K

NACHRICHTEN
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN
II. MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE

Jahrgang 1990 Nr. 2

Abschätzungen für das Neumann-Problem und die Helmholtz-Zerlegung von L^p

Von

Wolf von Wahl

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN

Ausgegeben Dezember 1990

NACHRICHTEN
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN
MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE

Inhalt der seit 1976 erschienenen Jahrgänge
Stand der Preise: 1989. Änderungen vorbehalten.

Jahrgang 1989:

Nr. 1 *J. C. C. Nitsche,* Cyclic Surfaces of Constant Mean Curvature. 5. S. 4,- DM

Nr. 2 *H. G. Mensching, H. Pflaumbaum* und *K. H. Pörtge,* Morphodynamische Auswirkungen der Nilhochflut- und Starkregenkatastrophe 1988 in der Region zwischen Khartoum und Atbara (Republik Sudan). 23 S. 6,- DM

Nr. 3 *H. Jander* und *H. G. Wagner,* "Soot Formation in Combustion" An International Round Table Discussion. 164 S. 42 DM

Jahrgang 1988:

Nr. 1 *B. Gläser, H. Pflaumbaum* und *H. G. Mensching,* Morphodynamisch-paläoklimatische Untersuchungen zur jungquartären Reliefentwicklung im Nordsudan - ein Forschungsbericht. 12 S. 4,- DM

Nr. 2 *H. G. Schlegel* (Hg.), Gentechnologie und In-vitro-Fertilisation - Kolloquium der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen am 23. Januar 1987. 39 S. 10,- DM

Nr. 3 *G. von Minnigerode* und *U. Schulz,* Einfluß thermischer Effekte auf den stromerzwungenen Zusammenbruch der Supraleitung in Haarkristallen aus Zink. 15 S. 4,- DM

Nr. 4 *P. Schubert, A. Steinbüchel* und *H. G. Schlegel,* Synthesis of poly-β-hydroxybutyric acid in *Alcaligenes eutrophus,* its genetic localization and conjugational transfer of the genes. 10 S. 4,- DM

Nr. 5 *E. Schunke,* Die Fußflächen- und Schichtkammlandschaften der Richardson Mountains (NW-Kanada). - Ein Beitrag zur periglazialen Reliefformung. 32 S. 9,- DM

Nr. 6 *J. Edelbüttel-Einhaus* und *K. Hoyermann,* Der Nachweis der Radikale CH_3CO, C_2H_4OH, C_2H_5O, C_4H_5, C_2H_5, C_3H_7, C_4H_9, neo-C_5H_{11}, c-C_5H_9 mit der Multiphotonenionisation/Massenspektrometrie. 11 S. 4,- DM

Nr. 7 *K. B. Gundlach,* Die Berechnung von Multiplikatorsystemen zu Hilbertschen Modulgruppen. 28 S. 8,- DM

Jahrgang 1987:

Nr. 1 *P. Haasen,* Zur 2D-Bewegung von Kinken bei der plastischen Verformung von Germanium. 4 S. 4,- DM

Nr. 2 *R. Finn,* The Gauss Curvature of an *H*-Graph. 10 S. 4,- DM

Nr. 3 *K. Timotius,* und *H. G. Schlegel,* Aus Abwässern isolierte nickel-resistente Bakterien. 9 S., 1 Abb. 4,- DM

Jahrgang 1986:

Nr. 1 *E. Heinz,* Über die Regularität schwacher Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme. 15 S. 4,- DM

Nr. 2 *H. Ellenberg,* Bauernhäuser in Mitteljapan und Mitteleuropa - ein kausalanalytischer Vergleich. 28 S., 8 S. Abb. 10,- DM

Nr. 3 *H. Sohr, W. von Wahl, M. Wiegner,* Zur Asymptotik der Gleichungen von Navier-Stokes. 15 S. 4,- DM

Jahrgang 1985:

Nr. 1 *E. Schunke,* Vergleichende Talstudien im arktischen Periglazialraum Europas und Amerikas. 83 S. 22,- DM

Nr. 2 *W. Schröder,* Zur Rolle der Gesellschaft der Wissenschaften bei der Entwicklung der Physik in Göttingen (1880-1930). 15 S. 4,- DM

Nr. 3 *E. Voigt, Talmontipora* n. g., ein neues aberrantes cyclostomes Bryozonengenus aus der Oberkreide des aquitanischen Beckens (Frankreich). 13 S., 7 Tafeln 8,- DM

Abschätzungen für das Neumann-Problem und die Helmholtz-Zerlegung von L^p

Wolf von Wahl

Summary: We first study a-priori estimates for the Neumann-problem $\Delta u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ both in bounded and unbounded domains of $\mathbb{R}^3$. Amongst other results we prove that $\|\nabla u\|_{L^p} \leqq c\|g\|_{W^{-1/p,p}}$ where the last norm refers to the boundary. Then we use the well known decomposition of any vector-field into a gradientfield and a field being free of productivity to construct directly the projections of L^p onto the gradient field and the divergence free part. This decomposition of L^p is called "Helmholtz-decomposition".

We intend here to present concrete formulas for the Helmholtz-decomposition. Moreover we prove maximal regularity results for the integral operators of the Dirichlet- and Neumann-problem as well as for the boundary values of the Neumann-problem.

§ 0. Einleitung, Hilfsmittel und Bezeichnungen

Sei G eine glatt berandete beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^3$ mit äußerer Normale ν. $\hat{G}$ sei das Komplement von $\bar{G}$ mit äußerer Normale $\hat{\nu}$. Wir studieren zunächst das Neumann-Problem $\Delta u = 0$ in G, $\partial u / \partial \nu = g$ in ∂G und das Neumann-Problem $\Delta u = 0$ in $\hat{G}$, $\partial u / \partial \hat{\nu} = g$ in $\partial \hat{G} = \partial G$. Ziel ist es, jeweils Abschätzungen mit maximaler Regularität für den Gradienten der Lösung zu erbringen, d.h. solche, die hinsichtlich der benutzten Regularitätsklassen von u, g keine Verbesserung mehr gestatten. Die Abschätzungen lauten

$$(0.1) \qquad \|\nabla u\|_{L^p(G)} \leqq c_p \|g\|_{W^{-1/p,p}(\partial G)}, \quad p > 1,$$

$$(0.2) \qquad \|\nabla u\|_{L^p(\hat{G})} \leqq c_p \|g\|_{W^{-1/p,p}(\partial \hat{G})}, \quad p > \frac{3}{2} \quad \text{und}$$

$$(0.3) \qquad \|\nabla u\|_{L^p(\hat{G})} \leqq c_p \|g\|_{W^{-1/p,p}(\partial \hat{G})}, \quad p > 1,$$

falls im letzten Fall g einer Zusatzbedingung genügt (Verschwindender Integralmittelwert auf dem Rand der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\hat{G}$). Die Räume $W^{\sigma,p}(\partial G)$ mit positiver bzw. negativer gebrochener Ableitungsordnung werden in § 1 erklärt und studiert. Unser Zugang zu diesen Abschätzungen beruht direkt auf der bekannten Darstellung der Lösung des Neumann-Problems als Einfachschichtpotential. In § 1 untersuchen wir sowohl die Randwerte des Einfachschichtpotentials als auch den Integraloperator K des Neumann-Problems hinsichtlich ihrer regularisierenden Eigenschaften auf ∂G. Wenn $M\lambda$, $M\lambda(\xi) = \int_{\partial G} \frac{1}{|\xi-\xi'|}\lambda(\xi')\,d\Omega$, $\xi \in \partial G$, die Randwerte des Einfachschichtpotentials mit Belegung λ sind und K wie üblich durch $K\lambda(\xi) = -\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{\partial G}(\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{r})(\xi,\xi')\,\lambda(\xi')\,d\Omega$ gegeben ist, so gilt

$$(0.4) \qquad M, K \in \mathsf{L}(W^{-\sigma,p}(\partial G), W^{1-\sigma,p}(\partial G)), \quad 0 \leqq \sigma \leqq 1, p > 1.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch für den Integraloperator L des Dirichlet-Problems. Diese Aussagen gehen über die später benötigten Hilfsmittel hinaus; sie scheinen jedoch von unabhängigem Interesse zu sein, da sich mit ihrer Hilfe Abschätzungen für das Neumann-Problem auf das Dirichlet-Problem und umgekehrt zurückführen lassen. Unser Beweis beruht auf der Anwendung eines Satzes von Calderón-Zygmund in lokalen Koordinaten. Man kann unter Verwendung einer verallgemeinerten Version der Hölder-Korn-Lichtenstein-Giraud Ungleichung zeigen, daß man auch Aussagen der Form

$$(0.5) \qquad M, K, L \in \mathsf{L}(C^{k+\alpha}(\partial G), C^{k+1+\alpha}(\partial G)), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < \alpha < 1,$$

erhält. M, K, L verbessern also stets die Regularität gerade um 1. Jedenfalls für L ist (0.5) bekannt, der Beweis beruht darauf, daß man den Wert von Lc, c konstant, a-priori kennt. Insbesondere (0.4) konnte der Verfasser nicht in der Literatur finden.

Mit Hilfe von (0.4) beweist man (0.1), (0.2) recht einfach, indem man $|(\nabla u, \varphi)|$ für Testvektoren $\varphi \in (C_0^\infty(G))^3$ bzw. $\varphi \in (C_0^\infty(\hat{G}))^3$ abschätzt. Dabei benutzt man den Satz von Gauß, einige elementare Identitäten aus der Differentialgeometrie in der Mannigfaltigkeit ∂G und die Zerlegungen

$$(0.6) \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int_G \frac{1}{|x-x'|}(\operatorname{div}\varphi)(x')\,dx' + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_G \frac{1}{|x-x'|}(\operatorname{rot}\varphi)(x')\,dx' \quad \text{bzw.}$$

$$(0.7) \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int_{\hat{G}} \frac{1}{|x-x'|}(\operatorname{div}\varphi)(x')\,dx' + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_{\hat{G}} \frac{1}{|x-x'|}(\operatorname{rot}\varphi)(x')\,dx',$$

die aus den Greenschen Formeln folgen. Außerdem wird der sogenannte Spursatz benötigt, den wir gleich erläutern. Für die Lösbarkeit des Neumann-Problems im „Außenraum“ $\hat{G}$ ist es notwendig, daß der Integralmittelwert der Neumann-Vorgabe über den Rand jeder beschränkten Zusammenhangskomponente von $\hat{G}$ verschwindet, bei der (einen) unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\hat{G}$ ist dies aber nicht erforderlich. Man kommt dann in (0.2) auch nicht in den Bereich $1 < p \leqq \frac{3}{2}$ hinein. Verschwindet der Mittelwert jedoch auch für die unbeschränkte Zusammenhangskomponente, so erhält man (0.3). Wir zeigen (0.3) nur für Neumann-Vorgaben der Form $(\hat{\nu}, v)$ mit divergenzfreien Vektorfeldern v, da dies hier ausreicht.

