstetiger linearer Operator in $\mathfrak{B}(\mathcal{D}(V) = \mathfrak{B})$. Dann ist V beschränkt.*

Beweis: Wie Beweis des Satzes III.2.1. □

Hilfssatz III.4.9: *Sei $\mathfrak{B}$ ein Banachraum, sei (K_n) eine Folge vollstetiger linearer Operatoren in $\mathfrak{B}(\mathcal{D}(K_n) = \mathfrak{B})$, sei K ein beschränkter linearer Operator in $\mathfrak{B}$ mit $\mathcal{D}(K) = \mathfrak{B}$. Es gelte $||K_n - K|| \to 0$, $n \to \infty$.*

Dann ist auch K vollstetig.

Beweis: Wie Hilfssatz III.4.1. □

Hilfssatz III.4.10: *Sei $\mathfrak{B}$ ein Banachraum, sei V ein vollstetiger linearer Operator in $\mathfrak{B}(\mathcal{D}(V) = B)$, sei T ein beschränkter linearer Operator in $\mathfrak{B}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathfrak{B}$. Dann sind die linearen Operatoren VT und TV ebenfalls vollstetige lineare Operatoren in $\mathfrak{B}$ (VT und TV sind natürlich im Sinn des Hintereinanderausführens von Abbildungen zu verstehen).*

Beweis: Wie Satz III.2.3. □

Für Banachräume kennen wir bereits verschiedene **Beispiele:**
Sei Ω eine offene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die stetigen Abbildungen $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ und setzen

$$||f|| = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|.$$

Unsere Behauptung ist nun: Erklärt man $f + g$, αg, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$ in der üblichen Weise, so wird mit $||f||$ wie oben eingeführt, $f \in C^0(\overline{\Omega})$, der Vektorraum $C^0(\overline{\Omega})$ über $\mathbb{C}$ zu einem Banachraum (den wir wieder mit $C^0(\overline{\Omega})$ bezeichnen wollen). Zu zeigen ist nur die Vollständigkeit. Sei (f_ν) eine Cauchy-Folge bezüglich der eben eingeführten Norm, d.h. $\sup_{x\in\overline{\Omega}} |f_\nu(x) - f_\mu(x)| \to 0$, $\nu, \mu \to \infty$, so erkennt man, daß die f_ν gleichmäßig in $\overline{\Omega}$ gegen eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ konvergieren. Für die verwandten Banachräume $C^k(\overline{\Omega})$ siehe I.2.

Aus [Forster, Analysis 3, S. 96/97] sind die Banachräume $L^p(\mathbb{R}^n)$ bekannt, $p \geq 1$. Wenn Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$ ist, so ist $L^p(\Omega)$ der abgeschlossene Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$, der entsteht, wenn man alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ betrachtet, die fast überall außerhalb Ω verschwinden. $L^p(\Omega)$ ist also auch ein Banachraum, seine Norm ist natürlich gegeben durch

$$||f||_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |f|^p dx)^{1/p}$$

Wir kommen nun zu den schwach singulären Integralkernen.

Definition III.4.4: *Sei Ω eine offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Eine Abbildung*

$$K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} - \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}^n,\, x=y\} \to \mathbb{C}$$

heißt schwach singulärer Kern zum Exponenten α oder Kern vom Schurschen Typ zum Exponenten α, $\alpha < n$, wenn folgendes gilt:

1. K *ist stetig,*

2. $|K(x,y)| \leq c/|x-y|^\alpha$, $(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} - \{y = x\}$, *mit einer Konstanten* $c > 0$, *wenn* $0 \leq \alpha < n$ *ist,*

3. K *hat eine stetige Fortsetzung auf* $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, *wenn* $\alpha < 0$ *ist, die wir ebenfalls mit* K *bezeichnen.*

Die Menge der schwach singulären Kerne wird mit $\mathfrak{S}_\alpha(\overline{\Omega})$ bezeichnet.

Natürlich ist im Fall $\alpha < 0$ die stetige Fortsetzung von K auf $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ eindeutig bestimmt.

Die Bedeutung der schwach singulären Kerne liegt darin, daß man mit ihrer Hilfe Integraloperatoren bilden kann, die Differentialgleichungen lösen. Zunächst erinnern wir an das Newtonsche Potential in [Forster, Analysis 3, S. 161], dann an das Dirichletsche Randwertproblem in I.2; man kann zeigen, daß für die dort eingeführte Funktion G gilt:

$$G \in \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{S}_\alpha(\overline{B}),$$

$B = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 1\}$. Auch beim Sturm-Liouvilleschen Problem in I.1 trat in Gestalt der Greenschen Funktion G ein schwach singulärer Kern auf, der hier allerdings keine Singularität besitzt, vielmehr ist

$$G \in \bigcup_{\alpha < 0} \mathfrak{S}_\alpha([a,b]).$$

Zur Vereinfachung unserer Rechnungen wollen wir im folgenden voraussetzen, daß Ω ein offener achsenparalleler Quader Q des $\mathbb{R}^n$ ist. Ohne zunächst die verwendeten Funktionen f näher zu spezifizieren, wollen wir K, definiert durch

$$Kf(x) = \int_{\overline{Q}} K(x,y)f(y)dy,$$

$K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$, als schwach singulären Integraloperator bezeichnen. Wie schon bei Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ verwenden wir für den Integraloperator und den zugehörigen Integralkern denselben Buchstaben.

Hilfssatz III.4.11: *Sei $K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$. Dann ist durch*

$$Kf(x) = \int_{\overline{Q}} K(x,y)f(y)dy,\ f \in C^0(\overline{Q}),$$

im Banachraum $B = C^0(\overline{Q})$ ein vollstetiger linearer Operator gegeben.

Beweis: Sei durch $\Theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

$$\Theta(t) = \begin{bmatrix} 0, & 0 \le t \le 1 \\ t-1, & 1 \le t \le 2 \\ 1, & 2 \le t < +\infty \end{bmatrix}$$

eine stetige Funktion gegeben. Sei $K_\delta(x,y)$, $\delta > 0$, definiert durch

$$K_\delta(x,y) = K(x,y)\Theta(\frac{|x-y|}{\delta}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &K_\delta(x,y) = 0,\ |x-y| \le \delta,\ (x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}, \\ &K_\delta(x,y) = K(x,y),\ |x-y| \ge 2\delta,\ (x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}, \\ &K_\delta \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q}). \end{aligned}$$

Offenbar ist K_δ ein schwach singulärer Kern zu jedem Exponenten $\alpha' < 0$. Der zugehörigen Integraloperator ist vollstetig in $C^0(\overline{Q})$, wie die Argumentation im dritten Beispiel in III.2 zeigt. Daß

$$\int_{\overline{Q}} K(x,y)f(y)dy$$

wohldefiniert und aus $C^0(\overline{Q})$ ist, $f \in C^0(\overline{Q})$ wird in der folgenden Rechnung mitbewiesen. Es ist

$$\begin{aligned}
|K_\delta f(x) - Kf(x)| &= |\int_{\overline{Q}} (K_\delta(x,y) - K(x,y))f(y)dy|, \\
&\leq \int_{\overline{Q}} |K_\delta(x,y) - K(x,y)|dy||f||_{C^0(\overline{Q})}, \\
&\leq \int_{\overline{Q}} |(\Theta(\frac{x-y}{\delta}) - 1)K(x,y)|dy||f||_{C^0(\overline{Q})}, \\
&= \int_{\overline{Q} \cap \{y||y-x| \leq 2\delta\}} |(\Theta(\frac{x-y}{\delta}) - 1)K(x,y)|dy \cdot ||f||_{C^0(\overline{Q})} \\
&\leq c \int_{\{y||y-x| \leq 2\delta\}} \frac{1}{|x-y|^\alpha} ||f||_{C^0(\overline{Q})}, \\
&\leq c \cdot w_n \int_0^{2\delta} r^{n-1-\alpha} dr ||f||_{C^0(\overline{Q})}, \\
&= \frac{c \cdot w_n}{n-\alpha} (2\delta)^{n-\alpha} ||f||_{C^0(\overline{Q}}, x \in \overline{Q} \qquad \text{(III.4.8)}
\end{aligned}$$

Die Größe w_n ist hierbei die Oberfläche der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$; wir haben Beispiel (9.1) in [Forster, Analysis 3, S. 85] verwendet. Die Integrierbarkeit aller auftretenden Integranden folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz ([Forster, Analysis 3, S. 83]): $K_\delta(x,y) \to K(x,y)$ fast überall in $\overline{Q}$, $x \in \overline{Q}$, $\delta \to 0$, $|K_\delta(x,y)| \leq c/|x-y|^\alpha$ mit einer von δ unabhängigen positiven Konstante, und die letzte Funktion ist integrierbar über $\overline{Q}$ nach dem eben erwähnten Beispiel. Aus (III.4.8) folgt

$$\sup_{x \in \overline{Q}} |K_\delta f(x) - Kf(x)| \leq c(2\delta)^{n-d} ||f||_{C^0(\overline{Q})}$$

mit einer positiven Konstante c. Insbesondere konvergieren die Funktionen $K_\delta f \in C^0(\overline{Q})$ gleichmäßig in $\overline{Q}$ gegen Kf, deren Wohldefiniertheit für jedes $x \in \overline{Q}$ die vorgehenden Rechnungen zeigen. Somit ist $Kf \in C^0(\overline{Q})$. Es ist klar, daß durch K ein linearer Operator in $\mathfrak{B} = C^0(\overline{Q})$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(K) = \mathfrak{B}$ gegeben ist. K ist auch beschränkt, denn es gibt ein $R > 0$ derart, daß $\overline{Q} \subset K_r(x) = \{y||x-y| < R\}$ für alle $x \in \overline{Q}$, so daß

$$|Kf(x)| \leq c \cdot R^{n-\alpha} ||f||_{C^0(\overline{Q})}, \; x \in \overline{Q},$$

wird nach dem eben erwähnten Beispiel (9.1). Hilfssatz III.4.9 vollendet den Beweis. □

Im nächsten Schritt erweitern wir die Klasse der Funktionen, auf die K anwendbar ist.

Hilfssatz III.4.12: *Sei $K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$. Sei $f \in L^1(Q)$.*

Dann ist

$$\text{(III.4.9)} \qquad Kf(x) = \textstyle\int_Q K(x,y)f(y)$$

für fast alle $x \in \overline{Q}$ *wohldefiniert und aus* $L^1(Q)$. *Es ist* $||Kf||_{L^1(Q)} \leq c||f||_{L^1(Q)}$ *mit einer Konstante* $c > 0$. *Daher ist durch (III.4.9) ein beschränkter linearer Operator* K *in* $B = L^1(Q)$ *gegeben mit* $\mathcal{D}(K) = B = L^1(Q)$. *Sei* $f \in L^2(Q)$. *Dann ist* Kf *sogar aus* $L^2(Q)$. *Es ist* $||Kf||_{L^2(Q)} \leq c||f||_{L^2(Q)}$ *mit einer positiven Konstante* c. *Durch die Einschränkung von (III.4.9) auf* $L^2(Q)$ *ist also ein beschränkter linearer Operator* K *im Hilbertraum* $\mathcal{H} = L^2(Q)$ *gegeben mit* $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H} = L^2(Q)$.

