Tensoren, Differentialformen Riemannsche Geometrie

Prof. Wolf von Wahl

A. Allgemeines über Tensoren

A. Allgemeines über Tensoren

§1. Tensoren

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$V^* := \{\varphi | \varphi : V \to \mathbb{R} \text{ linear}\}$$

V^* wird in der üblichen Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ gemacht. Sei $\dim V = n$. Dann ist auch $\dim V^* = n$. Sei $\delta_i^k = \begin{cases} 0, k \neq i \\ 1, k = i \end{cases}$, $1 \leq i,\ k \leq n$. Sei $\delta^{ki} = \delta_{ki} = \delta_i^k$. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V. Dann ist durch

$$e^k \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i e_i \right) = \lambda^k, \text{ d.h.}$$

$$e^k(e_i) = \delta_i^k,\ 1 \leq k \leq n$$

eine Basis in V^* gegeben. Sie heißt die zu $e_1, \ldots, e_n$ duale Basis.

Definition A.1.1: *Seien $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q \geq 1$. Eine Abbildung*

$$\mathcal{T} : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p-\text{Mal}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q-\text{Mal}} \to \mathbb{R}$$

heißt Multilinearform, wenn

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\ldots, \underbrace{u+v}_{\in V^*}, \ldots) &= \mathcal{T}(\ldots, \underbrace{u}_{\in V^*}, \ldots) + \mathcal{T}(\ldots, \underbrace{v}_{\in V^*}, \ldots) \\
\mathcal{T}(\ldots, \underbrace{x+y}_{\in V}, \ldots) &= \mathcal{T}(\ldots, \underbrace{x}_{\in V}, \ldots) + \mathcal{T}(\ldots, \underbrace{y}_{\in V}, \ldots) \\
\mathcal{T}(\ldots, \lambda u, \ldots) &= \lambda \mathcal{T}(\ldots, u, \ldots), \\
\mathcal{T}(\ldots, \lambda x, \ldots) &= \lambda \mathcal{T}(\ldots, x, \ldots)
\end{aligned}$$

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum der multilinearen Abbildungen $\mathcal{T} : V^* \times \ldots \times V^* \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ heißt $T_q^p = T_q^p(V)$, seine Elemente Tensoren, und zwar p-fach kontravariante, q-fach kovariante Tensoren.

Satz A.1.2 (Koordinatendarstellung bezüglich einer Basis $\mathbf{e_1}, \ldots \mathbf{e_n}$ $\in$ V): *Sei $\mathcal{T} \in T_q^p$, $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, $e^1, \ldots, e^n$ die zu $e_1, \ldots, e_n$ duale Basis. Dann läßt sich $\mathcal{T}$ auf eine und nur eine Weise darstellen als*

$$\mathcal{T}(u_1,\ldots,u_p,x^1,\ldots,x^q) = \sum_{\substack{1\le i_1,\ldots i_p\le n\\ 1\le j_1,\ldots,j_q\le n}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\cdot u_{1i_1}\ldots u_{pi_p}x^{1j_1}\cdot\ldots\cdot x^{qj_q}$$

mit

$$u_1 = \sum_{k=1}^{u} u_{1k}e^k,\ldots,u_p = \sum_{k=1}^{u} u_{pk}e^k,$$
$$x^1 = \sum_{k=1}^{u} x^{1k}e_k,\ldots,x^q = \sum_{k=1}^{u} x^{qk}e_k.$$

Für die n^{p+q} Komponenten $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ von $\mathcal{T}$ gilt

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \mathcal{T}(e^{i_1},\ldots,e^{i_p},e_{j_1},\ldots,e_{j_q}).$$

Beweis: Darstellbarkeit: Einsetzen der Linearkombinationen für $u_1,\ldots,u_p$, $x^1,\ldots,x^q$. Eindeutigkeit: Sei $u_{1k} = \delta_{\underline{i}_1k},\ldots,u_{pk} = \delta_{\underline{i}_pk}$, $x^{1k} = \delta^{\underline{j}_1k},\ldots,x^{qk} = \delta^{\underline{j}_qk}$, also

$$u_{1i_1}\cdot\ldots\cdot u_{pi_p}x^{1j_1}\cdot\ldots\cdot x^{qj_q} = \delta_{\underline{i}_1i_1}\cdot\ldots\cdot\delta_{\underline{i}_pi_p}\cdot\delta^{\underline{j}_1j_1}\cdot\ldots\cdot\delta^{\underline{j}_pj_p}$$

für einen festen Multiindex $(\underline{i}_1,\ldots,\underline{i}_p,\underline{j}_1,\ldots,\underline{j}_q)$. Dann folgt

$$\mathcal{T}(e^{\underline{i}_1},\ldots,e^{\underline{i}_p},e_{\underline{j}_1},\ldots,e_{\underline{j}_q}) = T^{\underline{i}_1,\ldots,\underline{i}_p}_{\underline{j}_1,\ldots,\underline{j}_q}.$$

□

Wir untersuchen nun das Verhalten der Tensoren bei linearen Abbildungen. Einsteinsche Summationskonvention.

Satz A.1.3: *Sind $v_1,\ldots,v_n$ und $w_1,\ldots,w_n$ Basen in V mit*

$$v_i = t_i^k w_k,$$

$$T = \begin{pmatrix} t_1^1 & \ldots & t_n^1 \\ \\ t_1^n & \ldots & t_n^n \end{pmatrix},$$

so gilt für die zugehörigen dualen Basen

$$v^j = \check{t}_l^j w^l$$

mit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \check{t}^1_n & \dots & \check{t}^1_n \\ & & \\ \check{t}^n_1 & \dots & \check{t}^n_n \end{pmatrix}.$$

so daß $(\check{t}^j_l)$ *die inverse Matrix zu* (t^k_i) *ist, also* $\check{t}^i_j t^j_k = \delta^i_k$, $t^i_j \check{t}^j_k = \delta^i_k$, $w_k = \check{t}^l_k v_l$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \check{t}^j_l w^l(v_i) &= \check{t}^j_l w^l(t^k_i w_k), \\ &= \check{t}^j_l t^k_i \underbrace{w^l(w_k)}_{=\delta^l_k} = \check{t}^j_l t^l_i = \delta^j_i. \end{aligned}$$

Also ist

$$v^j = \check{t}^j_l w^l.$$

Offenbar ist

$$\check{t}^l_k v_l = \check{t}^l_k t^i_l w_i = \delta^i_k w_i = w_k.$$

$\square$

Satz A.1.4 (Transformationsformel eines Tensors): *Sei* $\mathcal{T} \in T^p_q$. *Seien* $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ *die Komponenten des Tensors* $\mathcal{T}$ *bezüglich* $e_1, \dots, e_n$. *Seien* $\widetilde{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p}$ *die Komponenten von* $\mathcal{T}$ *bezüglich* $w_1, \dots, w_n$. *Dann gilt*

$$\widetilde{T}^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q} = t^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot t^{k_p}_{i_p} \check{t}^{j_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot \check{t}^{j_q}_{l_q} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$$

Beweis: Aus den Sätzen A.1.3 und A.1.2 folgen die nachstehenden Schlüsse:

Es ist

(A.1.1) $\underline{e} = T^* \underline{w}$
für die Basisspalten $\underline{e}, \underline{w}$ in V, und

(A.1.2) $\overline{e} = T^{-1} \overline{w}$
für die Basisspalten $\overline{e}, \overline{w}$ in V^*. Für die Komponentenspalte $\widetilde{\underline{u}}_i$ von u_i bezüglich $\overline{w}$ gilt somit

$$\begin{aligned} \widetilde{\underline{u}}_i &= T^{-1*} \underline{u}_i, \\ \underline{u}_i &= T^* \widetilde{\underline{u}}_i, \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

wenn $\underline{u}_i$ die Komponentenspalte von u_i bezüglich $\overline{e}$ bedeutet, und

$$\widetilde{\overline{x}}^i = T\overline{x}^i,$$

$$\overline{x}^i = T^{-1}\widetilde{\overline{x}}^i$$

(A.1.4)

$$= (T^{*-1})^*\widetilde{\overline{x}}^i$$

bei entsprechender Bezeichnung. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(u_1,\ldots,u_p,x^1,\ldots,x^q) &= T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} u_{1i_1}\ldots u_{pi_p}\cdot x^{1j_1}\cdot\ldots\cdot x^{qj_q} \\
&= T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} t^{k_1}_{i_1}\widetilde{u}_{1k_1}\cdot\ldots\cdot t^{k_p}_{i_p}\widetilde{u}_{pk_p}\check{t}^{j_1}_{l_1}\widetilde{x}^{1l_1}\cdot\ldots\cdot\check{t}^{j_q}_{l_q}\widetilde{x}^{ql_q} \\
&= \underbrace{t^{k_1}_{i_1}\cdot\ldots\cdot t^{k_p}_{i_p}\check{t}^{j_1}_{l_1}\cdot\ldots\cdot\check{t}^{j_p}_{l_p}\cdot T^{i_1\ldots 1_p}_{j_1\ldots j_q}}_{\boxed{\widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}}}
\end{aligned}$$

$$\widetilde{u}_{1k_1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{u}_{pk_p}\widetilde{x}^{1l_1}\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}^{ql_q}.$$

Der Satz ist bewiesen. □

Hinweise: „Komponenten“von $\mathcal{T}$ bezieht sich auf die Darstellung **ein- und derselben Zahl** $\mathcal{T}(u_1,\ldots,u_p,x^1,\ldots,x^q)$ bezüglich der Basis $e_1,\ldots e_u$ beziehungsweise der Basis $w_1,\ldots,w_n$. Man kann natürlich auch ansetzen

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} &= \mathcal{T}(w^{k_1},\ldots,w^{k_p},w_{l_1},\ldots,w_{l_q}) \\
&= \mathcal{T}(t^{k_1}_{i_1}e^{i_1},\ldots,t^{k}_{i_p}e^{i_p},\ \check{t}^{j_1}_{l_1}e_{j_1},\ldots,\check{t}^{j_q}_{l_q}e_{j_q}) \\
&= t^{k_1}_{i_1}\cdot\ldots\cdot t^{k_p}_{i_p}\check{t}^{j_1}_{l_1}\cdot\ldots\cdot\check{t}^{j_q}_{l_q}T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}
\end{aligned}$$

und gelangt zu demselben Ergebnis.

Wir bringen einige Erläuterungen:
Die n Komponenten eines Vektors $u\in V^*$ bezüglich einer Basis $e_1,\ldots,e_n$ von V, d.i. bezüglich einer Basis $e^1,\ldots,e^n$ von V^*, transformieren sich bei Übergang

(A.1.5) $\underline{e} = T^*\underline{w}$, $\underline{w} = T^{-1*}\underline{e}$ gemäß

$$\widetilde{\underline{u}} = T^{-1*}\underline{u}$$

(s. A.1.3), d.h.

$$\widetilde{u}_k = \check{t}^i_k u_i$$

Demnach transformieren sich die Tensorkomponenten bezüglich der unteren Indizes wie die Komponenten eines Vektors $u \in V^*$ und diese wegen (A.1.5) wie die Basis $\underline{e}$. Man sagt, **die Tensorkomponenten transformieren sich kovariant (zur Basis von V) bezüglich der unteren Indizes. Die Vektoren aus V^* heissen kovariante Vektoren.** Für $x \in V$ gilt für die Komponentenspalten

$$\overline{\widetilde{x}} = T\overline{x}.$$

Wegen $T = (T^{-1*})^{-1*}$ transformieren sich die Komponentenspalten kontragredient zur Basis (s. (A.1.5)). **Daher bezeichnet man die Vektoren aus V als kontravariante Vektoren. Die Tensorkomponenten transformieren sich also kontravariant bezüglich der oberen Indizes.**

Beispiele:

1. $x \in V$, $x = x^k e_k$. Sei

$$x(u) := u(x),\ u \in V^*$$
$$\Rightarrow x : V^* \to \mathbb{R} \text{ linear}$$

x ist 1-fach kontravarianter, 0-fach kovarianter Tensor:
Komponenten: $x(e^k) = e^k(x) = x^k$.

