# Vorlesung „Analytische Mechanik “

# §1. Kovarianz der Lagrangeschen Ableitungen

Beschreibung der Naturgesetze durch Extremalprinzipien. Invarianzeigenschaften der Differentialgleichungen der Mechanik gegenüber gewissen Gruppen von Transformationen der Koordinaten.

**Voraussetzung 1.1:** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $f = f(x_k, \dot{x}_k, t)$ eine reelle Funktion der $2n+1$ unabhängigen Variablen $x_k, \dot{x}_k, t \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. $t$ liegt in einem abgeschlossenen Intervall $[t_1, t_2]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ liegen in einer offenen Menge $G$ des $\mathbb{R}^{2n}$. $f$ sei in $G \times [t_1, t_2]$ zweimal stetig differenzierbar.*

**Satz 1.1:** *Es gebe zweimal stetig differenzierbare Abbildungen $x_k = x_k(t)$ von $[t_1, t_2]$ in $G$ mit vorgeschriebenen Randwerten $x_k(t_1) = a_k$, $x_k(t_2) = b_k$, $k = 1, \dots, n$ derart, daß*

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(x, \dot{x}, t) dt$$

*extremal wird, wobei $\dot{x}_k(t) = \frac{dx_k}{dt}(t)$ gesetzt ist. Dann gelten die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen*

$$L_{x_k} f := f_{x_k} - \frac{df_{\dot{x}_k}}{dt} = 0, \ k = 1, \dots n.$$

**Beweis:** Wir betrachten eine Schar von zulässigen Vergleichsfunktionen $x_k = x_k(\alpha, t)$, $k = 1, \dots, n$, die mit ihren Ableitungen nach $t$ von dem Parameter $\alpha$ im Intervall $-1 < \alpha < 1$ stetig differenzierbar abhängen. Es sei $x_k(0, t) = x_k(t)$ die vorgelegte Lösung des Extremalproblems. Bildet man mit diesen Vergleichsfunktionen das Integral

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(\alpha, t), \dot{x}(\alpha, t), t) dt, \ -1 < \alpha < 1,$$

so ist $I'(\alpha) = 0$ in $\alpha = 0$. $I'(\alpha)$ berechnen wir jetzt. Dann folgt

$$I'(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} (f_{x_k} x'_k(\alpha, t) + f_{\dot{x}_k} \dot{x}'_k(\alpha, t)) dt \tag{1.1}$$

wobei $.'$ die Ableitung nach $\alpha$ bedeutet. Sei

$$s = s(\alpha, t) = \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k} x'_k(\alpha, t) \tag{1.2}$$

Nun ist $x_k(\alpha, t_1) = a_k$, $x_k(\alpha, t_2) = b_k$, $\alpha \in (-1, 1)$. Also ist $x'_k(\alpha, t_1) = x'_k(\alpha, t_2) = 0$, $\alpha \in (-1, 1)$, also

$$(1.3) \qquad 0 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{df_{\dot{x}_k}}{dt} x'_k(\alpha, t) + f_{\dot{x}_k} \dot{x}'_k(\alpha, t) \right) dt.$$

Bei Einführung der Lagrangeschen Ableitung $L_{x_k} f = f_{x_k} - \frac{df_{\dot{x}_k}}{dt}$ liefert Subtraktion von (1.3) von (1.1) die Formel

$$I'(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} x'_k(\alpha, t)(L_{x_k} f)(\alpha, t) dt$$

wobei $x_k = x_k(\alpha, t)$, $\dot{x}_k = \frac{\partial x^k}{\partial t}(\alpha, t)$ einzusetzen ist. Wegen der Willkür in der Wahl von $x'_k(0, t)$ und der Stetigkeit von $L_{x_k} f$ erhält man aus $I'(0) = 0$ für die Lösung $x_k = x_k(0, t)$ des Variationsproblems das Differentialgleichungssystem $L_{x_k} f = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Zur willkürlichen Wahl von $x'_k(0, t)$: Man setze $x_k(\alpha, t) = x_k(0, t) + \alpha v_k(t)$ und lasse $v_k$ alle Elemente aus $C_0^\infty((t_1, t_2))$ durchlaufen, deren Betrag hinreichend klein ist, $k = 1, \ldots, n$. $\square$

Im nächsten Hilfssatz untersuchen wir das Verhalten der Lagrangeschen Ableitungen bei Transformationen der Koordinaten.

**Hilfssatz 1.1:** *An Stelle von $x_1, \ldots, x_n$ werden neue Koordinaten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ durch eine Substitution (Substitutionen sind umkehrbar eindeutig und surjektiv mit offenem Bildbereich)*

$$(1.4) \qquad x_k = x_k(\xi, t), \ k = 1, \ldots, n,$$

*eingeführt. Dabei sind die $x_k(\xi, t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen der $n+1$ unabhängigen Variablen $\xi_1, \ldots, \xi_n, t$ und in den zu betrachten Bereichen sei die $n$-reihige Funktionaldeterminante*

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial \xi_l} \right| \neq 0.$$

*Für die Funktionen $x_k(\alpha, t)$ und $\xi_k(\alpha, t) = \xi_k(x_1(\alpha, t), \ldots, x_n(\alpha, t), t)$ gilt dann*

$$\sum_{k=1}^{n} \xi'_k(\alpha, t)(L_{\xi_k} f)(\alpha, t) =$$

$$= A = \sum_{k=1}^{n} x_k'(\alpha,t)(L_{x_k} f)(\alpha,t), \ \ -1 < \alpha < 1, \ \ t_1 \le t \le t_2.$$

*Wenn $L_x = L_x f$ die aus den $L_{x_k} f$ gebildete Zeile bedeutet, so ist mit $\mathcal{M} = (x_{k\xi_l}) = (\partial x_k | \partial \xi_l)$*

$$L_x \mathcal{M} = L_\xi.$$

Zur Klarstellung: Was bedeutet $x_k = x_x(\zeta, t)$? Zur Verdeutlichung sei $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\xi, t)$ reell analytisch in $\xi, 0 = (0, t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. $\exists \widetilde{U}(0,0)$, $\widetilde{V}(0,0)$ mit

$$\mathfrak{x}(.,t) : \widetilde{U}(0) \times \{t\} \to \widetilde{V}(0) \times \{t\}, \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

bijektiv und analytisch invertierbar. Also ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\xi, t) = \sum_{|\nu| \ge 1} \Phi_\nu(t) \xi^\nu;$$

$$\xi = \xi(\mathfrak{x}, t) = \sum_{|\nu| \ge 1} \Phi_\nu^{-1}(t) \mathfrak{x}^\nu$$

Einsetzen von $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\alpha, t)$ liefert demnach

$$\xi = \xi(\alpha, t) = \sum_{|\nu| \ge 1} \Phi_\nu^{-1}(t) \mathfrak{x}^\nu(\alpha, t).$$

Mit (1.5) entsteht

$$\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}(\xi, \dot{\xi}, t).$$

**Beweis:** Zunächst untersuchen wir den Sinn der Ausdrücke $L_{\xi_l} f$. Die Variable $t$ wird nicht transformiert. Nach (1.4) wird

$$\dot{x}_k = x_{kt} + \sum_{l=1}^{n} x_{k\xi_l} \dot{\xi}_l, \tag{1.5}$$

wobei $x_{kt}, x_{k\xi_l}$ partielle Ableitungen bedeuten. Dadurch wird $\dot{\xi}$ definiert. Vermöge der Substitutionen (1.4), (1.5) wird $f(x, \dot{x}, t)$ eine Funktion von $\xi, \dot{\xi}, t$, so daß die Bedeutung von $L_{\xi_k}$ klar ist. Nach (1.4), (1.5) ist

$$x_{k\dot{\xi}_l} = 0, \ \dot{x}_{k\dot{\xi}_l} = x_{k\xi l},$$

$$x_k' = \sum_{l=1}^{n} x_{k\xi_l} \xi_l', \ \text{also}$$

$$\begin{aligned} f_{\dot{\xi}_l} &= \sum_{k=1}^{n} (f_{x_k} x_{k\dot{\xi}_l} + f_{\dot{x}_k} \dot{x}_{k\dot{\xi}_l}, \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k} x_{k\xi_l}, \quad \text{da } \dot{x}_{k\dot{\xi}_l} = x_{k\xi_l}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n} f_{\dot{\xi}_l} \xi_l' &= \sum_{k,l=1}^{n} f_{\dot{x}_k} x_{k\xi_l} \xi_l', \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_{\dot{x}_k} x_k' = s. \end{aligned}$$

Daher ist $s$ invariant. Demnach ist auch

$$\frac{ds}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{df \dot{x}_k}{dt} x_k' + f_{\dot{x}_k} \dot{x}_k' \right)$$

invariant. Dasselbe gilt von

$$f' = \sum_{k=1}^{n} (f_{x_k} x_k' + f_{\dot{x}_k} \dot{x}_k'),$$

also auch von $A = f' - \frac{ds}{dt}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k,l=1}^{n} x_{k\xi_l} \xi_l' L_{x_k} f \\ &= \sum_{l=1}^{n} \xi_l' L_{\xi_l} f. \end{aligned}$$

Aus der Willkür der $\xi_l'$ folgt nun in der Tat $L_x \mathcal{M} = L_\xi$. Die Annahme, daß $x_k = x_k(0,t) = x_k(t)$ eine Lösung des Extremalproblems ist, wurde nicht benötigt. □

Dieser Schluß ist interessant, da bei Siegel der analytische Beweis der Invarianz von $\sum_{k=1}^{n} x_k' L_{x_k} f$ unklar ist. Setze ich Bahnen $\mathfrak{x}(\alpha,t)$, $\xi(\alpha,t)$ mit $\mathfrak{x}(\alpha,t) = \mathfrak{x}(\xi(\alpha,t),t)$ ein, so folgt die Invarianz von $ds/dt$. Für die Invarianz in den Variablen $x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, x_k', \dot{x}_k', \ldots$ müssen passende Bahnen eingesetzt und das Transformationsverhalten der $\dot{x}_k, \ddot{x}_k, x_k', \dot{x}_k', \ldots$ beachtet werden, das durch das Transformationsverhalten der $x_k$ festgelegt ist.

$f(\mathfrak{x}(\alpha,t), \dot{\mathfrak{x}}(\alpha,t), t) = f(\mathfrak{x}(\xi(\alpha,t),t), \dot{\mathfrak{x}}(\xi(\alpha,t), \dot{\xi}(\alpha,t),t)$ auf Bahnen $f(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}}, t) =$

$f(\mathfrak{x}(\xi,t),\ \dot{\mathfrak{x}}(\xi,\dot{\xi},t),t)$ in Variablen, beides mit der induzierten Transformation $\dot{\mathfrak{x}} = \dot{\mathfrak{x}}(\xi,\dot{\xi},t) = \mathfrak{x}_t + (x_{x\xi_l})\dot{\xi} = \mathfrak{x}_t(\xi,t) + (x_{k\xi_l}(\xi,t))\dot{\xi}$. Inkorrekterweise setzt man $f(\xi,\dot{\xi},t) := f(\mathfrak{x}(\xi,t),\dot{\mathfrak{x}}(\xi,\dot{\xi},t),t)$.

Insbesondere transformieren sich die Lagrangeschen Ableitungen kontragredient zu den Komponenten eines kontravarianten Vektors $\widetilde{x} = \mathcal{M}\widetilde{\xi}$, wobei $\widetilde{x}$ die Komponentenspalte bezüglich des z.B. cart. K.S. $x_1,\ldots,x_n$ und $\widetilde{\xi}$ die Komponentenspalte bezüglich des eine offene Menge $\mathcal{O} \subset G$ überdeckenden K.S. $\xi_1,\ldots,\xi_n$ sind, $t$ ist, wie gesagt, festgehalten, aber beliebig aus $[t_1,t_2]$ und wird nicht mittransformiert. Daher sprechen wir auch von der Kovarianz der Lagrangeschen Ableitungen.

Nun untersuchen wir, inwieweit $f$ durch die Lagrange-Ableitungen $L_{x_k}f$ festgelegt ist.

**Hilfssatz 1.2:** *Durch Vorgabe der Lagrangeschen Ableitungen als Funktionen von $x,\dot{x},\ddot{x},t$ ist die Funktion $f = f(x,\dot{x},t)$ festgelegt bis auf eine willkürliche additive Funktion, welche die totale Ableitung einer von $\dot{x}$ freien Funktion $v(x,t)$ nach $t$ ist.*

**Beweis:** In expliziter Gestalt ist

$$L_{x_k}f = f_{x_k} - \sum_{l=1}^{n}(f_{\dot{x}_k x_l}\dot{x}_l + f_{\dot{x}_k\dot{x}_l}\ddot{x}_l) - f_{\dot{x}_k t}. \tag{1.6}$$

In (1.6) wird die rechte Seite als Funktion der $3n+1$ unabhängigen Variablen $x_l,\dot{x}_l,\ddot{x}_l,t$ angesehen. Stimmen für zwei Funktionen $g(x,\dot{x},t)$, $h(x,\dot{x},t)$ die $n$ Lagrangeschen Ableitungen $L_{x_k}g, L_{x_k}h$ als Funktionen jener $3n+1$ Variablen paarweise überein, so gelten für ihre Differenz $f = h-g$ die Gleichungen $L_{x_k}f = 0$ identisch in $x,\dot{x},\ddot{x},t$. Dann verschwinden insbesondere die Koeffizienten von $\ddot{x}_l$ in (1.6), also $f_{\dot{x}_k\dot{x}_l} = 0$. Also hat $f$ die Form

$$f(x,\dot{x},t) = f_0(x,t) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x,t)\dot{x}_k$$

Damit ergibt sich aus (1.6) durch Koeffizientenvergleich

$$f_{0x_k} = f_{kt},\ f_{lx_k} = f_{kx_l},\ k,l = 1,\ldots,n.$$

Dann läßt sich $(f_0,f_1,\ldots,f_n)$ in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet $(t_1,t_2)\times\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, in dem die Veränderlichen $t,x_1,\ldots,x_n$ variieren, als Gradient darstellen von einer Funktion $v(x,t)$, d.h. es gibt eine Funktion $v$, deren totales Differential

$$dv = f_0 dt + \sum_{k=1}^{n} f_k dx_k$$

wird. Also ist

$$h(x, \dot{x}, t) = g(x, \dot{x}, t) + \frac{dv}{dt}(x, t),$$

wobei bei der totalen Differentiation nach $t$ die $x_k$ als Funktionen von $t$ anzusehen oder die $\dot{x}_k$ als neue Variable einzuführen sind. $\square$

**Bel. K.S.:** $\partial_{\xi_l} x(P)$, ($t$ wird weggelassen, weil fest), $l = 1, \ldots, n$ spannen den TR in $P \in \mathcal{O}$ auf $= n -$ dim. VR

**Cart. K.S:** $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ spannen TR in $P \in 0$ auf

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni \widetilde{x} &= \sum \widetilde{\xi}_i \partial_{\xi_i} x = \sum \widetilde{x}_i \underline{e}_i \\
\Rightarrow \widetilde{x} &= \mathcal{M} \widetilde{\xi} \\
\widetilde{x}^T &= \widetilde{\xi}^T \mathcal{M}^{T'},\ \widetilde{x} = \text{kontrav. V.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}^T (\mathcal{M}^T)^{-1} &= \widetilde{\xi}^T,\ x^T (\mathcal{M}^T)^{-1} = \xi^T \\
L_x \mathcal{M} &= L_\xi,\ L_x \text{ kontragredient im Verhältnis zu } x = \text{kovariant}
\end{aligned}$$

$L_x$ (=Zeile) $\widetilde{x}$ (=Spalte) ist eine Invariante, d.h. $L_x \widetilde{x} = L_\xi \widetilde{\xi}$ (in $P$).

**1)** Hinweis: Transformationseigenschaft $L_x \mathcal{M} = L_\xi$. Beweis: Rückgriff auf $x_k(\alpha, t) =$ Vergleichsfunktionen für $E - L$Glgen.

**2)** Kovarinz: Zur Erl. hatte ich vorausgesetzt, daß die $x_k$ cart. Koordinaten. Das muß nicht sein, das Trafo-Verhalten der Lagrange-Abl. ist aber immer kontragredient zu den Vektoren des $T$-Raums.