Die Helmholtz-Zerlegung von $L^p(G)$ bzw. $L^p(\hat{G})$ besteht in der direkten Aufspaltung

$$L^p = \{\nabla g\} \oplus \mathsf{E} \tag{0.8}$$

in die Gradientenfelder $\nabla g \in L^p(G)$ bzw. $\nabla g \in L^p(\hat{G})$ und den sogenannten divergenzfreien Anteil E. Es handelt sich dabei um den Abschluß in der L^p-Norm von ergiebigkeitsfreien Feldern, so daß man besser vom ergiebigkeitsfreien Anteil reden sollte. Zur Konstruktion der Projektoren Q auf $\{\nabla g\}$ und P auf E kann man unmittelbar von (0.6), (0.7) ausgehen. Dort findet man bereits eine Zerlegung von φ in ein Gradientenfeld und ein ergiebigkeitsfreies Feld. Der Nachteil der Zerlegungen (0.6), (0.7) besteht darin, daß sie nicht direkt sind, d.h., daß der Gradientenanteil und der Rotationsanteil nicht orthogonal sind. Dies erzwingt man, indem man vom Rotationsanteil den Gradienten der Lösung eines geeigneten Neumann-Problems, der linear von φ abhängt, abzieht und beim Gradientenanteil in (0.6), (0.7) wieder addiert. Dieses Verfahren liefert $Q\varphi$, $P\varphi$ für C_0^∞-Vektorfelder, durch Abschließen gewinnt man Q, P und damit die gewünschte Zerlegung.

Schließlich zeigen wir auch noch, daß die sogenannten solenoidalen Felder dicht in E sind. Dies sind die C_0^∞-Felder mit verschwindender Divergenz. Dieser Beweis erfordert jedoch einige über die vorher verwendeten hinausgehende Hilfsmittel.

Die Helmholtz-Zerlegung (0.8) spielt eine fundamentale Rolle bei der Behandlung der instationären Gleichungen von Navier-Stokes. Die Anwendung von P auf dieses Gleichungssystem ermöglicht die Eliminierung des Druckgradienten und damit eine Behandlung dieser Gleichungen in allen L^p-Räumen mit den Hilfsmitteln der Funktionalanalysis. Aus diesem Grunde haben sich bereits mehrere Autoren mit der Zerlegung (0.8) befaßt. Weyl hat in [10] für $p = 2$ die in diesem Fall orthogonale Zerlegung (0.8) betrachtet. Fujiwara und Morimoto haben in [2] die Zerlegung (0.8) im Fall einer beschränkten Grundmenge G bewiesen. Miyakawa hat in [4] die Zerlegung (0.8) durch Übertragung der Methoden von Fujiwara-Morimoto gezeigt. In einer demnächst erscheinenden Arbeit [5] von Simader und Sohr wird (0.8) sowohl für beschränkte als auch unbeschränkte Grundmengen bewiesen. Der Beweis umfaßt auch den n-dimensionalen Fall. Während in [2] und [4] weitreichende Hilfsmittel aus der Theorie der elliptischen Operatoren, die sich in [3] finden, und ein Satz von de Rham über die Darstellung von Distributionen, die auf den solenoidalen Feldern verschwinden, benutzt werden, wird sowohl in [5] als auch in der vorliegenden Arbeit eine größere Vollständigkeit der Darstellung angestrebt. Die notwendigen Abschätzungen für das Neumann-Problem werden z. B. mitbewiesen, der Satz von de Rham wird nicht benötigt.

Der vorliegende Zugang zur Helmholtz-Zerlegung unterscheidet sich von allen anderen dadurch, daß er direkt auf den Formeln (0.6), (0.7) aufbaut. (0.7) liefert übrigens die Helmholtz-Zerlegung im Fall $\hat{G} = \mathbb{R}^3$. Während eine Hauptschwierigkeit in [5] die Abschätzung von ∇u für Neumann-Probleme $\Delta u = f, \frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ bzw. $\frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} = g$ darstellt und die Dichtheit der solenoiden Felder in E durch den gewählten Zugang mitgeliefert wird, ist es hier die letzte Aussage, die einen Rückgriff auf weiterreichende Hilfsmittel erfordert. So benötigen wir etwa aus [9] Aussagen über die Lösung von div $u = f$ mit Randwerten 0 und ihre Abschätzung durch f. Dafür ist möglicherweise die Konstruktion approximierender divergenzfreier Felder mit kompaktem Träger zu einem vorgelegten divergenzfreien Feld mit verschwindender Normalkomponente, die wir in § 5 vorstellen, von Interesse. An und für sich ist die Helmholtz-Zerlegung völlig unabhängig von der Dichtheit der solenoidalen Felder in E wie § 4 zeigt. Der hier benutzte Zugang zur Helmholtz-Zerlegung ist bereits in [9, I. 9] vorgestellt worden, jedoch mußten in [9] zum Beweis mehrere Anleihen an noch nicht publizierte Literatur gemacht werden.

Diese Arbeit wäre ohne ständige Diskussionen mit Herrn Simader über die Operatoren div und rot und über das Dirichlet- und Neumann-Problem nicht entstanden. Ich möchte ihm daher an dieser Stelle sehr herzlich für viele wertvolle Hinweise und Anregungen danken. Der Vergleich so verschiedener Methoden wie der in [5] und der hier verwendeten ist immer von Interesse.

Wir erwähnen einige Hilfsmittel, die im folgenden eine Rolle spielen. Beim Neumann-Problem gehen wir vom klassischen Resultat aus, daß man zu einer Hölderstetigen Neumann-Vorgabe, deren Integralmittelwerte über die Ränder der beschränkten Zusammenhangskomponenten verschwinden, stets eine bis zum Rand stetig differenzierbare und im Inneren der Grundmenge zweimal stetig differenzierbare Lösung finden kann. Sie wird durch ein Einfachschichtpotential gegeben (s. etwa [6, Nr. 198]). Sei $f \in L^p$ und besitze kompakten Träger. Dann gilt:

(CZ) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Die Funktion } \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} f dx' \text{ mit } r = |x - x'|, f = f(x') \text{ besitzt Distri-} \\ \text{butionsableitungen der Ordnung 1, die in } L^p(\mathbb{R}^3) \text{ liegen. Es gilt} \\ \| \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} f dx' \|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqq c \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^3)} . \end{array} \right.$

Die Aussage bezeichnen wir auch als *Satz von Calderón-Zygmund* und beziehen uns auf sie mit der Abkürzung (CZ). Daneben benutzen wir in § 1 noch eine in [1] bewiesene allgemeinere Version. Als *Satz von Hardy-Littlewood* bezeichnen wir die bekannte Ungleichung

$$(\mathrm{HL}) \quad \begin{cases} \| \frac{1}{r^\lambda} * f \|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^3)} \leqq c \| f \|_{L^q(\mathbb{R}^3)}, \\ f \in L^q(\mathbb{R}^3),\ 0 < \lambda < 3, \\ \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} + \frac{\lambda}{3} - 1. \end{cases}$$

Der Rand ∂G von G soll endlich viele Zusammenhangskomponenten haben, die geschlossene Flächen sind; er wird in der üblichen Weise zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Metrik g_{ik} und $g = \det(g_{ik})$ gemacht. Für Tangentialfelder a hat man

$$\operatorname{Div} a = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g}\, a^i)$$

und für Funktionen φ auf ∂G setzt man

$$\operatorname{Grad} \varphi = g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u^k} \frac{\partial x}{\partial u^i}$$

(Summationskonvention, u^1, u^2 sind lokale Parameter). Dann ist

$$\operatorname{Div}(\varphi a) = (\operatorname{Grad} \varphi, a) + \varphi \cdot \operatorname{Div} a.$$

Wegen $\int_{\partial G} \operatorname{Div} a \, d\Omega = 0$ folgt die Formel der partiellen Integration

$$\int_G (\operatorname{Grad} \varphi, a)\, d\Omega = - \int_G \varphi \cdot \operatorname{Div} a \, d\Omega$$

mit dem Oberflächenelement $d\Omega$. Für in $\bar{G}$ oder $\bar{\hat{G}}$ hinreichend glatte Vektorfelder gilt bekanntlich die folgende nützliche Formel

$$(\nu, \operatorname{rot} v \,|\, _{\partial G}) = - \operatorname{Div}[\nu, v] \quad \text{bzw.}$$
$$(\hat{\nu}, \operatorname{rot} v \,|\, _{\partial \hat{G}}) = - \operatorname{Div}[\hat{\nu}, v].$$

Einen Beweis kann man durch Nachrechnen ohne große Mühe finden (s. auch [9, S. 106, S. 107]). Die Räume $W^{\sigma,p}(\partial G)$, $-1 \leqq \sigma \leqq 1$, $p > 1$, führen wir in § 1 ein. Als *Spursatz* bezeichnen wir die folgende bekannte Aussage: Jedes Element $\psi \in W^{1-1/p,p}(\partial G)$ läßt sich zu einem $\Psi \in W^{1,p}(G)$ oder $W^{1,p}(\hat{G})$ fortsetzen mit

(Spursatz)
- $\Psi | \partial G = \psi$ im Sinne des Spuroperators,
  $\| \Psi \|_{W^{1,p}(G)}$ bzw. $\| \Psi \|_{W^{1,p}(\hat{G})} \leqq c \| \psi \|_{W^{1-1/p,p}(\partial G)}$
- Ψ verschwindet außerhalb eines in G bzw. $\hat{G}$ gelegenen Randstreifens an ∂G. Umgekehrt ist die Restriktion eines Elements $\Psi \in W^{1,p}(G)$ auf ∂G aus $W^{1-1/p,p}(\partial G)$, und es gilt
  $\| \Psi |_{\partial G} \|_{W^{1-1/p,p}(\partial G)} \leqq c \| \Psi \|_{W^{1,p}(G)}$.

$W^{1,p}(G) = H^{1,p}(G)$, $W^{1,p}(\hat{G}) = H^{1,p}(\hat{G})$, $\overset{0}{W}{}^{1,p}(G) = \overset{0}{H}{}^{1,p}(G)$, $\overset{0}{W}{}^{1,p}(\hat{G}) = \overset{0}{H}{}^{1,p}(\hat{G})$, $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(G)$, $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\hat{G})$, $B^{\pm s}_{p,p}(\mathbb{R}^2)$, $H^{\pm 1,p}(\mathbb{R}^2)$ haben die übliche Bedeutung. Die bereits erwähnten Darstellungen (0.6), (0.7) sind einfach unmittelbare Konsequenzen aus dem sogenannten Fundamentalsatz der Vektoranalysis, in dem jedes hinreichend glatte Feld v in der Form

$$v = -\operatorname{grad} U + \operatorname{rot} A \quad \text{mit} \quad \operatorname{div} A = 0$$

zerlegt wird. $C^{k+\alpha}(\partial G)$, $C^{k+\alpha}(\bar{G})$, $C^k(\partial G)$, $C^k(\bar{G})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq \alpha < 1$, haben die übliche Bedeutung, während $C^k(\bar{\hat{G}})$, $C^{k+\alpha}(\bar{\hat{G}})$ aus den in $\bar{\hat{G}}$ k-Mal stetig differenzierbaren bzw. k-Mal zum Exponenten α Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen u bestehen mit

$$\sup_{x \in \bar{\hat{G}}} |Du(x)| < +\infty, \quad |\beta| \leqq k \quad \text{bzw.}$$

$$\sup_{x \in \bar{\hat{G}}} |D^\beta u(x)| < +\infty, \quad |\beta| \leqq k, \quad \text{und}$$

$$\sup_{\substack{x,x' \in \bar{\hat{G}} \\ x \neq x'}} \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(x')|}{|x-x'|^\alpha} < +\infty.$$

$\mathsf{S}(\mathbb{R}^2)$ sind die in $\mathbb{R}^2$ schnell abfallenden (temperierten) Funktionen. Die Funktionen $\int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi \, dx'$, $\int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi \, dx'$ sind gegeben durch

$$\int_G \frac{1}{|x-x'|} (\operatorname{div} \psi)(x') \, dx', \int_{\hat{G}} \frac{1}{|x-x'|} (\operatorname{div} \psi)(x') \, dx'.$$

Entsprechendes gilt für $\int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \psi \, dx'$ usw. r steht für $|x - x'|$.