Übergang zu neuer Basis:

$$\widetilde{x}^k = x(w^k) = x(t^k_i e^i) = t^k_i x^i.$$

2. $u : V \to \mathbb{R}$ linear, d.h. $u \in V^*$
u ist 0-fach kontravarianter, 1-fach kovarianter Tensor. Übergang zu neuer Basis:

$$\begin{aligned} u_i &= u(e_i) = t^k_i \widetilde{u}_k, \\ \widetilde{u}_k &= \check{t}^i_k u_i. \end{aligned}$$

3. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum T^p_q. Da ein $\mathcal{T} \in T^p_q$ gerade n^{p+q} Komponenten hat, ist die Vermutung naheliegend, daß T^p_q die Dimension n^{p+q} hat. Dies bestätigen wir wie folgt: Die Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V und die dazu duale Basis $e^1, \ldots, e^n$ haben die folgenden Eigenschaften: Nach 2. ist vermöge

$$\begin{aligned} e_i(u) &= u(e_i) \\ &= u_k e^k(e_i) = u_i \end{aligned}$$

e_i eine lineare Abbildung von V^* in $\mathbb{R}$. Wie schon in 2. wollen wir sie auch mit e_i bezeichnen. Dann ist

$$e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p} e^{j_1} \cdot \ldots \cdot e^{j_q}$$

als Produkt von linearen Abbildungen von V^* in $\mathbb{R}$ bzw. V in $\mathbb{R}$ selbst aus T_q^p. Auf diese Art erhält man n^{p+q} Elemente aus T_q^p. Aus

$$\lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p} e^{j_1} \cdot \ldots \cdot e^{j_q} = 0$$

folgt

$$\lambda_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1}(e^{\underline{i}_1}) \cdot \ldots \cdot e_{i_p}(e^{\underline{i}_p}) \cdot e^{j_1}(e_{\underline{j}_1} \cdot \ldots \cdot e^{j_q}(e_{\underline{j}_q}) = 0$$

für ein beliebiges, aber festes $(p+q)$ - Tupel $(\underline{i}_1, \ldots, \underline{i}_p, \underline{j}_1, \ldots, \underline{j}_q)$. Also ist

$$\lambda_{\underline{j}_1 \cdots \underline{j}_q}^{\underline{i}_1 \cdots \underline{i}_p} = 0$$

und die Multilinearformen $e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p} e^{j_1} \cdot \ldots \cdot e^{j_q}$ sind linear unabhängig in T_q^p. Sie bilden auch eine Basis in T_q^p, da nach Satz A.1.2 für ein Element $\mathcal{T} \in T_q^p$ gilt

$$\mathcal{T}(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots, x^q) = T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1}(u_1) \cdot \ldots \cdot e_{i_p}(u_p) \cdot e^{j_1}(x^1) \cdot \ldots \cdot e^{j_q}(x^q),$$

also in T_q^p folgt

$$\mathcal{T} = T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_p} \cdot e^{j_1} \cdot \ldots \cdot e^{j_q}.$$

Der Vollständigkeit halber bringen wir noch
Definition A.1.5: *Für $p = q = 0$ sei $T_q^p = \{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Man sagt, die Tensoren nullter Stufe sind die Konstanten. λ heißt die Komponente des Tensors $\mathcal{T} = \lambda \in T_0^0 (n^{p+q} = n^0 = 1)$.*

Die Elemente aus T_0^0 heißen auch Invarianten. Diese jetzt noch nicht einsichtige Bezeichnung wird in §2, Beispiel 2, gerechtfertigt.

§2. Das Rechnen mit Tensoren. Euklidische Vektorräume

Sei wieder V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$, V^* sein Dualraum.

Definition A.2.1:

1. *Seien $\mathcal{T} \in T_q^p$, $\mathcal{S} \in T_q^p$. Dann ist*

$$\mathcal{R} := \mathcal{T} + \mathcal{S}$$

$$(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots, x^q) \longmapsto \mathcal{T}(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots, x^q) + \mathcal{S}(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots, x^q)$$

aus T_q^p und hat die Komponenten

$$R^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} + S^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

2. *Seien $\mathcal{T} \in T_q^p$, $\mathcal{S} \in T_{q'}^{p'}$. Dann ist*

$$\mathcal{R} := \mathcal{T}\mathcal{S}$$

$$(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_{p'}, x^1, \ldots, x^q, x'^1, \ldots, x'^{q'}) \longmapsto$$

$$\mathcal{T}(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots x^q) \cdot \mathcal{S}(u'_1, \ldots, u'_{p'}, x'^1, \ldots, x'^{q'})$$

aus $T_{q+q'}^{p+p'}$ und hat die Komponenten

$$R^{i_1 \ldots i_p i'_1 \ldots i'_{p'}}_{j_1 \ldots j_q j'_1 \ldots j'_{q'}} = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \cdot S^{i'_1 \ldots i'_{p'}}_{j'_1 \ldots j'_{q'}}$$

3. *$\mathcal{P}$ durchlaufe die Menge aller $p!q!$ Permutationen, bei denen die p kovarianten Vektoren $u_1, \ldots, u_p$, oberen kontravarianten Indizes und die q kontravarianten Vektoren $x^1, \ldots, x^q$, unteren kovarianten Indizes nur unter sich permutiert werden. Sei $L \in \mathbb{N}$. Jedem $\lambda \in \mathbb{N}, 1 \leq \lambda \leq L$, und jedem $\mathcal{P}$ sei eine reelle Zahl $c^\lambda_{\mathcal{P}}$ zugeordnet. Man sagt, der Tensor $\mathcal{T} \in T_q^p$ erfülle die Symmetriebedingung $c^\lambda_{\mathcal{P}}$, $1 \leq \lambda \leq L$, $\mathcal{P} \in P$, wenn gilt*

$$0 = \sum_{\mathcal{P} \in P} c^\lambda_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}, x^{j_1}, \ldots, x^{j_q})|_{\mathcal{P}(u_1, \ldots}$$

$1 \leq \lambda \leq L.$

$$|_{\mathcal{P}(u_1,\ldots,u_p,x^1,\ldots,x^q)=}$$
$$| \ldots = (u_{i_1},\ldots,u_{i_p},x^{j_1},\ldots,x^{j_q}),$$

In Komponenten heißt dies: Für jedes Index-Tupel $(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q)$ *ist*

$$0 = \sum_{\mathcal{P}\in P} c^\lambda_{\mathcal{P}} T^{l_1\ldots l_p}_{n_1\ldots n_q}|_{\mathcal{P}}$$

$$|_{\mathcal{P}(i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q)=(l_1,\ldots,l_p,n_1,\ldots,n_q)},$$

$$\boxed{\begin{gathered} 1 \leq i_1,\ldots i_p, j_1,\ldots,j_q \leq n, \\ 1 \leq \lambda \leq L. \end{gathered}}$$

Beispiel:
$U \subset \mathbb{R}^n$, U offen, $T_p(U) = \mathbb{R}^n = V$ mit Basis $e_1,\ldots,e_n$ (Eine Karte mit Identität als Abbildung). $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q \leq n$. Alternierende Multilinearform:

(1) $\mathcal{T}(x^1,\ldots,x^i,\ldots,x^j,\ldots,x^q) + \mathcal{T}(x^1,\ldots,x^j,\ldots,x^i,\ldots,x^q) = 0$, $i < j$.

Umschreibung: $\lambda = 1,\ldots,L =$ Indizierung von $\{(i,j)|1 \leq i < j \leq n\}$

$c^\lambda_{\mathcal{P}} = 1$, $\mathcal{P} =$ id. Permutation
$c^\lambda_{\mathcal{P}} = 1$, $\mathcal{P} =$ Perm. mit i,j vertauscht, (i,j) gehört zu λ
$c^\lambda_{\mathcal{P}} = 0$, sonst

Offenbar: (1) $\Leftrightarrow 0 = \sum_{\mathcal{P}\in P} c^\lambda_{\mathcal{P}} \mathcal{T}(x^{j_1},\ldots,x^{j_q})| \ldots$

In Komponenten:

(2) $T_{j_1\ldots j_l \ldots j_m \ldots j_q} + T_{j_1\ldots j_m \ldots j_l \ldots j_q} = 0$

$\lambda, \mathcal{P}$ wie oben, $1 \leq j_1,\ldots,j_q \leq n$:

$$0 = \sum_{\mathcal{P}\in P} c^\lambda_{\mathcal{P}} T_{n_1\ldots n_q}|_{(n_1,\ldots,n_q)=\mathcal{P}(j_1,\ldots,j_q)}$$

(Alternierende) Differentialformen.

Mögliche Ergänzung: Seien $1 \leq i_1, \ldots i_p, j_1, \ldots, j_q \leq n$. $\mathcal{P}(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q)$ entsteht, indem $\mathcal{P}$ auf $(1, \ldots, p, 1, \ldots, q)$ angewandt wird und $1, \ldots, p$ und $1, \ldots, q$ nur unter sich permutiert werden. Ergebnis:

$$\mathcal{P}(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q) = (l_1, \ldots, l_p, n_1, \ldots n_q).$$

Durch Definition A.2.1 haben wir in von der Wahl der Basis in V unabhängiger Weise die Addition von Tensoren gleicher Stufe, die Multiplikation von Tensoren beliebiger Stufe und den Begriff der Symmetriebedingung für Tensoren beliebiger aber fester Kontravarianz- und Kovarianzstufe erklärt. Zur Erklärung der vierten Operation mit Tensoren, der Verjüngung, ist es zweckmäßig, den Begriff des Tensors noch auf eine andere Art zu erklären, die zwar anfechtbar, aber zweckmäßig ist.

q-Formen.
Teilraum der n^q rein kovarianten Tensoren q-ter Stufe. Nach Analysis/Mathe für Physiker III ist wegen (1) seine Dimension nur $\binom{n}{q}$.

Basis: $dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$,

$\mathcal{T}(x^1, \ldots, x^q) = T_{j_1 \ldots j_q} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$
Summation: $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq u$.
(Alt.) q-Form eigentlich Tensorfeld. Bei Mannigfaltigkeiten.

Definition A.2.2: *Sei V ein V-Raum der Dimension n, V^* sein Dualraum. Ein Tensor $(p+q)$-ter Stufe, der also p-fach kontravariant und q-fach kovariant ist, ist eine Zuordnung*

$$(A.2.1) \quad ((\underbrace{e_1, \ldots, e_n}_{\textit{Basis von } V}), (\underbrace{e^1, \ldots, e^n}_{\textit{Duale Basis von } V^*})) \longmapsto n^{p+q} \textit{ Zahlen } T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

derart, daß bei Übergang

$$\underline{w} = T^{*-1} \underline{e},$$
$$\overline{w} = T \overline{e}$$

zu einer neuen Basis $(w_1, \ldots, w_n)$ von V und der zugehörigen dualen Basis $(w^1, \ldots, w^n)$ von V^* für die n^{p+q} Zahlen $\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ nach (A.2.1) gilt:

$$\widetilde{T}^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = t^{k_1}_{i_1} \cdot \ldots \cdot t^{k_p}_{i_p} \cdot \check{t}^{j_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot \check{t}^{j_q}_{l_q} \cdot T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

Beseitigung der Anfechtbarkeit: Multilinearformen $\mathcal{T} : V^{*p} \times V^q \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathcal{T}(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots e_{j_q}) := T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$$

Aus der Multilinearität folgt die Formel des Satzes A.1.2. Nach Definition A.2.2 sind bez. einer neuen Basis $w_1, \ldots, w_n$ die $\widetilde{T}^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = \mathcal{T}(w^{i_1}, \ldots, w^{i_p}, w_{j_1}, \ldots, w_{j_q})$.

Rechenoperationen zwischen Tensoren können also für die Tensorkomponenten erklärt werden, sofern das Ergebnis das richtige Transformationsverhalten aufweist. Dies benutzen wir in

Definition A.2.3: Seien $p, q \geq 1$. Aus $\mathcal{T} \in T^p_q$ entsteht ein neuer Tensor $\mathcal{S} \in T^{p-1}_{q-1}$, indem man einen bestimmten oberen und einen bestimmten unteren Index bei den $T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}$ identifiziert und dann über ihn summiert. Das heißt

(A.2.2)

$$S^{i_1 \ldots i_{k-1} \widehat{i_k} i_{k+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{l-1} \widehat{j_l} j_{l+1} \ldots j_q} = \sum_{i=1}^{u} T^{i_1 \ldots i_{k-1} i \; i_{k+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{l-1} i \; j_{l+1} \ldots j_q}.$$

Zu zeigen ist jetzt

Hilfsssatz A.2.4: *Durch* (A.2.2) *ist ein Tensor* $\mathcal{S} \in T^{p-1}_{q-1}$ *gegeben.*

Beweis: Vereinfachte Schreibweise: $T^{ik\ldots}_{rs\ldots}$, usw.. Es ist

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}^{ikl\ldots}_{rit\ldots} &= t^i_\iota t^k_\kappa t^l_\lambda \ldots \check{t}^\rho_r \check{t}^\sigma_i \check{t}^\tau_t \ldots T^{\iota\kappa\lambda\ldots}_{\rho\sigma\tau\ldots}, \\
&= \left(t^i_\iota \check{t}^\sigma_i\right) t^k_\kappa t^l_\lambda \ldots \check{t}^\rho_r \check{t}^\tau_t \ldots T^{\iota\kappa\lambda\ldots}_{\rho\sigma\tau\ldots}, \\
&= \delta^\sigma_\iota t^k_\kappa t^l_\lambda \ldots \check{t}^\rho_r \check{t}^\tau_t \ldots T^{\iota\kappa\lambda\ldots}_{\rho\sigma\tau\ldots}, \\
&= t^k_\kappa t^l_\lambda \ldots \check{t}^\rho_r \check{t}^\tau_t \ldots T^{\iota\kappa\lambda\ldots}_{\rho\iota\tau\ldots},
\end{aligned}$$

also

$$\widetilde{S}^{kl\ldots}_{rt\ldots} = t^k_\kappa t^l_\lambda \ldots \check{t}^\rho_r \check{t}^\tau_t \ldots S^{\kappa\lambda\ldots}_{\rho\tau\ldots},$$

was zu beweisen war. □

Die in Definition A.2.3 vorgenommene Operation heißt **Verjüngung des**

Tensors $\mathcal{T}$. Nach Hilfssatz A.2.4 ist die Definition A.2.3 von der Wahl der Basis von V unabhängig.