Beweis: Sei $x \in \overline{Q}$, seien K_δ, $\delta > 0$, die im Beweis von Hilfssatz III.4.11 eingeführten Funktionen aus $C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$. Dann ist

$$K_\delta(x,y)f(y) \to K(x,y)f(y),\ \delta \to 0,$$

für fast alle $y \in Q(f \in L^1(Q))$. Endlich ist

$$|K_\delta(x,y)f(y)| \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha}|f(y)|,\ y \in Q,\ \delta > 0.$$

Nun wählen wir $K_R(x)$ wie im Beweis des Hilfssatzes III.4.11 und setzen

$$\begin{aligned} \widehat{g}(v) &= \frac{c}{|v|^\alpha},\ |v| < R, \\ \widehat{g}(v) &= 0,\ |v| \geq R. \end{aligned}$$

f wird durch Null außerhalb von Q fortgesetzt. Dann ist

$$|K_\delta(x,y)f(y)| \leq \widehat{g}(x-y)|f(y)|,\ y \in Q,\ \delta > 0.$$

Die rechte Seite ist für fast alle $x \in Q$ aus $L^1(Q)$ ([Forster, Analysis 3, S. 75]). Also ist $Kf(x)$ für fast alle $x \in Q$ wohldefiniert und

$$\text{(III.4.10)} \qquad |Kf(x) \leq \widehat{g} * |f|(x)$$

(Satz von Lebesgue, Faltung, s. [Forster, Analysis 3, S. 83, S. 75]). Aufgrund der Stetigkeit von K_δ ist die durch

$$K_\delta f(x) = \int_Q K_\delta(x,y)f(y)dy,\ x \in \overline{Q},$$

gegebene Funktion aus $C^0(\overline{Q})(f \in L^1(Q))$. Wie eben gezeigt, ist

$$K_\delta f(x) \to Kf(x),\ \delta \to 0,\ \text{für fast alle } x \in Q.$$

Erneute Anwendung des Satzes von Lebesgue liefert mit (III.4.10) und [Forster, Analysis 3, S. 75, Beispiel (9.1), S. 85]

$$Kf \in L^1(Q)$$

$$||Kf||_{L^1(Q)} \leq ||\widehat{g}||_{L^1(K_R(0))}||f||_{L^1(Q)}.$$

Sei nun $f \in L^2(Q)$, $g \in C^0(\overline{Q})$. Dann ist nach dem eben Gesagten $|K||f| \cdot |g| \in L^1(Q)$; hierbei ist $|K|$ der zum Kern $|K| \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ gehörige Integraloperator. Nach dem Satz von Fubini-Tonelli ist

$$\begin{aligned}
|\int_Q Kf(x)\overline{g(x)}dx| &\leq \int_{Q\times Q} |K(x,y)||g(x)||f(y)|dxdy, \\
&= \int_{Q\times Q} |K(x,y)|^{1/2}|g(x)||K(x,y)|^{1/2}|f(y)|dxdy, \\
&\leq (\int_{Q\times Q} |K(x,y)||g(x)|^2dxdy)^{1/2} \cdot \\
&\quad \cdot(\int_{Q\times Q} |K(x,y)||f(y)|^2dxdy)^{1/2}, \\
&\leq \sqrt{MN}||f||_{L^2(Q)}||g||_{L^2(Q)},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
N = \sup_{x\in\overline{Q}} \int_Q |K(x,y)|dy &\leq \sup_{x\in\overline{Q}} \int_{K_R(x)} \frac{c}{|x-y|^\alpha}dy, \\
&\leq cR^{n-\alpha}/(n-\alpha), \\
M = \sup_{y\in\overline{Q}} \int_Q |K(x,y)|dx &\leq \sup_{y\in\overline{Q}} \int_{K_R(y)} \frac{c}{|x-y|^\alpha}dx, \\
&\leq cR^{n-a}/(n-\alpha)
\end{aligned}$$

ist. Für $f \in C^0(\overline{Q})$ ist nach Hilfssatz III.4.11 $Kf \in C^0(\overline{Q})$. Setzt man $g = Kf$, so erhalten wir

$$||Kf||_{L^2(Q)} \leq \sqrt{MN}||f||_{L^2(Q)} \tag{III.4.11}$$

Bilden wir die Abschließung des im Teilraum $\mathcal{D}(K) = C^0(\overline{Q})$ von $\mathcal{H} = L^2(Q)$ durch $Kf(x) = \int_Q K(x,y)f(y)dy$ definierten linearen Operators in $\mathcal{H}$, so liefert dies nach Satz II.4.1 und (III.4.11) einen linearen Operator $\overline{K} \in L(\mathcal{H})$. Ist $f \in L^2(Q)$, (f_n) eine Folge aus $C^0(\overline{Q})$ mit $f_n \to f$, $n \to \infty$, so haben wir nach [Forster, Analysis 3, S. 96] und dem bereits bewiesenen Teil unseres Hilfssatzes

$$\begin{aligned} Kf_{n_j}(x) &\rightarrow \overline{K}f(x) \text{ für fast alle } x \in Q,\ j \to \infty, \\ Kf_{n_j}(x) &\rightarrow Kf(x) = \int_Q K(x,y)f(y)dy \text{ für fast alle } x \in Q,\ j \to \infty, \end{aligned}$$

wobei wir eine geeignete Teilfolge (f_{n_j}) von (f_n) ausgewählt haben. Also ist fast überall in Q

$$\overline{K}f(x) = \int_Q K(x,y)f(y)dy,\ f \in L^2(Q)$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Zur näheren Charakterisierung der Operatoren K beweisen wir

Hilfssatz III.4.13: *Sei K der in Hilfssatz III.4.12 eingeführte beschränkte Operator in $\mathfrak{B} = L^1(Q)$ bzw. $\mathcal{H} = L^2(Q)$, $\mathcal{D}(K) = \mathfrak{B}$ bzw. $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H}$. Dann ist K vollstetig.*

Beweis: Sei K_δ der bereits eingeführte Kern aus $C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, und der zugehörige Integraloperator sei ebenfalls mit K_δ bezeichnet. Der Satz von Ascoli-Arzelá zeigt sofort die Vollstetigkeit von K_δ in $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathcal{H}$, siehe auch das dritte Beispiel in III.2. Wie im ersten Teil des Beweises des Hilfssatzes III.4.12 zeigt man

$$\begin{aligned} ||Kf - K_\delta f||_{L^1(Q)} &\leq c \int_{|x|\leq 2\delta} \frac{1}{|x|^\alpha} dx ||f||_{L^1(Q)}, \\ &\leq c((2\delta)^{n-\alpha}/(n-\alpha))||f||_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Hilfssatz III.4.9 zeigt die Vollstetigkeit von K in $L^1(Q)$. Nun betrachten wir K in $L^2(Q)$. Die Rechnung, die zu (III.4.11) führte liefert

$$||Kf - K_\delta f||_{L^2(Q)} \leq c((2\delta)^{n-\alpha}/(n-\alpha))||f||_{L^2(Q)},$$

und wir erhalten die Vollstetigkeit wieder mit Hilfssatz III.4.9. □

Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, daß jede Lösung f etwa in $L^1(Q)$ oder $L^2(Q)$ von $f - Kf = g$ stetig ist in $\overline{Q}$, sofern dies von g gilt. Dabei ist K schwach singulärer Integraloperatore in $L^1(Q)$ oder $L^2(Q)$ mit Kern $K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$. Zu diesem Vorhaben benötigen wir einige Vorbereitungen.

Formal erhalten wir durch Hintereinanderausführen zweier schwach singulärer Integraloperatoren L und K mit Kernen $L \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$, $K \in \mathfrak{S}_\beta(\overline{Q})$.

$$\int_Q K(z,x)(\int_Q L(x,y)f(y)dy)dx = \int_Q(\int_Q K(z,x)L(x,y)dx)f(y)dy,$$

so daß es bei der Untersuchung von KL offenbar auf die Größe $M(x,y) = \int_Q K(z,x)L(x,y)dx$ ankommt. Wir beweisen daher zunächst

Hilfssatz III.4.14: *Seien $0 < \alpha, \beta < n$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $(1/|x-z|^\alpha)(1/|z-y|^\beta)$ von z, $z \in \mathbb{R}^n - \{x,y\}$, über jede Kugel $\overline{K_R(0)}$, $R > 0$, integrierbar, und es gelten für*

$$I(x,y) = \int_{|z|\le R} \frac{dz}{|x-z|^\alpha |z-y|^\beta}$$

die folgenden Abschätzungen: Für $\alpha + \beta < n$ ist

$$I(x,y) \le c_1(n,\alpha,\beta)R^{n-(\alpha+\beta)},$$

für $\alpha + \beta > n$ ist

$$I(x,y) \le c_2(n,\alpha,\beta)\frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta-n}},\ x \ne y,$$

mit von n, α, β abhängigen positiven Konstanten $c_1(n,\alpha,\beta)$, $i = 1,2$.

Beweis: Wir behandeln zunächst den Fall $\alpha + \beta < n$. Sei

$$p = \frac{\alpha+\beta}{\alpha},\ q = \frac{\alpha+\beta}{\beta}.$$

Dann ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und formal gilt nach der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} I(x,y) &\le (\int_{|z|\le R} \frac{dz}{|x-z|^{\alpha p}})^{1/p}(\int_{|z|\le R} \frac{dz}{|z-y|^{\beta p}})^{1/q}, \\ &= (\int_{|z|\le R} \frac{dz}{|x-z|^{\alpha+\beta}})^{1/p}(\int_{|z|\le R} \frac{dz}{|z-y|^{\alpha+\beta}})^{1/q}, \end{aligned}$$

und die Integrierbarkeit $(1/|x-z|^\alpha)(1/|z-y|^\beta)$ über $|z| \le R$ ist bewiesen, wenn die von $(1/|x-z|^{\alpha+\beta})$ über $|z| \le R$ und die von $(1/|z-y|^{\alpha+\beta})$ über $|z| \le R$ gezeigt ist ([Forster, Analysis 3, S. 92, S. 90]). Sei $\gamma = \alpha+\beta$. Wenn $|x| \le 2R$ ist, folgt $|x-z| = |z-x| \le |z| + |x| \le 3R$, $|z| \le R$. Also ist $\{z||z| \le R\} \subset \{z||z-x| \le 3R\}$, $|x| \le 2R$. Somit ist

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{|z|\le R} \frac{dz}{|x-z|^\gamma} \le \int_{|z-x|\le 3R} \frac{dz}{|x-z|^\gamma} \\ &= (w_n/(n-\gamma))(3R)^{n-\gamma},\ |x| \le 2R. \end{aligned}$$

Sei nun $|x| > 2R$. Dann ist $|x - z| \geq |x| - |z| > 2R - R = R$, $|z| \leq R$. Also haben wir

$$I(x) \leq R^{-\gamma} \int_{|z|\leq R} dz = (w_n/n)R^{n-\gamma}, \ |x| > 2R.$$

In jedem Falle gilt somit

$$I(x) \leq (w_n/(n-\gamma))(3R)^{n-\gamma}.$$

Die Integrierbarkeit von $1/|x-z|^\gamma$ über beliebige kompakte Mengen des $\mathbb{R}^n$ ist durch Beispiel (9.1) in [Forster, Analysis 3, S. 85] gesichert; dasselbe Beispiel liefert auch die verwendeten Formeln für die Volumenintegrale. Damit ist der Fall $\alpha+\beta < n$ erledigt. Im Fall $\alpha+\beta > n$ gehen wir zunächst von der Integrierbarkeit von $(1/|x-z|^\alpha)(1/|z-y|^\beta)$ über $|z| \leq R$ aus; sei $x \neq y$, $\delta = |x-y|$. Dann ist

$$\text{(III.4.12)} I(x,y) = \int_{\substack{|z|\leq R,\\ |z-x|\leq\frac{1}{2}\delta}} \frac{dz}{|x-z|^\alpha|z-y|^\beta} + \int_{\substack{|z|\leq R,\\ \frac{1}{2}\delta\leq|z-x|\leq 2\delta}} \frac{dz}{|x-z|^\alpha|z-y|^\beta} +$$
$$+ \int_{\substack{|z|\leq R,\\ |z-x|\geq 2\delta}} \frac{dz}{|x-z|^\alpha|z-y|^\beta} = I_1(x,y) + I_2(x,y) + I_3(x,y).$$

Schätzen wir zuerst $I_1(x,y)$ ab. Aus $|z-x| \leq \frac{1}{2}\delta$ folgt $|z-y| \geq |x-y| - |x-z| \geq \delta/2$. Also ist

$$\begin{aligned} I_1(x,y) &\leq (1/(\delta/2)^\beta) \int_{|z-x|\leq\frac{1}{2}\delta} \frac{dz}{|z-x|^\alpha}, \\ &= (1/(\delta/2)^\beta)(w_n/(n-\alpha))(\delta/2)^{n-\alpha}, \\ &= (w_n/(n-\alpha))1/(\delta/2)^{\alpha+\beta-n}. \end{aligned}$$

Wenn wir berücksichtigen, daß aus $|z-x| \leq 2\delta$ folgt: $|z-y| \leq |z-x| + |x-y| \leq 3\delta$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I_2(x,y) &\leq (1/(\delta/2)^\alpha) \int_{|z-x|\leq 2\delta} \frac{dz}{|z-x|^\beta}, \\ &\leq (1/(\delta/2)^\alpha) \int_{|z-y|\leq 3\delta} \frac{dz}{|z-y|^\beta}, \\ &= (1/(\delta/2)^\alpha)(w_n/(n-\beta))(3\delta)^{n-\beta}, \\ &= (3^{n+\alpha-\beta}w_n/(n-\beta))1/\delta^{\alpha+\beta-n}. \end{aligned}$$

Zu $I_3(x,y)$: Aus $|z-x| \geq 2\delta$ folgt $|z-y| \geq |z-x| - |x-y| \geq |z-x| - \delta \geq \frac{1}{2}|z-x|$, also

$$\begin{aligned} I_3(x,y) &\leq \int_{|z-x|\geq 2\delta} \frac{dz}{|z-x|^\alpha(\frac{1}{2}|z-x|)^\beta}, \\ &= 2^\beta \int_{|z-x|\geq 2\delta} \frac{dz}{|z-x|^{\alpha+\beta}}, \\ &= (2^\beta w_n/(\alpha+\beta-n))1/(2\delta)^{\alpha+\beta-n}, \end{aligned}$$

wobei wir Beispiel (9.2) in [Forster, Analysis 3, S. 86] verwendet haben. Die Integrierbarkeit des ersten Integranden in (III.4.12) rechts folgt aus dem schon erwähnten Beispiel (9.1) und der Stetigkeit des zweiten Faktors des Integranden in $|z-x| \leq \frac{1}{2}\delta$. Die Integrierbarkeit des zweiten Integranden folgt entsprechend. Die Integrierbarkeit des dritten Integranden kann aus seiner lokalen Integrierbarkeit (man beachte, daß der Integrand stetig ist auf $|z-x| \geq 2\delta$) und dem Corollar in [Forster, Analysis 3, S. 87] geschlossen werden. Somit ist $I(x,y)$ wohldefiniert. Addition unserer Abschätzungen für $I_j(x,y)$, $j=1,2,3$ liefert das gewünschte Ergebnis. □