**3)** Die Euler-L DGL sind insbesondere invariant gegen Variablensubst.

**4)** Alle Betrachtungen lokal. Am Ende von §3 eine Bemerkung.

## §2. Kanonische Transformationen

Die Lagrangeschen Ableitungen enthalten gemäß ihrer Definition in Satz 1.1 im allgemeinen die zweiten Ableitungen von $x_k(t)$ und das entsprechende System der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen ist dann von zweiter Ordnung. Dies läßt sich in ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung umschreiben. Dies sind die Hamiltonschen Differentialgleichungen.

**Satz 2.1** *Sei $f$ wie im vorigen Paragraphen. Sei die Determinante $|f_{\dot{x}_k\dot{x}_l}| \neq 0$. Sei $y_k = f_{\dot{x}_k}(x, \dot{x}, t)$ in $G \times [t_1, t_2]$, $\dot{x}_k = g_k(x, y, t)$ in $G'x[t_1, t_2]$, $G' \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, also $\dot{x} = g(x, y, t)$. Sei*

$$E = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - f(x, \dot{x}, t)$$

*als Funktion der $3n+1$ unabhängigen Variablen $x_k, y_k, \dot{x}_k$ und $t$ betrachtet. Wenn die $x_k(t)$ den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen genügen, so erfüllen $x_k(t)$, $y_k(t) = f_{\dot{x}_k}(x(t), \dot{x}(t), t)$ das Hamiltonsche System*

$$\dot{x}_k = E_{y_k},\ \dot{y}_k = -E_{x_k},$$

*zur (neuen) Hamiltonfunktion $E = E(x, y, g(x, y, t), t) = E(x, y, t)$, für die $|E_{y_k y_l}| \neq 0$ ist. Sei umgekehrt eine Funktion $\widetilde{E} = \widetilde{E}(x, y, t)$ der $2n+1$ unabhängigen Variablen $x_k, y_k, t$ vorgegeben, die in einer Menge $G' \times [t_1, t_2]$, $G' \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen, definiert sei. Es sei die Determinante*

$$|\widetilde{E}_{y_k y_l}| \neq 0.$$

*Wir definieren durch*

$$\widetilde{f} = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k \dot{y}_k - \widetilde{E}(x, y, t)$$

*eine Funktion $\widetilde{f}$ der $3n+1$ unabhängigen Variablen $x_k, y_k, \dot{x}_k, t$, und legen $y$ als Funktion von $x, \dot{x}, t$ durch die Gleichungen $\dot{x}_k = \widetilde{E}_{y_k}$, $k = 1, \ldots, n$ fest. Dadurch wird $\widetilde{f}$ eine Funktion von $x, \dot{x}, t$ allein. Für eine Lösung $x(t), y(t)$ von $\dot{x}_k = \widetilde{E}_{y_k}$, $\dot{y}_k = -\widetilde{E}_{x_k}$ gilt*

$$L_{x_k} \widetilde{f} = 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

*Endlich ist $|\widetilde{f}_{\dot{x}_k \dot{x}_l}| \neq 0$.*

**Beweis:** Wir setzen

$$y_k = f_{\dot{x}_k}(x, \dot{x}, t),\ k = 1, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Hieraus bestimmen wir die $\dot{x}_k = g_k(x, y, t)$ als Funktionen von $x_1, \ldots, x_n, t$ und der neuen unabhängigen Variablen $y_1, \ldots, y_n$. Dies ist im Kleinen wegen unserer Voraussetzung $|f_{\dot{x}_k \dot{x}_l}| \neq 0$ möglich. Dann wird

$$L_{x_k} f = f_{x_k}(x, \dot{x}, t) - \dot{y}_k, \tag{2.2}$$

wobei der Punkt über $y_k$ die totale Ableitung der Funktion $y_k = f_{\dot{x}_k}(x, \dot{x}, t)$ nach $t$ bedeutet, d.h. $\dot{y}_k = df_{\dot{x}_k}/dt = \sum_{l=1}^{n}(f_{x_k x_l}\dot{x}_l + f_{\dot{x}_k \dot{x}_l}\ddot{x}_l) + f_{\dot{x}_k t}$ als Funktion der $3n+1$ unabhängigen Variablen $x, \dot{x}, \ddot{x}, t$. Die Differentialgleichungen von Euler-Lagrange besagen

$$\overset{\circ}{y}_k = f_{x_k}(x, \overset{\circ}{x}, t),\ \overset{\circ}{\cdot} \text{ entspricht } \dot{x}_k(t), \dot{y}_k(t) \tag{2.3}$$

In (2.1 in der Form $\overset{\circ}{x} = g(x, y, t)$), (2.3 in der Form $\overset{\circ}{y} = f_{x_k}(x, g(x, y, t), t)$) hat man ein System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2n$ unbekannten Funktionen $x_k(t)$, $y_k(t)$. Um die Asymmetrie dieses Systems zu beseitigen wir die im Satz 2.1 genannte Funktion $E$ eingeführt. Es ist dann

$$dE = \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\dot{x}_k dy_k + y_k d\dot{x}_k - f_{x_k} dx_k - f_{\dot{x}_k} d\dot{x}_k) - f_t dt. \tag{2.4}$$

Wird nun $\dot{x}$ vermöge (2.1) als Funktion von $x, y, t$ festgelegt, so ist auch $E = E(x, y, t)$ eine Funktion von $x, y, t$ allein. Nach (2.1) verschwindet aber in (2.4) der Koeffizient von $d\dot{x}_k$. Das totale Differential von $E(x, y, t)$ ist somit

$$dE = \sum_{k=1}^{n}(\dot{x}_k dy_k - f x_k dx_k) - f_t dt.$$

Für die partiellen Ableitungen von $E$ als Funktion von $x, y, t$ ergeben sich daher die Werte

$$E_{x_k} = -f_{x_k},\ E_{y_k} = \dot{x}_k,\ k = 1, \ldots, n, \tag{2.5}$$

und (2.2) geht über in

$$L_{x_k} f = -E_{x_k} - \dot{y}_k.$$

Aus den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen folgt

$$\dot{x}_k = E_{y_k}, \leftarrow \text{ direkt aus (2.1):} y_k = f_{\dot{x}_k}(x, \dot{x}, t)$$

$$\overset{\circ}{y}_k = -E_{x_k}. \leftarrow \text{ Euler-Lagrange}$$

Aus der Voraussetzung $|f_{\dot{x}_k \dot{x}_l}| \neq 0$ folgt, daß die Funktionaldeterminante $|y_{k\dot{x}_l}|$ der $y_k$ als Funktionen von $x_l, \dot{x}_l, t$ und die dazu reziproke Funktionaldeterminante $|\dot{x}_{k y_l}| \neq 0$ sind. Also ist nach (2.5) auch die Determinante $|E_{y_k y_l}| \neq 0$. Sei umgekehrt $\widetilde{E}$ wie in Satz 2.1 eingeführt, ebenso $\widetilde{f}$. Dann ist

$$d\widetilde{f} = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k dy_k + y_k d\dot{x}_k - \widetilde{E}_{x_k} dx_k - \widetilde{E}_{y_k} dy_k) - \widetilde{E}_t dt.$$

Nun legt man $y$ im Kleinen durch die Gleichung $\dot{x}_k = \widetilde{E}_{yk}$, $k = 1, \dots, n$ fest. Dies ist wegen der Voraussetzung $|\widetilde{E}_{y_k y_l}| \neq 0$ zulässig. Dann wird $y$ eine Funktion von $x, \dot{x}, t$, also auch $\widetilde{f} = \widetilde{f}(x, \dot{x}, t)$. Es folgt auf $\dot{x}_k = E_{y_k}(x, y, t)$ wie vorher

$$d\widetilde{f} = \sum_{k=1}^{n} (y_k d\dot{x}_k - \widetilde{E}_{x_k} dx_k) - \widetilde{E}_t dt,$$

also $\widetilde{f}_{x_k} = -\widetilde{E}_{x_k}$, $\widetilde{f}_{\dot{x}_k} = y_k$, $k = 1, \dots, n$. Daraus folgt

$$L_{x_k} \widetilde{f} = -\widetilde{E}_{x_k} - \dot{y}_k$$

Gelten die Hamiltonschen Gleichungen $\overset{\circ}{x}_k = \widetilde{E}_{y_k}$, $\overset{\circ}{y}_k = -\widetilde{E}_{x_k}$, so folgen die Euler-Lagrangeschen Gleichungen

$$L_{x_k} \widetilde{f} = 0.$$

Aus $|\widetilde{E}_{y_k y_l}| \neq 0$ folgt mit $\dot{x}_k = \widetilde{E}_{y_k}$, daß $|\dot{x}_{k y_l}| \neq 0$ ist, d.h. die Funktionaldeterminante der $\dot{x}_k$ als Funktionen der $y_l$ verschwindet nicht. Daher ist auch die reziproke Funktionaldeterminante $|y_{x\dot{x}_l}| \neq 0$ und wegen $\widetilde{f}_{\dot{x}_k} = y_k$ folgt, daß $|\widetilde{f}_{\dot{x}_k \dot{x}_l}| \neq 0$ ist. $\square$

**Zum totalen Differential:** Analysis III, § II.9
$U \subset \mathbb{R}^n$, $U$ offen, $V \subset \mathbb{R}^m$, $V$ offen

$$F : U \to V$$

$$
\begin{aligned}
dF(p) : T_p(U) &\to T_{F(P)}(V) \\
\mathfrak{x} &\longmapsto J_F(p)\mathfrak{x} =: \mathfrak{y}
\end{aligned}
$$

$$
J_F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},
$$

$m$ Zeilen, $n$ Spalten

$$
J_F(p) = m \text{ Zeilen, } 1 \text{ Spalte}
$$

Also für $m = 1 : J_F(p) = (\nabla F(p))^T$. Was ist der Hauptsatz über das totale Differential? Satz 9.1 (Hintereinanderausführung) und Corollar dazu (Invarianz der Dimension). Für $m = 1$ ist

$$
\begin{aligned}
dF(p)\mathfrak{x} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) x_\nu, \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) dx_\nu(\mathfrak{x}),
\end{aligned}
$$

also

$$
dF(p) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_\nu}(p) dx_\nu,
$$

und $dF$ ist eine 1-Form $w$. Sei $M = \{\dot{x}_k - g_k(x,y,t) = 0 | k = 1, \dots n\}$. Mit $n = 3n+1-l$ folgt, daß $l = 2n+1$ und $M$ eine $(2n+1)$-dimensionale Untermannigfaltivkeit des $\mathbb{R}^{3n+1}$ ist. Die Parametrisierung $\varphi$ ist $\varphi_i(x,y,\dot{x},t) = x_i,\ 1 \le i \le n,\ \varphi_i(x,y,\dot{x},t) = y_{i-n},\ n+1 \le n \le 2n,\ \varphi_i(x,y,\dot{x},t) = g_{i-2n}(x,y,t),\ 2n+1 \le i \le 3n,\ \varphi_{3n+1}(x,y,\dot{x},t) = t$. Bilden wir zu $dE$ in (2.4) den „pull-back“$dE \circ \varphi$, so entsteht wegen $(y_k - f_{\dot{x}_k}) \circ \varphi = 0$ gerade

$$
dE \circ \varphi = \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k dy_k - f_{x_k} dx_k) - f_t dt
$$

auf $M$.

**Zur totalen Ableitung nach $t$:** Auch hier ist ein mehr formaler Standpunkt möglich. Seien

$$
U \subset \mathbb{R}^n,\ V \subset \mathbb{R}^m,\ U, V \text{ offen},
$$

$$
t \in I,\ I = \text{ Intervall in } \mathbb{R} \text{ mit } \overset{\circ}{I} \neq \emptyset,
$$

und

$$f : U \times V \times I \to \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar. Dann ist $\frac{df}{dt} : U \times V \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times I \to \mathbb{R}$,

$$\frac{df}{dt}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{y}}, t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{df}{dx_\nu}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)\dot{x}_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} \frac{df}{dy_\mu}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)\dot{y}_\mu + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t) =$$

$$= [(\nabla_{\mathfrak{x},\mathfrak{y}} f)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)]^T \begin{pmatrix} \dot{\mathfrak{x}} \\ \dot{\mathfrak{y}} \end{pmatrix} + \frac{\partial f}{\partial t}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)$$

die totale Ableitung von $f$ nach $t$. $(df/dt)(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{y}}, t)$ setzt sich daher aus einer in $\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{y}}$ linearen Funktion mit von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t$ abhängigen Koeffizienten und $\frac{df}{dt}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t)$ zusammen. Hängt $f$ nicht von der Variablen $t$ ab, so ist $df$ eine 1-Form in $U \times V$, nämlich $dF$. Es ist nun klar, in welchem Sinn wir uns in (2.2) auf die totale Ableitung $\frac{d}{dt} f_{\dot{x}_n}$ berufen.

Von den $2n$ Hamiltonschen Gleichungen ergibt sich die eine Hälfte, nämlich $\overset{\circ}{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}} = -\mathbf{E}_{\mathbf{x}_\mathbf{k}}$, unmittelbar aus den Euler-Lagrangeschen Gleichungen, während die **andere Hälfte** durch die Substitution $y_k = f_{\dot{x}_k(x,\dot{x},t)}$ und die Einführung der Funktion $E$ in Satz 2.1 bedingt war. Es ist nun bemerkenswert, daß auch sämtliche $2n$ Hamiltonschen Gleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen interpretiert werden können. Zu diesem Zwecke nehmen wir jetzt an Stelle der bisherigen Variablen $x$ aus §1 die Variablen $x, y$ und betrachten in der Funktion

$$f = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - E(x, y, t)$$

die $4n + 1$ Variablen $x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k, t$ als unabhängig, wobei allerdings die $\dot{y}_k$ gar nicht auftreten. Zufolge der Definition der Lagrangeschen Ableitungen wird nunmehr identisch in $x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k$ und $t$ gerade

(2.6)
$L_{x_k} f = f_{x_k} - \frac{df_{\dot{x}_k}}{dt} = -E_{x_k} - \dot{y}_k$,
Gilt bei abstrakter Einführung von $df_{\dot{x}_k}/dt$ nach S. 11

$L_{y_k} f = f_{y_k} - \frac{df_{\dot{y}_k}}{dt} = \dot{x}_k - E_{y_k}$,
Gilt ohne Rückgriff auf $x_k(t), y_k(t)$

und durch Nullsetzen der rechten Seiten entstehen tatsächlich die Hamiltonschen Gleichungen.

Die Umformung hat den Vorteil, daß wir unsere Resultate für die Transformation der Gleichungen von Euler-Lagrange anwenden können.