Beispiele:

1. Der „Einheitstensor“δ_i^k. Das Symbol δ_i^k wurde auf Seite 1 eingeführt. Es handelt sich um die Komponenten des Tensors $\mathcal{E} \in T_1^1$ mit

$$\mathcal{E}(u,x) = u(x) = u_k e^k(x^i e_i) = \underbrace{e^k(e_i)}_{=\delta_i^k} u_k x^i = u_k x^k.$$

   Die Symbole δ^{ik}, δ_{ik} haben bisher keine tensorielle Bedeutung. Durch Verjüngung von δ_i^k entsteht der Tensor $\delta_i^i = n$ von nullter Stufe.

2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T} \in T_q^p$ ist $\lambda\mathcal{T} \in T_q^p$ (Definition A.1.5, Definition A.2.1,2.). Unter den Begriff der Verjüngung fällt auch die Bildung von Invarianten. Ist $(p \geq 1, q \geq 1)\mathcal{T} \in T_q^p$ mit den Komponenten $T_{rs\ldots}^{ik\ldots}$, so sind für p beliebige, aber feste Vektoren $u, v, \ldots$ aus V^* und q beliebige, aber feste Vektoren $\xi, \eta, \ldots$ aus V durch

$$S_{rs\ldots\iota\kappa\ldots}^{ik\ldots\rho\sigma\ldots} = T_{rs\ldots}^{ik\ldots} u_\iota v_\kappa \ldots \xi^\rho \eta^\sigma \ldots$$

   die Komponenten eines $(p+q)$-fach Kontravarianten, $(p+q)$-fach kovarianten Tensors gegeben ($u = u_\iota e^\iota$, $v = v_\kappa e^\kappa$, $\ldots, \xi = \xi^\rho e_\rho$, $\eta = \eta^\sigma e_\sigma$, Beispiele 1,2, Seite ....., Definition A.2.1,2.). Durch $(p+q)$-fache Verjüngung erhalten wir den Tensor 0-ter Stufe mit der Komponente

   (A.2.3)
$$\lambda = \sum_{\substack{1 \leq i,k,\ldots \leq n,\\ 1 \leq r,s,\ldots \leq n}} T_{rs\ldots}^{ik\ldots} u_i v_k \ldots \xi^r \eta^s \ldots$$

   Die rechte Seite ist invariant gegen Abänderung der Basis $e_1, \ldots, e_n$. Die Tensoren nullter Stufe werden wir daher als Invarianten bezeichnen. Aus der Definition der Tensoren ist klar, daß die rechte Seite von (A.2.3) eine Invariante ist, da es sich um den Zahlenwert $\mathcal{T}(u, v, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$ handelt.

3. **Multivektoren.** Sei V n-dim, VR über $\mathbb{R}$, $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$. Seien $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ r Vektoren aus V mit den Komponenten $\xi^i, \eta^i, \ldots, \zeta^i$ bezüglich $e_1, \ldots, e_n$. Ihnen ordnen wir die n^r Bestimmungszahlen

$$
\xi^{ik\ldots l} = \begin{vmatrix} \xi^i & \eta^i & \ldots & \zeta^i \\ \xi^k & \eta^k & \ldots & \zeta^k \\ & & \vdots & \\ \xi^l & \eta^l & \ldots & \zeta^l \end{vmatrix}
$$

zu. Wegen

$$
\begin{vmatrix} \xi^i & \eta^i & \ldots & \zeta^i \\ \xi^k & \eta^k & \ldots & \zeta^k \\ & & \vdots & \\ \xi^l & \eta^l & \ldots & \zeta^l \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i_1,i_2,\ldots,i_r)= \\ =P(i,k,\ldots,l)}} \pm
$$

$$
\xi^{i_1}\eta^{i_2}\cdot \ldots \cdot \zeta^{i_r}
$$

sind die $\xi^{ik\ldots l}$ die Komponenten eines r-fach kontravarianten Tensors, den wir als äußeres Produkt oder r-Multivektor

$$
\xi \wedge \eta \wedge \ldots \wedge \zeta
$$

von $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ bezeichnen. Er genügt gewissen Symmetrierelationen wie man schon aus $\xi \wedge \eta$ mit den Komponenten $s^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$ erkennt. Es ist

$$
\xi \wedge \eta + \eta \wedge \xi = 0
$$

(Schiefsymmetrie, alternierende Multilinearform).

Sei jetzt V euklidisch mit Skalarprodukt (.,.). Dann kann man unter den unendlich vielen Isomorphismen von V^* auf V einen auszeichnen, der das Transformationsverhalten der Komponenten richtig wiedergibt.

Definition A.2.5: *Sei V euklidisch mit Basis $e_1, \ldots, e_n$. Durch*

$$
g_{ik} = (e_i, e_k)
$$

ist eine nichtsinguläre Matrix mit $g_{ik} = g_{ki}$,

$$
g_{ik}\xi^i\xi^k \geq c_0|\zeta|^2,\ \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R},
$$

c_0 eine positive Konstante, und ein zweifach kovarianter Tensor gegeben, den wir als den Fundamentaltensor bezeichnen.

Der tensorielle Charakter der g_{ik} folgt aus $\underline{w} = T^{*-1}\underline{e} = T^{-1*}\underline{e}$

$$\begin{aligned}(w_i, w_k) &= (\check{t}_i^j e_j,\ \check{t}_k^l e_l) \\ &= \check{t}_i^j \check{t}_k^l (e_j, e_l)\end{aligned}$$

(Vgl. (A.1.5), Definition A.2.2). Die Symmetrie $g_{ik} - g_{ki} = 0$ ist eine Folge der Symmetrie des Skalarprodukts in V und ein **Beispiel** für Definition A.2.1, 3.

Mit $\xi = \xi^i e_i$ folgt

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = ||\xi||^2,\ ||.|| = (.,.)^{\frac{1}{2}} = \text{ Norm in } V,$$

und daraus ergibt sich die positive Definitheit der Form $g_{ik}\xi^i\xi^k$.

Hilfssatz A.2.6: *Sei (g^{ik}) die zur Matrix (g_{ik}) inverse Matrix. Dann bilden die g^{ik} die Komponenten eines zweifach kontravarianten Tensorfeldes.*

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}t_i^p t_k^q g^{ik} \widetilde{g}_{qr} &= t_i^p t_k^q g^{ik} \check{t}_q^j \check{t}_r^l g_{jl}, \\ &= t_i^p t_k^q g^{ik} \check{t}_q^j \check{t}_r^l g_{jl}, \\ &= t_i^p \check{t}_r^l t_k^q \check{t}_q^j g^{ik} g_{jl}, \\ &= t_i^p \check{t}_r^l \delta_k^j g^{ik} g_{jl}, \\ &= t_i^p \check{t}_r^l g^{ik} g_{kl}, \\ &= t_i^p \check{t}_r^l \delta_l^i, \\ &= t_l^p \check{t}_r^l = \delta_r^p.\end{aligned}$$

Demnach ist

$$\widetilde{g}^{pq} = t_i^p t_k^q g^{ik}$$

bei Übergang zu einer neuen Basis. □

Da $\dim V^* = n$ ist, sind V und V^* isomorph. Doch läßt sich unter den unendlich vielen Isomorphismen von V auf V^* und umgekehrt zunächst keiner in willkürfreier Weise auszeichnen. Erst wenn V euklidisch ist, haben wir die folgende geänderte Situation:

Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V. Jedem kontravarianten Vektor

$$\xi = \xi^i e_i$$

ordnen wir vermöge

$$u_i = g_{ik}\xi^k = (e_i, \xi)$$

den kovarianten Vektor

$$u = u_i e^i$$

zu und erhalten so einen Isomorphismus $J : V \to V^*$, der von der Auswahl der Basis $e_1, \ldots, e_n$ unabhängig ist. Bei euklidischem V lassen wir daher die Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren fortfallen und sprechen nur noch von kovarianten und kontravarianten Komponenten eines Vektors schlechthin.

Im euklidischen Fall steht nun als Spezialfall der Verjüngung der Prozess des **Jonglierens oder Indexziehens** zur Verfügung.

Definition A.2.7: *Sei V euklidisch. Seien $T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}$ die n^{p+q} Komponenten eines p-fach kontravarianten, q-fach kovarianten Tensors. Wir schreiben im euklidischen Fall gelegentlich*

$$T^{ik\ldots l\to}{}_{\leftarrow rs\ldots t} \text{ statt } T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}$$

Derselbe Tensor kann zunächst durch seine rein kontravarianten Komponenten

$$T^{ik\ldots l\,rs\ldots t} = g^{r\rho}g^{s\sigma}\ldots g^{t\tau}\cdot T^{ik\ldots l}\rho\sigma\ldots\tau,$$

sodann aber auch durch $p+q$ Arten von $(p+q-1)$-fach kontravarianten, 1-fach kovarianten Komponenten

$$T^{k\ldots lrs\ldots t}{}_i = g_{i\iota}T^{\iota k\ldots lrs\ldots t},$$

ferner durch $\binom{p+q}{2}$ Arten von $(p+q-2)$-fach kontravarianten, 2-fach kovarianten Komponenten

$$T^{\ldots lrs\ldots t}{}_{ik} = g_{i\iota}g_{k\kappa}\cdot T^{\iota\kappa\ldots lrs\ldots t},$$
$$T_i^{k\ldots l\;\;s\ldots t}{}_r = g_{i\iota}g_{r\rho}\cdot T^{\iota k\ldots l\rho s\ldots t}$$

usw., und schließlich auch noch durch seine rein kovarianten Komponenten gegeben werden, also durch

$$T_{ik\ldots lrs\ldots t} = g_{i\iota}g_{k\kappa}\ldots g_{l\lambda}\cdot g_{r\rho}g_{s\sigma}\ldots g_{t\tau}T^{i\kappa\ldots\lambda\rho\sigma\ldots\tau}.$$

Im euklidischen Raum kann also ein Tensor $(p+q)$-ter Stufe durch $\binom{p+q}{0}+\binom{p+q}{1}+\ldots+\binom{p+q}{p+q}=2^{p+q}$ Arten von Komponenten gegeben werden.

Beispiele:

1. Das Symbol δ_{ik} wurde auf Seite 1 eingeführt. Es handelt sich um die Komponenten des Tensors $\mathcal{E} \in T_2$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x,y) &= \delta_{ik} e^i(x) e^k(y), \\ &= \delta_{ik} e^i(x^j e_j) e^k(y^l e_l), \\ &= \delta_{ik} x^j \delta^i_j y^l \delta^k_l, \\ &= \delta_{ik} x^i y_k, \\ &= \sum_{k=1}^{u} x^k y^k. \end{aligned}$$

Ist V euklidisch und $g_{ik} = (e_i, e_k) = \delta_{ik}$, so heißt die Basis $e_1, \ldots, e_n$ von V cartesisch. In diesem Falle stimmen kontravariante und kovariante Komponenten eines Tensors überein.

2. Der r-Multivektor $\xi \wedge \eta \wedge \ldots \wedge \zeta$ wurde in Beispiel 3 auf Seite 11 eingeführt. Sei V euklidisch. Seien $\xi_{ik\ldots l}$ die rein kovarianten Komponenten des Tensors $\xi^{ik\ldots l}$. Dann ist

$$\xi^{ik\ldots l}\xi_{ik\ldots l} \geq 0$$

und

$$I_r^2 = \frac{1}{r!}\xi^{ik\ldots l}\xi_{ik\ldots l}$$

eine Invariante. Im linearen Raum (s. §3) läßt sich I_r^2 als das Inhaltsquadrat des von $\xi, \eta, \ldots, \zeta$ aufgespannten r-dimensionalen Parallelepipeds interpretieren. Man kann zeigen

$$I_r^2 = \begin{vmatrix} ||I||^2 & (\xi,\eta) & \ldots & (\xi,\zeta) \\ (\eta,\xi) & ||\eta||^2 & \ldots & (\eta,\zeta) \\ & \vdots & & \\ (\zeta,\xi) & (\zeta,\eta) & \ldots & ||\zeta||^2 \end{vmatrix}$$

Hinweis: $(\xi,\eta) \in T_2^{p=0}$, ξ, η variabel,

$$(\xi,\eta) = g_{ik}\xi^i\eta^k.$$

Sind ξ, η fest, so ist also (ξ, η) eine Invariante im Sinn von Beispiel 2, Seite 11. Daher spricht man auch von der **invarianten quadratischen Form** $g_{ik}\xi^i\eta^k$.