Hilfssatz III.4.15: *Sei $A \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$, sei $B \in \mathfrak{S}_\beta(\overline{Q})$ für irgendzwei Zahlen $\alpha, \beta \in (0,n)$. Seien A, B die zugehörigen schwach singulären Integraloperatoren in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ bzw. $L^2(Q)$ bzw. $C^0(\overline{Q})$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. AB im Sinne der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist dann ebenfalls ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}(AB) = \mathcal{B}$,*

$$ABf(z) = \int_Q M(z,y)f(y)dy, \; f \in \mathcal{B},$$

$$M(z,y) = \int_Q A(z,x)B(x,y)dx,$$

$$M \in \mathfrak{S}_{\alpha+\beta-n}(\overline{Q}), \text{ falls } \alpha+\beta > n \text{ ist,}$$

$$M \in \bigcap_{\gamma<0} \mathfrak{S}_\gamma(\overline{Q}), \text{ falls } \alpha+\beta < n \text{ ist.}$$

Beweis: Sei $\mathcal{B} = L^1(Q)$, $f \in L^1(Q)$. Dann ist

$$ABf(z) = \int_Q A(z,x) \int_Q B(x,y)f(y)dydx,$$

nach Hilfssatz III.4.12. Jedoch gilt dies auch für $|A|, |B|$, die wieder die zu den schwach singulären Integralkernen $|A| \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$, $|B| \in \mathfrak{S}_\beta(\overline{Q})$ gehörigen Integraloperatoren bezeichnen. Ersetzen wir noch f durch $|f|$, so wird

$$|A||B||f|(z) = \int_Q |A(z,x)| \int_Q |B(x,y)||f|(y)dydx,$$

so daß wir mit dem Satz von Fubini-Tonelli

$$ABf(z) = \int_Q (\int_Q A(z,x)B(x,y)dx)f(y)dy$$

erhalten. Dabei ist $M(z,y) = \int_Q A(z,x)B(x,y)dx$ für fast alle $z,y \in Q$ wohldefiniert, insbesondere ist $A(z,.)B(.,y)$ für fast alle $z,y \in Q$ aus $L^1(Q)$. Hilfssatz III.4.14 liefert die Abschätzung

$$\text{(III.4.13)} \qquad |M(z,y)| \leq c_2(n,\alpha,\beta)(1/|z-y|^{\alpha+\beta-n}), z,y \in Q, z \neq y,$$

falls $\alpha + \beta > n$ ist,

$$\text{(III.4.14)} \qquad |M(z,y)| \leq c_1(n,\alpha,\beta)R_0^{n-(\alpha+\beta)},$$

falls $\alpha + \beta < n$ und $K_{R_0}(0) \supset \overline{Q}$. (III.4.13), (III.4.14) gelten jeweils für fast alle $z,y \in Q$ und auch für die Integrale über $(A - A_\delta)(z,x)B(x,y)$ bzw. $A_\delta(z,x)(B - B_\delta)(x,y)$ anstelle von $A(z,x)B(x,y)$. Dabei sind A_δ, B_δ sowie K_δ im Beweis von Hilfssatz III.4.11 erklärt, $\delta > 0$. Sei $M_\delta(z,y) = \int_Q A_\delta(z,x)B_\delta(x,y)dx$. Dann ist $M_\delta \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ und

$$\begin{aligned} |M(z,y) - M_\delta(z,y)| \;\leq\; & |\int_Q (A(z,x) - A_\delta(z,x))B(x,y)dx| + \\ & +|\int_Q (A_\delta(z,x)(B(x,y) - B_\delta(x,y))dx|, \; z,y \in \overline{Q}. \end{aligned}$$

Wegen $|A(z,x) - A_\delta(z,x)| = |(1 - \Theta(\frac{|z-x|}{\delta}))A(z,x)| \leq \frac{a}{|z-x|^\alpha}$ für $|z-x| \leq 2\delta$ und 0 sonst, und $|B(x,y) - B_\delta(x,y)| = |(1 - \Theta(\frac{|x-y|}{\delta}))B(x,y)| \leq \frac{b}{|x-y|^\beta}$ für $|x-y| \leq 2\delta$ und 0 sonst, sowie $|B(x,y)| \leq \frac{b}{|x-y|^\beta}$, $|A_\delta(z,x)| \leq \frac{a}{|z-x|^\alpha}$, a,b positive Konstanten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{(III.4.15)} \qquad |M(z,y) - M_\delta(z,y)| \leq ab(& \int_{\substack{|z-x|\leq 2\delta \\ |x|\leq R}} \frac{dx}{|z-x|^\alpha |x-y|^\beta} + \\ & + \int_{\substack{|x-y|\leq 2\delta \\ |x|\leq R}} \frac{dx}{|z-x|^\alpha |x-y|^\beta}), \; x,y \in Q. \end{aligned}$$

Wir untersuchen zunächst den Fall $\alpha + \beta > n$. Sei $|z-y| \geq \varepsilon > 0$. Wir wählen δ aus $(0, \frac{1}{4}\varepsilon)$. Aus $|z-x| \leq 2\delta$ folgt $|x-y| \geq |z-y| - |z-x| \geq \varepsilon - 2\delta > \varepsilon/2$. Aus $|x-y| \leq 2\delta$ folgt $|z-x| \geq |z-y| - |x-y| \geq \varepsilon - 2\delta > \varepsilon/2$. Somit ist

$$|M(z,y)-M_\delta(z,y)| \le ab[(1/(\varepsilon/2)^\beta)\int_{|z-x|\le 2\delta}\frac{dx}{|z-x|^\alpha}+(1/(\varepsilon/2))^\alpha\int_{|x-y|\le 2\delta}\frac{dx}{|x-y|^\beta}],$$

$$\le abw_n[(1/(\varepsilon/2))^\beta((2\delta)^{n-\alpha}/(n-\alpha))+(1/(\varepsilon/2))^\alpha((2\delta)^{n-\beta}/(n-\beta))].$$

Demnach konvergieren die in $\overline{Q}\times\overline{Q}$ stetigen Funktionen M_δ gleichmäßig in $(Q\times Q-\{(z,y)||z-y|\le\varepsilon\}$-Nullmenge) gegen $M, \delta\to 0$. Somit kann, da $\varepsilon>0$ beliebig war, M als eine stetige Funktion in $\overline{Q}\times\overline{Q}-\{(z-y)|z=y\}$ aufgefaßt werden. Mit (III.4.13) folgt $M\in\mathfrak{S}_{\alpha+\beta-n}(\overline{Q})$. Im Fall $\alpha+\beta<n$ liefert (III.4.15) zusammen mit Hilfssatz III.4.14 (angewandt im Fall $\alpha=0$) die Abschätzung

$$|M(z,y)-M_\delta(z,y)|\le 2abc_1(n,\alpha,\beta)(2\delta)^{(n-(\alpha+\beta))\min(\alpha,\beta)/(\alpha+\beta)}.$$

Demnach konvergieren die in $\overline{Q}\times\overline{Q}$ stetigen Funktionen M_δ gleichmäßig in ($Q\times Q$-Nullmenge) gegen $M, \delta\to 0$. Somit kann M als Element aus $C^0(\overline{Q}\times\overline{Q})$ aufgefaßt werden, insbesondere ist

$$M\in\bigcap_{\gamma<0}\mathfrak{S}_\gamma(\overline{Q}).$$

Hilfssatz III.4.15 ist bewiesen, da $C^0(\overline{Q})\subset L^2(Q)\subset L^1(Q)$. □

Eine Konsequenz aus Hilfssatz III.4.15 ist
Hilfssatz III.4.16: *Sei K ein schwach singulärer Integralkern mit $K\in\mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha\in(0,n)$. Für den zugehörigen Integraloperator K in $\mathcal{B}=L^1(Q)$ mit $\mathcal{D}(K)=\mathcal{B}$ gilt: Es gibt eine positive ganze Zahl p derart, daß der in $\mathcal{D}(K^p)=\mathcal{B}$ definierte lineare Operator K^p (K p-Mal angewandt), der nach Hilfssatz III.4.15 schwach singulärer Integraloperator ist, die Darstellung*

$$K^pf(x)=\int_Q L(x,y)f(y)dy,\ f\in L^1(Q)$$

mit dem Integralkern $L\in C^0(\overline{Q}\times\overline{Q})$ besitzt.

Beweis: Aufschluss über die schrittweise Verbesserung der Qualität von $f\in L^1(Q)$ bei Anwendung von K gilt das folgende Schema:

Operator	Kern ist Element von
K	$\mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$
K^2	$\mathfrak{S}_{\alpha+(\alpha-n)}(\overline{Q})$
K^3	$\mathfrak{S}_{\alpha+2(\alpha-n)}(\overline{Q})$
$\vdots$	
K^p	$\mathfrak{S}_{\alpha+(p-1)(\alpha-n)}(\overline{Q})$

Für $n > \beta \geq \alpha$ ist $\mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q}) \subset \mathfrak{S}_\beta(\overline{Q})$, denn $1/|x-y|^\alpha \leq |x-y|^{\beta-\alpha} \cdot 1/|x-y|^\beta \leq d^{\beta-\alpha}/|x-y|^\beta$, wobei d der Durchmesser von $\overline{Q}$ ist. Wir wählen nun ein $\beta \in [\alpha, n)$, das nicht von der Form $n \cdot \frac{m}{m+1}$ ist, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; dann ist $\beta + m(\beta - n) \neq 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. p bestimmen wir so, daß $p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ und

$$\beta + (p-2)(\beta - n) > 0,$$

$$\beta + (p-1)(\beta - n) < 0$$

sind. Die zu K^{p-1} bzw. K^p gehörigen Integralkerne sind dann in $\mathfrak{S}_{\beta+(p-2)(\beta-n)}(\overline{Q})$ bzw. $\mathfrak{S}_{\beta+(p-1)(\beta-n)}(\overline{Q})$, insbesondere ist der letzte Kern stetig und unser Hilfssatz bewiesen. □

Hilfssatz III.4.17: *Sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(K) = \mathcal{B}$. Sei $g \in C^0(\overline{Q})$. Sei $f \in \mathcal{B}$ eine Lösung von*

$$(I - K)f = g.$$

Dann ist $f \in C^0(\overline{Q})$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß der zu K gehörige Integralkern K aus $\mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ ist für ein $\alpha \in (0, n)$. Auf $(I - K)f$ wenden wir den Operator

$$I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu$$

an, wobei p irgendein Element aus $\mathbb{N}$ mit $p \geq 2$ ist. Dann folgt

$$f - K^p f = (I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu) g,$$

$$f = K^p f + (I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu) g.$$

Nach Hilfssatz III.4.16 können wir p derart wählen, daß der zu K^p gehörige schwach singuläre Integralkern L aus $C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ ist. Man sieht, daß wegen

$$|K^p f(x) - K^p f(x')| \leq \sup_{y \in \overline{Q}} |L(x', y) - L(x, y)| ||f||_{L^1(Q)}, \; x, x' \in Q,$$

die Funktion $K^p f$ gleichmäßig stetig in Q ist und daher eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf $\overline{Q}$ besitzt, die wir ebenfalls mit $K^p f$ bezeichnen. Wegen $g \in C^0(\overline{Q})$ ist nach Hilfssatz III.4.11

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu g \in C^0(\overline{Q}).$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen, da der Fall $\alpha < 0$ jetzt trivial ist (vgl. die obige Abschätzung für $|K^p f(x) - K^p f(x')|$). □

Hilfssatz III.4.18: *Sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H}$ und Integralkern K. Dann ist auch K^* ein schwach singulärer Integraloperator mit Integralkern K^*,*

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

Beweis: Seien $f, g \in L^2(Q)$. Da der Operator $|K|$, definiert durch $|K|f(x) = \int_Q |K(x, y)| f(y) dy$, ebenfalls schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{H}$ ist $(\mathcal{D}(|K|) = \mathcal{H})$, existiert das Integral

$$\int_Q \int_Q |K(x, y)||f(y)| dy |g(x)| dx.$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli ist

$$\int_Q \int_Q K(x, y) f(y) dy \overline{g(x)} dx = \int_Q f(y) \overline{\int_Q K^*(y, x) g(x) dx} dy,$$