**Definition 2.1:** *$E$ sei eine Funktion von $x, y, t$. Es sei $f$ wie auf S. ..... gegeben, d.h.*

$$f = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - E(x, y, t)$$

*Eine Substitution (vgl. S. 11)*

$$x_k = x_k(\xi, \eta, t),\ y_k = y_k(\xi, \eta, t),$$

*bei der die $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ neue Variable sind und $t$ ungeändert bleibt, heißt kanonisch genau dann, wenn folgendes gilt: Die Größen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ werden mit $z_1, \dots, z_{2n}$ bezeichnet, entsprechend die $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ mit $\zeta_1, \dots, \zeta_{2n}, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_n$ mit $\dot{\zeta}_1, \dots, \dot{\zeta}_{2n}$, es sei $\mathcal{M} = z_\zeta = (z_{k\zeta l})$ die Funktionalmatrix der Transformation $z_k = z_k(\zeta, t)$, $k = 1, \dots, 2n$. Es sei*

$$f(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, t) = f(x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta, t), \dot{x}, \dot{y}, t) = f(x(\xi, \eta, t), y(\xi, \eta), \dot{\xi}, \dot{\eta})$$

*Dann soll es eine Funktion $\widetilde{E} = \widetilde{E}(\xi, \eta, t)$ geben derart, daß*

$$\begin{aligned} L_{\xi_k} f &= -\widetilde{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k, \\ L_{\eta_k} f &= -\widetilde{E}_{\eta_k} + \dot{\xi}_k,\ k = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

*und zwar identisch in $\zeta, \dot{\zeta},, t$.*

Die Charakterisierung der kanonischen Transformationen wird durch folgenden Satz geliefert:

**Satz 2.2:** *Die Substitution*

$$z = z(\zeta, t)$$

*ist genau dann kanonisch, wenn die Matrix $(z_{k\zeta_l})$ symplektisch ist, d.h.*

$$\mathcal{M}^* \mathcal{I} \mathcal{M} = I.$$

*Hierbei ist $J$ die $(2n \times 2n)$-Matrix $\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}$ ist die $n$-Einheitsmatrix.*

*Die symplektischen Matrizen bilden bei Multiplikation eine Gruppe.*

**Beweis:** Wir setzen an

$$\varphi(\zeta, \dot{\zeta}, t) = \sum_{k=1}^{n} \dot{\xi}_k \eta_k - \widetilde{E}(\zeta, t).$$

Hierbei ist die Funktion $\widetilde{E}(\zeta, t)$ unbekannt und soll bestimmt werden. Für die Lagrangeschen Ableitungen von $\varphi$ erhält man nach (2.6) in $\zeta, \dot{\zeta}$ identisch

$$\begin{aligned} L_{\xi_k}\varphi &= -\widetilde{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k, \\ L_{\eta_k}\varphi &= \dot{\xi}_k - \widetilde{E}_{\eta_k}, \ k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Gleichzeitig soll $L_{\xi_k} f = -\widetilde{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k$, $L_{\eta_k} f = \dot{\xi}_k - \widetilde{E}_{\eta_k}$, $k = 1, \ldots, n$, identisch in $\zeta, \dot{\zeta}$ gelten. Nach Hilfssatz 1.2 ist also

$$f = \varphi + \frac{d\upsilon(\zeta, t)}{dt}$$

$\nabla^T_{\zeta,t}\upsilon \cdot \binom{\dot{\zeta}}{1}$, s. S. 11, $\zeta_k$ irgendwelche Variablen im Defbereich, $\dot{\zeta}_k$ beliebig.

mit der totalen Ableitung einer von $\dot{\zeta}$ freien Funktion $\upsilon$ nach $t$. Man beachte, daß in Hilfssatz 1.2 $x$ durch $\zeta$ zu ersetzen ist. Die letzte Gleichung gilt identisch in $\zeta, \dot{\zeta}, t$, falls $f$ wie in Definition 2.1 durch diese Variablen ausgedrückt wird. Wegen der Definition von $f$ in Definition 2.1 und der Definition von $\varphi$ bedeutet dies

$$\begin{aligned} \frac{d\upsilon(\zeta, t)}{dt} &= f - \varphi = \widetilde{E} - E + \sum_{r=1}^{n} \dot{x}_r y_r - \sum_{l=1}^{n} \dot{\xi}_l \eta_l, \\ &= \widetilde{E} - E + \sum_{l=1}^{n} \left( \sum_{r=1}^{n} x_{r\xi_l} y_r - \eta_l \right) \dot{\xi}_l + \sum_{l=1}^{n} \left( \sum_{r=1}^{n} x_{r\eta_l} y_r \right) \dot{\eta}_l + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} x_{kt} y_k, \end{aligned}$$

wobei wir die Definition der $\dot{x}_k$ benutzt haben (Alternativ kann man die $\zeta_k$ ab Funktionen von $t$ auffassen). Also ist wegen der Willkür der $\dot{\zeta}_l, \dot{\eta}_l$ gerade

$$
\begin{aligned}
v_{\xi_l} &= \sum_{r=1}^{n} x_{r\xi_l} y_r - \eta_l, \\
v_{\eta_l} &= \sum_{r=1}^{n} x_{r\eta_l} y_r, \\
v_t &= \widetilde{E} - E + \sum_{k=1}^{n} x_{kt} y_k.
\end{aligned}
$$

Hiernach sind die sämtlichen $2n+1$ partiellen Ableitungen erster Ordnung von $v(\zeta, t)$ vorgeschrieben, wenn die Transformation $z$ und $\widetilde{E}$ vorgeschrieben sind. $t$ wird nun als Parameter behandelt und $v$ mitsamt der Transformation $z$ aus den ersten $2n$ Gleichungen bestimmt. Die Funktion $\widetilde{E}$ denkt man sich dann aus der letzten Zeile berechnet. Bei festem $t$ haben wir für $v$ aus den Gleichungen für $v_{\xi_l}$, $v_{\eta_l}$ die folgenden notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen für $v$ im Kleinen: Wenn $\frac{\partial v}{\partial \zeta_l} = F_l(\zeta, t)$ gesetzt ist, so besteht diese Bedingung einfach in

$$\frac{\partial F_l}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial F_k}{\partial \zeta_l} = 0,\ k, l = 1, \ldots, n.$$

(s. etwa [Mathematik für Physiker III, Satz 12.5 oder Satz 6.3, Langwitz, Differentialgeometrie, Anhang II, No. 2]). Dies führt auf

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{r\xi_l\xi_k} y_r + x_{r\xi_l} y_{r\xi_k}) = \sum_{r=1}^{n} (x_{r\xi_k\xi_l} y_r + x_{r\xi_k} y_{r\xi_l}) \tag{2.7}$$

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{r\xi_l\eta_k} y_r + x_{r\xi_l} y_{r\eta_k}) - \delta_{kl} = \sum_{r=1}^{n} (x_{r\eta_k\xi_l} y_r + x_{r\eta_k} y_{r\xi_l}), \tag{2.8}$$

$$\sum_{r=1}^{n} (x_{r\eta_l\eta_k} y_r + x_{r\eta_l} y_{r\eta_k}) = \sum_{r=1}^{n} (x_{r\eta_k\eta_l} y_r + x_{r\eta_k} y_{r\eta_l}) \tag{2.9}$$

mit $\delta_{kl}$ als dem üblichen Kroneckersymbol. Führen wir folgende Matrizen ein:

$$\mathcal{A} = x_\xi = (x_{k\xi_l}), \quad \mathcal{B} = x_\eta = (x_{k\eta_l}),$$

$$\mathcal{C} = y_\xi = (y_{k\xi_l}), \quad \mathcal{D} = y_\eta = (y_{k\eta_l}),$$

so ist $\mathcal{M} = z_\zeta = (z_{k\zeta_l}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix}$, und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Integrierbarkeit von $\frac{\partial v}{\partial \zeta_l} = F_l(\zeta, t)$, $l = 1, \ldots, n$, im Kleinen bei vorgegebenem „Anfangswert“ $v(\zeta_0, t) = v_0(t)$ lassen sich wie folgt umschreiben: (2.7) geht wegen $x_{r\zeta_l\zeta_k} = x_{r\xi_k\xi_l}$ über in

$$\mathcal{C}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}^*\mathcal{C}.$$

(2.8) geht wegen $x_{r\xi_l\eta_k} = x_{r\eta_k\xi_l}$ über in

$$\mathcal{D}^*\mathcal{A} - \mathcal{E} = \mathcal{B}^*\mathcal{C},$$

wobei $\mathcal{E}$ die $n$-reihige Einheitsmatrix bedeutet. (2.9) geht wegen $x_{r\eta_k\eta_l} = x_{r\eta_l\eta_k}$ in

$$\mathcal{D}^*\mathcal{B} = \mathcal{B}^*\mathcal{D}$$

über. Ist $J$ wie in Satz 2.2 angegeben, so lauten somit (2.7), (2.8), (2.9) folgendermaßen

$$\mathcal{M}^*\mathcal{J}\mathcal{M} = \mathcal{J} \tag{2.10}$$

Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Berechnung von $v(\zeta, t)$ aus den $2n$ Gleichungen $(\partial v/\partial \zeta_l)(\zeta, t) = F_l(\zeta, t)$, $l = 1, \ldots, 2n$. Von $v$ verlangen wir stetige Differenzierbarkeit in den Variablen $\zeta, t$. $v$ ist nur bis auf eine additive Funktion $v_0(t)$ von $t$ eindeutig bestimmt, die nach $t$ stetig differenzierbar sein muß. Die Konstruktion der Lösung von $(\partial v/\partial \zeta_l)(\zeta, t) = F_l(\zeta, t)$, $l = 1, \ldots, n$ zu einem vorgegebenen Anfangswert $v(\zeta_0, t) = v_0(t)$ zeigt, daß $v$ nach $\zeta, t$ stetig differenzierbar ist, sofern $v_0$ nach $t$ stetig differenzierbar ist. Ein solches additives Glied geht auch in $v_t$ und damit in $\widetilde{E}$ ein; bei der Bildung von $\widetilde{E}_{\xi k}$, $\widetilde{E}_{\eta k}$ fällt es aber wieder heraus, so daß die rechten Seiten in $L_{\xi k} f = -\widetilde{E}_{\xi k} - \dot{\eta}_k$, $L_{\eta_k} f = -E_{\eta_k} + \dot{\xi}_k$ vollständig bestimmt sind.

Eine Matrix $\mathfrak{M}$, welche der Gleichung (2.10) genügt, heißt symplektisch. Durch Bildung der Determinante folgt

$$|\mathfrak{M}|^2 |J| = |J| = 1, \text{ also } |\mathfrak{M}|^2 = 1.$$

Genauer kann man noch $|\mathfrak{M}| = 1$ zeigen, was jedoch weiterhin nicht benötigt wird. Jedenfalls ist für symplektisches $\mathfrak{M}$ die Determinante $|\mathfrak{M}| \neq 0$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ vorhanden. Aus (2.10) folgt dann

$$(\mathfrak{M}^{-1})^* J \mathfrak{M}^{-1} = (\mathfrak{M}^{-1})^* (\mathfrak{M}^* J \mathfrak{M}) \mathfrak{M}^{-1} = J,$$

so daß auch $\mathfrak{M}^{-1}$ symplektisch ist. Entsprechend zeigt man, daß mit $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ auch $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ symplektisch ist. Folglich bilden die symplektischen Matrizen eine Gruppe, die symplektische Gruppe.

In der Symplektizität von $\mathfrak{M}$ hat man also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Transformation $z = z(\zeta, t)$ die Hamiltonsche Form (2.6) der Lagrangeschen Ableitungen ungeändert läßt, und zwar ist offenbar die gefundene Bedingung für eine solche kononische Transformation unabhängig von der Funktion $E(z, t)$. □

**Hilfssatz 2.1:** *Bei geeigneten Voraussetzungen über die Bereiche der Variablen bilden die kanonischen Transformationen eine Gruppe. Die kanonischen Transformationen führen insbesondere jedes Hamiltonsche System von Differentialgleichungen*

$$\overset{\circ}{x}_k = E_{yk},\ \overset{\circ}{y}_k = -E_{x_k}$$

*in ein solches über, d.h. mit einer geeigneten Funktion $\widetilde{E} = \widetilde{E}(\xi, \eta, t)$ gilt*

$$\overset{\circ}{\xi}_k = \widetilde{E}_{\eta k},\ \overset{\circ}{\eta}_k = -\widetilde{E}_{\xi_k}.$$

**Beweis:** Nach Satz 2.2 ist die Transformation $z = z(\xi, t)$ dann und nur dann kanonisch, wenn die Funktionalmatrix $z_\zeta = \mathfrak{M}$ identisch in $\zeta, t$ symplektisch ist. Folglich ist die inverse Transformation ebenfalls kanonisch, und bei geeigneten Voraussetzungen über die Bereiche der Variablen gilt dies auch für die Hintereinanderausführung zweier kanonischer Transformationen. Die kanonischen Transformationen bilden dann eine Gruppe. Definieren wir $f$ wie in Def. 2.1, so ist nach (2.6)

$$\begin{aligned} L_{x_k} f &= -E_{x_k} - \dot{y}_k = 0, \\ L_{y_k} f &= \dot{x}_k - E_{y_k} = 0 \end{aligned}$$

und nach Satz 2.2, falls die Substitution $z = z(\zeta, t)$ kanonisch ist

$$\begin{aligned} L_{\xi_k} f &= -\widetilde{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k, \\ L_{\eta_k} f &= \dot{\xi}_k - \widetilde{E}_{\eta_k}. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1.1 ist $0 = L_z\mathfrak{M} = L_\zeta$, $\mathfrak{M} = (z_{k\zeta l})$. Also ist $0 = -\widetilde{E}_{\xi_k} - \dot{\eta}_k$, $0 = \dot{\xi}_k - \widetilde{E}_{\eta_k}$. □

Man kann nun allgemeiner die Aufgabe stellen, alle umkehrbaren Transformationen anzugeben, die jedes Hamiltonsche System von Differentialgleichungen wieder in ein solches überführen. Dabei betrachten wir statt der Differentialgleichungen die entsprechenden Hamiltonschen Ausdrücke $\dot{x}_k - E_{y_k}$, $\dot{y}_k + E_{x_k}$, die wir zu der Spalte $\dot{z} - \mathfrak{I}E_z$ zusammenfassen können, wenn

$$E_z = \begin{pmatrix} E_{x_k} \\ E_{y_k} \end{pmatrix}, \ \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{E} \\ -\mathfrak{E} & t \end{pmatrix}$$

gesetzt ist.

**Hilfssatz 2.2.:** *Bei der Variablensubstitution $z = z(\zeta, t)$ mit der Funktionalmatrix $z_\zeta$ wie vorher eingeführt, d.h. $z_\zeta = (z_{k\zeta_l}) = \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M}^{-1}(\dot{z} - \mathfrak{J}E_z)$ für alle $E$ genau dann von der Hamiltonschen Form $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta$ bei geeigneter Wahl von $\widetilde{E} = \widetilde{E}(\zeta, t)$, wenn*

$$\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M} = \lambda\mathfrak{J}$$

*mit konstantem skalarem $\lambda \neq 0$. Insbesondere ist dies äquivalent damit, daß jedes Hamiltonsche System $\dot{z} - \mathfrak{J}E_z = 0$ bei der obigen Variablensubstitution $z = z(\zeta, t)$ im $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta = 0$ übergeht bei geeigneter Wahl von $\widetilde{E} = \widetilde{E}(\zeta, t)$.*

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} E_{\zeta_k} &= \sum_{l=1}^{2n} E_{z_l} z_{l\zeta_k}, \text{ d. h.} \\ E_\zeta &= \mathfrak{M}^* E_z, \text{ und} \\ \dot{\mathfrak{z}} &= \mathfrak{M}\dot{\zeta} + z_t. \end{aligned}$$

Dies liefert

$$\mathfrak{M}^{-1}(\dot{z} - \mathfrak{J}E_z) = \dot{\zeta} + \mathfrak{M}^{-1}z_t - \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1}E_\zeta.$$

Soll die rechte Seite der letzten Gleichung wieder die Hamiltonsche Form $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta$ haben bei geeigneter Wahl von $\widetilde{E}(\zeta, t)$, so muß $\widetilde{E}$ der Bedingung

$$\widetilde{E}_\zeta = \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1}E_\zeta - \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}z_t$$

genügen. Nun setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} &= (p_{kl}) = \mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1}, \\ \mathfrak{Q} &= (q_{kl}) = -\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{-1}, \text{ also} \\ \widetilde{E}_\zeta &= \mathfrak{P}E_\zeta + \mathfrak{Q}z_t, \end{aligned}$$

so lauten die Integrabilitätsbedingungen (vgl. 2.7 - 2.9)

$$\sum_{r=1}^{2n}(p_{kr}E_{\zeta_r} + q_{kr}z_{rt})_{\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n}(p_{lr}E_{\zeta_r} + q_{lr}z_{rt})\zeta_k,\ k,l = 1,\dots,2n.$$

Diese sind notwendig und hinreichen für die Lösbarkeit von $\widetilde{E} = \mathfrak{P}E_\zeta + \mathfrak{Q}z_t$ im Kleinen bei vorgegebenem Anfangswert für $\widetilde{E}$ (s. wieder [Analysis III, Satz 12.5 oder Satz 6.3, Laugwitz, Differentialgeometrie, Anhang II, No. 2]). Sind diese für jede Wahl der Funktion $E(z,t)$ erfüllt, so folgt zunächst

$$\sum_{r=1}^{2n} p_{kr}E_{\zeta_r\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n} p_{lr}E_{\zeta_r\zeta_k}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{r=1}^{2n} p_{kr}\zeta_l E_{\zeta_r} = \sum_{r=1}^{2n} p_{lr\zeta_k}E_{\zeta_r}, \tag{2.12}$$

Um dies zu sehen, kann man etwa für $E$ Polynome 2. Grades in $\zeta$ oder $E \equiv 0$ einsetzen. Auf diese Weise folgt auch

$$p_{kk} = p_{ll},\ \ k \neq l.$$

Also ist

$$\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k}}^{2n} p_{kr}E_{\zeta_r\zeta_l} = \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq l}}^{2n} p_{lr}E_{\zeta_r\zeta_k}.$$