3. Sei V euklidisch, seien $\xi, \eta \in V$. Der Bivektor $\xi \wedge \eta$ ist aus T^2 mit den Komponenten

$$\xi^{ik} = \xi^i\eta^k - \xi^k\eta^i$$

Sind $\xi_i = g_{ik}\xi^k$, $\eta_k = g_{kl}\eta^l$, $\xi_{ik} = g_{il}g_{kj}\xi^{lj} = \xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i$ die kovarianten Komponenten von ξ, η und

$$\xi \wedge \eta, \ \textbf{ist weiter} \ n = 3$$

$$g = \det(g_{ik}),$$

so verhalten sich

$$\rho^i = \frac{(-1)^{i\overbrace{(n-1)}^{=2}}}{\sqrt{g}}(\xi_{\underline{i+1}}\eta_{\underline{i+2}} - \xi_{\underline{i+2}}\eta_{\underline{i+1}})$$

$$\begin{aligned} \underline{i+1} &= \text{ Rest } i+1 \bmod n \geq 1, \\ \underline{i+2} &= \text{ Rest } i+2 \bmod n \geq 1, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \rho^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2), \\ \rho^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3), \\ \rho^3 &= \frac{1}{\sqrt{g}}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) \end{aligned}$$

wie die Komponenten eines kontravarianten Vektors, wenn wir **nur Basistransformationen** T **mit** $\det T > 0$ **zulassen** (siehe Seite 2). Darüberhinaus besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den ξ_{ik}, $1 \leq i < k \leq 3$ und den ρ^j, $1 \leq j \leq 3$. Der Vektor ρ mit den kontravarianten Komponenten ρ^1, ρ^2, ρ^2 heißt das Vektorprodukt

$$\rho = [\xi, \eta].$$

Wir rechnen das Transformationsverhalten der ρ^i nach:

$$\begin{array}{lcccc} \mathfrak{e} = T^*\mathfrak{w} & \frac{1}{\sqrt{g}} t_2^k t_3^j \widehat{\xi}_{kj} & = & \rho^1 & = \check{t}_j^1 \widehat{\rho}^j \\ \rho = T^{-1}\widehat{\rho} & \frac{1}{\sqrt{g}} t_3^k t_1^j \widehat{\xi}_{kj} & = & \rho^2 & = \check{t}_j^2 \widehat{\rho}^j \\ & \frac{1}{\sqrt{g}} t_1^k t_2^j \widehat{\xi}_{kj} & = & \rho^3 & = \check{t}_j^3 \widehat{\rho}^j \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\rho}^1 & = & \sum\limits_{\substack{(l,p,q)\in\{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ k,j}} t_l^1 t_p^k t_q^j \widehat{\xi}_{kj} \\ & = & \sum\limits_{k,j} \big(\sum\limits_{l,p,q\in\ldots} t_l^1 t_p^k t_q^j \big) \widehat{\xi}_{kj} \\ & \overset{\widehat{\xi}_{kk}=0}{=} & \sum\limits_{j<k} \sum\limits_{l,p,q\in\ldots} (t_l^1 t_p^k t_q^j - t_l^1 t_p^j t_q^k) \widehat{\xi}_{kj} \\ \text{kein Beitrag} & \overset{j=1}{=} & \sum\limits_{l,q,p\in\ldots} (t_l^1 t_p^3 t_q^2 - t_l^1 t_p^2 t_q^3) \widehat{\xi}_{32} \\ & = & -\widehat{\xi}_{32} \det T = \det T \widehat{\xi}_{23} \end{array}$$

$$(t_l^i t_m^k \widehat{g}_{ik}) = T^* G T \overset{\det T>0}{\Rightarrow} \text{ Behauptung.}$$

Bei einer cartesischen Basis $g_{ik} = \delta_{ik}$ erhält man das übliche, aus der linearen Algebra bekannte Vektorprodukt. Wie diese Untersuchung lehrt, ist dieses sog. Vektorprodukt von Hause aus kein Vektor, sondern ein schiefsymmetrischer Tensor zweiter Stufe, nämlich ein Bivektor, dessen kov. Komponenten $\xi_{ik} = \xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i$ sind. Nur durch die Beschränkung auf $n = 3$ und die Untergruppe aller Basistransformationen mit positiver (Funktional)determinante, also durch willkürliche, nicht durch die Natur des Raumes gegebene Auszeichnung eines bestimmten Schraubungssinnes, wird eine eindeutige Korrespondenz zwischen den schiefsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe und den Vektoren ermöglicht und damit eine Repräsentation dieser Tensoren durch Vektoren. Wir werden später auf diese Fragestellungen in verallgemeinerter Form zurückkommen.

Zunächst bleiben wir noch im euklidischen Vektorraum V mit cartesischer Basis. Die Anordnungen (1,2,3) und (2,3,1) und (3,1,2) heißen zueinander zyklische Vertauschungen. Alle anderen ((2,1,3) und (3,2,1) und (1,3,2)) nennen wir antizyklisch.

Im euklidischen Fall entfällt die Unterscheidung zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren, bei Verwendung einer cartesischen Basis auch der zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten. Es ist bei Verwendung einer cartesischen Basis im Euklidischen

$$[e_i, e_j] = e_k, \quad (i,j,k) \text{ zyklisch,}$$
$$[e_i, e_j] = -e_k \quad (i,j,k) \text{ antizyklisch}$$

so daß wir in

$$\mathcal{E}_{ijk} = (e_i, [e_j, e_k]) = \begin{cases} 1, \ (i,j,k) \text{ zyklisch zu } 1,2,3 \\ \\ -1, \ (i,j,k) \text{ antizyklisch zu } 1,2,3 \\ \\ 0, \ (i,j,k) \text{ sonstwie} \end{cases}$$

bei Beschränkung auf orthogonale Transf. T mit $\det T > 0$ einen schiefsymmetrischen Tensor dritter Stufe erhalten. Damit folgt

$$[\xi, \eta] = \sum_{i=1}^{3} c_i e_i$$

$$c_i = \sum_{1 \le j,\, k \le 3} \mathcal{E}_{ijk} \xi_j \eta_k$$

Dies steht in Übereinstimmung mit meinen Definitionen [L, S. 107, 137]:

$$[\xi, \eta] = \sum_{(i,k,l) \in \pi_z(1,2,3)} (\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i) e_l$$

$$rot \widehat{z} = \sum_{(i,k,l) \in \pi_z(1,2,3)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \widehat{z}_k - \frac{\partial}{\partial x_k} \widehat{z}_i \right) e_l,$$

$$\pi_z(1,2,3) = \{(2,3,1), (3,1,2), (1,2,3)\}.$$

4. Sei $\mathcal{A} : V \to V$ eine lineare Abbildung von V in sich. Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, $\xi^* = \mathcal{A}(\xi)$, $\xi^* = \xi^{*i} e_i$, $\xi = \xi^i e_i$, also

$$\xi^{*i} = A^i_k \xi^k \text{ mit}$$
$$\mathcal{A}(e_k) = A^i_k e_i.$$

Bei Übergang zu einer neuen Basis $\underline{e} = T^* \underline{w}$ gilt, wie man leicht nachrechnet

$$\widetilde{A}^i_k = t^i_j \check{t}^l_k A^j_l$$

Die A^i_k sind also die Komponenten eines einfach kontravarianten, einfach kovarianten Tensors.

Ist V euklidisch, so entsteht

$$A_{ik} = g_{ij} A^j_k,$$

ist die Basis cartesisch, so haben wir

$$A_{ik} = A^i_k.$$

Die zu den A^i_k gehörige Linearform $\mathcal{E} \in T^1_1$ ist

$$\mathcal{E}(u, x) = A^i_k e_i(u) e^k(x)$$

in Basisdarstellung.

Zu Beispiel 4: Die Formel für $\widetilde{A}^i_k$ bedeutet

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= TAT^{-1} \text{ oder} \\ A &= T^{-1}\widetilde{A}T \end{aligned}$$

und beschreibt A bzw. $\widetilde{A}$ nach der Basistransformation $\underline{w} = T^{*-1}\underline{e}$ bzw. $\underline{e} = T^*\underline{w}$. Sie führt bei geeigneter Wahl von T auf die Jordansche Normalform.

Wir schließen mit einigen **Merkregeln**: V VRaum der Dimension n über $\mathbb{R}$. Sei

$T = (t^i_j)$ $n \times n$-Matrix mit $\det T \neq 0$, Zeilenindex oben. $T^{-1} =: (\check{t}^i_j)$.

Basisübergang:

$$\boxed{\underline{\mathbf{e}} = \mathbf{T}^*\underline{\mathbf{w}}}$$

$\widetilde{.}$ bezieht sich i. f. auf $\underline{w}$-Basis. Dann folgt für die dualen Basen

$$\boxed{\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{T}^{-1}\overline{\mathbf{w}}}$$

für die Komponentenspalten in V:

$$\boxed{\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{T^{-1}}\overline{\overline{\mathbf{x}}}} \text{ (kontravariant)},$$

für die Komponentenspalten in V^*:

$$\boxed{\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^*\underline{\widetilde{\mathbf{u}}}} \text{ (kovariant)}$$

für Tensorkomponenten allgemein.

$$\widetilde{T}^{ik\dots l}_{rs\dots t} = t^i_\iota t^k_\kappa \dots t^l_\lambda \check{t}^\rho_r \check{t}^\sigma_s \cdot \dots \cdot \check{t}^\tau_t T^{\iota\kappa\dots\lambda}_{\rho\sigma\dots\tau}.$$

Umkehrung des Basisübergangs:

$$\begin{aligned}
\underline{w} &= (T^{-1})^*\underline{e}, \\
\overline{w} &= T\overline{e}, \\
\overline{\overline{x}} &= T\overline{x}, \\
\underline{\widetilde{u}} &= (T^{-1})^*\underline{u}.
\end{aligned}$$

$$T^{ik\dots l}_{rs\dots t} = \check{t}^i_\iota \check{t}^k_\kappa \dots \check{t}^l_\lambda t^\rho_r t^\sigma_s \cdot \dots \cdot t^\tau_t \widetilde{T}^{\iota\kappa\dots\lambda}_{\rho\sigma\dots\tau}$$

Es handelt sich also bei der Umkehrung des Basisübergangs um ein Austauschen der Leerstellen über t mit dem Symbol „ˇ “.

Wir befassen uns noch mit der Herstellung von Tensoren. Sei V ein Vektorraum der Dimension n mit Basis $e_1, \dots, e_n$. Dieser Basis ordnen wir n^{p+q} willkürliche Zahlen $T^{ik\dots l}_{rs\dots t}$ zu und setzen

$$\mathcal{T}(u_1, \dots, u_p, x^1, \dots, x^q) = \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_p \le u, \\ 1 \le j_1, \dots, j_q \le u}} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} e_{i_1}(u_1) \cdot \dots \cdot e_{i_p}(u_p) \cdot e^{j_1}(x^1) \cdot \dots \cdot e^{j_q}(x^q)$$

Dann ist $\mathcal{T} \in T^p_q$. Vermöge

$$\begin{aligned}
e_{i_1} &= t^k_{i_1} w_k, \dots \\
e^{j_1} &= \check{t}^{j_1}_k w^k, \dots
\end{aligned}$$

bei Übergang zu einer neuen Basis $w_1, \dots, w_n$ in V erhält man sofort

$$\mathcal{T}(u_1, \dots, u_p, x^1, \dots, x^q) = \underbrace{t^{k_1}_{i_1} \dots t^{k_p}_{i_p} \check{t}^{j_1}_{l_1} \dots \check{t}^{j_q}_{l_q} T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}}_{= \widetilde{T}^{k_1\dots k_p}_{l_1\dots l_p}} \begin{array}{l} w_{k_1}(u_1) \cdot \dots \cdot w_{k_p}(u_p). \\ w^{l_1}(x^1) \cdot \dots \cdot w^{l_q}(x^q). \end{array}$$

als invarianten Ausdruck. Tensoren gibt es wie Sand am Meer (s. §3, Ende für die Herstellung von Tensorfeldern).