$f, g \in L^2(Q)$. Der Hilfssatz ist bewiesen. □

Schließlich formulieren wir die Fredholmschen Sätze für schwach singuläre Integraloperatoren in der folgenden Form, die sich unmittelbar aus den vorhergehenden Erörterungen ergibt:

Satz III.4.3: *Sei K schwach singulärer Integraloperator mit Integralkern K in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ bzw. $\mathcal{H} = L^2(Q) (\mathcal{D}(K) = \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{D}(K) = \mathcal{H})$. Jede Lösung der Gleichung*

$$f - Kf = 0 \qquad \text{(III.4.16)}$$

in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ ist aus $C^0(\overline{Q})$. Daher hat die Gleichung (III.4.16) nur endlich viele linear unabhängige Lösungen sowohl in $\mathcal{B}$ als auch in $\mathcal{H}$, und die Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{H}$ stimmen überein. Die Gleichung

$$f - K^* f = 0 \tag{III.4.17}$$

hat in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ nur Lösungen aus $C^0(\overline{Q})$. Daher hat die Gleichung (III.4.17) nur endlich viele linear unabhängige Lösungen sowohl in $\mathcal{B}$ als auch in $\mathcal{H}$, und die Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen in $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{H}$ stimmen sowohl untereinander als auch mit der Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen in $\mathcal{B}$ oder $\mathcal{H}$ von (III.4.16) überein. Hierbei ist K^* sowohl in $\mathcal{B}$ als auch $\mathcal{H}$ durch

$$K^* f(x) = \int_Q K^*(x,y) f(y) dy \tag{III.4.18}$$

definiert, $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Die Gleichung

$$h - Kh = g$$

in $\mathcal{H}$ besitzt zu vorgegebenem $g \in \mathcal{H}$ dann und nur dann eine Lösung $h \in \mathcal{H}$, wenn $\int_Q g f dx = 0$ ist für alle $f \in C^0(\overline{Q})$, die (III.4.17) erfüllen; in diesem Falle ist $h \in C^0(\overline{Q})$, falls $g \in C^0(\overline{Q})$ ist.

§5. Spektraltheorie im n-dimensionalen unitären Raum

$\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Durch die Fortsetzung

$$(z, w) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i},$$

$$||z|| = \sqrt{(z, z)},$$

$z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, wird $\mathbb{C}^n$ zu einem Hilbertraum; seine Dimension ist offenbar gerade n, z.B. bilden die Vektoren $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ eine Basis, die auch orthonormiert ist. $\mathbb{C}^n$, ausgestattet mit der soeben eingeführten Hilbertraumstruktur, heißt der n-dimensionale unitäre Raum. In diesem Abschnitt bezeichnen wir ihn auch mit $\mathcal{H}$. Nach §§1,9 in Kapitel II ist jeder Hilbertraum der Dimension n isometrisch isomorph zu $\mathcal{H}$; daher werden auch diese Hilberträume als n-dimensionale unitäre Räume bezeichnet. Für ihr Studium können wir uns auf $\mathcal{H}$ beschränken, doch machen wir im folgenden keinen expliziten Gebrauch davon.

Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ irgendeine orthonormierte Basis von $\mathcal{H}_0$, sei A ein linearer Operator in $\mathcal{H}_0$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}_0$. Sei $x \in \mathcal{H}$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi_i, \quad \text{so daß}$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A\varphi_i$$

ist. A ist also von selbst stetig und somit in $L(\mathcal{H}_0)$. Wir haben

$$(Ax, \varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i, \varphi_j) x_i.$$

Gleichzeitig ist wegen der Orthonormalität der Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi_j, \; y_j = (Ax, \varphi_j),$$

also

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

mit $a_{ji} = (A\varphi_i, \varphi_j)$. Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ bezeichnen wir als Eigenwert von A, wenn es ein φ aus $\mathcal{H}_0$ gibt mit $\varphi \neq 0$, $A\varphi = z\varphi$. Insbesondere können wir $||\varphi|| = 1$ annehmen. φ heißt Eigenvektor zum Eigenwert z.

Definition III.5.1: *Sei $\mathcal{H}_1$ ein Teilraum von $\mathcal{H}_0$, $A \in L(\mathcal{H}_0)$. $\mathcal{H}_1$ heißt invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_0$ bezüglich A, wenn $A(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$.*

Hilfssatz III.5.1: *Sei $\mathcal{H}_1 \neq \{0\}$ invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_0$ bezüglich $A \in L(\mathcal{H}_0)$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{H}_1$, $||\varphi|| = 1$, und ein $z \in \mathbb{C}$ derart, daß $A\varphi = z\varphi$.*

Beweis: $\mathcal{H}_1$ ist endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und somit abgeschlossen. Sei $\{\varphi_1, \dots \varphi_m\}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}_1$, $m \in \mathbb{N}$ ist die Dimension von $\mathcal{H}_1$. Sei $a_{ji} = (A\varphi_i, \varphi_j)$, $1 \leq i, j \leq m$. Die Gleichung $A\varphi = z\varphi$, $||\varphi|| = 1$, ist dann äquivalent mit

$$\text{(III.5.1)} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ji} x_i = z x_j, \ 1 \leq j \leq m,$$

$$\text{(III.5.2)} \qquad \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = 1,$$

sofern

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} x_i \varphi_i$$

gesetzt wird. Das System (III.5.1, 2) hat jedoch dann und nur dann eine Lösung $(x_1, \dots, x_m)$ mit (III.5.2), wenn $\det(a_{ji} - z\delta_{ji}) = 0$ ist. Dies liefert eine Bedingung für z, denn

$$\det(a_{ji} - \widetilde{z}\delta_{ji}) = \sum_{\mu=0}^{m} a_\mu \widetilde{z}^\mu, \ \widetilde{z} \in \mathbb{C},$$

mit gewissen komplexen Koeffizienten a_μ, für die insbesondere $a_m = (-1)^m$ gilt. Nach dem sogenannten Fundamentalsatz der Algebra ([siehe meine Vorlesung Funktionentheorie, II.7]) gibt es sicher ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\det(a_{ji} - z\delta_{ji}) = 0$. □

Unser Hauptergebnis im endlichdimensionalen Fall ist
Satz III.5.1: *Sei A aus $L(\mathcal{H}_0)$ und hermitesch. Dann besitzt $\mathcal{H}_0$ eine orthonormierte Basis von Eigenvektoren $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, die reell sind. Für $x \in \mathcal{H}_0$ gilt*

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\varphi_i,$$

$$\text{(III.5.3)} \qquad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i.$$

Zum Beweis benötigen wir
Hilfssatz III.5.2: *Sei A aus $L(\mathcal{H}_0)$ und hermitesch. Sei $\mathcal{H}_1$ ein invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_0$ bezüglich A. Dann ist $\mathcal{H}_1^\perp$ ebenfalls invariant bezüglich A.*

Beweis: Sei $x \in \mathcal{H}_1^\perp$. Dann ist $(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathcal{H}_1$. Also ist $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$ wegen $A(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$, also $Ax \in \mathcal{H}_1^\perp$. □

Beweis des Satzes III.5.1: Zunächst ist $\mathcal{H}_0$ selbst invarianter Teilraum bezüglich A. Nach Hilfssatz III.5.1 gibt es ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ und ein $\varphi_1 \in \mathcal{H}_0$ mit $||\varphi_1|| = 1$ derart, daß $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$. Sei $\mathcal{H}_1$ das Orthogonalkomplement zu $\{\lambda\varphi_1 | \lambda \in C\}$. Ist die Dimension von $\mathcal{H}_1 = n - 1$ wieder ≥ 1, so finden wir, da nach Hilfssatz III.5.2 der Teilraum $\mathcal{H}_1$ invarianter Unterraum bezüglich A ist, wieder ein $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ und ein $\varphi_2 \in \mathcal{H}_1$ mit $||\varphi_2|| = 1$ und $A\varphi_2 = \lambda_1\varphi_2$. Offenbar ist $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Nun bilden wir das Orthogonalkomplement $\mathcal{H}_2$ zum invarianten Teilraum $\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 | \lambda \in \mathbb{C},\ \mu \in \mathbb{C}\}$. Ist die Dimension von $\mathcal{H}_2 = n - 2$ wieder ≥ 1, so finden wir wie eben $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ und $\varphi_3 \in \mathcal{H}_2$ mit $||\varphi_3|| = 1$, $A\varphi_3 = \lambda_3\varphi_3$. Es ist $(\varphi_k, \varphi_l) = \delta_{kl}$, $1 \leq k, l \leq 3$. Auf diese Art fährt man fort und findet eine orthonormale Basis der im Satz beschriebenen Art. Daß alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reell sind, sieht man wie im Beweis von Satz I.1.2. Die Entwicklung von x nach den $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ist klar. Entsprechend ist

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{i=1}^{n} (Ax, \varphi_i)\varphi_i, \text{ also} \\ Ax &= \sum_{i=1}^{n} (x, A\varphi_i)\varphi_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i \end{aligned}$$

wegen der Hermitizität von A und der daraus folgenden Realität der λ_i. □

Für uns ist ein anderer Aspekt der vorstehenden Erörterungen von Bedeutung. Sei $A \in L(\mathcal{H}_0)$ und hermitesch. Die Eigenwerte gemäß Satz III.5.1

denken wir uns nach der Größe ihres Absolutwerts angeordnet, also etwa $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots |\lambda_n|$. Aus der Entwicklung (III.5.3) folgt

$$\begin{aligned} |(Ax,x)| &= |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(x,\varphi_i)|^2|, \\ &\leq |\lambda_1| ||x||^2, \; x \in \mathcal{H}_0, \end{aligned} \tag{III.5.4}$$

$$\frac{|(Ax,x)|}{||x^2||} \leq |\lambda_1|, \; x \in \mathcal{H}_0 - \{0\}.$$

Falls $Ax = \pm\lambda_1 x$ ist, tritt in (III.5.4) das Gleichheitszeichen ein. Tritt umgekehrt in (III.5.4) das Gleichheitszeichen ein, so ist zunächst $|(x,\varphi_i)| = 0$ für alle λ_i mit $|\lambda_i| < |\lambda_1|$. Wir haben als Eigenwerte dann nur $|\lambda_1|$ oder $-|\lambda_1|$: Ist $\lambda_1 = 0$, so ist $Ax = 0$, $x \in \mathcal{H}_0$, und in der Tat folgt aus dem Eintreten des Gleichheitszeichens in (III.5.4), daß $Ax = \lambda_1 x$ ist. Ist $\lambda_1 \neq 0$, so ist entweder $(x,\varphi_i) = 0$ für alle φ_i mit $A\varphi_i = |\lambda_1|\varphi_i$ oder $(x,\varphi_i) = 0$ mit $A\varphi_i = -|\lambda_1|\varphi_i$. Die Entwicklung (III.5.3) liefert dann $Ax = \pm|\lambda_1|x$, falls in (III.5.4) das Gleichheitszeichen eintritt. Dies legt die Idee nahe, im Fall eines unendlichdimensionalen Hilbertraums $\mathcal{H}$ und eines hermiteschen Operators $A \in L(\mathcal{H})$, einen Eigenwert nebst zugehörigen Eigenvektor φ durch Analyse des Maximums von $|(Ax,x)|/||x||^2$ zu gewinnen. Diese Idee verhilft auch zur Gewinnung weiterer Eigenwerte; denn kehren wir zu $\mathcal{H}_0$, $A \in L(\mathcal{H}_0)$, A hermitesch zurück, so ist

$$\begin{aligned} |(Ax - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x,\varphi_i)\varphi_i, x)| &= |\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i |(x,\varphi_i)|^2| \\ &\leq |\lambda_{p+1}| ||x||^2, \; x \in \mathcal{H}_0 \end{aligned} \tag{III.5.5}$$

falls $n \geq 2$ ist. Man kann nun, ähnlich wie eben, zeigen, daß das Gleichheitszeichen in (III.5.5) dann und nur dann eintritt, wenn $Ax = \pm\lambda_{p+1}x$ ist. So hat man zur Gewinnung von λ_{p+1} nebst zugehörigen Eigenvektor φ_{p+1} das Maximum von

$$\frac{|(Ax - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x,\varphi_i)\varphi_i, x)|}{||x||^2}$$

zu analysieren.

§6. Spektraltheorie vollstetiger Operatoren im Hilbertraum

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, A aus $L(\mathcal{H})$ und hermitesch. Die Voraussetzung der Hermitizität allein ist nicht ausreichend dafür, daß das am Ende des vorigen Paragraphen dargestellte Verfahren zur Konstruktion eines Eigenwerts mit zugehörigem Eigenvektor $\neq 0$ erfolgreich angewendet werden kann. Dies zeigt das folgende Beispiel: Sei $\mathcal{H} = L^2((0,1))$. Wir setzen $Af(x) = xf(x)$, $f \in L^2((0,1))$. Dann ist offenbar $A \in L(\mathcal{H})$ und hermitesch. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $f \neq 0$ in $\mathcal{H}$ derart, daß $Af = \lambda f$ ist, so ist $(\lambda - x)$. $f(x) = 0$ fast überall in $(0,1)$, also $f(x) = 0$ fast überall in $(0,1)$, also $f = 0$ im Widerspruch zu unserer Annahme $f \neq 0$. Die erforderliche Zusatzvoraussetzung ist, wie sich herausstellt, gerade die Vollstetigkeit von A.