Testfunktionen

Sei $z =$ Variablensubstituion auf $G \times [t_1, t_2]$ definiert. Sei $\overset{\circ}{\zeta} \in G$ beliebig aber fest. Sei $E$ bel. Hamiltonfunktion, sei $k \neq l$,

$$\begin{aligned}\widehat{E}_{kl}(\zeta,t) \ = \ & \sum_{\substack{\rho,\\ \rho\neq k}} E_{\zeta_\rho\zeta_k}(\overset{\circ}{\zeta},t)(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)\cdot(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k) + \frac{1}{2}E_{\zeta_k\zeta_k}(\overset{\circ}{\zeta},t)(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k)^2 + \\ & + \sum_{\substack{\rho,\\ \rho\neq k,\\ \rho\neq l}} E_{\zeta_\rho\zeta_l}(\overset{\circ}{\zeta},t)(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)\cdot(\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l) + \frac{1}{2}E_{\zeta_l\zeta_l}(\overset{\circ}{\zeta},t)(\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l)^2.\end{aligned}$$

Dann ist $\widehat{E}_{kl}$ Hfu. und

$$\begin{aligned}\partial^2_{\zeta_r\zeta_k}\widehat{E}_{kl}(\zeta,t) = & \sum_{\substack{\rho,\\ \rho\neq k}} E_{\zeta_\rho\zeta_k}\partial^2_{\zeta_r\zeta_k}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)\cdot(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k + E_{\zeta_k\zeta_k}\delta_{kr} + \\ & + \sum_{\substack{\rho,\rho\neq k,\\ \rho\neq l}} E_{\zeta_\rho\zeta_l}\partial^2_{\zeta_r\zeta_k}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)(\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l)\end{aligned}$$

$$\partial^2_{\zeta_r\zeta_k}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k) = \partial_{\zeta_r}((\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho) + \delta_{k\rho}\cdot(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k)) \overset{\rho\neq k}{=} \delta_{r\rho}$$

$$\partial^2_{\zeta_r\zeta_k}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)(\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l) = \partial_{\zeta_r}((\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l)\delta_{k\rho}) = \delta_{k\rho}\delta_{rl},$$

$$\partial_{\zeta_r\zeta_k}\widehat{E}_{kl}(\zeta,t) = \sum_{\rho,\rho\neq k} E_{\zeta_\rho\zeta_k}(\zeta_0,t)\delta_{r\rho} + E_{\zeta_k\zeta_k}(\zeta_0,t)\delta_{kr} +$$

$$+\sum_{\substack{\rho,\rho\neq k\\ \rho\neq 1}} E_{\zeta_\rho\zeta_l}(\zeta_0,t)\delta_{k\rho}\delta_{rl} = \sum_{\rho,\rho\neq k} E_{\zeta_\rho\zeta_k}(\zeta_0,t)\delta_{r\rho} +$$

$$+E_{\zeta_k\zeta_k}(\zeta_0,t)\delta_{kr} = E_{\zeta_r\zeta_k}(\zeta_0,t).$$

$l \neq k$

$$\partial_{\zeta_r\zeta_l}\widehat{E}_{kl}(\zeta,t) = \sum_{\rho,\rho\neq k} E_{\zeta_\rho\zeta_k}(\zeta_0,t)\underbrace{\partial_{\zeta_r\zeta_l}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)(\zeta_k - \overset{\circ}{\zeta}_k)}_{\delta_{\rho l}\delta_{rk}}$$

$$+\sum_{\substack{\rho,\rho\neq k\\ \rho\neq l}} E_{\zeta_\rho\zeta_l}(\zeta_0,t)\underbrace{\partial_{\zeta_r}\partial_{\zeta_l}(\zeta_\rho - \overset{\circ}{\zeta}_\rho)(\zeta_l - \overset{\circ}{\zeta}_l)}_{\delta_{\rho l}\delta_{rl}+\delta_{r\rho}} + E_{\zeta_l\zeta_l}(\zeta_0,t)\delta_{rl}$$

$$= \delta_{rk}E_{\zeta_l\zeta_k}(\zeta_0,t) + \left\{\begin{array}{ll} E_{\zeta_r\zeta_l}(\zeta_0,t), & {\scriptstyle r\neq k \atop r\neq l} \\ 0 \text{ sonst} & \end{array}\right\} + \delta_{rl}E_{\zeta_l\zeta_l}(\zeta_0,t) = E_{\zeta_r\zeta_l}(\zeta_0,t)$$

Setze ein, lasse $\zeta$ gegen $\zeta_0$ streben. Für $k = l$ ist die Glg. (2.11) trivialerweise richtig, also auch (2.12) in **allen** Fällen

$$E(\zeta,t) = \zeta_k\zeta_l \qquad \text{für } k \neq l$$

$$E(\zeta,t) = \zeta_l^2 \qquad \text{für } k \neq l$$

Setze nacheinander $E(\zeta,t) = \zeta_\rho$ ein, $\rho = 1,\ldots,2n$.

Indem wir für $E$ Polynome 2. Grades einsetzen, erkennen wir, daß

$$p_{kl} = 0,\ k,l = 1,\ldots,2n,\ k \neq l,$$

ist.

Aus (2.12) folgt

$$(2.13) \qquad p_{kr\zeta_l} = p_{lr\zeta_k},\ k,l,r = 1,\dots 2n.$$

Also ist $\mathcal{P}$ Diagonalmatrix. Wegen $p_{kk\zeta_l} = p_{lk\zeta_k} = 0$ für $l \neq k$ ist $p_{kk\zeta_l} = 0$, $l = 1,\dots,2n$, $l \neq k$. Nach (2.13) ist aber auch $p_{kk\zeta_k} = p_{ll\zeta_k} = p_{kl\zeta_l}$, $k,l = 1,\dots,2n$, $k \neq l$, also $p_{kk\zeta_k} = 0$. Also unterscheidet sich $\mathcal{P}$ von der Einheitsmatrix nur um einen Faktor, der nicht von $\zeta$ abhängt. Nun haben wir noch die restlichen Bedingungen

$$(2.14) \qquad \textstyle\sum_{r=1}^{2n}(q_{kr}z_{rt})_{\zeta l} = \sum_{r=1}^{2n}(q_{lr}z_{rt})_{\zeta_k}$$

zu erfüllen. Es ist $\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{M}^*\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{G} = -\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}^{-1}$. Nun ist $\mathfrak{J}^2 = -\mathcal{E} = -(2n\text{-Einheitsmatrix})$, also $\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{G} = \mathfrak{M}^*\mathfrak{J}$. Zur Abkürzung setzen wir $u = \mathfrak{J}z_t$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{G}z_t &= \mathfrak{M}^*u, \\ \mathcal{G}z_t &= \lambda(t)\mathfrak{M}^*u. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ -\mathcal{E} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{E} & 0 \\ 0 & -\mathcal{E} \end{pmatrix},$$

$\lambda(t) \neq 0$ nach Def. von $\mathcal{P}$.

Dabei ist $\mathfrak{P} = \lambda(t)\mathcal{E}$ mit $\lambda(t) \neq 0$. Dann liefert (2.14) durch Einsetzen von $\mathfrak{Q}z_t = \lambda(t)\mathfrak{M}^*u$ gerade ($\mathfrak{M} = (z_{k\zeta_l})$)

$$\sum_{r=1}^{2n}(z_{r\zeta_k\zeta_l}u_r + z_{r\zeta_k}u_{r\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n}(z_{r\zeta_l\zeta_k}u_r + z_{r\zeta_l}u_{r\zeta_k})),$$

also wegen $z_{r\zeta_k\zeta_l} = z_{r\zeta_l\zeta_k}$

$$\sum_{r=1}^{2n} z_{r\zeta_k}u_{r\zeta_l} = \sum_{r=1}^{2n} z_{r\zeta_l}u_{r\zeta_k}$$

Mit $\mathfrak{U} = (u_{k\zeta_l})$ folgt $\mathfrak{M}^*\mathfrak{U} = (\mathfrak{M}^*\mathfrak{U})^*$. Nun ist $\begin{pmatrix} u_{1\zeta l} \\ \vdots \\ u_{n\zeta l} \end{pmatrix} = \mathfrak{J}z_{\zeta_l t} = \mathfrak{J}\begin{pmatrix} z_{1\zeta_l t} \\ \vdots \\ z_{2n\zeta_l t} \end{pmatrix}$,
also $\mathfrak{U} = \mathfrak{J}\mathfrak{M}_t$. Damit folgt $\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t = \mathfrak{U}^*\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_t^*\mathfrak{J}^*\mathfrak{M}$, also wegen $\mathfrak{J}^* = -\mathfrak{J}$

$$\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M}_t + \mathfrak{M}_t^*\mathfrak{J}\mathfrak{M} = 0.$$

Somit ist gezeigt, daß $\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M}$ nicht von $t$ abhängt. Die inverse Matrix $\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M}^{*-1} = -\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1}$ ist somit auch von $t$ unabhängig, als auch $\mathfrak{P}$. Dann ist

$$-\mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1} = -\lambda\mathfrak{J} \qquad \text{mit einem konstanten skalaren Faktor } \lambda \neq 0 \text{, also}$$

$$\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}^{-1}\mathfrak{M} = \tfrac{1}{\lambda}\mathfrak{J}^{-1},$$

$$\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M} = -\tfrac{1}{\lambda}\mathfrak{J} \tag{2.15}$$

Gilt (2.15) so folgt für alle $E$ aus $\dot{z} - \mathfrak{J}E_z = 0$ auch $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta = 0$ mit einer geeigneten Funktion $\widetilde{E}_\zeta$. Nun gelte umgekehrt für alle $E$: Es gibt ein $\widetilde{E}$ derart, daß $\dot{z} - \mathfrak{J}E_z = 0$ die Gleichung $\dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta = 0$ nach sich zieht. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{M}^{-1}(\dot{z} - \mathfrak{J}E_z) &= \dot{\zeta} + \mathfrak{M}^{-1}z_t - \mathfrak{M}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}^{*-1}E_\zeta \\ &= \dot{\zeta} - \mathfrak{J}\widetilde{E}_\zeta \end{aligned}$$

für alle $E$. Daraus folgt wie eben gezeigt (2.15). □

Durch das Auftreten des Faktors $\lambda$ in Hilfssatz 2.2 erhält man eine Verallgemeinerung der kanonischen Substitutionen und der symplektischen Gruppe. Da jedoch die spezielle Substitution $x = \xi$, $y = \lambda\eta$ die Bedingung $\mathfrak{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{M} = \lambda\mathfrak{J}$ erfüllt, so erhält man alle in Hilfssatz 2.2 angesprochenen Substitutionen bereits durch Zusammensetzung der kanonischen mit jener trivialen. Daher wollen wir uns weiterhin auf die Betrachtung kanonischer Substitutionen beschränken.

**Berichtigungen:**

1. Vor (2.6). Lies: ... der Lagrangeschen Ableitungen wird nunmehr identisch in $x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k$ und $t$ gerade ...

2. Identisch in $x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k$ und $t$ heißt dabei: Ich setze alle diffbaren $x_k(t)$, $y_k(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, ein, die im Defbereich von $E$ liegen. Zufolge der Definition von $f$ sind etwa $\dot{x}_k(t_1)$, $\dot{y}_k(t_1)$ willkürlich wählbar. Dann gilt (2.6) mit $\dot{}$ = Differentiation nach $t$. Dies wird wegen der Unabhängigkeit von $f$ von $\dot{y}_k$ jedoch nur in der ersten Zeile von (2.6) benötigt.

**Bemerkungen:**

1. **Satz** 2.1 zeigt die Äquivalenz von Hamiltonschen Gleichungen und Euler-Lagrangeschen Gleichungen. Jedoch wird dabei immer eine Hälfte der Variablen eliminiert. Dies erfordert bei der Herstellung der E-L-Gleichungen aus den Hamiltonschen eine Determinantenbedingung an die Hamilton-Funktion.

2. Die **Beziehung** (2.6) ist dagegen wesentlich durchsichtiger, da sie für beliebige $E$ gilt. Trick: Ich nehme mehr Variable in $f$ hinein, nämlich $4n + 1$.

3. **Zu Satz 2.2:** $z = z(\zeta, t)$ ist schon dann kanonisch, wenn für eine einzige Hamiltonfunktion $E$ (etwa $E \equiv 0$) die Hamiltonsche Form der Lagrangeschen Ableitungen ungeändert bleibt. **Zum Beweis von Satz** 2.2: Man kommt auch ohne $v$ aus, aber $v$ spielt im folgenden Paragraphen eine entscheidende Rolle als sogenannte erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation.

4. **Zu Hilfssatz 2.2:** $z = z(\zeta, t)$ hat bereits dann die Form $\lambda$ (Symplektische Substitiution), wenn man statt aller $E$ nur quadratische Polynome in $\zeta$ zuläßt, d.h. $E(z, t) = E(z(\zeta, t), t)$ ist quadratisches Polynom in $\zeta$.

# §3. Die partielle Differentialgleichung von Hamilton und Jacobi

Wir behandeln nun die Aufgabe, sämtliche kanonischen Substitutionen in Parameterform anzugeben.

**Satz 3.1:** *Sei $z = z(\zeta, t)$ invertierbar bezüglich $\zeta$ mit $|z_{k\zeta l}| \neq 0$. Durch $z = z(\zeta, t)$ ist dann und nur dann eine kanonische Substitution mit $|\mathfrak{B}| = |x_{k\eta_l}| \neq 0$ gegeben, wenn mit einer Funktion $w = w(x, \xi, t)$ mit $|w_{\xi_k x_l}| \neq 0$ gilt*

$$y_k = w_{x_k},\ \eta_k = -w_{\xi_k},\ k = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

*In diesem Fall liefert die zweite Gleichung in (3.1) durch Auflösen $x$ als Funktion von $\xi, \eta, t$ und die erste Gleichung in (3.1) durch Einsetzen sodann $y$ als Funktion von $\xi, \eta, t$. Außerdem ist dann $|x_{k\eta_l}| \neq 0$. Für $\widetilde{E}$ aus Definition 2.1 kann man*

$$\widetilde{E} = E(x, (\xi, \eta, t), \underbrace{y(\xi, \eta, t)}_{=w_{x_k}}, t) + w_t(\xi, \eta, t), \xi, t)$$

*wählen.*

**Beweis:** Sei zunächst $z = z(\zeta, t)$ kanonisch mit $|\mathfrak{B}| = |x_{k\eta_l}| \neq 0$. Dann sind durch die $n$ Gleichungen $x_k = x_k(\xi, \eta, t)$ die $\eta_l$ als Funktionen von $x, \xi, t$ bestimmt und die entsprechend gebildete Funktionaldeterminante $|\eta_{kx_l}|$ ist $\neq 0$. Wir benutzen nun die Gleichungen auf Seite 13, welche die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine kanonische Substitution angeben. Da man die $\eta_l$ als Funktionen von $x, \xi, t$ ausdrücken kann, gilt dies auch von $v$ auf Seite 13. Sei

$$v(\zeta, t) = w(x, \xi, t).$$

Dann entsteht

$$\frac{dv}{dt} = w_t + \sum_{k=1}^{n} (w_{x_k} \dot{x}_k + w_{\xi_k} \dot{\xi}_k)$$

Koeffizientenvergleich mit $\frac{dv}{dt}$ auf Seite 13 liefert

$$\begin{aligned} y_k &= w_{x_k},\ \eta_k = -w_{\xi_k},\ k = 1, \ldots, n, \\ \widetilde{E} &= E + w_t. \end{aligned}$$

Aus $|\eta_{kx_l}| \neq 0$ folgt noch $|w_{\xi_k x_l}| \neq 0$. Sei nun umgekehrt $w = w(x, \xi, t)$ eine Funktion mit $|w_{\xi_k x_l}| \neq 0$. Wie im Satz beschrieben gewinnt man

$$(3.2) \qquad \left[ \begin{array}{lcl} x_k & = & x_k(\xi, \eta, t), \\ \\ y_k & = & y_k(\xi, \eta, t), \ k = 1, \ldots, n, \end{array} \right.$$

Dann ist $|x_{k\eta_l}| \neq 0$. $\widetilde{E}$ definiert man wie im Satz angegeben. Man setze $v(\zeta, t) = w(x(\xi, \eta, t), \xi, t)$. Dann ist

$$\frac{dv(\zeta, t)}{dt} = w_t + \sum_{k=1}^{n} (w_{x_k} \dot{x}_k + w_{\xi_k} \dot{\xi}_k) = \widetilde{E}(\zeta, t) -$$

$$- E(x(\zeta, t), y(\zeta, t), t) + \sum_{k=1}^{n} (\dot{x}_k y_k - \dot{\xi}_k \eta_k).$$

Wie aus dem Beweis von Satz 2.2 folgt, ist durch (3.2) eine kanonische Substitution gegeben: Wie schon erwähnt, ist $|\mathfrak{B}| \neq 0$. $\square$