§3. Mannigfaltigkeiten. Der lineare Raum

Sei (Ω, T) ein topologischer separierter Raum (Hansdorffraum). Eine Folge (P_n) von Punkten $P_n \in \Omega$ heißt konvergent gegen $P(P_n \to P)$, wenn in jeder P enthaltenden offenen Menge fast alle P_n liegen. Sei (Ω', T') ein weiterer Hansdorffraum. Die Abbildung $\varphi : \Omega \to \Omega'$ heißt stetig, wenn aus $P_n \to P$ folgt $\varphi(P_n) \to \varphi(P)$.

Definition A.3.1: *Eine n-dimensionale Mannigfalt M der Klasse C^k, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, ist ein Hausdorffraum $M = (\Omega, T)$ mit folgenden Eigenschaften: Es gibt ein System von offenen Mengen U_μ, $\mu \in I$, mit*

I.
$$\Omega = \bigcup_{\mu \in I} U_\mu$$

II. *Zu $U_\mu \exists O_\mu \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f_\mu : U_\mu \to O_\mu$ topologisch.*

III. *Sei $U_\mu \cap U_\nu \neq \phi$. Dann sind*

$$f_\mu \circ f_\nu^{-1} : f_\nu(U_\nu \cap U_\mu) \to f_\mu(U_\nu \cap U_\mu)$$

k-Mal stetig differenzierbar und

$$\det I_{f_\mu \circ f_\nu^{-1}} \neq 0$$

IV. *Sind $\widetilde{U}_\lambda$, $\lambda \in \widetilde{I}$ ein weiteres System von offenen Mengen in Ω mit Abbildungen $\widetilde{f}_\lambda$ von $\widetilde{U}_\lambda$ auf $\widetilde{O}_\lambda$, das den Axiomen I. bis III. genügt. Sei $U_\mu \cap \widetilde{U}_\lambda \neq \phi$. Das System $\widetilde{U}_\lambda$, $\lambda \in \widetilde{I}$ heißt zulässig, wenn $f_\mu \circ \widetilde{f}_\lambda^{-1} : \widetilde{f}_\lambda(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu) \to f_\mu(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu)$ k-Mal stetig differenzierbar ist und $\det I_{f_\mu \circ \widetilde{f}_\lambda^{-1}} \neq 0$ ist.*

Das System der $(O_\lambda, f_\mu, U_\mu)$ nennen wir einen Atlas von M. Das Tripel $O_\mu, f_\mu, U_\mu)$ heißt eine Karte von M. Die $x^i_\mu(P)|i = 1, \ldots, n = f_\mu(P)$ heißen ein Koordinatensystem von M. Für $f_\mu \circ f_\nu^{-1}$ schreiben wir

$$x^j_\mu = x^j_\mu(x^i_\nu)$$

und III. in Def. A.3.1 bedeutet insbesondere

$$\det \frac{\partial x^j_\mu}{\partial x^i_\nu} \neq 0$$

Meist ist I unendlich oder abzählbar unendlich. Die f_μ bilden sozusagen ein Urkoordinatensystem von M und die Einführung eines neuen Koordinatensystems ist in Def. A.3.1, IV. geregelt. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit trägt zunächst noch keine differentialgeometrische, sondern nur eine topologische Struktur. Alle geometrischen Eigenschaften werden unabhängig vom gewählten Koordinatensystem sein müssen.

Wir weisen darauf hin, daß mit einer Mannigfaltigkeit $M = (\Omega, T)$ auch $V \subset \Omega$, V offen und versehen mit der Relativtopologie T_V, zu einer Mannigfaltigkeit wird: Es ist

$$V = \bigcup_{\mu \in I,\, V \cap U_\mu \neq \phi} V \cap U_\mu$$

Der Atlas ist $\{(0_\mu \cap f_\mu(V \cap U_\mu), f_\mu | V \cap U_\mu, V \cap U_\mu) | \mu \in I, V \cap U_\mu \neq \phi\}$.

Als erstes geometrisches Objekt führen wir für eine C^k-Mannigfaltigkeit M den Tangentialraum $T_P(M)$ im Punkte $P \in M$ ein.

Definition A.3.2: *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei M eine C^k-Mannigfaltigkeit. Sei $\varphi : I \to M$ stetig. Dann heißt $(I, \varphi, \varphi(I))$ eine Kurve in M. Eine Kurve in M heißt m-Mal stetig differenzierbar ($m \leq k$), wenn die Koordinaten $x^i(t)$ von $P(t) \in \varphi(I)$, $t \in I$, in irgendeinem Koordinatensystem m-Mal stetig differenzierbar nach t sind. Eine mindestens einmal stetig differenzierbare Kurve heißt glatt. Eine aus endlich vielen glatten Stücken zusammengesetzte Kurve heißt stückweise glatt.*

Führen wir neue Koordinaten vermöge

$$\begin{aligned} x^j &= x^j(\overline{x}^i) \text{ bzw.} \\ \overline{x}^j &= \overline{x}^j(x^i) \end{aligned}$$

ein, so sehen wir mit der Kettenregel, daß die Begriffe „glatt usw.“ von der Auswahl des Koordinatensystems gemäß Def. A.3.1 IV unabhängig sind.

Definition A.3.3: *Sei $M = (\Omega, T)$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei $P \in \Omega$ ein fester Punkt. Von zwei durch P laufenden glatten Kurven, in Koordinaten $x^i(t), y^i(t)$ bezüglich desselben Koordinatensystems, sagen wir, sie haben in P den gleichen Tangentenvektor $\mathfrak{t}$, wenn in P gilt*

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dy^i}{dt}$$

Diese Definition ist wegen der Kettenregel vom Koordinatensystem unabhängig.

Mit Definition A.3.3 haben wir eine Äquivalenzrelation für alle durch P laufenden glatten Kurfen definiert, und zwar unabhängig vom Koordinatensystem: Zwei solche Kurven sind äquivalent, wenn sie in P den gleichen Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ haben. Man überlegt sich leicht, daß die drei Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Symmetrie, Reflexivität und Transitivität erfüllt sind.

Definition und Satz A.3.4: *Die Tangentenvektoren in P selbst werden als die durch die obige Relation gegebenen Äquivalenzklassen definiert. Dann bilden die Tangentenvektoren in P einen n-dimensionalen Vektorraum $T_P(M)$ über $\mathbb{R}$, den Tangentialraum.*

Beweis: Ohne Einschränkung sei $I = (-\varepsilon, +\varepsilon)$, vgl. Definition A.3.2, P habe die Koordinaten $x^i(0)$. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wenn $x^i(t)$ den Tangentenvektor $\mathfrak{t}$ hat, so ist für $z^i(t) = x^i(c \cdot t)$ gerade

$$\frac{dz^i}{dt}(0) = c\frac{dx^i}{dt}(0)$$

Die Kurven $x^i(c\cdot t)$ liegen bei festem c in ein- und derselben Äquivalenzklasse, wenn die $x^i(t)$ eine Äquivalenzklasse durchlaufen. Wir bezeichnen diese Klasse mit $c\mathfrak{t}$. Nun muss noch die Addition von Tangentenvektoren erklärt werden. Durchlaufen $x^i(t)$, $x_1^i(t)$ alle Kurven einer Klasse, Tangentenvektor $\mathfrak{t}$, und $y^i(t)$, $y_1^i(t)$ alle Kurven einer anderen Klasse, Tangentenvektor $\mathfrak{u}$, so gehören alle $x^i(t) + y^i(t) - (x^i(0) = y^i(0))$ ein- und derselben Klasse an, denn gilt in P die Beziehung $\frac{dx^i}{dt}(0) = \frac{dx_1^i}{dt}(0)$ und $\frac{dy^i}{dt}(0) = \frac{dy_1^i}{dt}(0)$, so folgt

$$\frac{d}{dt}(x^i + y^i)(0) = \frac{d}{dt}(x_1^i + y_1^i)(0).$$

Diese Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $\mathfrak{t}+\mathfrak{u}$. Diese Unabhängigkeit der Definitionen von $c\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}+\mathfrak{u}$ vom Koordinatensystem bestätigen wir wieder mit der Kettenregel. Daß die Tangentenvektoren bei dieser Multiplaktion mit reellen Zahlen und bei dieser Addition einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bilden, kann man wieder in einem speziellen Koordinatensystem durch direkten Nachweis der Axiome des Vektorraums nachprüfen. Aus der Kettenregel folgt dann wieder die Gültigkeit bezüglich jedes Koordinatensystems. Da

$$x^i(t) = t\delta^i_k + x^i(0)$$

Kurven mit den Tangentenvektoren $(dx^i/dt)(0) = \delta^i_k$ in P sind, aus denen man alle Tangentenvektoren $(dy^i/dt)(0)$ linear kombinieren kann, folgt, daß die Dimension des Vektorraums der Tangentenvektoren in P gerade n ist. $\square$

Beispiel: Sei M k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ wie in meiner Vorlesung Mathematik für Physiker III, §7. In §8 hatten wir dort den Tangentialraum konstruiert. t^i sind die Koordinaten einer Karte $(W, \varphi^{-1}, V = M \cap U)$, $1 \leq i \leq k$ im Sinn von Def. A.3.1 bzw. $(W, \varphi,\ V = M \cap U)$ im Sinn von Mathematik für Physiker III, §7.

Mit diesem Atlas und der Relativtopologie bildet $M = (\Omega, T)$ eine k-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinn der Definition A.3.1. Ω ist jetzt die „Punktmenge“ M, T ist die Relativtopologie in dieser Punktmenge. Im Unterschied zu Def. A.3.1 ist M in einem größeren Raum, nämlich $\mathbb{R}^n$ eingebettet, wenn $k \leq n-1$ ist. Das hatten wir uns bei der Definition des Tangentialraums in §8 zu Nutze gemacht. Ist $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ der Kurvenparameter, so ist nach Definition A.3.4.

$\left(\frac{d}{d\tau}t^i\right)(0)$ der Tangentenvektor bzw. der Repräsentant der Äquivalenzklasse.

Nach „Mathematik für Physiker III“, §8, ist ein Vektor der Form $\lambda_1(\partial\varphi|\partial t^1)(t^i(0)) + \ldots + \lambda_k(\partial\varphi|\partial t^k)(t^i(0))$, nämlich

$$\frac{d\varphi(t^i(\tau))}{d\tau}|_{\tau=0} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial t^j}(t^i(0))$$

$$\frac{d\varphi}{dt^j}(t^i(0))\underbrace{\frac{dt^j}{d\tau}(0)}_{=\lambda j}$$

Ist nun $\frac{d}{d\tau}\widetilde{t^i}(0) = \frac{d}{d\tau}\overset{\approx}{t}{}^i(0)$ für zwei Kurven in W, so ist offenbar

$$\frac{d\varphi(\widetilde{t^i}(\tau))}{d\tau}|_{\tau=0} = \frac{d\varphi(\overset{\approx}{t}{}^i(\tau))}{d\tau}|_{\tau=0}$$

nach obiger Formel für $d\varphi(t^i(\tau))/d\tau$. Ist umgekehrt für zwei Kurven $\widetilde{t^i}(\tau)$, $\overset{\approx}{t}{}^i(\tau)$ in W durch $\varphi(\widetilde{t^i}(0)) = \varphi(\overset{\approx}{t}{}^i(0))$ auch

$$0 = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\varphi}{\partial t^j}(\widetilde{t^i}(0) = \overset{\approx}{t}{}^i(0)) \cdot (\frac{d\widetilde{t^j}}{d\tau}(0) - \frac{d\overset{\approx}{t}{}^j}{d\tau}(0)),$$

so folgt mit der linearen Unabhängigkeite der $\partial\varphi/\partial t^1, \ldots, \partial\varphi/\partial t^k$, daß

$$\frac{d\widetilde{t}^j}{d\tau}(0) = \frac{d\overset{\approx}{t}^j}{d\tau}(0)$$

ist, also die Kurven in derselben Äquivalenzklasse gemäß Definition A.3.4 liegen. Damit haben wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Tangentenvektoren gemäß Definition A.3.4 und den Tangentenvektoren $\lambda_1\partial\varphi/\partial t^1 + \ldots + \lambda_k\partial\varphi/\partial t^k$ hergestellt.