Da wir mit dem Begriff des Eigenwerts und dem Begriff des Eigenvektors bisher nur in Spezialfällen operiert hatten, geben wir die
Definition III.6.1: *Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, sei T ein linearer Operator in $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Eine Zahl $\lambda \in L$ heißt Eigenwert von T dann und nur dann, wenn es ein $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ gibt mit*

$$\varphi \neq 0,$$

$$T\varphi = \lambda\varphi.$$

φ heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ von T Äquivalent damit ist die Forderung, daß es ein $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ mit $||\varphi|| = 1$, $T\varphi = \lambda\varphi$ gibt.

Unser erstes wichtiges Ergebnis ist
Satz III.6.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$. Weiter sei A hermitesch und vollstetig, und (Ax, x) sei nicht für alle $x \in \mathcal{H}$ Null. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{H}$, $\varphi \neq 0$, und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, derart, daß*

$$\frac{|(Af, f)|}{||f||^2} \leq |\lambda| = \frac{|(A\varphi, \varphi)|}{||\varphi||^2}, \; f \in \mathcal{H} - \{0\},$$

$$A\varphi = \lambda\varphi$$

sind.

Beweis: Aus der Hermitizität von A folgt, daß (Af, f) reell ist für alle $f \in \mathcal{H}$. Aus unserer Voraussetzung über (Ax, x) und der Voraussetzung $A \in L(\mathcal{H})$ folgt

$$0 < d = \sup_{||\widetilde{x}||=1} |(A\widetilde{x}, \widetilde{x})| < +\infty.$$

Sei (x_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $||x_n|| = 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $|(Ax_n, x_n)| \to d$, $n \to \infty$. Sei (x'_n) eine Teilfolge von (x_n), die schwach gegen ein Element $x \in \mathcal{H}$ konvergiert. (siehe Satz III.1.1), $n \to \infty$. Wegen der Vollstetigkeit von A gilt: $Ax'_n \to Ax$, $n \to \infty$ (siehe Satz III.2.5). Also ist nach Satz III.1.2

$$|(Ax'_n, x'_n)| \to |(Ax, x)|,$$

also insbesondere

$$d = |(Ax, x)|$$

Wir zeigen zunächst, daß $||x|| = 1$ ist. Wegen $||x||^2 = \lim_{n\to\infty}(x_n, x) \leq ||x||$ folgt $||x|| \leq 1$. Außerdem ist $x \neq 0$, da $d > 0$ ist. Wäre $||x|| < 1$, so wäre $d < \frac{|(Ax,x)|}{||x||^2}$ und gleichzeitig $d = \sup_{||\widetilde{x}||=1} \frac{|(A\widetilde{x},\widetilde{x})|}{||\widetilde{x}||^2}$; dies ist ein Widerspruch, also ist $||x|| = 1$. Sei $z \in \mathcal{H}$, $y(\varepsilon) = x + \varepsilon z$, $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Wir betrachten ie auf $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ erklärte, reellwertige und in $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{(Ay(\varepsilon), y(\varepsilon))}{||y(\varepsilon)||^2} = \frac{(Ax + \varepsilon Az,\ x + \varepsilon z)}{||x + \varepsilon z||^2},$$

wobei wir uns noch ε_0 hinreichend klein gewählt denken, so daß etwa $||y(\varepsilon)|| \geq \frac{1}{2}$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, ist. Wegen $\varphi^2(\varepsilon) \leq \varphi^2(0)$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $\varphi(0) \neq 0$, folgt: $\varphi'(0) = 0$. Wir haben

$$\begin{aligned} U(\varepsilon) = (A(x + \varepsilon z), x + \varepsilon z) &= (Ax, x) + \varepsilon(Ax, z) + \varepsilon(Az, x) + \varepsilon^2||z||^2, \\ &= (Ax, x) + \varepsilon 2\mathcal{R}e(Ax, z) + \varepsilon^2||z||^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\varepsilon) &= ||x||^2 + \varepsilon 2\mathcal{R}e(x, z) + \varepsilon^2||z||^2, \\ U'(\varepsilon) &= 2\mathcal{R}e(Ax, z) + 2\varepsilon||z||^2, \\ V'(\varepsilon) &= 2\mathcal{R}e(x, z) + 2\varepsilon||z||^2,\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \\ \varphi'(0) &= \frac{U'(0)V(0) - U(0)V'(0)}{V^2(0)}, \\ &= \frac{2\mathcal{R}e(Ax, z)||x||^2 - 2(Ax, x)\mathcal{R}e(x, z)}{||x||^4}. \end{aligned}$$

Mit $\lambda = (Ax, x)$ folgt aus $\varphi'(0) = 0$ die Beziehung $Re(Ax - \lambda x, z) = 0$. Da $z \in \mathcal{H}$ beliebig war gilt die letzte Gleichung auch für $z = Ax - \lambda x$, so daß schließlich $Ax = \lambda x$ das Ergebnis ist. Wegen $|\lambda| = d$ ist alles bewiesen. $\square$

Für die folgenden Erörterungen bemerken wir, daß nach Satz II.7.2. die in Satz III.6.1 gemachte Voraussetzung: (Ax, x) verschwindet nicht für alle $x \in \mathcal{H}$ mit der Annahme: Ax verschwindet nicht für alle $x \in \mathcal{H}$ äquivalent ist. Wir präzisieren nun die Aussage des Satzes III.6.1 in der folgenden Weise:

Satz III.6.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$ sei hermitesch und vollstetig. Es sei Ax nicht für alle $x \in \mathcal{H}$ das Nullelement. Dann gibt es ein endliches oder abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ oder $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ oder $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von A derart, daß alle $\lambda_i \neq 0$ und, daß $|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_N|$ oder $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ ist. Wenn das Orthonormalsystem der Eigenvektoren abzählbar unendlich ist, dann gibt es unter den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ unendlich viele paarweise verschiedene, und es ist $\lim_{i\to\infty} |\lambda_i| = 0$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ haben wir die Entwicklung*

$$Ax = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i$$

oder

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i$$

mit einer in $\mathcal{H}$ konvergenten Reihe.

Beweis: Aus Satz III.6.1 folgt die Existenz eines $\varphi_1 \in \mathcal{H}$ mit $||\varphi_1|| = 1$ und eines $\lambda_1 \in \mathbb{R} - \{0\}$ derart, daß $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$. Sei $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ ein orthonormiertes System von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_N|$. Sei $B_0 = A$,

$$B_N x = Ax - \sum_{i=1}^{N} \lambda_1 (x, \varphi_i)\varphi_i, \ x \in \mathcal{H}, \ N \in \mathbb{N},$$

so daß $B_N \in L(\mathcal{H})$ und hermitesch ist. Die Rechnungen zum ersten Beispiel in III.2 zeigen sofort, daß B vollstetig ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: $B_N(x) = 0$, $x \in \mathcal{H}$, oder B_N verschwindet nicht identisch. Im ersten Fall sind wir fertig. Im zweiten Fall wenden wir Satz III.6.1 auf B_N an. Dieser liefert ein $\varphi \in \mathcal{H}$, $||\varphi|| = 1$, und ein reelles $\lambda \neq 0$ mit $B_N\varphi = \lambda\varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi,\varphi_j) &= (A\varphi,\varphi_j)-\lambda_j(\varphi,\varphi_j)\\ &= \lambda_j(\varphi,\varphi_j)-\lambda_j(\varphi,\varphi_j)=0,\ j=1,\ldots,N.\end{aligned}$$

Also bilden $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\varphi\}$ ein Orthonormalsystem. Daraus folgt sofort

$$B_N\varphi = A\varphi = \lambda\varphi.$$

Wir setzen $\varphi_{N+1}=\varphi$, $\lambda_{N+1}=\lambda$. Kann man dieses Verfahren beliebig fortsetzen, so liefert es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$ von Eigenvektoren zu reellen nichtverschwindenden Eigenwerten $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$. Falls $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq\ldots\geq|\lambda_N|$ ist, so ist nach unserer Konstruktion

$$|\lambda|=|\lambda_{N+1}|\geq|(B_Nx,x)|,\ x\in\mathcal{H},\ ||x||=1,\ N\in\{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Wählen wir für x den Eigenvektor φ_{N+2}, so wird $B_N\varphi_{N+2}=A\varphi_{N+2}=\lambda_{N+2}\varphi_{N+2}$, und demzufolge ist

$$|\lambda_{N+1}|\geq|\lambda_{N+2}|,\ N\in\{0\}\cup\mathbb{N}.$$

Wie in III.1 zu Anfang gezeigt, gilt für unser abzählbar unendliches System $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$ von Eigenvektoren

$$\varphi_j\rightharpoonup 0,\ j\to\infty,$$

da es orthonormal ist. Nach Satz III.2.5 folgt $A\varphi_j\to 0$, $j\to\infty$, also $|\lambda_j|||\varphi_j||=|\lambda_j|\to 0$, $j\to\infty$. Für den Summenanteil (ohne Minuszeichen) in der Definition von B_Nx schreiben wir A_Nx, $N\in\mathbb{N}$, $x\in\mathcal{H}$. Dann ist dadurch ein Operator $A_N\in L(\mathcal{H})$ gegeben, der vollstetig ist. Nach Konstruktion der Eigenwerte ist

$$|(B_Nx,x)|=|((A-A_N)x,x)|\leq|\lambda_{N+1}|||x||^2,\ x\in\mathcal{H}.$$

Nach Satz II.7.2 ist wegen der Hermitizität von $B_N=A-A_N$

$$||A-A_N||\leq|\lambda_{N+1}|,$$

also in der Tat

$$Ax=\lim_{N\to\infty}A_Nx=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x,\varphi_i)\varphi_i.$$

Aus $|\lambda_j|\to 0$, $j\to\infty$, folgt natürlich, daß die zur Folge (λ_j) gehörige Wertemenge unendlich ist, da alle $\lambda_j\neq 0$ sind. $\square$

Eine Art Umkehrung des Satzes III.6.2 stellt der folgende Hilfssatz dar:

Hilfssatz III.6.1: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, sei $A \in L(\mathcal{H})$. Es gebe ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$ und eine Folge (λ_i), $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, derart, daß*

$$\lambda_i \to 0,\ i \to \infty,$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i) \varphi_i,\ x \in \mathcal{H},$$

mit einer in $\mathcal{H}$ konvergenten Reihe. Dann ist A vollstetig.

Beweis: Wir führen wie im Beweis des Satzes III.6.2 den in $\mathcal{H}$ definierten und vollstetigen linearen Operator A_n durch

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i) \varphi_i,\ x \in \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N},$$

ein. Dann ist

$$\begin{aligned} ||(A - A_n)x||^2 &= ||\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)||^2, \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 |(x, \varphi_i)|^2, \\ &\leq \sup_{i \geq n+1} |\lambda_i|^2 ||x||^2,\ x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

wie aus der Orthogonalität der $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ und der Besselschen Ungleichung folgt. Insbesondere ist

$$||A - A_n|| \leq \sup_{i \geq n+1} |\lambda_i|,$$

und, da (λ_i) eine Nullfolge ist, folgt mit Hilfssatz III.4.1 die Behauptung. □

Satz III.6.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H}) - \{0\}$. A sei hermitesch und vollstetig. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ das in Satz III.6.2 konstruierte abzählbar unendliche Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den reellen, nicht verschwindenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von A mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0$, wobei wir den Fall des in Satz III.6.2 erwähnten endlichen Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ nicht behandeln, da er im Sinne der folgenden Behauptung des Satzes trivial ist. Unsere Behauptung lautet:*

Dann bilden die $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum* $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{H}$.