$K_R(0)$ ist offene Kugel um 0 des $\mathbb{R}^3$ mit Radius $R > 0$. $[.,.]$ ist das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Für einen Banachraum B ist B^* sein Dualraum, $\mathsf{L}(B_1, B_1)$ sind die beschränkten linearen Operatoren vom Banachraum B_1 in den Banachraum B_2. Ist etwa $B_1 \supset B_2$, so kann man die intermediaren Räume $(B_1, B_2)_{\vartheta,p}$, $0 < \vartheta < 1$, $p > 1$, studieren (reelle Interprepolationsmethode oder K-Methode, s. § 1). $\mathsf{N}(T)$ ist der Nullraum eines stetigen linearen Operators T. Der Wert eines linearen Funktionals, das auf einem Banachraum oder lokal konvexen Raum erklärt ist, an der Stelle u, wird oft mit $\langle f, u \rangle$ bezeichnet.

Wir benutzen $(.,.)$ sowohl für das L^2 oder L^p-L^q-Skalarprodukt $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1)$ als auch für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{C}^3$. Die Norm von $L^p(\partial G)$, $L^p(G)$ $L^p(\hat{G})$ bezeichnen wir auch mit $\|.\|^{\partial G}_{0,p}$, $\|.\|^{G}_{0,p}$, $\|.\|^{\hat{G}}_{0,p}$. Entsprechend werden die Normen der Sobolev-Räume $W^{s,p}(\partial G)$ aus § 1, der Räume $W^{1,p}(G)$ usw. mit $\|.\|^{\partial G}_{s,p}$, $\|.\|^{G}_{1,p}$ usw. bezeichnet.

§ 1. Integraloperatoren auf dem Rand von G

G ist eine beschränkte offene Menge des $\mathbb{R}^3$. ∂G sei von der Klasse C^∞, insbesondere liege G lokal immer auf einer Seite von ∂G und die äußere Normale ν existiere in jedem Punkt von ∂G. Sie wird, je nach Orientierung, in lokalen Parametern u^1, u^2 durch $\pm [\partial x/\partial u^1, \partial x/\partial u^2] / |[\partial x/\partial u^1, \partial x/\partial u^2]|$ gegeben. G besitze eine Darstellung $G = \bigcup_{\nu=1}^{\hat{m}} G_\nu$ mit beschränkten offenen, wegweise zusammenhängenden Mengen G_ν, d.h. $\hat{m}$ ist die zweite Betti-Zahl von $\hat{G} = \mathbb{R}^3 \text{-} \bar{G}$. Jedes ∂G_ν wird in der üblichen Weise zu einer kompakten randlosen Riemannschen Mannigfaltigkeit gemacht, d.h. man setzt $g_{ik} = (\partial x/\partial u^i, \partial x/\partial u^k)$, $1 \leqq i, k \leqq 2$. ∂G_ν sei natürlich geschlossen[1]. $\mathsf{D}(\partial G)$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf ∂G, ausgestattet mit der üblichen lokalkonvexen Topologie, $\mathsf{D}'(\partial G)$ sind die stetigen linearen Funktionale auf $\mathsf{D}(\partial G)$ (Distributionen auf ∂G). Ein Element f aus $L^1(\partial G)$ wird wie üblich mit der Linearform

$$\langle f, u\rangle = \int_{\partial G} f u \, d\Omega, \quad u \in \mathsf{D}(\partial G),$$

identifiziert. Die Räume $L_p(\partial G)$, $W^{1,p}(\partial G)$, $W^{s,p}(\partial G) = B^s_{p,p}(\partial G)$, $0 < s < 1$, werden als bekannt vorausgesetzt; s. hierzu etwa [7, 3.6.1]. Anwendung der K-Methode, s. [7, 1.3.2], liefert

$$(L^p(\partial G), W^{1,p}(\partial G))_{\vartheta,p} = W^{\vartheta,p}(\partial G), \quad 0 < \vartheta < 1,$$

mit äquivalenten Normen, wie wir gleich zeigen.

Wir können natürlich die Dualräume $(W^{s,p}(\partial G))^*$ erklären und sie lokal über die Räume $B^{-s}_{p,p}(\mathbb{R}^2)$ bzw. $H^{-1,p}(\mathbb{R}^2)$ beschreiben $(0 < s < 1)$. Dazu dient die

Definition 1.1: *Sei* $q \nless 1$, $0 < s \leqq 1$. *Sei* $\{U_j, x_j, x_j(U_j)\}$, $1 \leqq j \leqq N$, *ein Atlas der Mannigfaltigkeit* ∂G, *sei* ζ_j eine untergeordnete *Teilung der* 1 *auf* ∂G. *Dann setzen wir*

$$\begin{aligned} W^{-s,q}(\partial G) = \{ f \mid f \in \mathsf{D}'(\partial G), f_j \quad &\text{mit} \quad \langle f_j, \varphi\rangle := \langle f, \zeta_j \cdot \varphi \circ x_j^{-1}\rangle, \\ &\varphi \in \mathsf{S}(\mathbb{R}^2), \quad \text{ist aus} \quad H^{-1,q}(\mathbb{R}^2) \quad \text{für} \quad s = 1 \quad \text{bzw. aus} \\ &B^{-s}_{q,q}(\mathbb{R}^2) \quad \text{für} \quad 0 < s < 1, j = 1, \dots, N \} \end{aligned}$$

Als Norm von $W_{-s,q}(\partial G)$ *führen wir die Größe*

$$\|f\|_{W^{-s,q}(\partial G)} = \|f\|^{\partial G}_{-s,q} = \Big(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|^q_{W^{-s,q}(\mathbb{R}^2)}\Big)^{1/q} \quad \textit{ein.}$$

[1] D.h.: ∂G_ν besitze endlich viele Zusammenhangskomponenten, die geschlossene Flächen sind.

Es ist leicht zu sehen, daß mit dieser Norm $W^{-s,q}(\partial G)$ ein Banachraum wird. Die Verbindung zwischen den Räumen $(W^{s,p}(\partial))^*$ und $W^{-s,q}(\partial G)$ stellt der folgende Satz her:

Satz 1.1: *Es ist für* $p,q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *mit äquivalenten Normen*

$$W^{-s,q}(\partial G) = (W^{s,p}(\partial G))^*, 0 \leqq s \leqq 1.$$

Beweis: Als potentiellen Isomorphismus des $\mathbb{C}$-Vektorraums $(W^{s,p}(\partial G))^*$ auf den $\mathbb{C}$-Vektorraum $W^{-s,q}(\partial G)$ wählen wir die Abbildung L mit

$$f = \mathsf{L}\tilde{f}, \tilde{f} \in (W^{s,p}(\partial G))^*,$$
$$\langle f, u\rangle = \langle \tilde{f}, u\rangle, u \in \mathsf{D}(\partial G).$$

Man überlegt sich sofort, daß $C^\infty(\partial G)$ dicht ist in allen $W^{\sigma,r}(\partial G)$, $-1 \leqq \sigma \leqq 1$, $r>1$ ($C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ist dicht in $B^{\pm\sigma}_{r,r}(\mathbb{R}^2)$, $\sigma \in (0,1)$, $r>1$, und in $H^{\pm 1,r}(\mathbb{R}^2)$, $r>1$, s. [7, S. 176]) und L bijektiv und stetig ist.

Satz 1.2: *Seien* $p,q>1$. *Dann ist*

$$(W^{-1,q}(\partial G), L^q(\partial G))_{\vartheta,q} = W^{-\vartheta,q}(\partial G),$$
$$(L^p(\partial G), W^{1,p}(\partial G))_{\vartheta,p} = W^{\vartheta,p}(\partial G), 0<\vartheta<1,$$

mit äquivalenten Normen.

Beweis: Wir ordnen jedem $f \in W^{-1,q}(\partial G)$ die Distribution f_j aus Definition 1.1 zu. Dies liefert eine stetige lineare Abbildung T_j^* von $W^{-1,q}(\partial G)$ nach $W^{-1,q}(\mathbb{R}^2)$ und von $L^q(\partial G)$ nach $L^q(\partial G)$. Es ist

$$\langle f, u\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle f_j, \zeta_j u \circ x_j\rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \langle T_j^* f, \zeta_j u \circ x_j\rangle.$$

Es ist $T_j^* \in \mathsf{L}((W^{-1,q}(\partial G), L^q(\partial G))_{\vartheta,q}, (H^{-1,q}(\mathbb{R}^2), L^q(\mathbb{R}^2))_{\vartheta,q})$. Für $f \in (W^{-1,q}(\partial G), L^q(\partial G))_{\vartheta,q}$ folgt

$$(W^{-1,q}(\partial G), L^q(\partial G)_{\vartheta,q} \subset W^{-\vartheta,q}(\partial G)$$

mit einer stetigen Einbettung. Nun ist $W^{-\vartheta,q}(\partial G) = (W^{\vartheta,p}(\partial G))^*, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ nach Satz 1.1. Ordnen wir jedem $u \in L^p(\partial G)$ bzw. $u \in W^{1,p}(\partial G)$ die Funktion $\zeta_j u \circ x_j$ zu, so erhalten wir eine stetige lineare Abbildung T_j von $L^p(\partial G)$ nach $L^p(\mathbb{R}^2)$ und von $W^{1,p}(\partial G)$ nach $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Vermöge

$$u = \sum_{j=1}^{N} \zeta_j u$$

liefert dies wie oben

$$(L^p(\partial G),\ W^{1,p}(\partial G))_{\vartheta,p} \subset W^{\vartheta,p}(\partial G)$$

mit einer stetigen Einbettung. Also ist

$$\begin{aligned}(W^{-1,q}(\partial G),\ L^q(\partial G))_{\vartheta,q} &\subset W^{-\vartheta,q}(\partial G)\\ &= (W^{\vartheta,p}(\partial G))^* \subset (L^p(\partial G),\ W^{1,p}(\partial G))^*_{\vartheta,p}\\ &= (W^{-1,q}(\partial G),\ L^p(\partial G))_{\vartheta,q}\end{aligned}$$

nach [7, 1.11.2]. Daher gilt überall das Gleichheitszeichen mit äquivalenten Normen. Damit erhalten wir die erste Aussage des Satzes. Aus

$$(W^{\vartheta,p}(\partial G))^* = (L^p(\partial G),\ W^{1,p}(\partial G))^*_{\vartheta,p}$$

mit äquivalenten Normen und

$$(L^p(\partial G),\ W^{1,p}(\partial G))_{\vartheta,p} \subset W^{\vartheta,p}(\partial G))$$

folgt auch die zweite Aussage des Satzes.

