EIN EINFACHER BEWEIS FÜR DIE STETIGKEIT VON $D^{2m}u$ BEI PARABOLISCHEN SYSTEMEN $\partial_t \underline{u} + \mathcal{A}\underline{u} = \underline{f}$ DER ORDNUNG 2m MIT IN (t,x) HÖLDERSTETIGER RECHTER SEITE $\underline{f}$

Wolf von Wahl
Fakultät für Mathematik und Physik
Universität Bayreuth
D 95440 Bayreuth

Es ist das Ziel der vorliegenden Note, ohne Verwendung parabolischer Potentiale einen kurzen funktionalanalytischen Beweis dafür zu geben, daß jede starke Lösung in L^p eines parabolischen Systems $\partial_t \underline{u} + \mathcal{A}\underline{u} = \underline{f}$ in (t,x) stetige Ableitungen höchster Ordnung besitzt, wenn f in t,x Hölderstetig ist. $\mathcal{A}$ ist ein elliptisches System, das der Legendre-Hadamard Bedingung genügt. Die Koeffizientenmatrizen von $\mathcal{A}$ sollen hermitesch sein. Auf dem Mantel des Raum-Zeit Zylinders soll $\underline{u}$ Dirichlet- Nullbedingungen erfüllen.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine glatt berandete beschränkte offene Menge. Seien N, $m \in \mathbb{N}$. Zu jedem Paar γ, δ von Multiindizes des $\mathbb{R}^n$ mit $|\gamma|, |\delta| \leq m$ und zu jedem $x \in \bar{\Omega}$ seien $N \times N$-Matrizen $a_{\gamma\delta}(x)$ gegeben. Diese seien von der Klasse $(C^\alpha(\bar{\Omega}))^{N^2} = C^\alpha(\bar{\Omega})$ für ein $\alpha \in (0,1)$. Weiter sollen sie den folgenden Bedingungen genügen:

(1a) $\qquad a_{\gamma\delta} = a^*_{\gamma\delta}, |\gamma| = |\delta| = m$ (Hermitizitätsbedingung);

es gibt ein $c_o > 0$ derart, daß

(1b) $\qquad (-1)^m \eta^* a_{\gamma\delta}(x)\xi^\gamma\xi^\delta \eta \geq c_o |\xi|^{2m} |\eta|^2, x \in \bar{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{C}^N$ (Legendre--Hadamard Bedingung),

wobei wir die Einsteinsche Summationskonvention benutzen. Die Summation in (1b) ist über alle γ, δ mit $|\gamma| = |\delta| = m$ zu erstrecken. I.f. benutzen wir $\alpha, \beta, \rho, \ldots \in (0,1]$ für Hölderexponenten und $\gamma, \delta, \ldots, \varkappa$ für Multiindizes des $\mathbb{R}^n$. Den zu (1a,b) gehörigen elliptischen Operator $\mathcal{A}$ definieren wir im Banachraum $\mathcal{B} = (C^\alpha(\bar{\Omega}))^N = C^\alpha(\bar{\Omega})$ durch

$$\mathcal{A}\underline{u} = a_{\gamma\delta}(x) D^{\gamma+\delta}\underline{u}, \ \underline{u} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{ \underline{w} \mid \underline{w} \in C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}), \ D^\gamma \underline{w}|\partial\Omega = 0, |\gamma| \leq m-1 \}.$$

Die Summation in der Definition von $\mathcal{A}$ ist über $|\gamma| \leq m$, $|\delta| \leq m$ zu erstrecken. Unterstreichung bezeichnet einen Vektor aus $\mathbb{C}^N$ oder $\mathbb{R}^N$. Das Spektrum von $\mathcal{A}$ ist diskret und die Realteile der Eigenwerte sind nach unten beschränkt. Durch Addition eines Terms $\Lambda_0\underline{u}$, bei dem die positive Konstante Λ_0 vom Stetigkeitsverhalten der $a_{\gamma\delta}$ für $|\gamma| = |\delta| = m$, von $\|a_{\gamma\delta}\|_{L^\infty(\Omega)}$ und c_0 abhängt, erreicht man, daß für alle λ in dem in Figur 1 schraffierten Sektor der Operator $\lambda+\mathcal{A}$ in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ beschränkt invertierbar ist und einer Abschätzung