Beweis: Sei $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$. Sei (Ax_n) eine Folge mit $Ax_n \to y$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned} Ax_n &= \sum_{i=1}^{\infty} (Ax_n, \varphi_i)\varphi_i, \ n \in \mathbb{N}, \text{ also} \\ ||Ax_n||^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_n, \varphi_i)|^2, \ n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

und außerdem ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 \text{ konvergent mit Grenzwert } \leq ||y||^2.$$

Weiter ist

$$|\sum_{i=1}^{\infty}(|(y, \varphi_i)|^2 - |(Ax_n, \varphi_i)|^2)|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} ||(y, \varphi_i)|^2 - |(Ax_n, \varphi_i)|^2| + \sum_{i=m+1}^{\infty} (|(y, \varphi_i)|^2 + |(Ax_n, \varphi_i)|^2),$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} ||(y, \varphi_i)|^2 - |(Ax_n, \varphi_i)|^2| + \sum_{i=m+1}^{\infty} (|(y, \varphi_i)|^2 + 2|(Ax_n - y, \varphi_i)|^2 + 2|(y, \varphi_i)|^2),$$

$$\leq 2||Ax_n - y||^2 + \sum_{i=1}^{m} ||(y, \varphi_i)|^2 - |(Ax_n, \varphi_i)|^2| + 3 \sum_{i=m+1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2, \ m \in \mathbb{N}.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst ein $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß der letzte Reihenrest $< \varepsilon/2$ wird. Zu m_0 wählen wir ein $n_0 = n_0(m_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß die ersten beiden Summanden in der letzten Ungleichung rechts $< \varepsilon/2$ werden für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_n, \varphi_i)|^2, \\ &= \lim_{n\to\infty} ||Ax_n||^2 = ||y||^2, \end{aligned}$$

also die Vollständigkeit von $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\overline{\mathcal{R}(A)}$. $\square$

Insbesondere zeigt der Satz III.6.3, daß $\overline{\mathcal{R}(A)}$ separabel ist, unabhängig, ob $\mathcal{H}$ dies ist oder nicht; dies folgt aus Hilfssatz II.1.3, indem man die dort auftretenden Koeffizienten in der Form $c_k = \xi_k + i\eta_k$ wählt, $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{Q}$; außerdem war dieses Resultat auf Grund von Satz III.4.1 zu erwarten.

Hilfssatz III.6.2: *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H}) - \{0\}$. A sei hermitesch und vollstetig. Dann ist $\overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp} = \mathfrak{N}(A) = \{x | x \in \mathcal{H}, Ax = 0\}$, so daß $\mathcal{H}$ die orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathfrak{N}(A)$$

gestattet. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so ist auch $\mathfrak{N}(A)$ ein separabler Hilbertraum. Ist $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ ein abzählbar unendliches vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{N}(A)$ und ist $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ das in Satz III.6.2 konstruierte abzählbar unendliche Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den reellen, nicht verschwindenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von A mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$, so bilden die $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem $\{w_1, w_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$, das abzählbar unendlich ist und für das gilt: $Aw_i = \mu_i w_i$, $i \in \mathbb{N}$ mit reellen μ_i. Hierbei beschränken wir uns wieder ohne Einschränkung auf den Fall abzählbar unendlicher Orthonormalsysteme, da im Falle endlicher Orthonormalsysteme $\{\psi_1, \ldots, \psi_{N'}\}$ als Basis von $\mathfrak{N}(A)$ bzw. $\mathfrak{N}(A) = \{0\}$ oder endlicher Orthonormalsysteme $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ als Basis von $\overline{\mathcal{R}(A)} (= \mathcal{R}(A))$ bzw. $\mathcal{R}(A) = \{0\}$ die Aussagen unseres Hilfssatzes erst recht folgen. Weiter gilt: Ist $Af = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $f \in \mathcal{H} - \{0\}$, so ist

$$\lambda = \mu_j$$

für ein $j \in \mathbb{N}$ und

$$f = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ \mu_i = \lambda}} (f, w_i) w_i. \tag{III.6.1}$$

In einem beliebigen Hilbertraum $\mathcal{H}$ folgt aus $Af = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ und ein $f \in \mathcal{H} - \{0\}$, daß

$$\lambda = \lambda_j$$

für ein $j \in \mathbb{N}$ ist, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ wieder die in Sazt III.6.2 konstruierten Eigenwerte sind mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Außerdem ist wieder

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N},\ \lambda_i = \lambda} (f, \varphi_i) \varphi_i,$$

und die letzte Summe ist endlich. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ *ist wieder das Orthonormalsystem aus Satz III.6.2.*

Beweis: Sei $(Ax, y) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ und ein $y \in \mathcal{H}$. Dann ist $(x, Ay) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ also $Ay = 0$. Demnach ist

$$\overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp} \subset \mathcal{R}(A)^{\perp} \subset \mathfrak{N}(A).$$

Sei umgekehrt $y \in \mathfrak{N}(A)$. Dann ist $(x, Ay) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also $(Ax, y) = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$, also $y \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$ und damit auch $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}$. Demnach gestattet $\mathcal{H}$ in der Tat die im Hilfssatz angegebene Zerlegung. $\mathfrak{N}(A)$ ist abgeschlossen und daher Hilbertraum. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so nach Hilfssatz II.2.2 auch $\mathfrak{N}(A)$. Sei $x \in \mathcal{H}$, so ist $x = x_1 + x_2$ mit eindeutig bestimmten $x_1 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, $x_2 \in \mathfrak{N}(A)$ (nach Satz II.2.1). Wir haben

$$x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_1, \varphi_i)\varphi_i$$

nach Satz III.6.3 und

$$x_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_2, \psi_i)\psi_i.$$

$\mathfrak{N}(A)$ ist nichts weiter als die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 0, vereinigt mit dem Nullvektor. Somit ist in der Tat $\{w_1, w_2, \ldots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$ und wir haben $Aw_i = \mu_i w_i$ mit $\mu_i = 0$ oder $\mu_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$. Ist nun $Af = 0$, so folgt die Darstellung (III.6.1) aus dem eben Gesagten. Ist $Af = \lambda f$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, $f \in \mathcal{H} - \{0\}$, so ist jedenfalls in einem beliebigen Hilbertraum $f \in \mathcal{R}(A)$. Dann folgt aus den Sätzen III.6.2 und III.6.3 die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \lambda f &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda (f, \varphi_i)\varphi_i, \end{aligned}$$

also $\lambda_j (f, \varphi_j) = \lambda (f, \varphi_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Daher nun ist für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $(f, \varphi_j) \neq 0$ auch $\lambda = \lambda_j$ und

$$
\begin{aligned}
f &= \sum_{j\in\mathbb{N},(f,\varphi_j)\neq 0} (f,\varphi_j)\varphi_j, \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N},\lambda=\lambda_j} (f,\varphi_j)\varphi_j
\end{aligned}
$$

Nun gibt es nur endlich viele Indizes j mit $\lambda_j = \lambda \neq 0$, da (λ_i) nach Satz III.6.2 eine Nullfolge ist. □

Hilfssatz III.6.2 zeigt insbesondere, daß mit dem Konstruktionsverfahren im Beweis von Satz III.6.2 tatsächlich alle von Null verschiedene Eigenwerte von A erfasst werden. Zum Abschluß dieses Paragraphen bringen wir die v. Neumannsche Norm $N(A)$ in einen Zusammenhang mit den Eigenwerten eines vollstetigen hermiteschen Operators.

Hilfssatz III.6.3: *Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A \neq 0$ ein beschränkter linearer hermitescher Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ und mit endlicher v. Neumannscher Norm $N(A)$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ das in Satz III.6.2 konstruierte Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ von A mit $\lambda_i \in \mathbb{R} - \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Dann ist*

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2.$$

Setzen wir wieder

$$A_n x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i,\ x \in \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N},$$

so ist dadurch ein linearer Operator $A_n \in L(\mathcal{H})$ definiert, der hermitesch und vollstetig ist. Es ist

$$N(A - A_n)^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \to 0,\ n \to \infty.$$

Beweis: Nach Hilfssatz III.4.6 ist A vollstetig. Wir können in der Tat Satz III.6.2 anwenden. Dies liefert uns mit Satz III.6.3 das aus Eigenvektoren bestehende vollständige Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Mit dem vollständigen Orthonormalsystem $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ in $\mathfrak{N}(A)$ gemäß Hilfssatz III.6.2 gewinnen wir ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$. Nach Definition III.4.1 ist

$$\begin{aligned} N(A)^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} ||A\psi_i||^2 + \sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2, \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} ||A\varphi_i||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2, \end{aligned}$$

so daß insbesondere die letzte Reihe konvergiert. Sei nun $B_n = A - A_n$. Die Vollstetigkeit und die Hermitizität von A_n sind trivial. Weiter ist $B_n\psi_i = A\psi_i - A_n\psi_i = 0$ und $B_n\varphi_j = A\varphi_j - A_n\varphi_j = \lambda_j\varphi_j - \lambda_j\varphi_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $B_n\varphi_j = A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, $j = n+1, \ldots$.

Dieselbe Rechnung wie eben zeigt nun

$$N(A - A_n)^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2,$$

und diese Reihenreste konvergieren für $n \to \infty$ gegen 0. $\square$

§7. Anwendungen auf Integraloperatoren

Wir behandeln zunächst **Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ.** Wir verwenden die Bezeichnungen aus III.4. Insbesondere ist Q ein offener achsenparalleler Quader des $\mathbb{R}^n$, von dem wir ohne Einschränkung annehmen können, daß er mit seinem Abschluß in $\{x|x \in \mathbb{R}^n,\ |x_j| < \pi,\ j = 1, \dots, n\}$ liegt. Der Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$ und der zugehörige Integraloperator K vom Hilbert-Schmidtschen Typ in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ werden wieder mit demselben Buchstaben K bezeichnet. Vom Kern K setzen wir voraus, daß

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}$$

ist. Nach der in III.4 gegebenen Charakterisierung von K^* ist der Integraloperator K dann hermitesch, nach Hilfssatz III.4.7 ist $N(K)$ endlich, und nach Hilfssatz III.4.6 ist K auch vollstetig (dies hatten wir in III.4 direkt unter Verwendung von Hilfssatz III.4.1 bewiesen). Weiter hatten wir in Hilfssatz III.4.7 gezeigt, daß $N(K)^2 = \int_{Q\times Q} |K(x, y)|^2 dxdy$ ist.

Unsere Ergebnisse für **Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidtschen Typ** fassen wir zusammen in
Satz III.7.1: *Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$. Sei $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ und $\int_{Q\times Q} |K(x, y)|^2 dxdy > 0$. Dann ist K nicht der Nulloperator.*

Es gibt ein endliches System $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ oder ein abzählbar unendliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ von Eigenvektoren zu den reellen, nicht verschwindenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ bzw. $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$ bzw. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. Im Fall eines abzählbar unendlichen Systems $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = \int_{Q\times Q} |K(x, y)|^2 dxdy,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Q\times Q} |K(x, y) - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}|^2 dxdy = 0.$$

Im Falle eines endlichen System $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ sind die letzten Aussagen entsprechend zu modifizieren.

Der vorstehende Satz liefert insbesondere

(III.7.1) $$K(.,.) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(.) \overline{\varphi_i}(.)$$

mit einer in $L^2(Q \times Q)$ konvergenten Reihe. (III.7.1) nennt man auch die Bilinearentwicklung des Kerns K.

Beweis des Satzes III.7.1: Zunächst gehen wir davon aus, daß K nicht der Nulloperator in $\mathcal{H}$ ist. Bis auf die Bilinearentwicklung folgen alle Aussagen aus den Erörterungen zu Beginn dieses Paragraphen, Satz III.6.2 und Hilfssatz III.6.3. Zum Beweis der Bilinearentwicklung setzen wir wie im Hilfssatz III.6.3

$$K_n f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i, \ f \in \mathcal{H} < L^2(Q), \ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist fast überall in Q

$$\begin{aligned} K_n f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_Q f(y)\overline{\varphi_i(y)} dy \varphi_i(x), \\ &= \int_Q \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} f(y) dy, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Der Kern

$$K_n(x,y) = \sum_{=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

ist nach dem Satz von Fubini-Tonelli vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Offenbar ist $K_n(x,y) = \overline{K_n(y,x)}$. Nach Hilfssatz III.6.3 gilt

$$\int_{Q\times Q} |K(x,y) - K_n(x,y)|^2 dxdy = N(K - K_n)^2$$

$$= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \to 0, \ n \to \infty,$$

woraus in der Tat die letzte Aussage folgt. Auf die Behandlung des Falles eines endlichen Orthonormalsystems $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$ von Eigenfunktionen verzichten wir. Nun müssen wir noch zeigen, daß unter der Voraussetzung $||K||_{L^2(Q\times Q)} > 0$ der Operator K nicht der Nulloperator sein kann. Wäre er das nämlich, so wäre nach Hilfssatz III.4.7 $N(K) = ||K||_{L^2(Q\times Q)} = 0$, ein Widerspruch. $\square$

Als zweite Anwendung behandeln *schwach singuläre Integraloperatoren* K mit Kernen $K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$; Q ist wieder ein offener achsenparalleler Quader des $\mathbb{R}^n$, und wir verwenden die Bezeichnungen aus III.4.