Im zweiten Abschnitt dieses Paragraphen beschäftigen wir uns mit Randintegraloperatoren, nämlich mit

$$\begin{aligned}M\lambda(\xi) &= \int_{\partial G} \frac{1}{|\xi-\xi'|}\,\lambda(\xi')\,d\Omega,\\ K\lambda(\xi) &= \frac{-1}{2\pi}\int_{\partial G}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\right)(\xi,\xi')\,\lambda(\xi')\,d\Omega,\ \xi \in \partial G,\end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{r} = \frac{1}{|\xi-\xi'|}$ gesetzt ist. Bei M handelt es sich um die Randwerte des Einfachschichtpotentials M mit der Belegung λ, bei K um den Randintegraloperator des Neumann-Problems. Es gilt der

Satz 1.3: *Es sind $M, K \in \mathsf{L}(L^p(\partial G),\ W^{1,p}(\partial G))$ für jedes $p > 1$. Erklärt man M, K zunächst auf $\lambda \in C^\infty(\partial G)$, so lassen sich diese Operatoren durch Abschließung zu Operatoren aus $\mathsf{L}(W^{-1,p}(\partial G),\ L^p(\partial G))$ fortsetzen. Diese Fortsetzungen werden ebenfalls mit M, K bezeichnet. Für sie gilt*

$$M, K \in \mathsf{L}(W^{\cancel{-1/p},p}(\partial G),\ W^{1-1/p,p}(\partial G)),\ p > 1.$$ H-1/p

Beweis: Vom bereits eingeführten Atlas $(U_j, x_j, x_j(U_j))$, $1 \leqq j \leqq N$, der Randmannigfaltigkeit ∂G setzen wir voraus, daß die U_j konvex und jeweils durch endlich viele stetig differenzierbare Kurven berandet sind. Es ist $(\lambda \in L^p(\partial G),\ g = \det(g_{ik}))$

$$\begin{aligned}M\lambda &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial G} \frac{1}{r}\,\zeta_j\lambda\,d\Omega = \sum_{j=1}^{N}\int_{U_j} \frac{1}{|\xi(u^1,u^2)-\xi(u^{1'},u^{2'})|}\,\zeta_j\lambda(\xi'(u^{1'},u^{2'}))\\ &\cdot \sqrt{g(u^{1'},u^{2'})}\,du^{1'}\,du^{2'},\ \xi = \xi(u^1,u^2),\ \xi' = \xi(u^{1'},u^{2'})\end{aligned}$$

wenn $u^{1'}, u^{2'}$ lokale Parameter aus U_j sind. Offenbar ist es für die erste Behauptung des Satzes völlig hinreichend zu beweisen, daß

$$f_j = \int_{U_j} \frac{1}{|\xi(.,.)-\xi(u^{1'},u^{2'})|}\, \zeta_j \lambda\,(\xi(u^{1'},u^{2'}))\sqrt{g(u^{1'},u^{2'})}\; du^{1'}\, du^{2'}$$

in $W^{1,p}(U_j)$ liegt und einer Abschätzung $\|f\|^{U_j}_{1,p} \leqq c\|\lambda\|_{L^p(\partial G)}$ genügt. Da es klar ist, daß wir es nur mit Randpunkten zu tun haben, schreiben wir statt $\xi(u^1,u^2)$, $\xi(u^{1'}, u^{2'})$ auch $x = x(u^1,u^2)$, $x' = x(u^{1'},u^{2'})$. Entwicklung vom $x(u^1,u^2) - x(u^{1'},u^{2'})$ nach Taylor um (u^1,u^2) liefert

$$\begin{aligned}
r = (|x-x'|^2)^{\frac{1}{2}} = \Big\{ &\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(u^1,u^2)(u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'}) \\
&+ 2\sum_{i,j,k=1}^{2} \Big(\frac{\partial x}{\partial u^i}(u^1,u^2), \int_0^1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^j \partial u^k}\big((u^1,u^2) \\
&+ t((u^{1'},u^{2'})-(u^1,u^2))\big)(1-t)\,dt\Big)(u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'})(u^k-u^{k'}) \\
&+ \sum_{i,j,k,l=1}^{2} \Big(\int_0^1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}\big((u^1,u^2) + t((u^{1'},u^{2'})-(u^1,u^2))\big)(1-t)\,dt, \\
&\int_0^1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^k \partial u^l}\big((u^1,u^2) + t((u^{1'},u^{2'})-(u^1,u^2))\big)(1-t)\,dt\Big) \\
&\cdot (u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'})(u^k-u^{k'})(u^l-u^{l'})\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Im Term zwischen $\{$ und $\}$ bezeichnen wir die erste Summe mit $\Sigma_1 = \Sigma_1(u,u')$ $= \Sigma_1(u, u-u')$ und die verbleibenden Summen insgesamt mit $\Sigma_2 = \Sigma_2(u,u')$, $u = (u^1,u^2)$, $u' = (u^{1'},u^{2'})$. Also ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\Sigma_1^{1/2}} + \frac{\Sigma_1^{1/2} - (\Sigma_1+\Sigma_2)^{1/2}}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{1/2}\Sigma_1^{1/2}}$$

und wir setzen

$$\mathsf{R}_1(u,u') = \frac{\Sigma_1^{1/2}(u,u') - (\Sigma_1(u,u')+\Sigma_2(u,u'))^{1/2}}{(\Sigma_1(u,u')+\Sigma_2(u,u'))^{1/2}\Sigma_1^{1/2}(u,u')}.$$

Hierbei denken wir uns die Parameterumgebungen U_j hinreichend klein gewählt, so daß Σ_1 stets Σ_2 überwiegt. Insbesondere erhält man dann

$$\mathsf{R}_1 \in C^1(\bar{U}_j \times \bar{U}_j - \{(u,u') \mid u = u'\}),$$

$$|\mathsf{R}_1(u,u')| \leqq \frac{c}{|u-u'|^{1/2}},$$

$$\Big|\frac{\partial \mathsf{R}_1}{\partial u^1}\Big|, \Big|\frac{\partial \mathsf{R}_1}{\partial u^2}\Big| \leqq \frac{c}{|u-u'|^{3/2}}.$$

R_1 ist also mit seinen Ableitungen ein schwach singulärer Kern, während $\frac{1}{\Sigma_1(u, u-u')}$ den folgenden Voraussetzungen genügt: Σ_1' ist aus $C^1(\bar{U}_j \times \mathbb{R}^2 - \{0\})$,

$$\Sigma_1(u, |\lambda|(u-u')) = |\lambda|^{-1} \Sigma_1(u, u-u'), \lambda \neq 0$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial u^i} \Sigma_1(u, u-u')\right| \leqq \frac{c}{|u-u'|^2}, \; i = 1, 2.$$

Es ist nun klar, daß $-\frac{\partial}{\partial u^{i'}} \Sigma_1(u, u-u') = \frac{\partial}{\partial (u^i - u^{i'})} \Sigma_1(u, u-u')$ ein singulärer Kern im Sinn von [1, p. 290] ist. Die Einschränkung von u auf $\bar{U}_j$ ist unwesentlich, da wir nur an der $W^{1,p}(U_j)$-Norm von $M\zeta_j\lambda$ interessiert sind. Es folgt jetzt wie in [8, S. 202–204] [2]

$$\left\| \int_{U_j} \frac{1}{\Sigma_1(.,.-u')^{1/2}} \zeta_j \lambda \sqrt{g(u')}\, du' \right\|_{W^{1,p}(U_j)} \leqq c \|\lambda\|_{L^p(\partial G)}$$

und damit

$$\|M\lambda\|_{1,p}^{\partial G} \leqq c\|\lambda\|_{L^p(\partial G)}.$$

Da M formal selbstadjungiert ist, folgt mit dem Satz von Fubini-Tonelli sofort

$$\|M\lambda\|_{L^p(\partial G)} \leqq c\|\lambda\|_{-1,p}^{\partial G}, \; \lambda \in C^\infty(\partial G),$$

so daß wir nach Abschließung von M in $W^{-1,p}(\partial G)$ erhalten:

$$M \in L(L^p(\partial G), W^{1,p}(\partial G)),$$
$$M \in L(W^{-1,p}(\partial G), L^p(\partial G)),$$

also wegen Satz 1.2 die Behauptung des Satzes für M. Zum Beweis des Satzes für K betrachten wir neben K seine Adjungierte L,

$$L\lambda(\xi) = \frac{-1}{2\pi} \int_{\partial G} \left(\frac{\partial}{\partial \nu' r}\right)(\xi, \xi')\, \lambda(\xi')\, d\Omega, \; \xi \in \partial G,$$

den Randintegraloperator des Dirichlet-Problems. Hierbei ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu' r}\right)(\xi, \xi') = \left(\nu(\xi'), \operatorname{grad}_{\xi'} \frac{1}{|\xi - \xi'|}\right).$$

[2] Der Beweis bezieht sich nur auf $p = 2$, läßt sich aber ohne Änderung auf $p > 1$ übertragen. In Lemma 2.1 in [8] muß es heißen: „$|\partial_i^\gamma M(x, x-y)| \leqq c|x-y|^{-m}, x \neq y$," während „if (2.5) is fulfilled for $K = -\partial_i^\gamma M$" gestrichen werden kann.

Wir haben nach Taylor mit den vorhin eingeführten Bezeichnungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\right)(\xi,\xi') = -(\nu(\xi), \xi-\xi')\frac{1}{r^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g(u)}}\Big(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\Big[\frac{\partial x}{\partial u^1}(u^1,u^2), \frac{\partial x}{\partial u^2}(u^1,u^2)\Big],$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}(u^1,u^2)\Big)(u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'})$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{2}\int_0^1\Big(\Big[\frac{\partial x}{\partial u^1}(u^1,u^2), \frac{\partial x}{\partial u^2}(u^1,u^2)\Big],$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}\big((u^1,u^2)+t((u^{1'},u^{2'})-(u^1,u^2))\big)(1-t)^2\,dt$$

$$\cdot\,(u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'})(u^k-u^{k'})\Big)\frac{1}{r^3}\,.$$

Für $\frac{1}{r^3}$ erhalten wir aus den vorhergehenden Rechnungen die Darstellung

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\Sigma_1^{3/2}} + \frac{\Sigma_1^{3/2}-(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}\Sigma_1^{3/2}}\,,$$

wobei Σ_1, Σ_2 die vorhin eingeführte Bedeutung haben. Wir setzen diese Darstellung in unsere Formel für $\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\right)(\xi,\xi')$ ein und erhalten

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{r}\right)(\xi,\xi') = \frac{1}{2\sqrt{g(u)}}\Big\{\sum_{i,j=1}^{2}\Big(\Big[\frac{\partial x}{\partial u^1}(u), \frac{\partial x}{\partial u^2}(u)\Big]\Big),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}(u)(u^i-u^{i'})(u^j-u^{j'})\Big\}\frac{1}{\Sigma_1(u,u-u')^{3/2}} + \mathrm{R}_2(u,u').$$

Der erste Summand genügt denselben Anforderungen wie vorhin $\frac{1}{\Sigma_1(u,u-u')^{1/2}}$, während für den Restterm $\mathrm{R}_2(u,u')$ sogar gilt:

$$\mathrm{R}_2 \in C^1(\bar{U}_j \times \bar{U}_j - \{(u,u') \mid u = u'\}),$$

$$|\mathrm{R}_2(u,u')| \leqq c,$$

$$\Big|\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial u^1}\Big|, \Big|\frac{\partial \mathrm{R}_2}{\partial u^2}\Big| \leqq \frac{c}{|u-u'|}\,.$$

Eine entsprechende Darstellung leitet man für den Kern von L, nämlicl $\left(\frac{\partial}{\partial \nu'}\frac{1}{r}\right)(\xi,\xi')$ ab, indem man die Formel

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'}\right)(\xi,\xi') = (\nu(\xi') - \nu(\xi), \xi' - \xi)\,\frac{1}{r^3} + \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\right)(\xi,\xi')$$

benutzt und $\nu(\xi') - \nu(\xi)$ um ξ nach Taylor bezüglich lokaler Parameter entwickelt. Damit folgt

$$\|K\lambda\|_{1,p}^{\partial G} \leqq c\|\lambda\|_{L^p(\partial G)},$$

$$\|L\lambda\|_{1,p}^{\partial G} \leqq c\|\lambda\|_{L^p(\partial G)}.$$

Da L die Adjungierte zu K ist, folgt wieder mit dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\|K\lambda\|_{L^p(\partial G)} \leqq c\|\lambda\|_{-1,p}^{\partial G}, \lambda \in C^\infty(\partial G)$$

und hieraus wie eben für M die Behauptung des Satzes für K.