Als Beispiel kann man

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k$$

wählen. Dann ist nämlich $(w_{\xi_k x_l})$ gerade die $n \times n$-Einheitsmatrix und die kanonische Transformation wird $y_k = w_{x_k} = \xi_k$, $\eta_k = -w_{\xi_k} = -x_k$, $k = 1, \ldots, n$. Also ist $x_k = -\eta_k$, $k = 1, \ldots, n$, und als Funktionalmatrix $\mathcal{M} = (z_{k\zeta_l})$ erhalten wir $\mathcal{M} = -\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^{-1} = \mathfrak{I}^*$. Natürlich gibt es auch kanonische Transformationen mit $|\mathfrak{B}| = 0$ wie das Beispiel der identischen Transformation $z = \zeta$ zeigt, für die $\mathcal{M}$ gerade die $(2n \times 2n)$-Einheitsmatrix wird. Man kann auch in einer zu Satz 3.1 analogen Weise die kanonischen Transformationen mit $|\mathcal{M}| \neq 0$ charakterisieren. Hierzu gilt

Es ist nun naheliegend, zum Anwendungsmechanismus des Satzes 3.1 etwas zu sagen. Weitere Ausführungen werden noch in Satz 3.3 gemacht, jedoch im Fall $|x_{k\xi_l}| \neq 0$ während wir in §7 gerade den in Satz 3.1 behandelten Fall benötigen. Ziel einer kanonischen Substitution ist es natürlich, das Hamiltonsche System $\dot{x}_k = E_{y_k}$, $\dot{y}_k = -E_{x_k}$ zu vereinfachen. Stellen wir uns etwa die Aufgabe, eine neue Hamiltonsche Funktion $\widetilde{E}$ der Form $\widetilde{E}(\xi, t)$ zu finden, so erhalten wir mit (3.1) die partielle Differentialgleichung

$$\widetilde{E}(\xi, t) = E(x, w_{x_k}(x, \xi, t), t) + w_t(x, \xi, t)$$

(Inhomogene Differentailgleichung von Hamilton-Jacobi) für die unbekannte erzeugende Funktion $w$ der kanonischen Substituion $z$. Das neue Hamiltonsche System würde in diesem Fall

$$\dot{\xi}_k = 0,\ \dot{\eta}_k = -\widetilde{E}_{\xi_k}$$

lauten mit $n$ Integrationskonstanten $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Die naheliegende Frage lautet, ob das Auffinden einer Lösung $w$, der obigen Differentialgleichung, die außer von $x, t$ auch noch von den $n$ Parameterwerten $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abhängt und zwar so, daß $|w_{\xi_k x_l}| \neq 0$ ist, bereits die Erzeugende $w$ einer kanonischen Substitution liefert. Diese Frage ist bejahend zu beantworten wie noch im Satz 3.3 im Fall $|x_{k\xi l}| \neq 0$ gezeigt wird.

**Satz 3.2**: *Sei $z = z(\zeta, t)$ invertierbar bezüglich $\zeta$ mit $|z_{k\zeta_l}| \neq 0$. Durch $z = z(\zeta, t)$ ist dann und nur dann eine kanonische Transformation mit $|\mathcal{M}| = |x_{k\xi_l}| \neq 0$ gegeben, wenn mit einer Funktion $w = w(x, \eta, t)$ mit $|w_{\eta_k x_l}| \neq 0$ gilt*

$$y_k = w_{x_k}, \xi_k = w_{\eta_k},\ k = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

*In diesem Fall liefert die zweite Gleichung in (3.3) durch Auflösen $x$ als Funktion von $\xi, \eta, t$ und die erste Gleichung in (3.3) sodann durch Einsetzen $y$ als Funktion von $\xi, \eta, t$. Außerdem ist dann $|x_{k\xi_l}| \neq 0$. Für $\widetilde{E}$ aus Definition 2.1 kann man wieder*

$$\widetilde{E} = E(x(\xi, \eta, t), \underbrace{y(\xi, \eta, t)}_{=w_{x_k}}, t) + w_t(x(\xi, \eta, t), \eta, t)$$

*wählen.*

**Beweis:** Man kann eine analoge Betrachtung zum Beweis des Satzes 3.1 durchführen, doch ist es einfacher, den Fall $|\mathfrak{A}| \neq 0$ auf den Fall $|\mathfrak{B}| \neq 0$ zurückzuführen. Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi &= -\eta^* \\ \eta &= \xi^* \end{aligned}$$

Die Funktionalmatrix von $z = z(\zeta, t) := z(\zeta^*, t)$ mit $\zeta^* = (\xi^*, \eta^*)$ wird dann

$$(z_{k\zeta_l^*}) = \mathfrak{M}\mathfrak{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B} & -\mathfrak{A} \\ \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{L} \end{pmatrix},$$

so daß also $-\mathfrak{A}$ an die Stelle von $\mathfrak{B}$ tritt und die Formeln (3.1) mit $\xi^*, \eta^*$ statt $\xi, \eta$ gelten. Daraus folgt

$$y_k = w_{x_k},\ \eta_k^* = -w_{\xi_k^*},\ k = 1, \ldots, n.$$

$w = w(x, \xi^*, t)$, $\widetilde{E} = E + w_t$, $|w_{\xi_k^* x_l}| \neq 0$, also

$$(3.4) \qquad \begin{gathered} y_k = w_{x_k}, \xi_k = w_{\eta_k},\ k = 1, \ldots, n, \\ w = w(x, \eta, t),\ \widetilde{E} = E + w_t,\ |w_{\eta_k x_l}| \neq 0. \end{gathered}$$

□

Wenn wir

$$w = \sum_{k=1}^{n} x_k \eta_k$$

setzen, so ist $(w_{\eta_k x_l}) = (2n \times 2n)$-Einheitsmatrix. Wir haben $y_k = \eta_k, \xi_k = x_k$, und als kanonische Transformation erhältman die identische Abbildung $z = \zeta$. Wir wollen nicht den Fall diskutieren, daß $|\mathfrak{A}| = 0$ und $|\mathfrak{B}| = 0$ sind; es sei jedoch bemerkt, daß man jede kanonische Transformation aus zwei solchen mit $|\mathfrak{A}| \neq 0$ oder $|\mathfrak{B}| \neq 0$ zusammensetzen kann.

Es ist, wie schon erwähnt, das weitere Ziel, ein vorgelegtes Hamiltonsches System

$$(3.5) \qquad \dot{x}_k = E_{yk},\ \dot{y}_k = -E_{x_k},\ k = 1, \ldots, n,$$

durch eine geeignete kanonische Transformation möglichst zu vereinfachen. Der einfachste Fall für das transformierte System wäre

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \widetilde{E}_{\eta_k},\ \dot{\eta}_k = -\widetilde{E}_{\xi_k},\ k = 1, \ldots, n \text{ mit} \\ \widetilde{E} &= \widetilde{E}(\xi, \eta, t) = 0. \end{aligned}$$

Hierzu gilt:

**Satz 3.3:** *Der Fall $\dot{\xi}_k = 0$, $\dot{\eta}_k = 0$ möge durch eine kanonische Transformation $z = z(\zeta, t)$ erreicht werden können, bei der $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ist. Dann* *gilt für die erzeugende Funktion $w = w(x,\eta,t)$ die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} E(x, w_x, t) + w_t = 0 \ \text{ und} \\ |w_{x_k}\eta_l| \neq 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

*Hierbei ist $w_x = (w_{x_1}, \ldots, w_{x_n})$. Falls man umgekehrt eine Lösung $w$ von (3.6) finden kann, die noch von $n$ Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_n$ derart abhängt, daß $|w_{x_k\eta_l}| \neq 0$ ist, so liefert $y_k = w_{x_k}$, $\xi_k = w_{\eta_k}$, $k = 1, \ldots, n$ eine kanonische Transformation $z = z(\zeta, t)$ mit $|\mathfrak{A}| \neq 0$, die das gegebene Hamiltonsche System (3.5) in die Form*

$$\dot{\xi}_k = 0,\ \dot{\eta}_k = 0,\ k = 1, \ldots, n, \tag{3.7}$$

*überführt.*

**Beweis:**

1. Kanonische Transformation: $\dot{\zeta} - \mathfrak{I}\widetilde{E}_\zeta \equiv \dot{\zeta} \bigtriangledown \zeta(t) \Rightarrow \widetilde{E}_{\zeta_k}(\zeta, t) \equiv 0 \Rightarrow \widetilde{E} = \widetilde{E}(t),\ \widetilde{w}$ erz. Funktion $\Rightarrow w = \widetilde{w} - \int_0^t \widetilde{E}(\sigma) d\sigma$ erz. Funktion genügt (3.6).
2. Kanonisch: Reduktion auf $|\mathfrak{B}| \neq 0$. Nehme (3.2) (mit $\xi^*, \eta^*$). Setze $v := w$ (Bew. Satz 3.1).

$\square$

Die Differentialgleichungen (3.7) lassen sich sofort integrieren und die $\xi_k, \eta_k$ treten als Integrationskonstanten auf. Damit ist die Lösung der Hamiltonschen gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung zurückgeführt, die eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung ist. Es wird jedoch keineswegs die allgemeine Lösung von (3.6) benötigt, sondern nur eine Lösung mit $n$ Parametern $\eta_1, \ldots, \eta_n$, welche der Bedingung $|w_{x_k\eta_l}| \neq 0$ genügt. Dies ist insofern auch eine Vereinfachung, als die vollständige Lösung der Hamiltonschen Differentialgleichungen (3.5) zunächst $2n$ Integrationskonstanten erfordert.

Gibt es nun immer eine solche kanonische Transformation, die das gegebene System (3.5) in die Normalform (3.7) überführt? Diese Frage lässt sich bejahend beantworten wie noch gezeigt werden soll. Es wird zu diesem Zweck ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{z}_k = g_k(z, t),\ k = 1, \ldots, m,$$

in $m$ unbekannten Funktionen $z_k = z_k(t)$ betrachtet. Wenn etwa eine Lipschitzbedingung

$$\sum_{k=1}^{m} |g_k(z,t) - g_k(z',t)| \leq k(|z| + |z'| \cdot |z - z'|$$

für alle $z, z'$ in einer Umgebung $U$ von $z = \zeta \in U'$ und alle $t$ in einem Intervall $\tau \leq t \leq T$ erfüllt ist mit einer geeigneten stetigen Funktion $k = k(r)$, so erhalten wir eine Lösung $z = z(\zeta, t)$ mit $z(\zeta, \tau) = \zeta$ auf einem „kleinen“ Intervall $[\tau, \tau_1]$ von $z_k = g_k(z,t),\ k = 1, \ldots, m$. Zufolge der Differentialgleichung ist

$$z_{kt} = g_k(z,t), \text{ also}$$

$$z_{kt\zeta_l} = \sum_{r=1}^{m} g_{kz_r} z_{r\zeta l},\ k, l = 1, \ldots, m.$$

Setzt man noch $z_\zeta = (z_{k\zeta_l}) = \mathcal{M}$, $g_z = (g_{kz_l}) = \mathfrak{J}$, so hat man demnach für die Funktionalmatrix $\mathcal{M}$ bei festem $\zeta$ als Funktion von $t$ die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{J}\mathcal{M}. \tag{3.9}$$

Da $z(\zeta, \tau) = \zeta$ identisch in $\zeta \in U'$, $U'$ offen, gilt, so ist $\mathcal{M} = \mathcal{E}$ für $t = \tau$.

Bei einem Hamiltonschen System ist $\dot{z} = \mathfrak{J}E_z$ mit $m = 2n$ und

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \mathfrak{J}E_{zz} = \mathfrak{J}(E_{z_k z_l}), \text{ also} \\ \mathfrak{J}\mathfrak{G} &= -E_{zz}. \end{aligned}$$

Aus (3.9) folgt $\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M}_t = \mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{G}\mathcal{M} = -\mathcal{M}^*E_{zz}\mathcal{M}$. Die Matrix $\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathfrak{G}\mathcal{M}$ ist also symmetrisch, und damit auch $\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M}_t$. Dies liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M}_t &= (\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M}_t)^* = \mathcal{M}_t^*\mathfrak{J}^*\mathcal{M} \\ &= -\mathcal{M}_t^*\mathfrak{J}\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Demnach ist $\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M}$ von $t$ unabhängig, und weil $\mathcal{M} = \mathcal{E}$ für $t = \tau$ ist, so folgt

$$\mathcal{M}^*\mathfrak{J}\mathcal{M} = \mathfrak{J}.$$

Also ist die Transformation $z = z(\zeta, t)$ kanonisch. Wir haben $(\zeta \in U')$ $\overset{\circ}{z} = g(z(t), t) = z_t$ mit $g(z, t) = (g_1(z, t), \ldots, g_{2n}(z, t))$. Nach Definition ist auch $\dot{z} = \mathcal{M}\dot{\zeta} + z_t$, also $\overset{\circ}{\zeta} = 0$. Daher führt die kanonische Transformation $z = z(\zeta, t)$ das Hamiltonsche System $\overset{\circ}{z} - \mathfrak{I}E_z = 0$ gerade in $\overset{\circ}{\zeta} = 0$ über. Wenn $T - \tau$ hinreichend klein ist, d.h. $t$ nahe genug an $\tau$ bleibt, wird die Determinante $|\mathfrak{A}| = |x_{k\xi_l}|$ nicht verschwinden, da sie für $t = \tau$ gerade gleich 1 ist. Die Transformation $z = z(\zeta, t)$ kann daher durch Lösung der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung (3.6) zusammen mit (3.4) gewonnen werden.

**Ziel:** $\dot{z} = \mathfrak{I}E_z(z, t)$ in $0 \leq t \leq a \Rightarrow z = g(\zeta, t)$ lebt auf $0 \leq t \leq a$. Methode: Perron, Math. Ann. 113.

$E_z(z, .)$ sei in $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|}{r_i} < 1$ holomorph.

Die Potenzreihenentwicklung um 0 mit $t$ abhängigen Koeffizienten habe nur reelle Koeffizienten und beginne mit Gliedern 1. Ordnung (3.8).

**Ann.** $\sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|}{r_i} < 1$ ist ein Holomorphiegebiet und es sei dort $|E_z(z, t)| \leq M$, $0 \leq t \leq a$. $\square$

Dann können wir Perron anwenden und haben für $\mathfrak{I}E_z(z, t) = E_\nu(t) z^\nu$, $|\nu| \geq 1$, eine Potenzreihenentwicklung, die in $\sum_{i=1}^{n} \frac{|z_i|}{r_i} < 1$ kga konvergiert. Ebenso gilt für die Lösung

$$z(\zeta, t) = \Phi_\nu(t)\zeta^\nu, \ \sum_{i=1}^{n} \frac{|\zeta_i|}{r_i} < \mathfrak{P}, \ 0 \leq t \leq a, \ a, |\nu| \geq 1,$$

mit der Perronschen Schranke $\mathfrak{P}$. Die Abbildung (Im = Image)

$$(1)\ z : \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{|\zeta_i|}{r_i} < \mathfrak{P} \right\} \times [0, a] \to Imz = \bigcup_{t \in [0,a]} \{z(\zeta, t) | \sum_{i=1}^{n} \frac{|\zeta_i|}{r_i} < \mathfrak{P}\}$$

$$= \bigcup_{t \in [0,a]} Imz(., t), \ (\zeta, t) \longmapsto z(\zeta, t),$$

ist wegen $|z_{k\zeta_l}(\zeta, t)| \neq 0$ in $\{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{|\zeta_i|}{r_i} < \mathfrak{P}\} \times [0, a]$ für jedes $t \in [0, a]$ eine offene, holomorph invertierbare Abbildung von $\{\sum_{i=1}^{n} \frac{|\zeta_i|}{r_i} < \mathfrak{P}\}$ auf die offene Menge $Imz(., t)$. **Achtung:** Die Eindeutigkeit von $z(., t)$ folgt daraus, daß $z$ die DGL $\dot{z} = JE_z(z,t)$ löst mit $z(0) = \zeta$. Hat Perron gezeigt, daß Defb. $z$ in (1) durch $z$ in $\{\sum_{i=1}^n \frac{|z_i|}{r_i} < 1\}$ transportiert wird? $\square$

Wir haben

$$\zeta(z,t) = \Phi_\nu^{-1}(t) z^\nu,\ z \in Imz(.,t),\ 0 \le t \le a,\ |\nu| \ge 1$$

**Antwort auf die Frage:** Das hat Perron vermutlich auf Seite 299, Seite 300 durch seine Majorantenbeziehungen mitbewiesen. $\square$

Wenn die direkte Auffindung eines Integrals $w = w(x,\eta,t)$ der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung nicht gelingt, so kommt man bisweilen folgendermaßen zu einer Vereinfachung des Problems. Es sei die Hamiltonsche Funktion $E(x,y,t)$ in zwei Summanden zerlegt,

$$E(x,y,t) = F(x,y,t) + G(x,y,t),$$

und es sei für die dem ersten Summanden entsprechende Hamilton-Jacobische Gleichung

$$F(x, w_x, t) + w_t = 0$$

ein Integral $w(x,\eta,t)$ mit $|w_{x_k \eta_l}| \ne 0$ bekannt. Bei der zugehörigen kanonischen Transformation (3.4) wird dann

$$\widetilde{E} = E + w_t = F + G + w_t = G,$$

so daß das vorgelegte System (3.5) in

$$\dot{\xi}_k = G_{\eta_k},\ \dot{\eta}_k = -G_{\xi_k},\ k = 1,\dots,n,$$

übergeht. Hierin ist $G$ als Funktion von $\xi, \eta, t$ anzusehen. Unter Umständen läßt sich dieses System direkt lösen; anderenfalls kann man eventuell wiederum die Funktion $G$ in geeigneter Weise zerspalten und denselben Reduktionsprozess nochmals durchführen. Auf diese Weise läßt sich dann vielleicht $E(x,y,t)$ in endlich oder unendlich viele Summanden derart zerspalten, daß die zu den Teilschriften gehörigen Hamilton-Jacobischen Gleichungen jeweils gelöst werden können. Wenn auch bei unendlich vielen Teilschritten dieses Verfahren nicht konvergieren sollte, so kann es doch vorkommen, daß man durch Abbrechen an geeigneter Stelle eine brauchbare Näherungslösung erhält.