Wenn für den Kern K gilt: $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, so ist nach Hilfssatz III.4.18 der Operator K hermitesch in $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Unsere Ergebnisse für **schwach singuläre Integraloperatoren** lauten folgendermaßen:

Satz III.7.2: *Sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathfrak{S} = L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$. Sei $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ und K verschwinde nicht für alle $(x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q} - \{(\widetilde{x},\widetilde{y}) | \widetilde{x},\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n,\ \widetilde{x} = \widetilde{y}\}$. Dann ist K nicht der Nulloperator. Es gibt ein endliches System $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$ oder ein abzählbar unendliches System $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots\}$ von Eigenvektoren zu den reellen, nicht verschwindenden Eigenwerten $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ bzw. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_N|$ bzw. $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Die Eigenvektoren liegen in $C^0(\overline{Q})$. Sei $f \in \mathcal{H} = L^2(Q)$ und $g = Kf$. Dann gilt*

$$\int_Q |g(x) - \sum_{i=1}^n (g,\varphi_i)\varphi_i(x)|^2 dx \to 0,\ n \to \infty.$$

Im Fall $\alpha < n/2$ ist $g \in C^0(\overline{Q})$ und

$$g(x) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty (g,\varphi_i)\varphi_i(x),\ x \in \overline{Q} \tag{III.7.2}$$

wobei die Reihe rechts in $\overline{Q}$ gleichmäßig konvergiert. Bei den beiden letzten Aussagen haben wir uns wieder auf den Fall des abzählbar unendlichen Systems $\{\varphi_2,\varphi_2,\ldots\}$ beschränkt, da der Fall des endlichen Systems $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_N\}$ der triviale ist.

Beweis: Wir gehen zunächst davon aus, daß K nicht der Nulloperator ist. Nach Hilfssatz III.4.12 ist $K \in L(\mathcal{H}) = L(L^2(Q))$, nach Hilfssatz III.4.13 ist K vollstetig. Wie eben bemerkt, ist K auch hermitesch. Satz III.6.2 zeigt dann die Existenz der Eigenvektoren und Eigenwerte wie behauptet. Aus $K\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $i = 1,\ldots,N$ bzw. $i \in \mathbb{N}$, folgt wegen $\lambda_i \neq 0$ die Gleichung $L\varphi_i = \varphi_i$ mit $L = \frac{1}{\lambda_i}K$. Also ist $\varphi_i - L\varphi_i = 0$. Natürlich ist auch L schwach singulärer Integraloperator mit schwach singulärem Kern $L \in \mathfrak{S}_\alpha(\overline{Q})$. Daher zeigt Hilfssatz III.4.17, daß alle φ_i in $C^0(\overline{Q})$ liegen. Die nächste Aussage ist eine Konsequenz aus der Reihenentwicklung von Ax in Satz III.6.2. Nun ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{\infty} |(g,\varphi_i)||\varphi_i(x)| &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(Kf,\varphi_i)||\varphi_i(x)|, \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)||\lambda_i\varphi_i(x)|, \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)||\int_Q K(x,y)\varphi_i(y)dy|.
\end{aligned}
$$

Wegen $|K(x,y)|^2 \leq c^2/|x-y|^{2\alpha}$ und $\int_Q c^2/|x-y|^{2\alpha}dy \leq c^2\int_{K_R(x)}|x-y|^{-2\alpha}dy \leq c^2 w_n\int_0^R r^{n-1-2\alpha}dr \leq (c^2 w_n/(n-2\alpha))R^{n-2\alpha}$ im Falle $2\alpha < n$ folgt mit [Forster, Analysis 3, S. 91], daß für jedes $x \in \overline{Q}$ die Funktion $K(x,.)$ von y aus $L^2(Q)$ ist und die Abschätzng

$$
\int_Q |K(x,y)|^2 dy \leq (c^2 w_n/(n-2\alpha))R^{n-2\alpha} \leq M,\ x \in \overline{Q},
$$

gilt. Hierbei ist zu beachten, daß R eine positive Zahl ist derart, daß $\overline{Q} \subset K_R(x) = \{y||x-y| < R\}$ ist für alle $x \in \overline{Q}$ (Vgl. auch den Beweis von Hilfssatz III.4.11); ebenfalls im Beweis von Hilfssatz III.4.11 hatten wir gezeigt, daß $K(x,.) \in L^2(Q)$ ist für jedes $x \in \overline{Q}$. Mit der Hölderschen (oder Cauchy-Schwarzschen) Ungleichung für Reihen und der Besselschen Ungleichung folgt nun:

$$
\sum_{i=n+1}^{\infty} |(g,\varphi_i)||\varphi_i(x)| \leq (\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2)^{1/2} \cdot (\sum_{i=n+1}^{\alpha} |\int_Q \overline{K(x,y)\varphi_i(y)}dy|^2)^{1/2},
$$

$$
|(K(x,.),\varphi_i)|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2)^{1/2}(\int_Q |K(x,y)|^2 dy)^{1/2}, \\
&\leq \sqrt{M}\cdot(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Die letzte Ungleichung impliziert die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (III.7.2). Da eine Teilfolge der zugehörigen Partialsummenfolge fast überall in Q gegen g konvergiert, stimmt g fast überall mit einer Funktion aus $C^0(\overline{Q})$ überein, so daß wir g als Element aus $C^0(\overline{Q})$ auffassen können. Ist endlich $Kf = 0$, $f \in \mathcal{H} = L^2(Q)$ und etwa $K(x,y) \geq \delta > 0$ in $\overline{K_\varepsilon(x_0)} \times \overline{K_\varepsilon(y_0)} \cap (\overline{Q} \times \overline{Q} - \{x = y\})$ für ein $(x_0, y_0) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$ mit $x_0 \neq y_0$ und ein $\varepsilon > 0$, so folgt für $f = \chi_{K_\varepsilon(y_0)\cap Q}$:

$$Kf(x) = \int_{K_\varepsilon(y_0)\cap Q} K(x,y)dy \geq c\delta\varepsilon^n > 0,$$

$$x \in \overline{K_\varepsilon(x_0)} \cap \overline{Q},$$

mit einem $c > 0$. Insbesondere ist $||Kf||_{L^2(Q)} > 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme. $\square$

Als dritte Anwendung betrachten wir das **Eigenwertproblem von Sturm-Lionville** wie es in den Definitionen I.1.1 und I.1.2 eingeführt worden war. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus I.1. Unser Ergebnis besteht dann in

Satz III.7.3: *Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $L^2((a,b))$. Sei L ein Sturm-Lionville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$ wie in Definition I.1.1. - L wird als linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$ aufgefasst. Dann gibt es ein in $\mathcal{H}$ vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Eigenvektoren $\varphi_i \in \mathcal{D}(L)$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von L, die reell sind und für die gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$. Für $f \in \mathcal{D}(L)$ gilt*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i(x),\ x \in [a,b],$$

und die Reihe rechts konvergiert gleichmäßig in $[a,b]$.

Beweis: Wir nehmen zunächst an, daß $\lambda = 0$ kein Eigenwert von L ist, d.h. gemäß Definition I.1.2 hat $Lu = 0$ in $\mathcal{D}(L)$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Zu $f \in C^0([a,b])$ gibt es dann genau ein $u \in \mathcal{D}(L)$ mit $Lu = f$, und nach Satz I.1.1 ist

$$u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy \qquad \text{(III.7.3)}$$

mit der dort eingeführten Greenschen Funktion $G \in C^0([a,b]\times[a,b])$. Umgekehrt ist ebenfalls nach Satz I.1.1 bei beliebigem $f \in C^0([a,b])$ das nach (III.7.3) bestimmte u in $\mathcal{D}(L)$ und erfüllt $Lu = f$. Ist demnach $Lu = \lambda u$ für ein $u \in \mathcal{D}(L)$ und ein $\lambda \neq 0$, so ist dies äquivalent mit

$$\mu u(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)dy,$$

wobei $\mu = 1/\lambda$ ist. Durch (III:7.3) wird ein linearer Operator G in $\mathcal{H} = L^2((a,b))$ definiert mit $\mathcal{D}(G) = C^0([a,b])$. G ist beschränkt, und durch Abschließung gewinnen wir einen Operator $\overline{G} \in L(\mathcal{H})$. Nach Satz I.1.1 ist G reellwertig und $G(x,y) = G(y,x)$. Daher ist G hermitesch, also auch $\overline{G}$.

Nach unserem dritten Beispiel in III.2 erkennt man sofort, daß $\overline{G}$ vollstetig ist, da auch für $\overline{G}$ gilt:

$$\overline{G}f(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)dy,\ f \in \mathcal{H};$$

insbesondere zeigen die Rechnungen zu diesem Beispiel: $\overline{G}(\mathcal{H}) \subset C^0(\overline{Q})$. Offenbar kann $\overline{G}$ nicht der Nulloperator sein, denn sonst wäre $Gf = 0$, $f \in C^0([a,b])$, $0 = L0 = f$, $f \in C^0([a,b])$. Wir untersuchen den Nullraum von $\overline{G}$. Nun ist $\mathcal{R}(G) = \mathcal{D}(L)$ und $C_0^\infty((a,b)) \subset \mathcal{D}(L)$. $C_0^\infty((a,b))$ ist jedoch ein dichter Teilraum von $L^2((a,b)) = \mathcal{H}$ (siehe den auf diesen Satz folgenden Hilfssatz). Erst recht ist also $\mathcal{R}(\overline{G})$ dichter Teilraum von $\mathcal{H}$. Aus Satz II.2.2 und Hilfssatz III.6.2 folgt $\mathfrak{N}(\overline{G}) = \{0\}$. Derselbe Hilfssatz liefert $\overline{\mathcal{R}(\overline{G})} = \mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ nicht endlichdimensional ist (s. II.1), liefern die Sätze III.6.2 und III.6.3 ein abzählbar unendliches vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \in \mathcal{H}$ von Eigenvektoren zu den reellen, nicht verschwindenden Eigenwerten $\mu_1, \mu_2, \ldots$ von $\overline{G}$ mit $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \geq \ldots$. Wegen $\mu_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$ folgt sofort: $\varphi_i \in C^0([a,b])$, $\varphi_i \in \mathcal{D}(L)$. Nach Hilfssatz III.6.2 sind dies alle Eigenwerte von $\overline{G}$, also insbesondere alle Eigenwerte von G. Somit hat L genau die Eigenwerte $\lambda_1 = 1/\mu$, $\lambda_2 = 1/\mu_2, \ldots$. Da $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots$ und nach Satz III.6.2 $\lim_{i\to\infty} \mu_i = 0$ ist, ist $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$ und $|\lambda_i| \to +\infty$, $i \to \infty$. Für jedes $f \in \mathcal{R}(G) = \mathcal{D}(L)$ haben wir nach Satz III.7.2 die Entwicklung

$$f(x) = \textstyle\sum_{i=1}^\infty (f,\varphi_i)\varphi_i(x),\ x \in [a,b] \tag{III.7.4}$$

mit einer in $[a,b]$ gleichmäßig konvergenten Reihe, da der Kern G sogar aus $\mathfrak{S}_\alpha([a,b])$ ist für jedes $\alpha < 0$. Wir wenden uns nun dem Fall zu, daß $\lambda = 0$ als Eigenwert auftreten kann. Wir betrachten ein Hilfsproblem, nämlich den Sturm-Lionville Operatoren (p, q wie in Definition I.1.1)

$$L_0 u = -(pu')' + qu$$

mit

$$\mathcal{D}(L_0) = \{u | u \in C^2([a,b]),\ u(a) = u(b) = 0\}.$$

Mit Hilfe partieller Integration sieht man, daß

$$
\begin{aligned}
(L_0 u, u) &= (-(pu')' + qu, u) = \int_a^b (-(pu')')\overline{u}dx + \int_a^b q|u|^2 dx, \\
&= [-(pu')\overline{u}]_a^b + \int_a^b p|u'|^2 dx + \int_a^b q|u|^2 dx, \\
&= \int_a^b p|u'|^2 dx + \int_a^b q|u|^2 dx \geq q_0 ||u||^2_{L^2((a,b))}
\end{aligned}
$$

ist, $u \in \mathcal{D}(L_0)$, $q_0 = \min\limits_{x \in [a,b]} q(x)$. Nun behaupten wir, daß für den allgemeinen Sturm-Lionville Operator L gemäß Definition I.1.1 gilt: Es gibt höchstens zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_i < q_0$, q_0 wie eben, $i = 1, 2$. Man beachte, daß nach Hilfssatz I.1.2 alle Eigenwerte von L gemäß Definition I.1.2. reell sind. Unsere Behauptung beweisen wir durch Widerspruch, indem wir annehmen, daß es drei Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \leq q_1 < q_0$ gilt. Wir wählen drei zugehörige Eigenvektoren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus $\mathcal{D}(L)$ und normieren sie in $\mathcal{H}$ auf 1 unter Beibehaltung ihrer Bezeichnung. Wie im Beweis von Satz I.1.2 zeigt man, daß die $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ paarweise orthogonal sind, da L nach Hilfssatz I.1.1 hermitesch ist. Nun sei $u(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$, $x \in [a, b]$. Dann ist jedenfalls $u \in \mathcal{D}(L)$, wenn c_i, $i = 1, 2, 3$ irgendwelche komplexe Konstanten sind. c_1, c_2, c_3 werden nun so bestimmt, daß $u(a) = u(b) = 0$ und $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ sind. Dann ist $u \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(L_0)$, $||u||_{L^2((a,b))} = 1$ und

$$
\begin{aligned}
L(u, u) &= \sum_{i=1}^{3} |c_i|^2 \lambda_i \\
&\leq q_1 < q_0 = q_0 ||u||^2_{L^2((a,b))}.
\end{aligned}
$$