Nützlich sind die folgenden Aussagen über Tangentialfelder: $L_\tau^p(\partial G)$, $p > 1$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller bezüglich des Oberflächenmaßes auf ∂G fast überall auf ∂G erklärten Abbildungen von ∂G in $\mathbb{C}^3$ mit $(\nu, a) = 0$ und $\int_{\partial G} |a|^p\, d\Omega < +\infty$. Mit der Norm $(\sum_{i=1}^{3} \int_{\partial G} |a_i|^p\, d\Omega)^{1/p}$ wird $L_\tau^p(\partial G)$ ein Banachraum $C_\tau^\infty(\partial G)$ ist analog definiert. $W_\tau^{s,p}(\partial G)$ ist der Raum der Tangentialfelder a mit $a_i \in W^{s,p}(\partial G)$, $i = 1,2,3$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ und der Norm

$$\|a\|_{s,p}^{\partial G} = \Big(\sum_{i=1}^{3} \|a_i\|_{s,p}^{\partial G\,p}\Big)^{1/p}.$$

Topologisieren wir $C_\tau^\infty(\partial G)$ in der üblichen Weise, so entsteht $\mathsf{D}_\tau(\partial G)$. Die stetigen linearen Abbildungen von $\mathsf{D}_\tau(\partial G)$ in $\mathbb{C}$ werden mit $\mathsf{D}'_\tau(\partial G)$ bezeichnet. Damit können wir $W_\tau^{-s,q}(\partial G)$ analog zu Definition 1.1 erklären. Es gelten die zu Satz 1.1 und Satz 1.2 analogen Aussagen, die Beweise entsprechen denen der Sätze 1.1 und 1.2. $C_\tau^\infty(\partial G)$ ist wieder dicht in $W_\tau^{s,p}(\partial G)$, $-1 \leqq s \leqq 1$, $p > 1$.

Satz 1.4: *Der Operator* Div (*s.* § 0) *ist aus* $\mathsf{L}(W_\tau^{1,p}(\partial G), L^p(\partial G))$ *Erklärt man* Div *auf* $C_\tau^\infty(\partial G)$, *so läßt sich* Div *durch Abschließung zu einem Operator aus* $\mathsf{L}(L_\tau^p(\partial G), W^{-1,p}(\partial G))$ *fortsetzen, der ebenfalls mit* Div *bezeichnet wird. Für ihn gilt:*

$$\operatorname{Div} \in \mathsf{L}(W_\tau^{1-1/p,p}(\partial G), W^{-1/p,p}(\partial G)).$$

Beweis: Die erste Aussage ist klar. Vermöge der Formel der partiellen Integration hat man

$$\int_{\partial G} (\operatorname{Div} a)\cdot \varphi\, d\Omega = -\int_{\partial G} (a, \operatorname{Grad} \varphi)\, d\Omega,$$
$$a \in C_\tau^\infty(\partial G),$$
$$\varphi \in C^\infty(\partial G),$$

also

$$\|\operatorname{Div} a\|_{-1,p}^{\partial G} \leqq c\|a\|_{L_\tau^p(\partial G)}\,.$$

Damit folgt die zweite Behauptung. Wir haben also

$$\operatorname{Div} \in \mathsf{L}(W_\tau^{1,p}(\partial G), L^p(\partial G)),$$

$$\operatorname{Div} \in \mathsf{L}(L_\tau^p(\partial G), W^{-1,p}(\partial G)).$$

Durch Interpolation folgt die dritte Behauptung.

Zum in Satz 1.3 eingeführten Operator $K \in \mathsf{L}(W^{-1,p}(\partial G), W^{-1,p}(\partial G))$ bemerken wir noch, daß auf Grund der regularisierenden Eigenschaften von K gilt: Jedes Element u aus $\mathsf{N}(I \pm K)$, d.h. $u \pm Ku = 0$ in $W^{-1,p}(\partial G)$, ist aus $C^\alpha(\partial G)$, $0 < \alpha < 1$.

§ 2. Das Neumann-Problem im Innenraum

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und offen wie in § 1. ν sei die äußere Normale an ∂G, $\alpha \in (0,1)$.

Satz 2.1: *Sei* $g \in C^\alpha(\partial G)$

$$u \in C^2(G) \cap C^1(\bar G)$$

$$-\Delta u = 0 \quad in \quad G$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad auf \quad \partial G.$$

Dann gilt

$$\|\nabla u\|_{0,p}^G = \|\nabla u\|_{L^p(G)} \leqq c(p)\|g\|_{-1/p,p}^{\partial G}, \quad p > 1.$$

Beweis: Es ist für $\psi \in (C_0^\infty = (G))^3$ jedenfalls

$$0 = (-\Delta u, -\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi\,dx')$$

$$= (\nabla u, -\nabla\frac{1}{4\pi}\int_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi\,dx')$$

$$-\int_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{1}{4\pi}\int_G\frac{1}{r}\operatorname{div}\psi\,dx'\,d\Omega,$$

$$(\nabla u, \operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\int_G\frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\,dx')$$

$$= \int_{\partial G} u(\nu, \operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\int_G\frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\,dx')\,d\Omega.$$

Wegen $\psi = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi dx' + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi dx'$ folgt

$$|(\nabla u,\psi)| \leqq \underbrace{\Big|\int\limits_{\partial G} g\frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi\, dx'\, d\Omega\Big|}_{\mathrm{I}}$$

$$+ \underbrace{\Big|\int\limits_{\partial G} u\,(\nu, \operatorname{rot}\frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi dx')\, d\Omega\Big|}_{\mathrm{II}},$$

$$\mathrm{I} \leqq c\|g\|^{\partial G}_{-1/p,p}\Big\|\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi dx'\Big\|^{\partial G}_{1/p,q}$$

$$\leqq c\|g\|^{\partial G}_{-1/p,p}\Big\|\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi dx'\Big\|^{\partial G}_{1-1/q,q}$$

$$\overset{\text{(Spursatz)}}{\leqq} c\|g\|^{\partial G}_{-1/p,p}\Big\|\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{div}'\psi dx'\Big\|^{G}_{1,q}$$

$$\overset{\text{(CZ)}}{\leqq} c\|g\|^{\partial G}_{-1/p,p}\|\psi\|^{G}_{0,q}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{II} \leqq \|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p}\Big\|\operatorname{Div}[\nu, \frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\, dx' - \underline{c}]\Big\|^{\partial G}_{-1/q,q},$$

$\underline{c}$ irgendein in den Zusammenhangskomponenten von ∂G jeweils konstantes Vektorfeld,

$$\overset{\text{(Satz 1.4)}}{\leqq} \|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p}\Big\|[\nu, \frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\, dx' - \underline{c}]\Big\|^{\partial G}_{1-1/q,q},$$

$$\leqq c\|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p}\Big\|\frac{1}{4r}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\, dx' - \underline{c}\Big\|^{G_R}_{1,q},$$

G_R ein in G gelegener Randstreifen an ∂G der Breite $R > 0$, R hinreichend klein,

$$\leqq c\|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p}\Big\|\frac{1}{4\pi}\nabla\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\, dx'\Big\|^{G}_{0,q}$$

nach Poincaré, wenn man für die Komponenten von $\underline{c}$ die Integralmittelwerte der entsprechenden Komponenten von $\frac{1}{4\pi}\int\limits_G \frac{1}{r}\operatorname{rot}'\psi\, dx'$ in den Zusammenhangskomponenten von G_R nimmt,

$$\overset{\text{(CZ)}}{\leqq} c\|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p}\|\psi\|^{G}_{q}. \tag{2.2}$$

Nun ist $u = \int\limits_{\partial G} \frac{1}{r} \lambda \, d\Omega$ in $\bar{G}$, $\lambda - K\lambda = g$ in ∂G, also

$$\|u\|^{\partial G}_{1-1/p,p} \leqq c \| \int\limits_{\partial G} \frac{1}{r} \lambda \, d\Omega \|^{\partial G}_{1-1/p,p}$$

$$\overset{\text{(Satz 1.3)}}{\leqq} c \|\lambda\|^{\partial G}_{-1/p,p} .$$

Wegen $\lambda - K\lambda = g$ folgt

$$\|\lambda + h_0\|^{\partial G}_{-1/p,p} \leqq c \|g\|^{\partial G}_{-1/p,p} ,$$

wobei $h_0 \in \mathrm{N}(I-K) \subset C^{\alpha}(\partial G)$ ist. Wegen $\tilde{u} = \int\limits_{\partial G} \frac{1}{r} (\lambda + h_0) \, d\Omega = \int\limits_{\partial G} \frac{1}{r} \lambda \, d\Omega$ $+ c$, c konstant in G_v, ist $\nabla u = \nabla \tilde{u}$. Wir können also von vornherei u durch $\tilde{u}$ ersetzen, und erhalten

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \leqq c \|g\|^{\partial G}_{-1/p,p} \|\psi\|^{G}_{0,q} .$$

§ 3. Das Neumann-Problem im Außenraum

Sei $\hat{G} = \mathbb{R}^3$-$\bar{G}$ wie in § 1, $\hat{\nu}$ die äußere Normale an $\partial \hat{G}$, $\alpha \in (0,1)$. Dann gilt

Satz 3.1: *Sei* $g \in C^{\alpha}(\partial G)$,

$u \in C^2(\hat{G}) \cap C^1(\bar{\hat{G}})$

$u(x) = 0(\frac{1}{|x|})$ *für* $|x| \to \infty$

$\nabla u(x) = 0(\frac{1}{|x|^2})$ *für* $|x| \to \infty$

$\Delta u = 0, \frac{\partial u}{\partial \hat{\nu}} = g$ *auf* ∂G.

Dann gilt

$$\|\nabla u\|^{\hat{G}}_{0,p} = \|\nabla u\|_{0,p} \leqq c(p) \|g\|_{-1/p,p} , \quad p > \tfrac{3}{2} .$$

Beweis: Bis auf die Abschätzung (2.1) ist der Beweis derselbe wie der von Satz 2.1, man muß nur G durch $\hat{G}$, $-K$ durch $+K$ ersetzen. Die Einschränkung $p > 3/2$ ist darauf zurückführen, daß die Abschätzung (2.1) erhalten werden muß. Sei $\hat{G}_R$ ein in $\hat{G}$ gelegener Randstreifen der Länge $R > 0$ an ∂G. Dann hat man, wenn wir die Herleitung von (2.1) im Fall des Außengebiets betrachten,

$$\| \int\limits_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi \, dx' \|^{\partial G}_{1-1/q,q}$$

$$\leqq c \| \int\limits_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi \, dx' \|^{\hat{G}_R}_{1,q} ,$$

$$\leqq c\,(\|\nabla \int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{1,q}^{\hat G_R} + \|\int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{1,q}^{\hat G_R})$$

$$\leqq c\,(\|\nabla \int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{0,q}^{\mathbb{R}^3} + \|\int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{1,q}^{\hat G_R})$$

$$\overset{\text{(CZ)}}{\leqq} c\,(\|\psi\|_{0,q}^{\hat G} + \|\int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{0,q_1}^{\hat G_R})$$

mit $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q} - \frac{1}{3}$, falls $q < 3$ ist,

$$\leqq c\,(\|\psi\|_{0,q}^{\hat G} + \|\int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\|_{0,q_1}^{\mathbb{R}^3}),$$

$$\overset{\text{(HL)}}{\leqq} c\|\psi\|_{0,q}^{\hat G}.$$

Die Annahme $q<3$ ist äquivalent zu $p>\frac{3}{2}$, da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Die Einschränkung $p>\frac{3}{2}$ kann man nur in speziellen Fällen beseitigen, etwa wenn die Neumann-Vorgabe von der Form $g = (\hat v, v)$ mit einem divergenzfreien Vektorfeld aus $L^p(\hat G)$ ist.