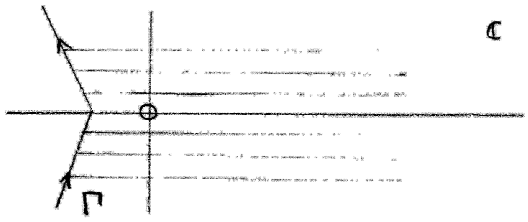

Fig. 1

(2) $$\|(\lambda+\mathcal{A})\underline{u}\|_\alpha \geq c_1\left(|\lambda|^{-\alpha/2m}\|\underline{u}\|_{2m+\alpha} + \|\underline{u}\|_{2m} + |\lambda|^{1-\alpha/2m}\|\underline{u}\|_\alpha + |\lambda|\|\underline{u}\|_0\right),\quad \underline{u}\in\mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

mit einer von $\underline{u}$ unabhängigen Konstante $c_1 > 0$ genügt. Γ ist die linke Begrenzung des oben beschriebenen Sektors, $\|.\|_k$, $\|.\|_{k+\alpha}$ bezeichnen die Normen in $C^k(\bar{\Omega})$ bzw. $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$. Der Beweis von (2) erfolgt mit der üblichen Methode von Agmon [1] und ist für Gleichungen in [2, S. 235-236] und in verbesserter Form in [3, S. 239-241] zu finden. Die Verallgemeinerung für Systeme mit (1a,b) liegt auf der Hand. Nach [2] können diese Abschätzungen nicht mehr verbessert werden. Für unsere Zwecke ist die Addition von $\Lambda_0 u$ keine Einschränkung, da aus $\partial_t\underline{u} + \mathcal{A}\underline{u} = \underline{f}$ durch Multiplikation mit $e^{-\Lambda_0 t}$ das System $\partial_t\tilde{\underline{u}} + (\mathcal{A}+\Lambda_0)\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{f}}$, $\tilde{\underline{u}}(t) = e^{-\Lambda_0 t}\underline{u}(t)$, $\tilde{\underline{f}}(t) = e^{-\Lambda_0 t}\underline{f}(t)$ hervorgeht. $c_1, c_2, \ldots$ sind i.f. positive Konstanten, die von denselben Größen wie Λ_0 und zusätzlich von $\|a_{\gamma\delta}\|_\alpha$, $|\gamma| = |\delta| = m$, abhängen.

Aus (2) ersieht man, daß die Resolvente $(\lambda+\mathcal{A})^{-1}$ nur einer Abschätzung

(3) $$\|(\lambda+\mathcal{A})^{-1}\underline{u}\|_\alpha \leq \frac{c_2}{|\lambda|^{1-\alpha/2m}}\|\underline{u}\|_\alpha,\quad \lambda \text{ wie in (2)},$$

genügt. Da im Nenner statt wie üblich $|\lambda|$ der für $|\lambda|\to\infty$ schwächer wachsende Term $|\lambda|^{1-\alpha/2m}$ steht, weist die von $-\mathcal{A}$ in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ erzeugte Halbgruppe $e^{-t\mathcal{A}}$, $t > 0$, für $t\to 0$ ein singuläres Verhalten auf, das durch

(4) $$\|e^{-t\mathcal{A}}\underline{u}\|_\alpha \leq \frac{c_3}{t^{\alpha/2m}}\|\underline{u}\|_\alpha$$

beschrieben wird. Allgemein läßt sich auch im Fall (3) durch die Definition

$$f(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(-\lambda)(\lambda+\mathcal{A})^{-1}d\lambda ,$$

f holomorph in der rechten Halbebene,

$|f(-z)|\cdot|z|^{-1+\alpha/2m}$ über Γ integrierbar

ein Funktionalkalkül für $\mathcal{A}$ aufbauen. Mit ihm erklärt man nicht nur $e^{-t\mathcal{A}}$, sondern z. B. auch

$$\mathcal{A}^z e^{-t\mathcal{A}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (-\lambda)^z e^{\lambda t}(\lambda+\mathcal{A})^{-1}d\lambda , t>0, z\in\mathbb{C}.$$

Wir verweisen auf [3] .

Unser Hauptergebnis besteht in

<u>Satz 1</u>: Sei $T>0$. Sei $\alpha\in(0,1)$. Sei $\underline{f}$ in $[0,T]\times\overline{\Omega}$ Hölderstetig, und zwar bezüglich $t\in[0,T]$ zum Exponenten $\alpha/2m$ und bezüglich $x\in\overline{\Omega}$ zum Exponenten α . Insbesondere ist also

$$\sup_{\substack{(t,x)\neq\\ \neq(t',x')}} \frac{|f(t,x)-f(t',x')|}{|t-t'|^{\alpha/2m}+|x-x'|^\alpha} < +\infty$$

Sei $\underline{u}_o\in C^\alpha(\overline{\Omega})$. Sei $p\in(1,+\infty)$ und $\underline{u}$ die eindeutig bestimmte Lösung von $\partial_t\underline{u}+\mathcal{A}\underline{u}=\underline{f}$, $\underline{u}(0)=\underline{u}_o$ mit

$$\underline{u}\in C^o([0,T],L^p(\Omega))\cap C^1((0,T],L^p(\Omega))$$
$$\cap C^o((0,T],W^{2m,p}(\Omega)).$$