Nun ist $Lu(x) = L_0 u(x)$, so daß sich ein Widerspruch zur Ungleichung $(Lu, u) = (L_0 u, u) \geq q_0 ||u||^2_{L^2((a,b))}$ ergibt. Sei $c > 0$. Dann betrachten wir hilfsweise einen abgeänderten Sturm-Lionville-Operator $\widetilde{L}$, definiert durch $\widetilde{L}u = Lu + cu$, $u \in \mathcal{D}(\widetilde{L}) = \mathcal{D}(L)$. $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ ist dann und nur dann Eigenwert von $\widetilde{L}$, wenn $\widetilde{\lambda} - c$ Eigenwert von Eigenwert von L ist. Anders formuliert: λ ist dann und nur dann Eigenwert von L, wenn $\lambda + c$ Eigenwert von $\widetilde{L}$ ist. Nach den vorstehenden Erörterungen können wir c so groß wählen, daß $\lambda + c > 0$ ist, falls λ Eigenwert von L ist. Also hat dann $\widetilde{L}$ nur positive Eigenswerte, und wir können den ersten Teil des Beweises auf $\widetilde{L}$ anwenden. Dies liefert sofort die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von L in der Anordnung $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ mit $\lim_{i \to \infty} \lambda_i = +\infty$. Das in $\mathcal{H}$ vollständige System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ orthonormaler Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1 + c, \lambda_2 + c, \ldots$ von $\widetilde{L}$, das wir durch Anwendung des ersten Beweisteils erhalten, ist natürlich ein in $\mathcal{H}$ vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von L. Daher haben wir in (III.7.4) bereits die gewünschte Entwicklung von $f \in \mathcal{D}(\widetilde{L}) = \mathcal{D}(L)$ bewiesen. $\square$

Wir kommen nun zum im vorstehenden Beweis angekündigten Hilfssatz über die Dichtheit der C_0^∞-Funktionen in den L^p-Räumen. Dieser Hilfssatz wird uns auch bei anderer Gelegenheit von Nutzen sein.

Hilfssatz III.7.1: *Sei Ω eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^n$. Sei $p \geq 1$, sei $L^p(\Omega)$ der in III.4. eingeführte Banachraum. Dann ist der Teilraum $C_0^\infty(\Omega)$ von $\mathcal{B} = L^p(\Omega)$ dicht in $\mathcal{B}$.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Sei $f \in L^p(\Omega)$. Die triviale Fortsetzung von f ist in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und wird ebenfalls mit f bezeichnet. Zu f finden wir gemäß [Forster, Analysis 3, S. 92] ein $f_1 \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$||f - f_1||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/3.$$

Wenn $\widetilde{f_1}$ die Einschränkung von f_1 auf $\overline{\Omega}$ ist, so ist $\widetilde{f_1} \in C^0(\overline{\Omega})$ und $||f - \widetilde{f_1}||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$. Nun ist nach [Forster, Analysis 3, S. 68]

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{Q_k},$$

wobei die Q_k offene achsenparallele Würfel des $\mathbb{R}^n$ mit $\overline{Q}_k \subset \Omega$ und $Q_{k_1} \cap Q_{k_2} = \emptyset$ sind, $k_1 \neq k_2$. Sei

$$\chi_N(x) = 1, \ x \in \bigcup_{k=1}^{N} \overline{Q_k},$$

$$\chi_N(x) = 0 \text{ sonst.}$$

Wegen $\chi_N \widetilde{f_1} \in L^p(\Omega)$, $|\chi_N \widetilde{f_1}| \leq |\widetilde{f_1}|$ und $\chi_N(x) \to 1$, $N \to \infty$, für fast alle $x \in \Omega$, liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue, daß $||\widetilde{f_1} - \chi_N \widetilde{f_1}||_{L^p(\Omega)} \to 0$, $N \to \infty$. Demnach existiert ein $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $||\widetilde{f_1} - \chi_{N_0} \widetilde{f_1}||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/3$. Nach [Forster, Analysis 3, S. 13] gibt es ein $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $||\chi_{N_0} \widetilde{f_1} - \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/3$. Nun wählen wir nach [Forster, Analysis, 3, S. 23] ein $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\zeta(x) = 1, \ x \in \bigcup_{k=1}^{N_0} \overline{Q_k},$$

$$0 \leq \zeta \leq 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} ||\chi_{N_0}\widetilde{f}_1 - \chi\varphi||_{L^p(\Omega)} &= ||\zeta(\chi_{N_0}\widetilde{f}_1 - \varphi)||_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ||\chi_{N_0}\widetilde{f}_1 - \varphi||_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/3, \end{aligned}$$

und insgesamt ergibt sich $||f - \zeta\varphi||_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. □

Als vierte Anwendung behandeln wir die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearentwicklung eines stetigen hermiteschen Kerns. Sei Q ein offener achsenparalleler Quader des $\mathbb{R}^n$. Sei $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q}) - \{0\}$, $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Bezüglich des zugehörigen Integraloperators K in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ steht uns zunächst Satz III.7.1 zur Verfügung, in dem die Bilinearentwicklung eines Kerns $K \in L^2(Q \times Q)$ eingeführt wurde, dann aber noch Satz III.7.2, da K schwach singulärer Integralkern zu jedem $\alpha < n$ ist. Insbesondere entnehmen wir dem letzten Satz das Orthonormalsystem der Eigenvektoren $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ zu den reellen nicht verschwindenden Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$; das System der Eigenvektoren setzen wir der Einfachheit halber gleich als abzählbar unendlich voraus; alle φ_i sind nach Satz III.7.2 aus $C^0(\overline{Q})$. Unser Ergebnis ist

Satz III.7.4 (Satz von Mercer): *Sei $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q}) - \{0\}$, $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Sei K der zugehörige hermitesche vollstetige Integraloperator in $\mathcal{H} = L^2(Q)(\mathcal{D}(K) = \mathcal{H})$. Wenn K höchstens endlich viele negative Eigenwerte hat, dann ist*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_1 \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)},\ (x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q},$$

und die Reihe rechts konvergiert gleichmäßig in $\overline{Q} \times \overline{Q}$. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ haben die unmittelbar von diesem Satz erklärte Bedeutung.

Beweis: Seien zunächst alle $\lambda_i \geq 0$. Wir setzen

$$K_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)},\ x, y \in \overline{Q}.$$

Nach Satz III.7.2 sind alle $\varphi_i \in C^0(\overline{Q})$, also ist $K_n \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$. Aus $\lambda_i \in \mathbb{R}$ folgt: $K_n(x, y) = \overline{K_n(y, x)}$, und für den zugehörigen Integraloperator K_n gilt:

$$
\begin{aligned}
K_n f(x) &= \int_Q K_n(x,y) f(y) dy \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i) \varphi_i(x), \; x \in \overline{Q}, \; f \in \mathcal{H}.
\end{aligned}
$$

Sei $L_n(x, y) = K(x, y) - K_n(x, y)$, $(x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$. Für den zugehörigen Integraloperator L_n gilt demnach

$$
\begin{aligned}
L_n f(x) &= K f(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i) \varphi_i(x), \; x \in \overline{Q}, \; f \in \mathcal{H}, \\
(L_n, f, f) &= (Kf, f) - (K_n f, f), \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |(f, f_1)|^2 \geq 0, ; f \in \mathcal{H},
\end{aligned}
$$

wobei wir die Formel für Ax in Satz III.6.2 verwendet und A durch K ersetzt haben. Wir behaupten nun, daß hieraus $L_n(x, x) \geq 0$, $x \in \overline{Q}$, für die Funktion $L_n = C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ folgt. Wäre nämlich $L_n(z, z) < 0$ für $z \in \overline{Q}$, so wäre auch

$$
\mathcal{R}e L_n(x, y) < 0, \; |x - z| \leq \varepsilon, \; |y - z| \leq \varepsilon, \; x, y \in \overline{Q},
$$

für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun ein $f \in C^0(\overline{Q})$ mit $0 \leq f(y) \leq 1$, $y \in Q$, $f(y) = 1$, $|y - z| \leq \varepsilon/2$, $y \in \overline{Q}$, $f(y) = 0$, $|y - z| \geq \varepsilon$, $y \in \overline{Q}$, was nach [Forster, Analysis 3, S. 23] sicher möglich ist. Dann ist wegen der Hermitizität des Operators L_n

$$
\begin{aligned}
(L_n f, f) &= \int_{Q \times Q} \mathcal{R}e L_n(x, y) f(x) f(y) dx dy, \\
&= \int_{\substack{|x-z| \leq \varepsilon, \, x \in \overline{Q} \\ |y-z| \leq \varepsilon, \, x \in \overline{Q}}} \mathcal{R}e L_n(x, y) f(x) f(y) dx dy, \\
&< 0
\end{aligned}
$$

so daß sich ein Widerspruch ergibt und unsere Behauptung $L_n(x, x) \geq 0$ folgt, $x \in \overline{Q}$. Somit folgt

$$
\text{(III.7.5)} \qquad 0 \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2 \leq K(x, x) \leq \kappa, \; x \in \overline{Q}, \; n \in \mathbb{N}
$$

Wir zeigen zunächst, daß die Bilinearentwicklung von K für festes $x \in \overline{Q}$ gleichmäßig in $\overline{Q}$ bezüglich y konvergiert. Dies ist leicht zu sehen, denn

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}, \\
&\leq (\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(x)|^2)^{1/2}(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(y)|^2)^{1/2}, \\
&\leq \sqrt{\kappa}(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(x)|^2)^{1/2},\ y \in \overline{Q},\ n \in \mathbb{N}, \qquad \text{(III.7.6)}
\end{aligned}
$$

wobei wir (III.7.5) benutzt haben. Ebenfalls aus (III.7.5) folgt die punktweise Konvergenz von

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(x)|^2,\ x \in \overline{Q},$$

so daß der zweite Faktor in (III.7.6) für hinreichend großes n beliebig klein gemacht werden kann. Sei $f \in C^0(\overline{Q})$. Nach Satz III.7.2 hat $g = Kf$ die in $\overline{Q}$ gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(g, \varphi_i)\varphi_i(x),\ x \in \overline{Q},$$

so daß

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(f, \varphi_i)\varphi_i(x), \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \int_Q f(y)\overline{\varphi_i(y)}dy\varphi_i(x),\ x \in \overline{Q}.
\end{aligned}
$$

Wie eben gezeigt, konvergiert die Bilinearentwicklung für festes $x \in \overline{Q}$ gleichmäßig in $\overline{Q}$ bezüglich y. Also wird

$$Kf(x) = \int_Q \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}f(y)dy,$$

$$\int_Q (K(x, y) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)})f(y)dy = 0,\ x \in \overline{Q},\ f \in C^0(\overrightarrow{\overline{Q}}).$$

Da $C^0(\overline{Q})$ dichter Teilraum von $\mathcal{H} = L^2(Q)$ ist, folgt mit Satz II.2.2, daß

$$K(x, y) = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(x)\varphi_i(y) \qquad \text{(III.7.7)}$$

für jedes $x \in \overline{Q}$ und fast alle $y \in Q$. Für festes $x \in \overline{Q}$ sind jedoch wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Bilinearentwicklung in $\overline{Q}$ bezüglich y beide Seiten von (III.7.7) stetig in $\overline{Q}$ bezüglich y. Also gilt (III.7.7) für alle $(x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$. Nach dem Satz von Dini ist im

$$K(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2, \ x \in \overline{Q},$$

die rechte Seite gleichmäßig konvergent in $\overline{Q}$. Aus der Abschätzung

$$0 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |\varphi_i(x)||\overline{\varphi_i(y)}| \leq (\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2)^{1/2} \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |\varphi_i(y)|^2)^{1/2}.$$

folgt nun sofort die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearentwicklung in $\overline{Q} \times \overline{Q}$. Wir haben noch den Fall zu behandeln, daß endlich viele Eigenwerte negativ sind. Diese seien etwa unter $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ zu finden: Dann betrachte man statt K den Integralkern

$$\widetilde{K}(x, y) = K(x, y) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)},$$

der den hinsichtlich K gemachten Voraussetzungen genügt, nämlich $\widetilde{K} \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, $\widetilde{K}(x, y) = \overline{\widetilde{K}(y, x)}$. Die Eigenwerte $\neq 0$ des zugehörigen Integraloperators sind gerade $\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \ldots > 0$ (s. hierzu den Beweis von Hilfssatz III.6.4), insbesondere ist $K \not\equiv 0$. Aus dem schon bewiesenen folgt die gleichmäßige Konvergenz der zu $\widetilde{K}$ gehörigen Bilinearentwicklung

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$$

in $\overline{Q} \times \overline{Q}$ und damit der Bilinearentwicklung von K $\square$