Satz 3.2: *Sei* $v \in (C^1(\bar{\hat G}))^3 \cap (L^p(\hat G))^3$ *für ein* $p>1$. *Sei* $g = (\hat v, v)$ *auf* $\partial \hat G$, u *eine Lösung des Neumann-Problems wie in Satz* 3.1. *Sei* $\operatorname{div} v = 0$. *Dann ist*

$$\nabla u \in L^p(\hat G),$$
$$\|\nabla u\|_{0,p}^{\hat G} \leqq c(p)\|v\|_{0,p}^{\hat G}.$$

Beweis: Zunächst ist $(\psi \in (C_0^\infty(\hat G))^3)$

$$(\nabla u, -\nabla \frac{1}{4\pi} \int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx')$$
$$= \int_{\partial G} (\hat v, v) \frac{1}{4\pi} \int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx'\, d\Omega$$
$$= \int_{\hat G} v \cdot \nabla \frac{1}{4\pi} \int_{\hat G} \operatorname{div}' \psi\, dx'\, dx,$$

also

$$|(\nabla u, -\nabla \frac{1}{4\pi} \int_{\hat G} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \psi\, dx')| \overset{\text{(CZ)}}{\leqq} \|v\|_{0,p}^{\hat G} \|\psi\|_{0,q}^{\hat G}.$$

Die Abschätzung (2.2) läßt sich für alle $p>1$ auf den Fall des Außengebiets übertragen, indem man G durch $\hat G$, G_R durch $\hat G_R$ ersetzt. Dies liefert

$$|(\nabla u, \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \psi\, dx')| \leqq c\|g\|_{-1/p,p}^{\partial \hat G} \|\psi\|_{0,q}^{\hat G}.$$

Sei $\tilde{\psi}$ irgendein Element aus $W^{1,q}(\hat{G})$, das außerhalb einer hinreichend großen Kugel um den Nullpunkt verschwindet. Es ist

$$\int_{\partial G} (\hat{\nu}, v)\, \tilde{\psi}\, d\Omega = \int_{\hat{G}} (v, \nabla \tilde{\psi})\, dx, \quad \text{also}$$

$$\Big| \int_{\partial \hat{G}} g \tilde{\psi}\, d\Omega \Big| \leqq \|v\|_{0,p}^{\hat{G}} \|\tilde{\psi}\|_{1,q}^{\hat{G}}.$$

Sei $\tilde{\psi}$ nun aus $W^{1-1/q,q}(\partial \hat{G})$. Dann gibt es eine auch mit $\tilde{\psi}$ bezeichnete Fortsetzung zu einem Element aus $W^{1,q}(\hat{G})$, das außerhalb einer hinreichend großen Kugel um den Nullpunkt verschwindet und der Abschätzung

$$\|\tilde{\psi}\|_{1,q}^{\hat{G}} \leqq c \|\tilde{\psi}\|_{1-1/q,q}^{\partial \hat{G}}$$

genügt mit einer von $\tilde{\psi}$ unabhängigen Konstante (Spursatz, § 0). Damit folgt

$$\Big| \int_{\partial \hat{G}} g \tilde{\psi}\, d\Omega \Big| \leqq c \|v\|_{0,p}^{\hat{G}} \|\tilde{\psi}\|_{1-1/q,q}^{\partial \hat{G}},$$

also

$$\|g\|_{-1/p,p}^{\partial \hat{G}} \leqq c \|v\|_{0,p}^{\hat{G}}.$$

Satz 3.2 ist bewiesen.

§ 4. Die Helmholtz-Zerlegung von $(L^p(G))^3$ und $(L^p(\hat{G}))^3$, $p > 1$

Wir wollen hier $(L^p(G))^3$ bzw. $(L^p(\hat{G}))^3$ in die Gradientenfelder und seinen divergenzfreien Anteil zerlegen. Die letzte Bezeichnung ist irreführend, da der sogenannte divergenzfreie Anteil in Wahrheit der Abschluß in der Norm von $(L^p(G))^3$ bzw. $(L^p(\hat{G}))^3$ von ergiebigkeitsfreien Vektorfeldern ist und bekanntlich ein Unterschied zwischen ergiebigkeitsfreien und divergenzfreien Vektorfeldern besteht. Es gilt der

Satz 4.1: *Sei $p > 1$. Dann ist*

$$(L^p(G))^3 = \mathrm{R}(Q) \oplus \mathrm{R}(P)$$

wobei $\mathrm{R}(Q), \mathrm{R}(P)$ die Wertebereiche zweier Projektoren P, Q in $(L^p(G))^3$ sind. Insbesondere sind $\mathrm{R}(Q)$, $\mathrm{R}(P)$ also abgeschlossene Teilräume von $(L^p(G))^3$. Es ist

$$\mathrm{R}(Q) = \{\nabla g \mid g \in W^{1,p}(G)\}$$

$$\mathrm{R}(P) = \overline{\{v \mid v \in (C^0(\bar{G}))^3 \cap (C^1(G))^3, (\nu, v) = 0 \text{ auf } \partial G, \operatorname{div} v = 0 \text{ in } G\}}^{\|\cdot\|\,(L^p(G))^3}.$$

Beweis: Im Beweis lassen wir meist den Exponenten 3 bei $(L^p(G))^3$, $(C^0(\bar{G}))^3$ usw. fort, da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. Sei φ ein Vektorfeld aus $C_0^\infty(G)$. Dann gilt

$$\varphi = -\operatorname{grad} \frac{1}{4r} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' \varphi \, dx' + \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx'.$$

Da $\int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx'$ *aus* $C^{1+\alpha}(\bar{G})$ ist, $0<\alpha<1$, ist

$$\operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial G} \in C_\alpha(\partial G).$$

Wegen

(4.1) $\quad (\nu, \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial G}) = -\operatorname{Div}[\nu, \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial G}],$

$$\int_{\partial G_\nu^{(z)}} \operatorname{Div}[\nu, \frac{1}{4\pi} \int_{\partial G} \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial G}] \, d\Omega = 0,$$

$\partial G_\nu^{(z)}$ irgendeine Zusammenhangskomponente von ∂G_ν,

hat das Neumann-Problem $\Delta H = 0$ in G, $\frac{\partial H}{\partial \nu} = (\nu, \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial G})$ auf ∂G, jedenfalls eine Lösung H, die bis auf Addition einer in G_ν jeweils konstanten Funktion eindeutig bestimmt ist. H ist aus $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$. Insbesondere ist grad H eindeutig bestimmt und hängt linear von φ ab. Es sei

$$Q\varphi = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' \varphi \, dx' + \operatorname{grad} H,$$

$$P\varphi = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' - \operatorname{grad} H, \; \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Q, P sind lineare Abbildungen von $C_0^\infty(G)$ in $C^0(\bar{G})$ mit $\varphi = Q\varphi + P\varphi$. Nach Calderón-Zygmund und Satz 2.1 folgt

$$\begin{aligned} \|Q\varphi\|_{0,p}^G &\leqq c(\|\varphi\|_{0,p}^G + \|\tfrac{\partial H}{\partial \nu}\|_{-1/p,p}^{\partial G}) \\ &\leqq c(\|\varphi\|_{0,p}^G + \|\int_G \tfrac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx'\|_{1,p}^G) \\ &\qquad \text{nach (4.1), Satz 1.4, Spursatz,} \\ &\leqq c(\|\varphi\|_{0,p}^G \quad \text{nach Calderón-Zygmund.} \end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\|P\varphi\|_{0,p}^G \leqq c\|\varphi\|_{0,p}^G.$$

Damit gestatten Q, P durch Abschließung jeweils eine beschränkte Fortsetzung auf $L^p(G)$, die wir auch mit Q_p, P_p oder einfach Q, P bezeichnen. Nach Konstruktion ist $P_r u = P_p u$, $Q_r u = Q_p u$, $r, p > 1$, $u \in L^r(G) \cap L^p(G)$ und

$$(\nu, P\varphi|_{\partial G}) = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

also nach dem Satz von Gauß

$$(Q\varphi, P\psi) = 0, \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty(G)$$

(4.2) $\quad (Qf, Pg) = 0, \; f \in L^p(G), \; g \in L^q(G), \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$

(4.3) $\quad f = Qf + Pf, \; f \in L^p(G).$

Wir befassen uns jetzt mit dem Fall $p = q = 2$. Dann ist

$$(f, P^*h) = (Pf, h) = (Pf, Qh + Ph) = (f, P^*Ph), \; f, h \in L^2(G),$$

also $P^* = P^*P$, und mit der Selbstadjungiertheit von P^*P folgt $P = P^2$ in $L^2(G)$. Ebenso folgt $Q = Q^2$ in $L^2(G)$. Also ist $P\varphi = P_p P\varphi$, $Q\varphi = Q_p Q\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, und damit $P = P^2$, $Q = Q^2$ in $L^p(G)$. (4.2) liefert $PQ\varphi = QP\varphi = 0$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, also $PQ = QP = 0$. Dies ist die behauptete Zerlegung von $L^p(G)$. Wir beweisen nun die angegebene Charakterisierung von $\mathrm{R}(Q)$ und $\mathrm{R}(P)$. Sei $f \in L^p(G)$. Sei (φ_μ) eine Folge aus $C_0^\infty(G)$ mit $\varphi_\mu \to f$, $\mu \to \infty$. Dann ist $Qf = \lim_{\mu \to \infty} Q\varphi_\mu$ in $L^p(G)$. Zu φ_μ definiere man grad H_μ wie vorher grad H zu φ. Dann ist, wenn wir irgendeine der möglichen Funktionen H_μ auswählen, jedenfalls $Q\varphi_\mu = \nabla h_\mu$ mit

$$h_\mu = -\frac{1}{4\pi} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' \varphi_\mu \, dx' = H_\mu .$$

Sei $c_\mu = \frac{1}{|G_\nu|} \int_{G_\nu} h_\mu \, dx$ in G_ν. Dann konvergieren nach Poincaré und Konstruktion $h_\mu - c_\mu$ und $\nabla(h_\mu - c_\mu) = \nabla h_\mu$ für $\mu \to \infty$ in $L^p(G)$ gegen h bzw. ∇h; also ist $h \in W^{1,p}(G)$ und $Qf = \lim_{\mu \to \infty} Q\varphi_\mu = \lim_{\mu \to \infty} \nabla h_\mu = \nabla h$. Sei umgekehrt $h \in W^{1,p}(G)$. Dann ist

$$\nabla h = Q\nabla h + P\nabla h, \quad \text{also}$$
$$(\nabla h, \varphi) = (Q\nabla h, \varphi) + (P\nabla h, \varphi), \; \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Sei (f_μ) eine Folge aus $C_0^\infty(G)$ mit $f_\mu \to \nabla h$ in $L^p(G)$ für $\mu \to \infty$. Also ist

$$\begin{aligned}(P\nabla h, \varphi) &= \lim_{\mu \to \infty} (Pf_\mu, \varphi), \\ &= \lim_{\mu \to \infty} (f_\mu, P\varphi) = (\nabla h, P\varphi), \; \varphi \in C_0^\infty(G).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß folgt $(P\nabla h, \varphi) = 0$, also $(\nabla h, \varphi) = (Q\nabla h, \varphi)$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, also $\nabla h = Q\nabla h$ und die angegebene Charakterisierung von $\mathrm{R}(Q)$. Zunächst ist die Inklusion

$$\mathsf{R}(P) \subset \overline{\{v \mid v \in (C^0(\bar{G}))^3 \cap (C^1(G))^3, (\nu, v) = 0 \text{ auf } \partial G, \operatorname{div} v = 0 \text{ in } G\}}^{\|.\|_{L^p(G)}}$$

klar. Sei nun v aus der letzten Abschließung, (v_μ) eine Folge aus $\{\ldots\}$ mit $v_\mu \to v$, $\mu \to \infty$, in $L^p(G)$. Es ist $v_\mu = Qv_\mu + Pv_\mu = \nabla h_\mu + Pv_\mu$, $Pv_\mu \in L^r(G)$, $r > 1$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $Q\varphi = \nabla h$ mit $h \in C^1(\bar{G})$. Es ist nach dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} 0 = (v_\mu, \nabla h) &= (\nabla h_\mu, \nabla h) + (Pv_\mu, \nabla h), \\ &= (\nabla h_\mu, \nabla h). \end{aligned}$$

Also ist ∇h_μ im Orthogonalkomplement von $\mathsf{R}(Q_2)$ enthalten. Für $p = 2$ ist die bereits gewonnene Zerlegung von $L^p(G)$ eine orthogonale. Wegen $\nabla h_\mu \in \mathsf{R}(Q_2)$ ergibt sich $\nabla h_\mu = 0$, $v_\mu = Pv_\mu$, $v \in \mathsf{R}(P)$.