Definition und Satz A.3.5: *Sei $M = (\Omega, T)$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k. Sei durch f_μ mit $x^i_\mu(P) = f_\mu(P)$ ein Urkoordinatensystem von M gegeben. Sei $P_0 \in \Omega$ ein beliebiger aber fester Punkt aus Ω. P_0 habe die Koordinaten x^i_0. In $T_{P_0}(M)$ ist eine Basis besonders ausgezeichnet, nämlich diejenige mit den Basisvektoren $\mathfrak{e}_i$, die Tangentenvektoren an die Kurven $x^k(t) = x^k_0$, $k \neq i$, $x^i(t) = t + x^i_0$, d.h.*

$$\mathfrak{e}_i = \begin{cases} \ddot{A}\textit{quivalenzklasse mit Repr.} \\ \lim \frac{1}{t} \qquad \underbrace{(x^k(t) - x^k_0)}_{\textit{Spalte mit } n \textit{ Komponenten}} \\ t \to 0, t \neq 0 \end{cases}$$

Bei Übergang zu einem neuen KS $\overline{x}^i$ vermöge $x^i = x^i(\overline{x}^j)$ hat man in P_0 mit den Koordinaten $\overline{x}^j_0$ eine entsprechend ausgezeichnete Basis $\mathbf{e}_k$ in $T_{P_0}(M)$ Es ist in P_0

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= t^j_i \overline{\mathbf{e}}_j,\ t^j_i = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}(x^l_0) \\ \overline{\mathbf{e}}_j &= \check{t}^i_j \mathbf{e}_i,\ \check{t}^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}(\overline{x}^l_0) \end{aligned}$$

Zu Folge dessen transformieren sich, da mit $T = (t^i_j)$ gerade $T^{-1} = (\check{t}^i_j)$ ist, die Komponentenspalten eines Vektors in $V = T_{P_0}(M)$ nach dem Gesetz

$$\overline{x} = T^{-1}\overline{\widetilde{x}}$$

($\overline{\widetilde{}}$ bezieht sich auf die Basis $\overline{\mathbf{e}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$).

Für den Cotangentialraum $V^* = T^*_{P_0}(M)$ gelten dann automatisch die Gesetze aus den Merkregeln in §2.

Beweis: Entscheidend ist, daß mit jedem Punkt P_0 der vom Koordinatensystem unabhängige Tangentialraum $V = T_{P_0}(M)$ und sein Dualraum

$V^* = T^*_{P_0}(M)$ verbunden sind (Definition und Satz A.3.4). Ist $x^i(t)$ eine Kurve, die im neuen KS durch $\overline{x}^k(t)$ gegeben ist, so folgt aus der Kettenregel wegen $x^i(t) = x^i(\overline{x}^k(t))$ gerade

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\dot{\overline{x}}^k(t)$$

Da der Tangentenvektor in P_0 unabhängig von der Basis definiert ist, muss gelten

$$\begin{aligned} \dot{x}^i\mathbf{e}_i &= \dot{\overline{x}}^k\overline{\mathbf{e}}_k \\ \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^k}\dot{\overline{x}}^k\mathbf{e}_i &= \dot{\overline{x}}^k\check{t}^i_k\mathbf{e}_i \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden $\check{t}^i_k$. Wegen der Willkür der $\dot{\overline{x}}^k$ in P_0 folgt

$$\check{t}^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j},$$

und aus der Kettenregel ergibt sich

$$t^j_i = \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^i}.$$

Der Rest der Behauptung folgt aus (A.1.4) und Satz A.1.3 oder insgesamt aus den Merkregeln am Ende von §2. □

Demnach verhalten sich die Vektoren des Tangentialraums $V = T_P(M)$ wie kontravariante Vektoren bei zulässigen Koordinatentransformationen. Dies gibt Veranlassung zur Definition von Tensorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit.

Definition A.3.6: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit und von der Klasse C^k. Seien $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Eine Abbildung $\mathcal{T}$ mit*

$$\Omega \ni P \longmapsto \mathcal{T}_P : \underbrace{T^*_P(M) \times \ldots \times T^*_P(M)}_{p-\text{Mal}} \times \underbrace{T_P(M) \times \ldots \times T_P(M)}_{q-\text{Mal}} \to$$

$$\to \mathbb{R},\ \mathcal{T}_P \in T^p_q(V)$$

mit $V = T_P(M)$ heißt p-fach kontravariantes, q-fach kovariantes Tensorfeld $(p+q)$-ter Stufe auf M. $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}(P)$ ist insbesondere vom KS unabhängig.

Andere Schreibweise:

$$\mathcal{T}:\Omega\to\bigcup_{P\in\Omega}T^p_q(T_P(M)),$$

$$P\longmapsto\mathcal{T}_P\in T^p_q(T_P(M)).$$

Definition und Satz A.3.7: *Sei $M=(\Omega,T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit von der Klasse C^k. Sei x^i ein Koordinatensystem. Sei $P_0\in\Omega$ beliebig, aber fest. P_0 liege in der Karte (O,f,U) mit $x^k(P)=f^k(P)$, $P\in U$. Die Vektoren*

$$\mathbf{e}_i=\begin{cases}\lim\frac{f(P)-f(P_0)}{x^i-x^i_0}\\ x^i\to x^i_0\end{cases},$$

$$f^k(P)=f^k(P_0)+\delta^k_i(f^i(P)-f^i(P_0)),\ 1\le k\le n,$$

$$=\begin{cases}\textit{Äquivalenzklasse mit Repräsentant}\\ \lim_{\substack{t\to0,\\ t\neq0}},\frac{1}{t}(x^k(t)-x^k_0),\end{cases}$$

$$t=f^i(P)-f^i(P_0),$$
$$x^k(t)=x^k(P)=f^k(P)=f^k(P_0)+\delta^k_i t$$

aus Definition und Satz A.3.5 heißen die von x^i in P_0 induzierte Basis von $V=T_{P_0}(M)$. Die Komponenten in P_0 eines Tensorfeldes $\mathcal{T}_p$ von $(p+q)$-ter Stufe auf M sind die Komponenten

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(P_0):=T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x^i_0):=\mathcal{T}_{P_0}(\mathbf{e}^{i_1},\ldots,\mathbf{e}^{i_p},\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_q})$$

von $\mathcal{T}_{P_0}=\mathcal{T}(P_0)$ bezüglich der in P_0 induzierten Basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Gehen wir zu einem anderen Koordinatensystem $\overline{x}^i$ über, in dem P_0 die Koordinaten $\overline{x}^i_0$ hat, so gilt bezüglich der von $\overline{x}^i$ induzierten Basis von $V=T_{P_0}(M)$ das Transformationsgesetz ($\widetilde{\cdot}$ bezieht sich auf $\overline{x}^i$)

(A.3.1)

$$\widetilde{T}^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}(\overline{x}^h_0)=\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^\iota}(x^h_0)\frac{\partial\overline{x}^k}{\partial x^\kappa}(x^h_0)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^\lambda}(x^h_0)\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^r}(\overline{x}^h_0)\frac{\partial x^\sigma}{\partial\overline{x}^s}(\overline{x}^h_0)\cdot\ldots\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial x^\tau}{\partial\overline{x}^t}(\overline{x}^h_0)T^{\iota\kappa\ldots\lambda}_{\rho\sigma\ldots\tau}(x^h_0),$$

(A.3.2)

$$T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}(x^h_0)=\frac{\partial x^i}{\partial\overline{x}^\iota}(\overline{x}^h_0)\frac{\partial x^k}{\partial\overline{x}^\kappa}(\overline{x}^h_0)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x^l}{\partial\overline{x}^\lambda}(\overline{x}^h_0)\frac{\partial\overline{x}^\rho}{\partial x^r}(x^h_0)\frac{\partial\overline{x}^\sigma}{\partial x^s}(x^h_0)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\overline{x}^\tau}{\partial x^t}(x^h_0)\widetilde{T}^{\iota\kappa\ldots\lambda}_{\rho\sigma\ldots\tau}(\overline{x}^h_0),$$

$$x^h = x^h(\overline{x}^i),$$
$$\overline{x}^h = \overline{x}^h(x^i).$$

Beweis: Folgt aus Definition und Satz A.3.5 und den Merkregeln am Ende von §2. $\square$

Bemerkungen:

1. **k-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.**
   Sei Rang $\left(\frac{\partial x^i}{\partial t^j}\right)_{1\leq i,j\leq k} = k$. Wir ergänzen $t_1, \ldots, t_k$ zu einem KS des $\mathbb{R}^n$ durch $t_{k+1}, \ldots, t_n$. Transform.: $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$, $1 \leq i \leq k$, $= x_i(t_1, \ldots, t_k) + t_i$, $k+1 \leq i \leq n$. Induz. Basis:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{e}}_j &= \frac{\partial x^i}{\partial t^j}\mathfrak{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial t^j},\ 1 \leq j \leq k, \\ \overline{\mathfrak{e}}_j &= \mathfrak{e}_j\ \ k+1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

2. Man schreibt $\frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e_i}$, $dx^i = e^i$ für die induzierten Basen in $V = T_P(M)$ bzw. $V^* = T_P^*(M)$. Sie sind Tensorfelder auf M mit den Komponenten δ_i^k bzw. δ_k^i.

3. Es ist nun zu erläutern wie sich die **Herstellung von Tensorfeldern** vollzieht. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k mit Koordinatensystem x^i. Sei

   (A.3.3)
$$\Omega = \bigcup_{\mu\in I} U_\mu$$

   (vgl. Definition A.3.1). Seien n^{p+q} Funktionen $T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t} : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben. Bezüglich der jeweils von x^i induzierten Basis von $V = T_P(M)$ definieren wir mit dem $T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}(P)$ eine Multilinearform $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}(P) \in T^p_q(V)$ mit den Komponenten $T^{ik\ldots l}_{rs\ldots t}(P)$ indem wir jedem P ein $U_\mu = U_\mu(P)$ mit $P \in U_\mu(P)$ zuordnen und mit dem KS in U_μ definieren

$$\mathcal{T}(P)(u_1, \ldots, u_p, x^1, \ldots, x^q) := \sum_{\substack{1\leq i_1,\ldots i_p \leq u,\\ 1\leq j_1,\ldots j_q\leq u}} T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(P)$$

$$\mathbf{e}_{i_1}(u_1)\cdot \ldots \cdot \mathbf{e}_{i_p}(u_p)\cdot \mathbf{e}^{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot \mathbf{e}^{j_q}(x^q)$$

   (Vgl. S. 14, die u_i sind aus $V^* = T_P^*(M)$, die $x_1, \ldots, x^q$ aus $V = T_P(M)$ und hier ausnahmsweise kein KS!) Geht man zu einem anderen KS $\overline{x}^j$ vermöge $x^i = x^i(\overline{x}^j)$, $\overline{x}^j = \overline{x}^j(x^i)$ über, so entsteht

$$\mathcal{T}(P)(u_1,\dots,u_p,x^1,\dots,x^q) = \sum_{\substack{1\le i_1,\dots,i_p\le u,\\ 1\le j_1,\dots,j_q\le u}} \widetilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(P,\overline{x}^j)$$

$$\overline{\mathbf{e}}_{i_1}(u_1)\cdot\ldots\cdot\overline{\mathbf{e}}_{i_p}(u_p)\cdot\overline{\mathbf{e}}^{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot\overline{\mathbf{e}}^{j_q}(x^q)$$

mit gewissen Zahlen $\widetilde{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(P,\overline{x}^j)$. Unter den Begriff des Übergangs zum KS $\overline{x}^j$ fällt auch der Fall $P\in U_\mu\cap U_\nu$, $\mu\ne\nu$ (Vgl. Def. A.3.1., II.). Mit der Abhängigkeit von

$$T^{ik\dots l}_{rs\dots t}(x^j) := T^{ik\dots l}_{rs\dots t}(P),$$
$$\widetilde{T}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(\overline{x}^j) := \widetilde{T}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(P,\overline{x}_j),$$

folgen aus der Invarianz des Ausdrucks $\mathcal{T}(P)(u_1,\dots,u_p,x^1,\dots,x^q)$ (Vgl. S. 11) gegen Koordinatentransformationen sofort (A.3.1, 2), die also sozusagen von selbst gelten. Ist jedoch x^j ein globales KS und $\overline{x}^i$ ein lokales KS und definiert man $\widetilde{T}^{ik\dots l}_{rs\dots t}$ durch (A.3.1), so stellen die $\widetilde{T}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(\overline{x}^h)$ die Komponenten eines Tensorfelds dar, ohne daß man einen Fortsetzungsprozess bemühen muss. Nun lösen wir uns noch von der Annahme, daß die $T^{ik\dots l}_{rs\dots t}$ global auf Ω definiert sind. Wir beziehen uns auf (A.3.2) und gehen von je n^{p+q} Funktionen

$$\underbrace{T}_{\mu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t} : U_\mu \to \mathbb{R},$$

$\mu\in I$, aus. Sei $P\in U_\mu\cap U_\nu$. Dann gelte

(A.3.4)

$$\underbrace{T}_{\nu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(P) = \frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^\iota}(x^h)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\overline{x}^l}{\partial x^\lambda}(x^h)\frac{\partial x^\rho}{\partial\overline{x}^r}(\overline{x}^h)\cdot\ldots\cdot\frac{\partial x^\tau}{\partial\overline{x}^t}(\overline{x}^h)\cdot\underbrace{T}_{\mu}{}^{\iota\kappa\dots\lambda}_{\rho\sigma\dots\tau}(P)$$

mit $\overline{x}^h = x^h_\nu(x^i_\mu)$, $x^h = x^h_\mu(x^i_\nu)$, d.h., wenn P die Koordinaten $\overline{x}^h = x^h_\nu$ in 0_ν und $x^h = x^h_\mu$ in 0_μ hat und wir

$$\underbrace{T}_{\nu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(\overline{x}^h = x^h_\nu) := \underbrace{T}_{\nu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(P),$$

$$\underbrace{T}_{\mu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(x^h = x^h_\mu) := \underbrace{T}_{\mu}{}^{ik\dots l}_{rs\dots t}(P)$$

setzen, gilt (A.3.1). Aus (A.3.1) folgt (A.3.2). Durch

$$\mathcal{T}_\mu(P)(u_1,\ldots,u_p,x^1,\ldots,x^q) = \sum_{\substack{1\le i_1,\ldots,i_p\le u,\\ 1\le j_1,\ldots,j_q\le u}} \underbrace{T}_{\mu}{}^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x^h = x^h_\mu)$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}_{i_1}(u_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{e}_{i_p}(u_p)\cdot\mathbf{e}^{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{e}^{j_q}(x^q),\\ &P\in U\mu, u_i\in T_P^*(M), x^j\in T_P(M),\end{aligned}$$

ist ein Tensorfeld auf M gegeben da für $P \in U_\mu \cap U_\nu$ aus (A.3.4) folgt: $\mathcal{T}_\mu(P) = \mathcal{T}_\nu(P)$. Ein Beispiel zur lokalen Vorgabe der Tensorkomponenten findet sich unmittelbar im Anschluß an diese Erörterungen (Beispiel 4). Wir weisen noch darauf hin, daß ähnlich wie auf Seite 20 bei Umkehrung der Koordinatentransformation in (A.3.1, 2) ein Austausch der Leerstelle über x mit den Symbol „-“stattfindet.