Bei den vorangehenden Untersuchungen haben wir wiederholt Existenzsätze für implizite Funktionen benutzt, ohne die entsprechenden Gebiete der

Variablen genauer anzugeben. Es wurde nur die Bedingung des Nichtverschwindens gewisser Funktionaldeterminanten hervorgehoben, und die Ergebnisse haben daher zunächst nur lokalen Charakter. Für das Verhalten im Großen wären in jedem konkret gegebenen Falle noch besondere überlegungen anzustellen. Zur Vollständigkeit der Darstellung geben wir den benutzten Satz über implizite Funktionen an:

**Satz 3.4:** *Seien $U$ bzw. $V$ Umgebungen der Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^N$ bzw. $y_0 \in \mathbb{R}^L$ Sei $g : U \times V \to \mathbb{R}^L$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Sei $g = (g_1, \dots, g_l)$ und*

$$\det \frac{\partial(g_1, \dots, g_L)}{\partial(y_1, \dots, y_L)}(x, y) \neq 0 \text{ in } U \times V \tag{3.10}$$

*mit* $\dfrac{\partial(g_1, \dots, g_L)}{\partial(y_1, \dots, y_L)} = (g_{ky_l})$, *und sei*

$$g(x_0, y_0) = 0 \tag{3.11}$$

*Dann gibt es Umgebungen $U_0 \subseteq U$ von $x_0$ und $V_0 \subseteq V$ von $y_0$ und in $U_0$ genau eine Funktion $y = f(x)$, $f : U_0 \to V_0$, die implizit definiert ist, d.h.*

$$f(x) \in V_0,\ g(x, f(x)) = 0,\ x \in U_0. \tag{3.12}$$

*$f$ ist einmal stetig differenzierbar in $U_0$, und nach der Kettenregel gilt*

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_L}{\partial(x_1, \dots, x_N)}(x, f(x)) + \frac{\partial(g_1, \dots, g_L)}{\partial(y_1, \dots, y_L)}(x, f(x)) \frac{\partial(f_1, \dots, f_L)}{\partial(x_1, \dots, x_N)}(x) = 0, \quad x \in U_0. \tag{3.13}$$

(3.10) ist natürlich für genügend klein gewählte $U, V$ erfüllt, wenn nur $\det(\partial(g_1, \dots, g_L)/\partial(y_1, \dots, y_L))(x_0, y_0) \neq 0$ vorausgesetzt wird.

# §4. Der Existenzsatz von Cauchy

Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x}_k = f_k,\ k = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

wobei die $m$ gegebenen Funktionen $f_k = f_k(x)$ von $x_1, \ldots, x_m$ und nicht von $t$ abhängen. Wenn die $f_k$ in einer reellen Umgebung von $x = \xi$ einer Lipschitz-Bedingung genügen, so besitzt bekanntlich das System (4.1) zu den vorgegebenen Anfangswerten $x(\tau) = \xi$ genau eine Lösung $x(t)$. Wir wollen noch stärkere Voraussetzungen an die $f_k$ stellen und beweisen

**Satz 4.1:** *Die $f_k$ seien in einer komplexen Umgebung von $x = \xi$ regulär analytische Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_m$, etwa in $|x_k - \xi_k| < r$, $k = 1, \ldots, m$. Jede im Polyzylinder $|x_k - \xi_k| < r$, $k = 1, \ldots, m$ reguläre Funktion lässt sich dort in eine Potenzreihe um $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ entwickeln, die in diesem Polyzylinder konvergiert. Siehe Satz 8, Seite 39 in [Behnke, Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen]. Weiter sei dort $|f_k(x)| \leq M$. Dann ist die durch die Anfangsbedingungen $x_k(\tau) = \xi_k$, $k = 1, \ldots, m$, festgelegte Lösung $x_k(t)$ von (4.1) in der komplexen Umgebung*

$$|t - \tau| < \frac{r}{(m+1)M}$$

*von $\tau$ eine regulär-analytische Funktion von $t$, und es gilt dort*

$$|x_k(t) - \xi_k| < r,\ k = 1, \ldots, m.$$

**Beweis:** Ersetzt man die Größen $x_k, f_k, t$ durch $\xi_k + r x_k$, $M f_k$, $\tau + M^{-1} r t$, so bleibt das System (4.1) umgeändert, während $\xi_k, r, M, \tau$ durch $0, 1, 1, 0$ ersetzt werden. Damit ist folgendes gemeint: Sei

$$\begin{aligned}
x_k &= \xi_k + r\widetilde{x}_k,\ \text{d.h.} \\
\widetilde{x}_k &= \frac{1}{r}(x_k - \xi_k), \\
f_k &= M\widetilde{f}_k,\ \text{d.h.} \\
\widetilde{f}_k &= M^{-1} f_k, \\
t &= \tau + M^{-1} r\widetilde{t},\ \text{d.h.} \\
\widetilde{t} &= M r^{-1}(t - \tau).
\end{aligned}$$

Dann ist $\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_i)$ gleichbedeutend mit $M^{-1}r\frac{d\widetilde{x}_k}{dt} = M^{-1}f_k(\xi_i + r\widetilde{x}_i)$, also mit $\frac{d\widetilde{x}_k}{d\widetilde{t}} = \widetilde{f}_k(\widetilde{x}_i)$, $k = 1, \ldots, m$, $|\widetilde{f}_k| \leq 1$ für $|\widetilde{x}_k| < 1$. Beachte: Für die komplexen Ableitungen gilt $\frac{d}{dt}\cdot = M^{-1}r\frac{d}{d\widetilde{t}}$. Also braucht der Satz nur für diese speziellen Werte bewiesen zu werden. Um (4.1) mit den Anfangsbedingungen $x_k(0) = 0$ zu lösen, machen wir den Potenzreihenansatz

$$x_k = x_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,n} t^n,\ k = 1, \ldots, m,\ t \text{ ist komplex},$$

mit unbestimmten Koeffizienten $\alpha_{k,n}$ und werden dann nach Einsetzen in die Differentialgleichungen die Koeffizienten vergleichen. Zur Abkürzung machen wir dabei von folgender Bezeichnung Gebrauch. Für eine formale Potenzreihe

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

über deren Konvergenz nichts bekannt zu sein braucht, setzte man

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k,\ (\varphi)_n = c_n,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Offenbar ist dann $(\varphi)_n = (\varphi_n)_n$ und ferner $(\varphi\psi)_n = (\varphi_n\psi_n)_n$, $(\varphi \pm \psi)_n = \varphi_n \pm \psi_n$, wenn auch $\psi$ eine formale Potenzreihe in $t$ bedeutet. Setzt man nun

$$f_k = \sum_{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^n} a_{k,l_1,\ldots,l_m} x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m},\ k = 1, \ldots, m,$$

denkt man sich die $x_k$ wie oben in Potenzreihen nach $t$ entwickelt, so ergibt $\dot{x}_k = f_k$ bei Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} (4.2)(n+1)\alpha_{k,n+1} &= \sum_{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} a_{k,l_1,\ldots,l_m}(x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m})_n, \\ &= \sum_{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} a_{k,l_1\ldots l_m}(\overbrace{x_{1n}^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_{mn}^{l_m}}^{=\mathbf{1}\text{ für } l_1=\ldots=l_m=0})_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned}$$

wobei wir unsere Rechenregeln für das Symbol $(\varphi)_n$ angewendet haben. Wir zeigen nun durch vollständige Induktion über $n$, daß die $\alpha_{k,n}$ Polynome der $a_{r,l_1\ldots l_m}$, $r = 1, \ldots, m$ mit nichtnegativen rationalen Koeffizienten sind: Für $n = 0$ folgt mit $\xi_k = 0$, $\tau = 0$, daß $\alpha_{k,0} = 0$ ist. Also ist

$$\alpha_{k,1} = a_{k,0\ldots0}.$$

Die Behauptung sei für alle $\alpha_{k,l}$, $1 \leq l \leq n$, bewiesen. Wir wollen sie für $\alpha_{k,n+1}$ beweisen. Es ist

$$\alpha_{k,n+1} = \frac{1}{n+1} a_{k,0\ldots 0} + \sum_{\substack{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m, \\ (l_1,\ldots,l_m)\neq(0,\ldots,0), \\ l_1+\ldots+l_m\leq n}} \frac{1}{n+1} a_k, l_1 \ldots l_m (x_{1n}^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_{mn}^{l_m})_n.$$

Dieser Schluß ist nur möglich, weil $\alpha_{k,0} = 0$ ist. Einsetzen von Reihen mit $\alpha_{k,0} \neq 0$ führt zu unlösbaren Rekursionsproblemen!

In der letzten Summe ist $(x_{1n}^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_{mn}^{l_m})_n$ ein Polynom in den $\alpha_{k,l}$, $l = 1, \ldots, n$, mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten. Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert die Behauptung.

Für den Konvergenzbeweis sollen wir eine Majorante bilden. Sind

$$\begin{aligned} f &= \sum_{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} a_{l_1\ldots l_m} x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m}, \\ g &= \sum_{(l_1,\ldots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} b_{l_1\ldots l_m} x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m} \end{aligned}$$

zwei formal gebildete Potenzreihen, die also nicht zu konvergieren brauchen, so heißt $g$ Majorante von $f$, in Zeichen $f <_M g$, wenn

$$|a_{l_1\ldots l_m}| \leq b_{l_1\ldots l_m},\ (l_1, \ldots, l_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m,$$

ist. Insbesondere sind dann die Koeffizienten von $g$ sämtlich reell und nichtnegativ. Ist nun

$$f_k <_M g_k,\ k = 1, \ldots, m,$$

so betrachten wir neben (4.1) das Majorantensystem

$$\dot{y}_k = g_k(y),\ k = 1, \ldots, m. \tag{4.3}$$

Dieses System können wir wieder zu den Anfangswerten $y_k(0) = 0$ formal durch einen Potenzreihenansatz

$$y_k = y_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{k,n} t^n.$$

Es folgt sofort $\beta_{k,0} = 0$. Wir behaupten nun, daß dann auch $y_k(t)$ Majorante von $x_k(t)$ ist, und dies bedeutet

$$(4.4) \qquad |\alpha_{k,\nu}| \leq \beta_{k,\nu}, \quad {}_{\nu=0,1,\dots}^{k=1,\dots,m}.$$

Da die Koeffizienten $b_{k,l_1,\dots,l_m}$ von $g_k$ nicht negativ sind, so ergeben sich wie eben gezeigt aus den (4.2) entsprechenden Rekursionsformeln

$$(n+1)\beta_{k,n+1} = \sum_{(l_1,\dots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} b_{k,l_1,\dots l_m}(y_{1n}^{l_1}\cdot\ldots\cdot y_{mn}^{l_m})_n$$

die $\beta_{k,\nu}$ sämtlich als reelle nicht-negative Zahlen. Wir zeigen nun (4.4) mittels vollständiger Induktion. Wegen $\alpha_{k,0} = \beta_{k,0} = 0$ ist die Behauptung richtig für $\nu = 0$. Sie sei richtig für $\nu \leq n$. Dann ist also $x_{kn} < y_{kn}$ und aus

$$\begin{aligned}
|(n+1)\alpha_{k,n+1}| &\leq \sum_{(l_1,\dots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} |a_{k,l_1\dots l_m}|\,|(x_{1n}^{l_1}\cdot\ldots\cdot x_{mn}^{l_m})_n|,\\
&\leq \sum_{(l_1,\dots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} b_{k,l_1\dots l_m}(y_{1n}^{l_1}\cdot\ldots\cdot y_{mn}^{l_m})_n,\\
&= (n+1)\beta_{k,n+1}
\end{aligned}$$

folgt (4.4) für $\nu = n+1$. Damit ist $x_k <_M y_k$ bewiesen.

Es genügt also eine Majorante $g_k$ von $f_k$ zu finden darart, daß wir das neue System (4.3) integrieren und für seine Lösung die im Satz behaupteten Abschätzungen beweisen können. Es ist $|f_k| \leq 1$ im Polyzylinder $|z_1| < 1, \dots, |z_m| < 1$. Sei $R \in (0,1)$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt

$$a_{k,l_1\dots l_m} = \frac{1}{(2\pi i)}m - \int_{|\zeta_1|=R}\dots\int_{|\zeta_m|=R}$$

$$\frac{f_k(\zeta_1,\dots,\zeta_m)d\zeta_1\dots d\zeta_m}{\zeta_1^{l_1+1}\cdot\ldots\cdot\zeta_m^{lm+1}}, \text{ also}$$

$$|a_{k,l_1\dots l_m}| \leq \frac{1}{R^{l_1+\dots+l_m}}.$$

Lassen wir $R \to 1$ streben, so entsteht $|a_{k,l_1\dots l_m}| \leq 1$. Siehe hierzu meine Vorlesung „Partielle Differentialgleichungen I (Das Cauchy-Problem)“, Proposition III.1.5. Daher ist die von $k$ unabhängige spezielle Potenzreihe

$$\begin{aligned}
g(x) = g_k(x) &= \sum_{(l_1,\dots,l_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m} x_1^{l_1}\cdot\ldots\cdot x_m^{l_m},\\
&= \prod_{p=1}^{m}(1-x_p)^{-1}
\end{aligned}$$

eine Majorante von $f_k$. Das System $\dot{y}_k = g(y)$, $y_k(0) = 0$ mit

$$g(y) = \prod_{p=1}^{m} (1 - y_p)^{-1},$$

$k = 1, \ldots, m$ wird offenbar befriedigt, wenn wir für $y_k$ die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{y} = (1-y)^{-m}$, $y(0) = 0$ einsetzen. Die direkte Integration ergibt nun

$$\begin{aligned} 1 - (1-y)^{m+1} &= (m+1)t, \\ y &= 1 - (1-(m+1)t)^{\frac{1}{m+1}}. \end{aligned}$$

Die Funktion $(1 - (m+1)t)^{1/(m+1)}$ hat die Potenzreihenentwicklung

$$(1 - (m+1)t)^{1/(m+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{m+1}}{n} (-1)^n ((m+1)t)^n$$

mit

$$\binom{\frac{1}{m+1}}{n} = \prod_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{m+1} - l + 1}{l}$$

für

$$Re(1 - (m+1)t) > 0$$

Diese Reihe konvergiert aber für $|t| < (m+1)^{-1}$, und in diesem Kreis gilt

$$|y| \leq 1 - (1 - (m+1)|t|)^{\frac{1}{m+1}} < 1,$$

also erst recht $|x_k(t)| < 1$. Weil die rekursiv erhaltenen formalen Potenzreihen für die $x_k(t)$ das System (4.1) formal erfüllen und diese Potenzreihen für $|t| < 1/(m+1)$ konvergieren, so sind die durch diese Potenzreihen dort dargestellten Funktionen die Lösungen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen. Damit ist der behauptete Satz bewiesen. □