Dann ist

$$u\in C^o([0,T],C^o(\overline{\Omega}))\cap C^o((0,T],C^{2m}(\overline{\Omega})).$$

<u>Beweis</u>: Ist $e^{-t\mathcal{A}_p}$ die von $-\mathcal{A}$ in $L^p(\Omega)$ erzeugte analytische Halbgruppe, so ist $e^{-t\mathcal{A}}$ ihre Restriktion auf $C^\beta(\overline{\Omega})$, $0<\beta\leq\alpha$, und wir haben

(5) $$\underline{u}(t) = e^{-t\mathcal{A}}\underline{u}_o + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}\underline{f}(s)ds, \quad T\geqslant t>0$$

wegen (4). Aus der Resolventenabschätzung (2) folgt

(6) $$\|e^{-t\mathcal{A}}\underline{w}\|_o \leq c_3\|\underline{w}\|_\beta,$$

(7) $$\|e^{-t\mathcal{A}}\underline{w}\|_{2m} \leq \frac{c_4}{t}\|\underline{w}\|_\beta, t>0, \ w\in C^\beta(\overline{\Omega}),$$

indem man in unserem Funktionalkalkül $f(\lambda)=e^{-\lambda t}$ wählt. Gleichzeitig zeigt dieser Funktionalkalkül, daß

(8a) $$\|\mathcal{A}^z e^{-t\mathcal{A}}\|\leq \frac{c_6}{t^{\mathrm{Re}z+\alpha/2m}}e^{|\mathrm{Im}z|\pi}, t>0,$$

(8b) $$\mathcal{A}^z e^{-\cdot\mathcal{A}}\underline{w} \in C^o((0,T],C^\beta(\overline{\Omega})), \ w\in C^\beta(\overline{\Omega})$$

ist. Aus der Interpolationsungleichung

(9) $\|\underline{w}\|_\beta \leq d(\|\underline{w}\|_\alpha^{\beta/\alpha} \|\underline{w}\|_o^{1-\beta/\alpha} + \|\underline{w}\|_o)$, $\underline{w} \in C^\alpha(\bar{\Omega}), 0 < \beta \leq \alpha < 1$,

mit einer von α, β, Ω abhängigen Konstante $d > 0$ folgt mit der (vorausgesetzten) Hölderstetigkeit von f in t und x, daß

(10) $f \in C^{(1-\frac{\beta}{\alpha})\frac{\alpha}{2m}}([0,T], C^\beta(\bar{\Omega}))$, $0 < \beta \leq \alpha < 1$,

ist. Damit liefert (5) die Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{u}(t) &= e^{-t\mathcal{A}}\underline{u}_o + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}(\underline{f}(s) - \underline{f}(t))ds + \\ &\quad + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}ds\,\underline{f}(t), \\ &= e^{-t\mathcal{A}}\underline{u}_o + \int_0^t e^{-(t-s)\mathcal{A}}(\underline{f}(s) - \underline{f}(t))ds + \\ &\quad + \mathcal{A}^{-1}(I - e^{-t\mathcal{A}})\underline{f}(t),\ t > 0.\end{aligned}$$

Aus (7,8,10) folgt $\int_0^{\cdot} e^{-(\cdot - s)\mathcal{A}}(f(s) - f(\cdot))ds \in C^o([0,T], C^{2m}(\bar{\Omega}))$

und

(11) $\mathcal{A}^{-1}(I - e^{-\cdot\mathcal{A}})\underline{f}(\cdot) \in C^o((0,T], C^{2m+\beta}(\bar{\Omega})) \cap$
$\cap\, C^o([0,T], C^o(\bar{\Omega}))$, $0 < \beta \leq \alpha$,

(12) $e^{-\cdot\mathcal{A}}\underline{u}_o \in C^o((0,T], C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})) \cap C^o([0,T], C^o(\bar{\Omega}))$.

Der Satz ist bewiesen.

Ist $\beta < \alpha/2$, so folgt aus (8,11,12) noch

$$\int_0^{\cdot} e^{-(\cdot - s)\mathcal{A}} f(s)ds \in C^o((0,T], C^{2m+\beta}(\bar{\Omega})).$$

Natürlich lassen sich alle Aussagen auch im Fall anderer geeigneter homogener Randbedingungen herleiten. Es müssen nur die üblichen Schauder-Abschätzungen gelten.

Literatur

[1] Agmon, S.: On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems. Comm. Pure Appl. Math. 15, 119-147 (1962).

[2] Wahl, W. von: Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und Parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen. Nachr. Ak. d. Wiss. Göttingen, II. Math. Phys. Kl. 11, 231-258 (1972).

[3] Wahl, W. von: Lineare und Semilineare Parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 43, 234-262 (1975).