Im Fall einer unbeschränkten Grundmenge $\hat{G} \subset \mathbb{R}^3$ läßt sich der Beweis annähernd analog, jedoch mit einigen charakteristischen Abänderungen durchführen. Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ wie vorher, also beschränkt. Sei $\hat{G} = \mathbb{R}^3 - \bar{G}$. Dann ist

$$\hat{G} = \bigcup_{\nu=1}^{m} \tilde{G}_\nu \cup \tilde{G}_{m+1}$$

nit den beschränkten Zusammenhangskomponenten $\tilde{G}_\nu$, $1 \leqq \nu \leqq m$, $m = 2$. Betti Zahl von G, und der einen unbeschränkten Zusammenhangskomponente $\tilde{G}_{m+1}$. Die Ränder $\partial\tilde{G}_\nu$ sind von der Klasse C^∞, ihre jeweils endlich vielen Zusammenhangskomponenten sind geschlossene Flächen, $1 \leqq \nu \leqq m+1$. $\hat{\nu}$ ist wie in § 1 die äußere Normale an $\partial\hat{G} = \partial G$ *bezüglich* $\hat{G}$. Es gilt

Satz 4.2: *Sei* $p > 1$. *dann ist*

$$(L^p(\hat{G}))^3 = \mathsf{R}(Q) \oplus \mathsf{R}(P),$$

wobei $\mathsf{R}(Q)$, $\mathsf{R}(P)$ *die Wertebereiche zweier Projektoren* P, Q *in* $(L^p(\hat{G}))^3$ *sind. Insbesondere sind* $\mathsf{R}(Q), \mathsf{R}(P)$ *also abgeschlossene Teilräume von* $(L^p(\hat{G}))^3$. *Es ist*

$$\mathsf{R}(Q) = \{\nabla g \mid g \in W^{1,p}(K_R(0) \cap \hat{G}), R \geqq R_0, \nabla g \in (L^p(\hat{G}))^3\},$$

$$\mathsf{R}(P) = \overline{\{v \mid v \in (C^0(\bar{\hat{G}}))^3 \cap (C^1(\hat{G}))^3 \cap (L^r(\hat{G}))^3, r > 1, (\hat{\nu}, v) = 0 \text{ auf } \partial\hat{G}, \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \hat{G}\}}^{\|.\|_{L^p(\hat{G})}}$$

für ein hinreichend großes $R^0 > 0$.

Beweis: Wir lassen wieder meist den Exponenten 3 bei $(L^p(\hat{G}))^3$ usw. fort. Für die Vektorfelder $\varphi \in C_0^\infty(\hat{G})$ gilt eine der bereits für G verwendeten analoge Zerlegung, das Neumann-Problem

$$\Delta H = 0 \text{ in } \hat{G}, \frac{\partial H}{\partial \hat{\nu}} = (\hat{\nu}, \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' |_{\partial \hat{G}})$$

auf $\partial \hat{G}$ läßt sich wie im Beweis von Satz 4.1 lösen, wobei – zunächst – das Verschwinden des Integralmittelwerts über $\partial \hat{G}_{m+1}$ der Neumann-Vorgabe nicht benötigt wird. Wir setzen wieder

$$Q\varphi = -\operatorname{grad} \frac{1}{4\pi} \int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \varphi \, dx' + \operatorname{grad} H,$$

$$P\varphi = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' - \operatorname{grad} H. \quad \varphi \in C_0^\infty(\hat{G}).$$

Nach Calderón-Zygmund haben wir für das Feld $v = \operatorname{rot} \frac{1}{4r} \int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx'$ die Abschätzung $\|v\|_{0,p}^{\hat{G}} \leqq c \|\varphi\|_{0,p}^{\hat{G}}$. Die Divergenzfreiheit von v garantiert die Anwendbarkeit von Satz 3.2 auf ∇H. Mit Calderón-Zygmund folgt für die linearen Abbildungen Q, P von $C_0^\infty(\hat{G})$ in $C^0(\hat{G})$ die Abschätzung

$$\|Q\varphi\|_{0,p}^{\hat{G}}, \|P\varphi\|_{0,p}^{\hat{G}} \leqq c \|\varphi\|_{0,p}^{\hat{G}}.$$

Offenbar sind

$$Q\varphi, P\varphi \in \bigcap_{r, +\infty \geqq r > 1} L^r(\hat{G}).$$

Wir setzen Q, P durch Abschließung auf $L^p(\hat{G})$ fort. Die Fortsetzungen werden mit Q_p, P_p bezeichnet, oder einfach mit Q, P. Es ist wieder $P_r u = P_p u$, $Q_r u = Q_p u$, $r, p > 1$, $u \in L^r(\hat{G}) \cap L^p(\hat{G})$. Weiter ist nach Konstruktion $(\nu, P\varphi|_{\partial \hat{G}}) = 0$ auf $\partial \hat{G}$, $\varphi \in C_0^\infty(\hat{G})$. Für $R \geqq R_0$ ist

$$\int_{\hat{G} \cap K_R(0)} (Q\varphi, P\psi) \, dx = \int_{\partial K_R(0)} h(\nu_R, P\psi|_{\partial K_R(0)}) \, d\Omega, \quad \varphi, \psi \in C_0^\infty(\hat{G}),$$

wobei ν_R die äußere Normale auf $\partial K_R(0)$ bezüglich $K_R(0)$ und

$$h = -\frac{1}{4\pi} \int_{\hat{G}} \frac{1}{r} \operatorname{div}' \varphi \, dx' + H$$

ist. Wegen $h(x) = 0(\frac{1}{|x|})$, $P\psi(x) = 0(\frac{1}{|x|^2})$ für $|x| \to \infty$ folgt

$$(Q\varphi, P\psi) = 0, \varphi, \psi \in C_0^\infty(\hat{G}).$$

Damit läßt sich wie im Beweis von Satz 4.1 zeigen, daß $Q^2 = Q$, $P^2 = P$ und

$$L^p(\hat{G}) = \mathsf{R}(Q) \oplus \mathsf{R}(P)$$

ist. Für die angegebene Charakterisierung von $\mathsf{R}(Q)$ ist ein teilweise neuer Beweis erforderlich, da das Lemma von Poincaré in $\hat{G}$ nicht mehr anwendbar ist. Zu $f \in L^p(\hat{G})$ wählen wir φ_μ, h_μ analog zum Beweis des Satzes 4.1.

Wir wählen eine Folge (K_μ) von Kugeln um 0 mit dem Radius $R_\mu > 0$ derart, daß

$$R_1 < R_2 < \ldots, \; R_{\mu+1} - R_\mu \geqq 1, \text{ also } R_\mu \to +\infty \text{ für } \mu \to \infty,$$
$$\bar{G} \subset K_1 \text{ sind.}$$

Sei $c_{K_\lambda}^{(\mu)}$ auf den Zusammenhangskomponenten von $\hat{G} \cap K_\lambda(0)$ durch den Integralmittelwert von h_μ über die betreffende Zusammenhangskomponente erklärt.

$$h_\mu - c_{K_1}^{(\mu)} \to h_1 \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\hat{G} \cap K_1), \; \mu \to \infty,$$
$$h_\mu - c_{K_2}^{(\mu)} \to h_2 \quad \text{in} \quad W^{1,p}(\hat{G} \cap K_2), \; \mu \to \infty,$$

usw. und

$$\nabla h_1 = Qf \quad \text{in} \quad \hat{G} \cap K_1,$$
$$\nabla h_2 = Qf \quad \text{in} \quad \hat{G} \cap K_2,$$

usw.

Es sei $h = h_1$ in $\hat{G} \cap K_1$. In $\hat{G} \cap K_1$ ist $h_2 = h_1 + c_1$ mit einer auf den Zusammenhangskomponenten von $\hat{G} \cap K_1$ konstanten Funktion c_1. Wir setzen $h = h_2 - c_1$ in $\hat{G} \cap K_2$. Fortsetzung dieses Verfahrens liefert ein h mit

$$(4.4) \qquad h \in \bigcap_{\mu \in \mathbb{N}} W^{1,p}(\hat{G} \cap K_\mu),$$

$\nabla h = Qf$. Sei umgekehrt ein h vorgelegt mit (4.4) und $\nabla h \in L^p(\hat{G})$. Wir können dann analog zum Beweis des Satzes 4.1 zeigen, daß $\nabla h \in \mathrm{R}(Q)$ ist, wenn wir die Gleichung $(P\nabla h, \varphi) = 0$, $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^\infty_0(\hat{G})$ beweisen können. Wir wählen eine Folge (ζ_μ) in $\hat{G}$ Lipschitzstetiger Funktionen mit

$$\xi_\mu = 1 \quad \text{auf} \quad \hat{G} \cap K_\mu,$$
$$\xi_\mu = 0 \quad \text{außerhalb} \quad K_{2\mu},$$
$$|\zeta_\mu| \leqq 1 \quad \text{überall},$$
$$\|\nabla \zeta_\mu\|_{L^\infty(\hat{G})} \to 0, \; \mu \to \infty.$$

Zunächst ist $(P\nabla h, \varphi) = (\nabla h, P\varphi)$

$$(\nabla h, P\varphi) = \lim_{\mu \to \infty} (\nabla h, \zeta_\mu P\varphi).$$

Ist c_μ auf den Zusammenhangskomponenten von $\hat{G} \cap K_{2\mu}$ gleich dem jeweiligen Integralmittelwert von h, so folgt

$$\begin{aligned} |(\nabla h, \zeta_\mu P\varphi) &= |(\nabla(h - c_\mu), \zeta_\mu P\varphi)|, \\ &= |(h - c_\mu, \operatorname{div}(\zeta_\mu P\varphi))|, \\ &= |(h - c_\mu, (\nabla \zeta_\mu, P\varphi))|, \\ &\leqq \|\nabla h\|_{0,p}^{\hat{G}} |\nabla \zeta_\mu\|_{L^\infty(\hat{G})} \|P\varphi\|_{0,q}^{\hat{G}} \end{aligned}$$

nach Poincaré, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Hieraus ersieht man, daß $(\nabla h, P\varphi)$ verschwindet. Die Charakterisierung von $\mathsf{R}(Q)$ ist bewiesen. Zur Charakterisierung von $\mathsf{R}\,P$): Zunächst ist die Inklusion

$$\mathsf{R}(P) \subset \overline{\{v \mid v \in (C^0(\bar{\hat{G}}))^3 \cap (C^1(\hat{G}))^3 \cap (L^r(\hat{G}))^3,\ r>1,\ (\hat{\nu}, v) = 0 \text{ auf } \partial G,\ \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \hat{G}\}}^{\|\cdot\|_{L^p(\hat{G})}}$$

klar. Sei v aus der letzten Abschließung, (v_μ) eine Folge aus $\{\ldots\}$ mit $v_\mu \to v$, $\mu \to \infty$, in $L^p(\hat{G})$. Es ist

$$v_\mu = Qv_\mu + Pv_\mu = \nabla h_\mu + Pv_{\mu'},\ Pv_\mu \in L^r(\hat{G}),\ r>1\,.$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(\hat{G})$, $Q\varphi = \nabla h$ mit $h \in C^1(\bar{\hat{G}})$, $h(x) = 0(\frac{1}{|x|})$ für $|x| \to \infty$. Wie eben beim Beweis von $(Q\varphi, P\psi) = 0$, $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\hat{G})$, folgt

$$\begin{aligned} 0 = (v_\mu, \nabla h) &= (\nabla h_\mu, \nabla h) + (Pv_\mu, \nabla h), \\ &= (\nabla h_\mu, \nabla h)\,. \end{aligned}$$

Der Rest ergibt sich wie im Beweis von Satz 4.1.