Aus den Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Entwicklung der Lösungen $x_k(t)$ nach Potenzen von $t - \tau$ ergibt sich noch, daß alle diese Koeffizienten reelle Zahlen sind, falls die Anfangswerte $\xi_k$, $k = 1, \ldots, m$, und die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten $a_{k,l_1 \ldots l_m}$ der Funktionen $f_k(x)$ sämtlich reell sind. Wir machen weiterhin diese Annahme und setzen auch $\tau$ reell voraus. Dann gilt:

**Satz 4.2:** *Indem wir die gefundene Lösung $x_k(t)$ des Systems (4.1) für* *reelle $t \geq \tau$ betrachten, wollen wir annehmen, alle Funktionen $x_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$ seien auf dem rechts offenen Intervall $\tau \leq t < t_1$ regulär. Ferner sei*

$$(x_1(t), \ldots, x_m(t), 0, \ldots, 0)$$

$$\{(x_k(t), 0) | \tau \leq t < t_1\} \subset P \subset \mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

*$P$ eine geeignete abgeschlossene und beschränkte Menge, auf der die $m$ Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_m$ regulär sind, d.h. zu jedem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in P \in \mathbb{C}^m$ gibt es einen Polyzylinder $|z_i - \alpha_i| < r_i^{(k)}$, $i = 1, \ldots, m$, derart, daß $f_k$ eine Potenzreihenentwicklung*

$$f_k(z_1, \ldots, z_m) = \sum_{(l_1, \ldots, l_m) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m} a_{k,l_1 \ldots l_m}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} (z_1 - \alpha_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (z_m - \alpha_m)^{l_m}$$

*gestattet. Dann sind die $x_k(t)$ nach $t_1$ stetig fortsetzbar und auch noch im Endpunkt $t_1$ regulär.*

**Beweis:** Da $f_k$ in $P$ regulär sind, so gibt es nach dem Überdeckungssatz eine positive Zahl $\rho$, so daß die $f_k$ auch noch in

$$P_\rho = \{(z_1, \ldots, z_m) | \exists \xi \in P \text{ mit } |\xi_i - z_i| \leq \rho, \ i = 1, \ldots, m\}$$

regulär bleiben. $\rho$ hängt weder von $k$ noch den Punkten $\xi \in P$ ab. Ferner existiert ein $M > 0$ derart, daß

$$|f_k(z)| \leq M, \ z \in P_\rho, \ k = 1, \ldots, m,$$

ist. Man wähle nun ein Zahl $t = t_2$ des Intervalls $\tau \leq t < t_1$, die der Bedingung

$$t_1 - t_2 \leq \frac{\rho}{2(m+1)M}$$

genügt und wende den Existenzsatz 4.1 mit

$$\xi_k = x_k(t_2), \ k = 1, \ldots, m.$$

$$t_2 \text{ statt } \tau,$$

$$\rho \text{ statt } r$$

an. Es folgt die reguläre Analytizität der Lösung $x_k(t)$ im Kreis

$$|t - t_2| < \frac{\rho}{(m+1)M}$$

und speziell sind die $x_k(t)$ in $t = t_1$ regulär. $\square$

Für spätere Zwecke wollen wir unseren Ergebnissen im Fall des speziellen Hamiltonschen Systems

$$\dot{x}_k = E_{y_k},\ \dot{y}_k = -E_{x_k} \text{ mit}$$
$$E = E(x, y)$$

noch eine bequemere Fassung geben, indem wir die benötigte Abschätzung der partiellen Ableitungen von $E$ durch eine Abschätzung von $E$ selber ausdrücken.

**Satz 4.3:** *Die Hamiltonsche Funktion $E = E(x, y)$ sei im Polyzylinder $|z_k - \xi_k| < 2\rho$, $|z_{k+n} - \eta_k| < 2\rho$, $k = 1, \dots, n$, des $\mathbb{C}^{2n}$ regulär-analytisch. Es gelte dort die Abschätzung $|E(x, y)| \leq M$. Dann sind die Lösungen $x_k(t)$, $y_k(t)$ des Hamiltonschen Systems*

$$\dot{x}_k = E_{y_k},\ \dot{y}_k = -E_{x_k} \tag{4.5}$$

*mit den Anfangswerten $x_k(\tau) = \xi_k$, $y_k(\tau) = \eta_k$ im Kreise*

$$|t - \tau| < \frac{\rho^2}{(2n+1)M}$$

*regulär-analytisch und genügen dort der Abschätzung*

$$|x_k(t) - \xi_k| < \rho,\ |y_k(t) - \eta_k| < \rho.$$

*Die in Satz 4.2 formulierte Aussage über analytische Forsetzung der Lösungen nimmt die folgende Gestalt an: Es seien die Lösungen $x_k(t), y_k(t)$ von (4.5) in $\tau \leq t < t_1$ regulär. Ferner sei*

$$(x_k(t), y_k(t), 0, 0) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t), 0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\{(x_k(t), y_k(t), 0, 0) | \tau \leq t < t_1\} \subset P \subset \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n},$$

*$P$ eine geeignete abgeschlossene und beschränkte Menge, auf der die Hamiltonsche Funktion $E$ regulär ist. Dann sind die $x_k(t), y_k(t)$ auch im Endpunkt $t = t_1$ regulär.*

Diese Tatsache wird bei der Behandlung des Dreikörperproblems benutzt werden.

**Beweis:** Wir benutzen eine Schlußweise der Funktionentheorie. Sei $\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Dann liegt $|u - z| = \rho$ ganz im Polyzylinder $|u - \zeta| < 2\rho$, wenn $|z - \zeta| < \rho$ ist. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$E_{z_k}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^{2n}} \int_{|u_1 - z_1| = \rho} \dots \int_{|u_{k-1} - z_{k-1}| = \rho} \int_{|u_k - z_k| = \rho}$$

$$\int_{|u_{k+1} - z_{k+1}| = \rho} \dots \int_{|u_{2n} - z_{2n}| = \rho} E(u_1, \dots, u_{2n})$$

$$\prod_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{2n} \frac{1}{u_j - z_j} \frac{1}{(u_k - z_k)^2} du_1 \cdot du_{2n}, \text{ also}$$

$$|E_{z_k}(z)| \leq \frac{M}{\rho}.$$

Weil $E_{z_k}$ die komplex analytische Fortsetzung von $E_{x_k}$ bzw. $E_{y_k}$ ist, folgt $(k = 1, \dots, n)$

$$|E_{x_k}(z)| \leq \frac{M}{\rho}, \; |E_{y_k}(z)| \leq \frac{M}{\rho} \text{ in } |z - \zeta| < \rho.$$

Daß $E_{z_k}$ die komplex analytische Fortsetzung von $E_{x_k}$ bzw. $E_{y_k}$ ist, sieht man folgendermaßen: $E$ ist regulär analytisch in $|z_k - \zeta_k| < 2\rho$, $|z_{k+n} - \eta_k| < 2\rho$, $k = 1, \dots, n$. Dann haben wir dort die Potenzreihenentwicklung

$$E(z) = \sum_{l_1, \dots, l_{2n} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n}} a_{l_1 \dots l_{2n}} (z_1 - \zeta_1)^{l_1} \cdot \ldots \cdot (z_{2n} - \zeta_{2n})^{l_{2n}}$$

mit reellen Koeffizienten $a_{l_1 \cdots l_{2n}}$, also

$$E_{z_k}(z) = \sum_{l_1, \dots, l_{2n} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{2n}} a_{l_1 \dots l_{k-1} l_k + 1 l_{k+1} \dots l_{2n}} l_k \cdot (z_1 - \zeta_1)^{l_1} \dots (z_{k-1} - \zeta_{k-1})^{l_{k-1}} (z_k - \zeta_k)^{l_k} \cdot$$

$$\cdot (z_{k+1} - \zeta_{k+1})^{l_{k+1}} \cdot \ldots \cdot (z_{2n} - \zeta_{2n})^{l_{2n}},$$

woraus man die Behauptung abliest. Anwendungen von Satz 4.1 liefert jetzt Existenz und Analytizität der Lösung des Hamiltonschen Systems wie angegeben. Die Aussage über die analytische Fortsetzbarkeit folgt unmittelbar aus Satz 4.2. $\square$

# §5. Das $n$-Körperproblem

Wir betrachten im dreidimensionalen euklidischen Raum $n$ Massenpunkte $P_k$, $k = 1, \ldots, n$, wobei $n > 1$. Ihre Koordinaten in einem fest gewhlten cartesischen Koordinatensystem seien $x_k, y_k, z_k$, und die Masse von $P_k$ sei $m_k > 0$. Für den Abstand $r_{kl}$ von $P_k$ und $P_l$ gilt dann

$$r_{kl}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2, \quad k, l = 1, \ldots, n. \tag{5.1}$$

Zur Vereinfachung setzen wir öfters $q_k$ für eine bestimmte der drei Koordinaten $x_k, y_k, z_k$ und wiederum $q$ für eine dieser $3n$ möglichen Koordinaten $q_k$, $k = 1, \ldots, n$; ferner bezeichne dann jeweils $m$ die Masse $m_k$, welche zu dem durch $q$ beschriebenen Punkt gehört. Bei geeigneter Wahl der Masseneinheit ist

$$U = \textstyle\sum_{(k,l),\, k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}} \tag{5.2}$$

die Potentialfunktion für das Newtonsche Anziehungsgesetz. Die Bewegungsgleichungen des $n$-Körperproblems lassen sich in der abgekürzten Form

$$m\ddot{q} = U_q \tag{5.3}$$

schreiben, wobei $U_q$ die partielle Ableitung von $U$ nach $q$ bedeutet, oder auch

$$\dot{q} = v, \quad \dot{V} = m^{-1} U_q \tag{5.4}$$

und dies ist ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $6n$ von $t$ abhängigen Funktionen $q, v$. Indem wir noch die Anfangswerte zur reeellen Zeit $t = \tau$ durch den Index $\tau$ bezeichnen, der also keine partielle Ableitung andeuten soll, geben wir die $6n$ reellen Größen $q = q_\tau$, $v = v_t$ unter der Bedingung

$$r_{kl\tau} = \rho_{kl} > 0, \; k \neq l, \; k, l = 1, \ldots, n,$$

beliebig vor. Das $n$-Körperproblem besteht in der Beschreibung des Gesamtverlaufs aller Lösungen der Bewegungsgleichungen für beliebig vorgegebenen Anfangswerte.

Zunächst wollen wir noch für beliebiges $n > 1$ die klassischen 10 Integrale des $n$-Körperproblems aufstellen. Nach (5.1), (5.2) ist

$$U_{q_k} = \sum_{l,k\neq l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.5}$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} U_{q_k} = \sum_{\substack{k,l=1,\\ k\neq l}}^{n} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k) = 0 \tag{5.6}$$

wegen $r_{kl} = r_{lk}$. Nun ergeben die Bewegungsgleichungen (5.4)

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{v}_k = 0,\ v_k = \dot{q}_k,$$

also die sechs Schwerpunktsintegrale

$$\left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k = a, \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - t\dot{x}_k) = a^*,\ \frac{d}{dt}(x_k - t\dot{x}_k) = -t\ddot{x}_k \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{y}_k = b, \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{m} m_k (y_k - t\dot{y}_k) = b^*, \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{z}_k = c, \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k (z_k - t\dot{z}_k) = c^*, \end{array}\right. \tag{5.7}$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n} m_k x_k = at + a^*,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k y_k = bt + b^*,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k z_k = ct + c^*,$$

wobei $a, a^*, b, b^*, c, c^*$ sechs Integrationskonstanten sind. Durchläuft auch $p_k$ wie $q_k$ eine der Variablen $x_k, y_k, z_k$ für $k = 1, \ldots, n$, so ergibt (5.5) weiter

$$U_{q_k} p_k - U_{p_k} q_k = \sum_{l, l \neq k} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^2} (q_l p_k - p_l q_k), \ k = 1, \ldots, n,$$

also

$$\sum_{k=1}^{n} (U_{q_k} p_k - U_{p_k} q_k) = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen (5.4) liefern dann

$$\sum_{k=1}^{n} m_k (\dot{v}_k p_k - \dot{u}_k q_k) = 0, \ v_k = \dot{q}_k, \ u_k = \dot{p}_k,$$

also die 3 Flächenintegrale

$$(5.8) \qquad \left[ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \alpha, \ \frac{d}{dt}(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = y_k \ddot{z}_k - z_k \ddot{y}_k \\ \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = \beta, \\ \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = \gamma \end{array} \right.$$

mit drei Integrationskonstanten $\alpha, \beta, \gamma$. Für spätere Zwecke schreiben wir (5.8) um. Wegen $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_k & y_k & z_k \\ \dot{x}_k & \dot{y}_k & \dot{z}_k \end{vmatrix} = (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)\mathbf{i} + (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k)\mathbf{j} + (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)\mathbf{k}$ ist (5.8) äquivalent zu

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{X}_k \times \dot{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \ \mathbf{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{y}_k \\ \dot{z}_k \end{pmatrix}.$$

Bei orthogonalen Transformationen $\mathcal{T}$ bleiben die Bewegungsgleichungen invariant. Also ist

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \mathcal{T}\mathbf{X}_k \times \mathcal{T}\dot{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha} \\ \widetilde{\beta} \\ \widetilde{\gamma} \end{pmatrix}$$

mit Integrationskonstanten $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}$. Wegen $\mathcal{T}\mathbf{X}_k \times \mathcal{T}\dot{\mathbf{X}}_k = \det \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T}(\mathbf{X}_k \times \dot{\mathbf{X}}_k)$ folgt

$$\widetilde{\alpha}^2 + \widetilde{\beta}^2 + \widetilde{\gamma}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Schließlich folgt aus (5.4) bei Summation über alle Koordinaten

$$\sum_q (m v \dot{v} - U_q \dot{q}) = 0$$

wegen $m\dot{v}v = U_q v = U_q \dot{q}$. Dies ist nichts weiter als das Energieintegral

$$T - U = h \tag{5.9}$$

mit einer Integrationskonstanten $h$, wobei

$$T = \frac{1}{2} \sum_q m\dot{q}^2, \tag{5.10}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_v m v^2$$

die lebendige Kraft (kinetische Energie) des Punktsystems bedeutet. Mittels der gefundenden zehn Integrale (5.7), (5.8), (5.9) kann man in den Bewegungsgleichungen (5.4) insgesamt zehn der Koordinaten $q, v$ eliminieren und somit das gleiche System auf ein solches mit nur $6n - 10$ Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren.

Es ist an den linken Seiten von (5.7), (5.8), (5.9) bemerkenswert, daß sie algebraische Funktionen der $6n + 1$ Variablen $q, v, t$ sind. Man kann die Frage aufwerfen, ob sich noch weitere derartige Integrale finden lassen. Zur Erläuterung dieses Problems soll zunächst der Begriff des Integrals genauer erklärt werden.

**Definition 5.1:** *Sei wieder*

$$\dot{x}_k = f_k(x, t), \; k = 1, \ldots, m \tag{5.11}$$

*ein System von $m$ Differentialgleichungen erster Ordnung mit stetig differenzierbaren Funktionen $f_k$, die außer von den $x_1, \ldots, x_m$ auch noch von $t$ abhängen dürfen. Eine stetig differenzierbare Funktion $g = g(x,t)$ der $m+1$ unabhängigen Variablen $x_1, \ldots, x_m$, $t$ heißt Integral des Systems (5.11), wenn sie auf jeder Lösung $x = x(t)$ von (5.11) konstant ist. Hat man $l$ Integrale $g_1, \ldots, g_l$ von (5.11), so heißen sie unabhängig, wenn die mit den $m+1$ partiellen Ableitungen nach den $x_k, t$ gebildete Funktionalmatrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial g_l}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_l}{\partial t} \end{pmatrix}$$

*den Rang $l$ hat ($l \leq m+1$). Ferner heißt ein Integral $g$ algebraisch, wenn es eine algebraische Funktion der $x_k, t$ ist.*

Ist $g$ ein Integral, so folgt

$$g_t(x(t),t) + \sum_{k=1} f_k(x(t),t) g_{x_k}(x(t),t) = 0$$

auf jeder Lösung von (5.11). Da wir $m$ linear unabhängige Lösungen von (5.11) finden können, folgt die obige Gleichung als homogene lineare partielle Differentialgleichung, die identisch in allen Variablen $x, t$ erfüllt ist. Gilt umgekehrt für eine Funktion $g$ die genannte partielle Differentialgleichung identisch in allen Variablen, so ist $g$ ein Integral des Systems (5.11).