Wir geben jetzt noch einen **Hinweis zu Definition und Satz A.3.5:** Die induzierte Basis $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ besteht stets aus den Äquivalenzklassen mit den Repräsentanten $e_1,\ldots,e_n$ = Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$. Die Äquivalenzklassen hängen von P ab, jedoch wird die Abhängigkeit der Basis von P erst durch die Transformationsformel $\overline{\mathbf{e}}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^j}\mathbf{e}_i$ für die induzierte Basis beim Übergang von x^i zu $\overline{x}^i$ klar.

Beispiele:

1. Sei M Mannigfaltigkeit, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. φ ist ein Tensorfeld nullter Stufe.

2. Sei M Mannigfaltigkeit mit KS x^j. Sei eine Zuordnung

$$\begin{aligned}\Omega \ni P \;\;\to\;\; &\xi = \xi^i(x^j)\mathbf{e}_i \in T_P(M)\\ &\xi^i = \xi^i(x^j) \text{ mit } (A.3.1, 2)\end{aligned}$$

gegeben. Vermöge

$$\begin{aligned}\xi(u) &= \xi^i(x^j)\mathbf{e}_i(u),\\ &= \xi^i(x^j)\mathbf{e}_i(u_j\mathbf{e}^j)\\ &= \xi^i(x^j)u_i\end{aligned}$$

und Satz A.1.2 bilden also die $\xi^1,\ldots,\xi^n = \xi^1(x^j),\ldots,\xi^n(x^j)$, die Komponenten eines einfach kontravarianten Tensorfeldes.

3. Sei eine Zuordnung

$$\begin{aligned}\Omega \in P \;\; \rightarrow \;\; & u = u_i(x^j)\mathbf{e}^i \in T_P^*(M)\\ & u_i = u_i(x^j) \text{ mit (A.3.1,2)}\end{aligned}$$

gegeben. Dann bilden die $u_1, \ldots, u_n = u_1(x^j), \ldots, u_n(x^j)$ die Komponenten eines einfach kovarianten Tensorfelden.

4. Sei $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei x^j ein KS, $\varphi(P) = \varphi(x^j)$. In 0_μ, $\mu \in I$, sei φ stetig differenzierbar (vgl. Definition A.3.1). Dieser Begriff ist, ebenso wie bei Tensorfeldern, von der Auswahl des KS wegen der Kettenregel unabhängig. Gegen wir zu einem neuen KS $\overline{x}^k$ über, so entsteht mit $\varphi(x^j) = \overline{\varphi}(\overline{x}^j)$ nach der Kettenregel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x^l) = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \overline{x}^k}(\overline{x}^i(x^l))\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^j}(x^l)$$

Nach (A.3.2) und Beispiel 3 ist also die Zuordnung

$$\Omega \ni P \to u = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x^l)\mathbf{e}^i \in T_P^*(M)$$

ein einfach kovariantes Tensorfeld. Demnach bildet der Gradient einer Funktion φ ein einfach kovariantes Tensorfeld. In diesem einfachen Fall liefert also die partielle Ableitung einen Tensor. Leider kann man bei Tensorfen höherer Stufe nur im sogenannten linearen Raum so einfach verfahren.

Definition A.3.8: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k mit UrKS f_μ. M heißt linearer Raum, wenn die zulässigen Koordinatentransformationen $\widetilde{f}_\lambda$ bezüglich des Urkoordinatensystem f_μ auf die linearen Koordinatentransformationen eingeschränkt werden. Sei also $x^i_\mu|_{i=1,\ldots n} = f_\mu$ das Urkoordinatensystem, $\overline{x}^i_\lambda|_{i=1,\ldots,n} = \widetilde{f}_\lambda$ eine zulässige Koordinatentransformation, so gilt für $P \in \Omega$, $P \in \widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu = \mathcal{U}(P)$ und die zugehörigen Koordinaten*

$$\begin{aligned}\overline{x}^i &= t^i_k x^k + a^i,\\ x^k &\in f_\mu(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu),\\ \overline{x}^i &\in \widetilde{f}_\lambda(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu),\end{aligned}$$

wobei

$$\det(t^i_k) \neq 0$$

ist. Die Konstanten t^i_k, a^i hängen von $\mathcal{U}(P_0)$ ab. Man spricht von einem $\mathcal{U}(P_0)$ bedeckenden linearen Koordinatensystem. Insbesondere ist das Urkoordinatensystem selbst ein lineares KS.

Es kann keine Rede davon sein, daß das Urkoordinatensystem in M ein in einem anschaulichen Sinn irgendwie geartetes „Parallelkoordinatensystem“ ist. Es handelt sich gerade darum, den linearen Raum überhaupt erst zu definieren. Im realen Körperraum wird man als Urkoordinatensystem natürlich ein aus Lichtstrahlen gebildetes KS o. ä. wählen.

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist $M = (\Omega = U, T =$ Relativtopologie des $\mathbb{R}^n)$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der einzigen Karte $(U, id., U)$. Nach Beispiel auf S. 24 ergibt sich einerseits als Tangentialraum $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\partial\varphi/\partial t^1, \ldots, \partial\varphi/\partial t^n = \mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$ mit den Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ (Math. für Physiker III). Andererseits können wir auf Definition und Satz A.3.4 zurückgreifen und haben zunächst ganz **allgemein**

$$(A.3.5)\left\{\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \ni \mathfrak{t} \xrightarrow{J_P} \widetilde{\mathfrak{t}}_P = J_P\mathfrak{t} = \\ = \{\text{Kurven } x^i(t) \text{ mit } x^i(0) = \text{Koordinaten von } P | \dot{x}^i(0) = \mathfrak{t}\} \\ \text{mit im allgemeinen Fall verschiedenen, von } P \text{ abhängigen} \\ \text{Äquivalenzklassen,} \\ J_P \text{ als } V\text{Raum-Isomorphismus,} \\ \mathfrak{e}_i = J_P\mathbf{e_i} \text{ als in } P \text{ induzierter Basis} \end{array}\right.$$

In U sind die Äquivalenzklassen nur Translate einer einzigen Äquivalenzklasse, etwa von $J_{P_0}\mathfrak{t}$.

B. Tensoranalysis

§4. Tensoranalysis im linearen Raum

Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k. M sei ein linearer Raum im Sinn von Definition A.3.8. Wir erläutern zunächst den Begriff des linearen Koordinatensystems indem wir Punktepaare einführen. Sei $\widetilde{P} \in \Omega$, $\mathcal{U}(\widetilde{P})$ eine offene Umgebung mit $\mathcal{U}(\widetilde{P}) \subset U_\mu$ für ein $\mu \in I$. Zwei geordnete Punktepaare (PP'), (QQ') aus $\mathcal{U}(\widetilde{P}) \times \mathcal{U}(\widetilde{P})$ heißen gleich bezüglich x^i, wenn für die Koordinaten x^i_μ, $x^{i'}_\mu$, y^i_μ, $y^{i'}_\mu$ des Urkoordinatensystems x^i gilt

$$x^{i'}_\mu - x^i_\mu = y^{i'}_\mu - y^i_\mu.$$

Auf Grund des oben definierten Gleichheitsbegriffs innerhalb der Menge $\{(PP'), (QQ'), \ldots\}$ aller geordneten Punktepaare zerfällt dieselbe in Klassen von untereinander gleichen Punktepaaren. Diese nennen wir Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$. Ist (Ω, T) n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $(\mathbb{R}^n, f, U = \Omega)$ als einziger Karte, so läßt sich $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots\}$ in naheliegender Weise zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum machen. Davon unabhängig haben wir

Satz B.4.1: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k mit UrKS x^i_μ. In $\mathcal{U} = \widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu$ sind gleiche Punktepaare (bezüglich x^i_μ) dann und nur dann gleiche Punktepaare bezüglich $\overline{x}^i_\lambda$, wenn*

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= t^i_k x^k + a^i, \\ x^k &\in f_\mu(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu), \\ \overline{x}^i &\in \widetilde{f}_\lambda(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu) \end{aligned}$$

mit einer nichtsingulären Matrix (t^i_k) ist, deren Koeffizienten konstant sind.

Beweis: [Lyra, S. 4-5] □

Wir knüpfen an unser Beispiel (Ω, T) mit $(\mathbb{R}^n, f, U = \Omega)$ als einziger Karte an. Hier sind in $f(U) = \mathbb{R}^n$ die linearen Operationen unbeschränkt ausführbar, nicht jedoch in $f_\mu(U_\mu)$.

Sei $\mathfrak{a}$ ein Vektor, (PP') ein Repräsentant von $\mathfrak{a}$. Dann bezeichnen wir $x^{i'}_\mu - x^i_\mu$ als die Komponenten von $\mathfrak{a}$ bezüglich x^i. Diese Definition hängt offenbar nur von $\mathfrak{a}$ ab. $\lambda\mathfrak{a}$ ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ definiert als Vektor mit den Komponenten $\lambda(x_\mu^{i'} - x_\mu^i)$ Auch die Definition hängt nur von $\mathfrak{a}$ ab. Für Vektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ erklären wir $\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ als Vektor mit den Komponenten

$$\lambda(x_\mu^{i'} - x_\mu^i) + \mu(y_\mu^{i'} - y_\mu^i),$$

(PP') mit den Koordinaten $x_\mu^{i'}$ von P', x_μ^i von P, ist ein Repräsentante von $\mathfrak{a}$. (QQ') mit den Koordinaten $y_\mu^{i'}$ von Q', y_μ^i von Q, ist ein Repräsentant von $\mathfrak{b}$.

$\lambda\mathfrak{a} + \mu\mathfrak{b}$ hängt nur von $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ab. Damit haben wir den von $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots\}$ erzeugten Vektorraum

$$V = \left\{ \sum_{\substack{\nu=1 \\ \mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n \in \{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\ldots\} \\ \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{R}}}^{N} \lambda_\nu \mathfrak{a}_\nu | N \in \mathbb{N} \right\},$$

erklärt, der die Dimension n hat. Eine Basis wird durch $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}$, die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$, gegeben. Jeder Vektor $\widetilde{\mathfrak{a}} \in V$ist von der Form

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = \lambda\mathfrak{a},$$

wobei $\mathfrak{a}$ durch ein Punktepaar (PP') wie vorher repräsentiert wird. Daraus folgt

Satz B.4.2: *Sei (Ω, T) linearer Raum der Dimension n. Bei Übergang von einem KS x_μ^i zu einem neuen KS $\overline{x}_\lambda^i$ transformieren sich die Komponenten eines Vektors aus V nach dem Gesetz*

$$\overline{\xi}^i = t_k^i \xi^k$$

wenn die Koordinatentransformation

$$\overline{x}^i = t_k^i x^k + a_i$$

lautet.