Für jedes feste $n > 1$ haben wir zehn algebraische Integrale des Systems (5.4) aufgestellt. Sie sind, wie man zeigen kann, unabhängig. Es gibt nun kein weiteres algebraisches Integral von (5.4), das von den oben aufgestellten unabhängig ist. Jedes algebraische Integral von (5.4) ist also eine algebraische Funktion der zehn bekannten algebraischen Integrale. Siehe hierzu Bruns [5]. Da andererseits nach bekannten Sätzen das System (5.4) insgesamt $6n$ unabhängige Integrale besitzt, so können sie wegen $6n > 10$ nicht alle algebraisch sein.

Wir wollen nun den Existenzsatz 4.1 aus §4 auf das System $\dot{q} = v$, $\dot{v} = m^{-1} U_q$ anwenden. Es gilt

**Satz 5.1:** *Sei $\tau \in \mathbb{R}$ und seien die Anfangswerte $q = q_\tau$, $v = V_\tau$ reell. In $\tau$ seien die Größen $r_{kl\tau} = \rho_{kl} > 0$, $k \neq l$. In $\tau$ sei*

$$U = U_\tau \leq A.$$

Es sei

$$(5.12) \qquad \left[\begin{array}{lcl} \rho & = & \min\limits_{k \neq l} \rho_{kl}, \\ \\ \mu & = & \min\limits_{k} m_k. \end{array}\right.$$

*Es sei $h$ die Konstante $T - U$ aus (5.9). Wenn wir für die im Existenzsatz 4.1 auftretenden Größen $r$ und $M$ die Zahlen*

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mu^2}{14A}, \\ M &= c_1 A^2 + \frac{\mu^2}{14A} + c_2\sqrt{A+h} \end{aligned}$$

*wählen mit geeigneten positiven Konstanten $c_1, c_2$, so hat das System*

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= v_k, \\ \dot{v}_k &= m_k^{-1} U_{q_k} = m_k^{-1} \sum_{l, l \neq k} \frac{m_k m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k) \end{aligned}$$

*genau eine regulär analytische Lösung im Kreis*

$$|t - \tau| < \frac{r}{(6n+1)M} = \delta.$$

*$\delta$ hängt nur von $A, h$ und den Massen ab. $c_1, c_2$ hängen nur von den gegebenen Massen ab und sind so zu wählen, daß*

$$\left| \sum_{l, l \neq k} \frac{m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k) \right| < c_1 A^2 \text{ in } |q - q_{L\tau}| < r$$

*ist, während $c_2$ so zu wählen ist, daß*

$$|v_\tau| \leq c_2\sqrt{A+h}$$

*ist.*

**Beweis:** Wegen

$$U = \sum_{(k,l),\, k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

folgt

$$\frac{\mu_2}{\rho} \leq U_\tau \leq A, \text{ also}$$

$$\rho \geq \mu^2 A^{-1}. \tag{5.13}$$

Es ist nun zu beachten, daß für die Bestimmung der im Existenzsatz auftretenden positiven Konstanten $r, M$ komplexe Werte der Variablen zu berücksichtigen sind. Um eine Abschätzung des absoluten Betrages der Ableitung $U_q$ nach oben zu erhalten, schätzen wir zunächst die Werte $|r_{kl}|$, $k \neq l$ für komplexe $q$ in der Nähe von $q_\tau$ nach unten ab. Bezeichnet man zunächst zur Abkürzung die drei Ausdrücke $(q_k - q_{k\tau}) - (q_l - q_{l\tau})$ für $q = x, y, z$ mit $\varphi, \psi, \chi$, so ergibt die Schwarzsche Ungleichung wegen (5.1) die Beziehung ($x_k, y_k, z_k$ sind komplex!)

$$\begin{aligned} |r_{kl}^2| &= |(x_k - x_{k\tau} - (x_l - x_{l\tau}) + (x_{k\tau} - x_{l\tau}))^2 + \\ &\quad +(y_k - y_{k\tau} - (y_l - y_{l\tau}) + (y_{k_L\tau} - y_{l\tau}))^2 + \\ &\quad +(z_k - z_{k\tau} - (z_l - z_{l\tau}) + (z_{k_L\tau} - z_{l\tau}))^2| \\ &= |\rho_{kl}^2 + 2(x_{k\tau} - x_{l\tau})(x_k - x_{k\tau} - (x_l - x_{l\tau})) + \\ &\quad +2(y_{k\tau} - y_{l\tau})(y_k - y_{k\tau} - (y_l - y_{l\tau})) + \\ &\quad +2(z_{k\tau} - z_{l\tau})(z_k - z_{k\tau} - (z_l - z_{l\tau})) + \\ &\quad +(x_k - x_{k\tau} - (x_l - x_{l\tau}))^2 + \\ &\quad +(y_k - y_{k\tau} - (y_l - y_{l\tau}))^2 + \\ &\quad +(z_k - z_{k\tau} - (z_l - z_{l\tau}))^2| \\ &\geq \rho_{kl}^2 - 2\rho_{kl}(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2)^{1/2} - (|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Wenn nun $|q - q_\tau| < \rho/14$ für alle $q$ ist, so sind $\varphi, \psi, \chi$ kleiner als $\rho/7$, also

$$|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 < 3\frac{\rho^2}{49} < \frac{\rho^2}{16},$$

also wegen (5.12), (5.14) auch

$$|r_{kl}|^2 \geq \rho_{kl}^2 - \tfrac{1}{2}\rho_{kl}\rho - \tfrac{1}{16}\rho^2, \tag{5.15}$$
$$> \tfrac{1}{4}\rho_{kl}^2,$$
$$|r_{kl}| > \tfrac{1}{2}\rho_{kl}. \tag{5.16}$$

$r_{kl}^2$ ist zunächst nur formal durch Einsetzen komplexer $x_k, y_k, z_k, x_l, y_l, z_l$ erklärt. In $|q - q_\tau| < \rho/14$ kann man jedoch $\sqrt{r_{kl}^2}$ bilden (siehe Seite 47).

Wegen (5.13) ist sicher $|q - q_\tau| < \rho/14$, wenn gilt:

$$(5.17) \qquad |q - q_\tau| < \mu^2/14A.$$

Dann haben wir ferner

$$\begin{aligned} |q_l - q_k| &\leq |q_l - q_{l\tau}| + |q_k - q_{k\tau}| + |q_{l\tau} - q_{k\tau}|, \\ &< \frac{\varphi}{7} + \rho_{kl} \leq \frac{8}{7}\rho_{kl}. \end{aligned}$$

Nach (5.13), (5.16) erhält man dann

$$\left|\frac{q_l - q_k}{r_{kl}^3}\right| \leq \left(\frac{2}{\rho_{kl}}\right)^3 \frac{8}{7}\rho_{kl} = \frac{64}{7}\rho_{kl}^{-2} \leq \frac{64}{7}A^2\mu^{-4}, \; k \neq l$$

und demzufolge

$$|m_k^{-1}U_{q_k}| = |\sum_{l, l\neq k} \frac{m_l}{r_{kl}^3}(q_l - q_k)| < c_1 A^2, \; k = 1, \ldots, n,$$

mit einer geeigneten positiven Konstanten $c_1$, die nur von den gegebenen Massen abhängt. Mit $\dot{q} = v$ ist außerdem zufolge des Energieintegrals

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}v_\tau^2 &\leq T_\tau = U_\tau + h \leq A + h, \\ |v_\tau| &\leq c_2\sqrt{A + h}, \end{aligned}$$

wobei auch $c_2$ nur von den Massen abhängt. Setzt man dann

$$(5.18) \qquad \tfrac{\mu^2}{14A} = r$$

und fordert neben (5.17) noch

$$|v - v_\tau| < r,$$

so entsteht

$$|v| \leq |v - v_\tau| + |v_\tau| < r + c_2\sqrt{A + h}.$$

Erklärt man also die im Existenzsatz 4.1 auftretenden Konstanten $v, M$ durch (5.18) und

$$M = c_1 A^2 + \frac{\mu^2}{14A} + c_2\sqrt{A + h}$$

und nimmt man an, daß $m_k^{-1}U_{q_k}$ regulär analytisch in $|q - q_\tau| < r = \frac{\mu^2}{14A}$ ist, so folgt die Regularität der Lösung $q(t), v(t) = \dot{q}(t)$ von (5.4) im Kreis

$$|t-\tau| < \frac{r}{(6n+1)M} = \delta,$$

insbesondere im Intervall $\tau \leq t < \tau + \delta$. Dabei hängt der Radius $\delta$ nur von $A, h$ und den Massen ab.

Es bleibt zu zeigen, daß $m_k^{-1} U_{q_k}$ regulär analytisch in $|q - q_\tau| < r = \frac{\mu^2}{14A}$ ist. Sei $z = re^{i\varphi}$. Für $r > H$, $-\pi < \varphi < \pi$, ist $f(z) = \sqrt{z}$ holomorph in der komplexen Ebene, aus der wir die negative reelle Halbachse und den Nullpunkt entfernt haben. Sei $z_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$, $Rez_0 > 0$. Dann ist $\frac{1}{\sqrt{z}}$ in eine Potenzreihe um $z_0$ entwickelbar im größten offenen Kreis um $z_0$, der Null nicht enthält, d. h. in $|z - z_0| < |z_0|$. $1/r_{kl}^2$ ist bei festem $k$ und $l \neq k$ um $(x_{\tilde{l}\tau}, y_{\tilde{l}\tau}, z_{\tilde{l}\tau})$ im Polyzylinder $|x_{\tilde{l}} - x_{\tilde{l}\tau}| < r$, $|y_{\tilde{l}} - y_{\tilde{l}\tau}| < r$, $|z_{\tilde{l}} - z_{\tilde{l}\tau}| < r$, $1 \leq l \leq n$, in eine Potenzreihe entwickelbar, da $|r_{kl}| > \frac{1}{2}\rho_{kl}$ in diesem Polyzylinder ist. Für $1/\sqrt{r_{kl}^2}$ gilt dasselbe, wenn nur $|r_{kl}^2 - \rho_{kl}^2| < \rho_{kl}^2$ ist. Dies sieht man folgendermaßen: Wir haben nach Seite 45 gerade

$$\begin{aligned}
|r_{kl}^2 - \rho_{kl}^2| &\leq 2\rho_{kl}(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2)^{\frac{1}{2}} + |\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 \\
&< \frac{1}{2}\rho_{kl}\rho + \frac{1}{16}\rho^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\rho_{kl}^2 + \frac{1}{16}\rho_{kl}^2 < \rho_{kl}^2,
\end{aligned}$$

da $9/16 < 1$ ist. Insbesondere haben wir mit $f_k = m_k^{-1} U_{q_k}$ die Beziehung

$$f_k(q_1, \ldots, q_{3n}) = \sum_{l_1,\ldots,l_{3n} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{3n}} a_{k,l_1,\ldots,l_{3n}} \cdot (q_1 - q_{1\tau})^{l_1} \cdot \ldots \cdot (q_{3n} - q_{3n\tau})^{l3n}$$

in $|q - q_\tau| < r$, $k = 1, \ldots, 3n$, wobei die Koeffizienten $a_{k,l_1,\ldots,l_{3n}}$ reellwertig sind. $\square$

**Satz 5.2:** *Sei $(q(t), v(t))$ eine Lösung des Systems (5.4) gemäß Satz 5.1 mit den Anfangswerten $q_{L\tau}, v_{L\tau}$. Dann gibt es eine Zahl $T(q_\tau, v_\tau)$, $0 < T(q_\tau, v_\tau) \leq +\infty$, mit folgenden Eigenschaften: In $[\tau, \tau + T(q_\tau, v_\tau))$ sind $q, v$* ***lokal*** *regulär analytisch, genauer: $q, v$ besitzen* ***lokal*** *in $|t - \tau| < T(q_\tau, v_\tau)$ eine konvergente Potenzreihenentwicklung. Falls $T(q_\tau, v_\tau) < +\infty$ ist, so gilt:*

$$\lim_{t \uparrow \tau + T(q_\tau, v_\tau)} U(q(t)) = +\infty.$$

*Insbesondere tritt in $[\tau, \tau + t(q_\tau, v_\tau))$ kein Zusammenstoß ein.*

**Beweis:** Wir wählen $\delta$ wie in Satz 5.1 und konstruieren $(q(t), v(t))$ in

$|t-\tau| \leq \delta/2$. In $\tau_1 = \tau + \delta/2$ wählen wir als Anfangswerte $q_{\tau_1} = q(\tau_1)$, $v_{\tau_1} = v(\tau_1)$. Es ist $r_{kl\tau_1} > 0$, $k \neq l$. Satz 5.1 liefert eine Lösung $(q(t), v(t))$ von (5.4) zu den Anfangswerten $(q_{\tau_1}, v_{\tau_1})$ auf $\tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \delta_1/2$, die in $|t - \tau_1| < \delta_1$ regulär analytisch ist mit

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{r_1}{(6n+1)M_1}, \\
r_1 &= \frac{\mu^2}{14A_1},\ \mu = \min_k m_k,\ A_1 > 0,\ A_1 \geq U(q(\tau_1)) = U(q_{\tau_1}), \\
M_1 &= c_1 A_1^2 + \frac{\mu^2}{14A_1} + c_2\sqrt{A_1 + h}.
\end{aligned}$$

Fortsetzung dieses Verfahrens liefert eine Lösung $(q(t), v(t))$ auf $[\tau, \tau + T(q_\tau, v_\tau))$ mit

$$T(q_\tau, v_\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu/2 + \delta/2,$$

die in $|t-\tau| < T(q_\tau, v_\tau)$ lokal regulär analytisch ist. Sei $T(q_\tau, v_\tau)$ endlich. Es ist $U > 0$ auf $[\tau, \tau + T(q_\tau, v_\tau))$, so daß kein Zusammenstoß eintritt. Sei $(t_\nu)$ eine Folge mit

$$\begin{aligned}
&t_\nu \in (\tau, \tau + T(q_\tau, v_\tau)), \\
&t_\nu \uparrow \tau + T(q_\tau, v_\tau),\ \nu \to \infty, \\
&U(q(t_\nu)) \leq \widetilde{A}
\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante $\widetilde{A}$. Wählen wir $t_\nu$ hinreichend nahe bei $\tau + T(q_\tau, v_\tau)$, so können wir das System (5.4) mit den Anfangswerten $(q_{t_\nu}, v_{t_\nu})$, in $[t_\nu, t_\nu + \widetilde{\delta})$ lösen, die Lösung ist regulär analytisch in $|t - t_\nu| < \widetilde{\delta}$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta} &= \frac{\widetilde{r}}{(6n+1)\widetilde{M}}, \\
\widetilde{r} &= \frac{\mu_2}{14\widetilde{A}},\ \widetilde{M} = c_1\widetilde{A}^2 + \frac{\mu^2}{14\widetilde{A}} + c_2\sqrt{\widetilde{A} + h}
\end{aligned}$$

$$t_\nu + \widetilde{\delta}/2 \geq T(q_\tau, v_\tau) + \tau.$$

Insbesondere ist $U(q(t))$ gleichmäßig beschränkt in $\tau \leq t < \tau + T(q_\tau, v_\tau)$. Bei der Konstruktion der $\delta_\nu$ können wir somit für die $\delta_\nu$ imemr ein und dieselbe positive Größe wählen, $\nu = 1, 2, \ldots$. Die aus den $\delta_\nu$ gebildete Reihe divergiert also, im Gegensatz zu unserer Annahme $T(q_\tau, v_\tau) < +\infty$. $\square$

Aus Satz 5.2 folgt nun, daß im Fall $T(q_\tau, v_\tau) < +\infty$ wegen

$$U = \sum_{k<l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

der Kleinste der $n(n-1)/2$ Abstände $r_{kl}(k < l)$ für $t \uparrow \tau + T(q_\tau, v_\tau)$ gegen 0 strebt. Bei $t_1 = \tau + T(q_\tau, v_\tau)$ handelt es sich also um die erste Singularität für mindestens ein $q(t)$, da nach dem Satz von der lebendigen Kraft (5.9) die Größe $T$ für $t \uparrow \tau + T(q_\tau, v_\tau)$ gegen $+\infty$ stebt, also wenigstens ein $|\dot{q}(t)|$ dann unendlich groß wird, während die $q(t)$ eventuell beschränkt bleiben.