Da die linearen Koordinatentransformationen eine Gruppe bilden, können wir in Satz B.4.2 im linearen Raum von einem beliebigen KS ausgehen (vgl. Definition A.3.8). Insbesondere sind im linearen Raum zwei Vektoren aus V genau dann gleich, wenn sie relativ zu irgendeinem linearen KS x^i gleiche Komponenten haben. Nach Definition und Satz A.3.5 ist V der Tangentialraum im Punkt P eines linearen Raums (Ω, T). Ganz allgemein können wir jetzt formulieren:

Satz B.4.3:

1. *Sei (Ω, T) eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und der Klasse C^k. Zugelassen ist die Gruppe der allgemeinen Koordinatentransformationen $x^i(\overline{x}^j)$ oder äquivalent $\overline{x}^j(x^i)$. Hiervon gibt es Untergruppen,*

2. *Sei (Ω, T) eine Mannigfaltigkeit wie oben, doch lassen wir nur die Koordinatentransformationen $\overline{x}^j(x^i)$ mit*
$$\det \frac{\partial(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} > 0$$
zu. Sie bilden eine Untergruppe der Koordinatentransformationen unter 1. und heißen „orientierungserhaltend“.

3. *Sei (Ω, T) eine Mannigfaltigkeit wie oben. (Ω, T) ist dann und nur dann linearer Raum, wenn wir nur die linearen Koordinatentransformationen zulassen, d.h. die lineare Gruppe, die eine Untergruppe der Gruppe unter 1. ist.*

Beweis: Klar. □

Wir spezialisieren nun die Transformationsgruppe weiter. Es gilt:

Satz B.4.4: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $k \geq 2$, mit UrKS x^i_μ. Zu Punktepaaren (PP') führen wir das Abstandsquadrat*

$$\begin{gathered}
|PP'| = \sum_{i=1}^{u} (x^{i'}_\mu - x^i_\mu)^2, \\
x^{i'}_\mu \ \textit{Koordinaten von } P', \\
x^i_\mu \ \textit{Koordinaten von } P \\
P, P' \in U_\mu
\end{gathered}$$

ein. Dann gilt: Bei Übergang zu einem neuen KS $\overline{x}^i_\lambda$ bleibt das Abstandsquadrat eines Punktepaars (PP'), $P, P' \in \mathcal{U} = \widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu$, dann und nur dann ungeändert, wenn

$$\begin{aligned}
\overline{x}^i &= t^i_k x^k + a^i, \\
x^k &\in f_\mu(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu), \\
\overline{x}^i &\in \widetilde{f}_\lambda(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu)
\end{aligned}$$

mit einer orthogonalen Matrix (t^i_k) ist. Die zulässigen Koordinatentransformationen werden also auf die orthogonale Gruppe eingeschränkt.

Beweis: [Lyra, S. 6 - 7]. □

Definition B.4.5: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, $k \geq 2$. Läßt man als Transformationsgruppe nur die orthogonale Gruppe zu, so heißt M ein metrischer Raum. Die zulässigen Koordinatensysteme heißen cartesisch.*

Es ist zunächst zu beachten, daß Definition B.4.5 unabhängig von der Definition A.3.8 des linearen Raums ist. Zusammenführung beider Definitionen ergibt

Satz B.4.6: *Sei $M = (\Omega, T)$ n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^k $(k \geq 2)$. Sei M linearer Raum mit UrKS x^i_μ. In $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{U}}_\lambda \cap U_\mu$ sindgleiche Punktepaare (bezüglich x^i_μ dann und nur dann gleiche Punktepaare bezüglich $\overline{x}^i_\lambda$ und besitzen zusätzlich gleiches Abstandsquadrat, wenn*

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= t^i_k x^k + a^i, \\ x^k &\in f_\mu(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu), \\ \overline{x}^i &\in \widetilde{f}_\lambda(\widetilde{U}_\lambda \cap U_\mu) \end{aligned}$$

mit einer orthogonalen Matrix (t^i_k) ist. Der lineare und metrische Raum heißt alsdann ein euklidischer Raum.

Beweis: [Lyra, S. 8]. Es ist insofern nichts Neues zu beweisen als zu zeigen ist, daß unter den linearen Koordinatentransformationen diejenigen mit orthogonaler Matrix die einzigen sind, die das Abstandsquadrat erhalten. Dies hatten wir für **alle** Koordinatentransformationen für Satz B.4.4 bereits bewiesen. □

Um den n-dimensionalen linearen Raum zum euklidischen Raum zu machen, hätten wir also von vornherein das cartesische UrKS aus der Gesamtheit der linearen KS auswählen können. Im Sinn von Satz B.4.3 können wir also aus der linearen Gruppe die orthogonale Gruppe, aus der orthogonalen Gruppe die Untergruppe der eigentlichen orthogonalen Transformationen auswählen. Diese ist eine Untergruppe der in Satz B.4.3 2. angesprochenen Koordinatentransformationen. In $M = (\mathbb{R}^3, id, \mathbb{R}^3)$ haben wir durch Beschränkungen auf die Gruppe der eigentlichen Drehungen erkannt, daß das Krenzprodukt (Vektorprodukt) ein kontravarianter Vektor ist.

Sei also $M = (\Omega, T)$ linearer Raum der Dimension n. Sei durch

$$T : \Omega \to \bigcup_{\omega \in \Omega} T_q^p(T_\omega(M)),$$

$$\omega \longmapsto \mathcal{T}_\omega \in T_q^p(T_\omega(M)),$$

$$\mathcal{T}_\omega = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(\omega) \mathfrak{n}_{i_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{n}_{i_p} \cdot \mathfrak{n}^{j_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{n}^{j_q}$$

in Basisdarstellung mit

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^j) = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(\omega)$$

ein Tensorfeld gegeben. Dann stehen uns gemäß §2 die Operationen der Addition, Multiplikation und der Begriff der Symmetriebedingung zur Verfügung. Weiter können wir die Operation der Verjüngung vornehmen gemäß Definition A.2.3. Nun machen wir $V_\omega = T_\omega(M)$ euklidisch, indem wir

$$\delta_{ik} =: (\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_k)$$

setzen. Damit haben wir unter den lin. KS das KS x^i als cartesisch ausgezeichnet. Bei Übergang zu einem anderen lin. KS $\overline{x}^i$ erweist sich

$$\overline{g}_{ik} = (\overline{\mathfrak{n}}_i, \overline{\mathfrak{n}}_k)$$

als symmetrisches ($\overline{g}_{ik} = \overline{g}_{k\iota}$) kovariantes Tensorfeld zweiter Stufe mit invarianter positiv definiter quadratischer Form

$$\overline{g}_{ik} \overline{\xi}^i \overline{\xi}^k$$

(vgl. Definition A.2.5). Man vergleiche die Herstellung von Tensorfeldern auf S. 29-30. Damit steht uns der Prozess des Jonglierens oder Indexziehens wie er auf S. 14 dargestellt wurde zur Verfügung.

Das Tensorfeld $\overline{g}_{ik}$ ist im linearen Raum lokal konstant. Mit dem eben dargestellten Prozess läßt sich in einer allgemeinen u-dimensionalen Mannigfaltigkeit ein Tensorfeld $\overline{g}_{ik}$ einführen, daß jedoch nicht mehr lokal konstant zu sein braucht.

Der nun folgende Satz gilt nur im linearen Raum.

Satz B.4.7: *Sei $M = (\Omega, T)$ linearer Raum der Dimension u. Sei T ein Tensorfeld $(p+q)$-ter Stufe mit den Komponenten $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^j)$, das stetig differenzierbar sei. Dann bilden die Größen*

$$S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q^\alpha}(x^j) = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q^\alpha}(x^j)$$

die Komponenten eines Tensorfelds $(p + (q + 1))$-ter Stufe.

Beweis: [Lyra, S. 43] $\square$

Beispiele:

1. Aus einem Tensorfeld 0-ter Stufe, also einer Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, entspringt auch bei allgemeinen Mannigfaltigkeiten $M = (\Omega, T)$ ein einfach kovariantes Vektorfeld $\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}(x^l)$, der Gradient.

2. Sind $\xi^i(x^l)$ die Komponenten eines einfach kontravarianten Vektorfeldes $\mathfrak{x}$ im linearen Raum, so erhalten wir mit

$$T^i_\alpha = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha}$$

ein gemischtes Tensorfeld zweiter Stufe und aus diesem durch Verjüngung ein Tensorfeld 0-ter Stufe, nämlich

$$div\mathfrak{x}(\omega) = \sum_{i=1}^{u} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i}(x^l),$$

$$\omega \in \Omega, \; x^l \text{ Koordinaten von } \omega \in \Omega.$$

3. Sei $M = (\Omega, T)$ euklidischer Raum, d.h. wir haben ein cartesisches UrKS ausgezeichnet. Dieses sei x^i. Sei zu jedem kontravarianten Vektorfeld $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\omega)$ mit Komponenten $\xi^i = \xi^i(\omega) = \xi^i(x^j)$ durch

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = ||\mathfrak{x}||^2 = \sum_{i=1}^{u} \xi^{i^2}$$

ein Abstandsquadrat gegeben. Durch

$$\begin{aligned}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \;\; &= \;\; \frac{1}{4}((\mathfrak{x} + \mathfrak{y}, \mathfrak{x} + \mathfrak{y}) - (\mathfrak{x} - \mathfrak{y}, \mathfrak{x} - \mathfrak{y})), \\ &\quad\;\; \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\omega), \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\omega),\end{aligned}$$

wird $V = V_\omega = T_\omega(M)$ euklidisch, und es ist

$$\delta_{ik} = (\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_k).$$

Hiermit haben wir den Anschluß an S. 38 dieses Paragraphen hergestellt und erhalten $\overline{g}_{ik}$ bezüglich eines beliebigen linearen KS $\overline{x}^j$. Für eine Funktion $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ sind also

$$u^i(\overline{x}^j) = \overline{g}^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{x}^k}(\overline{x}^j)$$

die rein kontravarianten Komponenten dieses Gradienten, wobei $(\overline{g}^{ik}) = (\overline{g}_{ik})^{-1}$ ist (s. Hilfssatz A.2.6, Definition A.2.7).

§5. Differentialformen in beliebigen orientierten Mannigfaltigkeiten endlicher Dimension. Invariante Integration

Wir wollen i.f. sogenannte orientierte Mannigfaltigkeiten betrachten.

Definition B.5.1: *Sei $M = (\Omega, T)$ Mannigfaltigkeit der Dimension n. Das (Ur)KS x_μ^j heißt orientiert, wenn $\det x_\mu^j/\partial x_\nu^i > 0$ ist. Eine Orientierung σ von M wird gegeben durch ein orientiertes (Ur)KS x_μ^j. Zwei KS x^j, $\overline{x}^i$ definieren dieselbe Orientierung, wenn eins orientiert und $\det \partial x^j/\partial \overline{x}^i > 0$ ist. M heißt orientiert oder orientierbar, wenn es ein orientiertes KS x^j gibt.*

Nicht jede Mannigfaltigkeit ist orientierbar. Siehe etwa das Möbiusband.

I.f. sei M orientiert und wir lassen nur Koordinatensysteme $\overline{x}^i$ zu, die orientiert und orientierungserhaltend sind, d.h. wir beschränken uns auf Koordinatentransformationen mit $\det \partial x^j/\partial \overline{x}^i > 0$. Man vergleiche hierzu den Begriff der orientierungserhaltenden Koordinatentransformation in Satz B.4.3.

Sei (Ω, T) Mannigfaltigkeit der Dimension n. Betrachte $(0 \leq k \leq n)$

$$\omega : \Omega \to \bigcup_{p \in M} \wedge^k (T_p^* M)$$

$$p \longmapsto \wedge^k (T_p^* M)$$

ω heißt k-Form und ist schiefsymmetrisches kovariantes Tensorfeld k-ter Stufe. Dann haben wir bez. des UrKS x^i die Beziehung

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} T_{j_1 \ldots j_k}(p) dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k},$$

$$T_{j_1 \ldots j_k}(p) =: T^{(x^i)}_{j_1 \ldots j_k} = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} T_{j_1 \ldots j_k}(x^i) dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$$

$$x^i \text{ Koordinaten von } p$$

Bei Übergang zu einem neuen KS mit $x = x(\overline{x})$ gilt

$$\overline{T}_{j_1 \ldots j_k}(\overline{x}^i) = \sum_{1 \leq \iota_1 < \ldots < \iota_k \leq n} \det \frac{\partial(\overline{x}^{\iota_1}, \ldots, \overline{x}^{\iota_k})}{\partial(x^{j_1}, \ldots, x^{j_k})} \cdot T_{\iota_1 \ldots \iota_k}(x^i(\overline{x}^j)),$$

$$1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n.$$

Hier ist für $\Omega = U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, noch eine gewisse Verallgemeinerung möglich: Sei $V \subset \mathbb{R}^m$, V offen, $\varphi : V \to U$ stetig differenzierbar. Sei $k \leq m, n$,

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} f_{i_1 \ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Dann ist

$$\omega \circ \varphi(t) = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n} F_{j_1 \ldots j_k} dt^{j_1} \wedge \ldots \wedge dt^{j_k}.$$