§ 5. Die solenoidalen Felder liegen dicht in $\mathsf{R}(P)$

Die solenoidalen Felder in G bzw. $\hat{G}$ sind die Vektorfelder v aus $(C_0^\infty(G))^3$ bzw. $(C_0^\infty(\hat{G}))^3$ mit $\operatorname{div} v = 0$ in G bzw. $\hat{G}$. Der Beweis des im Titel dieses Paragraphen angekündigten Resultats erfordert ein weitergehendes Hilfsmittel, nämlich die Charakterisierung des Wertebereichs des Operators div mit Definitionsbereich $(\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(G))^3$ wie sie in [9, I.8, S. 212] gegeben ist.

Satz 5.1: *Die solenoidalen Felder liegen dicht in* $\mathsf{R}(P)$.

Beweis: Wir befassen uns zunächst mit dem Fall einer beschränkten Grundmenge $G \subset \mathbb{R}^3$. Der Fall der unbeschränkten Grundmenge $\hat{G}$ läßt sich auf diesen zurückführen. Sei G_{a_0} ein in G gelegener offener Randstreifen der Breite $a_0 > 0$. Ist a_0 hinreichend klein, so gibt es zu jedem $x \in G_{a_0}$ genau einen nächstgelegenen Punkt $\xi \in \partial G$. Wir haben

$$\begin{aligned} x = \xi + a(-\nu), \quad a &= \operatorname{dist}(x, \partial G), \\ &= |x - \xi|\,. \end{aligned}$$

Für das analytische Vorgehen sei

$$x_j(a, u^1, u^2) = \xi_j(u^1, u^2) + a(-\nu_j(u^1, u^2)),\ j = 1,2,3, \tag{5.1}$$

mit $0 \leqq a \leqq a_0$, u^1, u^2 aus einer Parameterumgebung U des Randes,

$\xi_j(u^1, u^2) = j$-te Komponente des Randpunktes $\xi = \xi(u^1, u^2)$,

$\nu_j(u^1, u^2) = j$-te Komponente der äußeren Normalen in $\xi(u^1, u^2)$.

Es ist

$$\frac{\partial x_j}{\partial u^k} = \frac{\partial \xi_j}{\partial u^k} + a\,(-\frac{\partial \nu_j}{\partial u^k}), \quad \text{also}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u^k} = \frac{\partial \xi}{\partial u^k} + a\,(-\frac{\partial \nu}{\partial u^k}) \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a} = -\nu.$$

Insbesondere ist für $0 \leqq a \leqq a_0$, a_0 hinreichend klein, U hinreichend klein und glatt berandet, die Abbildung (5.1) eine jedenfalls einmal stetig differenzierbare Bijektion von $[0, a_0] \times \bar{U}$ auf einen entsprechenden Teil von $\overline{G_{a_0}}$. Wir studieren die Umkehrabbildung, nämlich $a = a(x)$, $u = u(x)$. Wegen

$$a(x)\big(-\nu(u(x))\big) = \xi(u(x)) - x \text{ folgt}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_j}(x)\big(-\nu(u(x))\big) = a(x)\frac{\partial \nu\circ u}{\partial x_j}(x) - e_j + \frac{\partial \xi\circ u}{\partial x_j}$$

mit der j-ten Einheitsspalte e_j. Skalarmultiplikation der letzten Gleichung mit $-\nu(u(x))$ liefert

$$\frac{\partial a}{\partial x_j}(x) = -a\left(\frac{\partial \nu\circ u}{\partial x_j}(x), \nu(u(x))\right) + \left(\frac{\partial \xi\circ u}{\partial x_j}(x), -\nu(u(x))\right) + \nu_j(u(x)).$$

Nach der Kettenregel ist

$$\frac{\partial \xi_k\circ u}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial \xi_k}{\partial u^l}\frac{\partial u^l}{\partial x_j}, \quad \text{also}$$

$$\frac{\partial \xi\circ u}{\partial x_j}(x) = \sum_{l=1}^{2} c_{jl}(x)\frac{\partial \xi}{\partial u^l}(x) \quad \text{mit}$$

$$c_{jl}(x) = (\partial u^l/\partial x^j)(x), \; 1 \leqq j \leqq 3, \; 1 \leqq l \leqq 2.$$

Daher ist

$$\left(\frac{\partial \xi\circ u}{\partial x_j}(x), -\nu(u(x))\right) = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial a}{\partial x_j}(x) = -a\left(\frac{\partial \nu\circ u}{\partial x_j}(x), \nu(u(x))\right) + \nu_j(u(x)).$$

Für $\mu = 2, 3, \ldots$ führen wir eine Lipschitzstetige Funktion η_μ, definiert auf allen nichtnegativen reellen Zahlen, ein, mit

$$\eta_\mu(t) = \begin{cases} 0, 0 \leqq t \leqq a_0/\mu, \\ \text{linear, } a_0/\mu \leqq t \leqq 2a_0/\mu. \\ 1, t \leqq 2a_0/\mu \end{cases}$$

$$|\eta_\mu(t)| \leqq 1, t \leqq 0, \eta'(t) = 1/(2a_0/\mu - a_0/\mu) = \mu/a_0, a_0/\mu \leqq t \leqq 2a_0/\mu.$$

Für $\eta_\mu \circ a$ erhalten wir $(a_0/\mu < a < 2a_0/\mu)$

$$\frac{\partial \eta_\mu \circ a}{\partial x_j}(x) = \eta_\mu'(a(x)) \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) = \frac{\mu}{a_0} \frac{\partial a}{\partial x_j}(x).$$

Erinnern wir uns, daß $a(x)$ für $x \in G_{a_0}$ der Randabstand von x von ∂G ist, so ist also $\eta_\mu \circ a$ Lipschitzstetig in $\bar{G}$ und hat kompakten Träger. Für ein Vektorfeld v aus $(C^1(\bar{G}))^3$ mit $(\nu, v) = 0$ auf ∂G und den Komponenten v_1, v_2, v_3 folgt

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \eta_\mu \circ a}{\partial x_j}(x)\, v_j(x) \\ &= -\frac{\mu a}{a_0} \cdot \sum_{j=1}^{3} \cdot \left(\frac{\partial \nu \circ u}{\partial x_j}(x), (u(x))\right) v_j(x) + \frac{\mu}{a_0} \cdot \big(\nu(u(x)), v(x)\big), \\ &\quad a_0/\mu < a < 2a_0/\mu, \end{aligned}$$

also

$$(5.2) \qquad |(\nabla \eta_\mu \circ a, v)| \leqq c(G, v) \text{ in } \bar{G}$$

mit einer von G, v abhängigen, jedoch von μ unabhängigen Konstante $c(G, v)$. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, $P\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, in $(L^p(G))^3$ durch solenoidale Felder zu approximieren. Wir haben

$$\operatorname{div} \eta_\mu \circ a \cdot P\varphi = (\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi)$$

wegen $\operatorname{div} P\varphi = 0$. Zu $(\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi)$ können wir nach [9, I.8, S. 212] ein $v_\mu \in (\overset{0}{W}{}^{1,p}(G - \overline{G_{a_0/\mu}}))^3$ finden mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v_\mu &= (\nabla \nu_\mu \circ a, P\varphi) \quad \text{in} \quad G - \overline{G_{a_0/\mu}}, \\ \|v_\mu\|_{1,p}^{G - \overline{G_{a_0/\mu}}} &\leqq c\|(\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi)\|_{0,p}^{G - \overline{G_{a_0/\mu}}}, \\ &= c\|(\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi)\|_{0,p}^{G}. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen in [9, I.5] zeigen, daß die letzte Konstante c nicht von μ abhängt. v_μ wird durch Null auf G fortgesetzt. Dann haben wir: $v_\mu \in (\overset{0}{W}{}^{1,p}(G))^3$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} v_\mu = (\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi), \\ &\|v_\mu\|_{1,p}^{G} \leqq c\|(\nabla \eta_\mu \circ a, P\varphi)\|_{0,p}^{G}. \end{aligned}$$

Wir untersuchen jetzt die höhere Regularität von $P\varphi$. Zunächst ist $(\alpha \in (0,1))$

$$\operatorname{rot} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \varphi \, dx' \in (C^{1+\alpha}(\bar{G}))^3.$$

Die Neumannvorgabe für H im Beweis des Satzes 4.1 ist also aus $C^{1+\alpha}(\partial G)$, also ist $H \in C^{2+\alpha}(\partial G)$ (man vergleiche hierzu (0.5) und die sich anschließenden Bemerkungen) und nach bekannten Resultaten für das Dirichletproblem folgt: $H \in C^{2+\alpha}(\bar{G})$. Somit ist $P\varphi$ aus $(C^{1+\alpha}(\bar{G}))^3$. Aus $\nabla \eta_\mu \circ a \to 0$ fast überall in G für $\mu \to \infty$, (5.2) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt: $v_\mu \to 0$ in $(\overset{0}{W}{}^{1,p}(G))^3$ für $\mu \to \infty$. Wir haben also

$$\begin{aligned}
&\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu \to P\varphi \quad \text{in} \quad L^p(G), \mu \to \infty, \\
&\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu \in (\overset{0}{W}{}^{1,p}(G))^3, \\
&\operatorname{supp}(\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu) \subset G - \overline{G_{a_0/\mu}}, \\
&\operatorname{div}(\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu) = 0 \quad \text{in} \quad G, \ \mu = 2, 3, \ldots .
\end{aligned}$$

Die Friedrichssche Glättung, angewendet auf $\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu$, die die Divergenzfreiheit erhält, liefert das gewünschte Resultat für G. Der Fall der unbeschränkten Grundmenge $\hat{G} \subset \mathbb{R}^3$ wird auf den Fall der beschränkten wie folgt reduziert: Ohne Einschränkung können wir uns auf den Fall $\hat{G} = \bar{G}_{m+1}$ beschränken, d. h. $\hat{G}$ besteht nur aus einer unbeschränkten Zusammenhangskomponente. $\hat{G}_{a_0}$ sei ein in $\hat{G}$ gelegener (offener) Randstreifen der Breite $a_0 > 0$, a_0 hinreichend klein. Die Funktionen $\eta_\mu \circ a$ werden wie vorher konstruiert. Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten $P\varphi$, $\varphi \in C_0^\infty(\hat{G})$. Zu ε wählen wir ein $R_\varepsilon > 0$ derart, daß sowohl $\|P\varphi\|_{L^p(\{|x| > R_\varepsilon\})} < \varepsilon/2$, als auch $\nabla \eta_\mu \circ a = 0$ in $|x| \geqq R_\varepsilon$ ausfällt. Zu $\hat{G} \cap K_{2R_\varepsilon}(0)$ konstruieren wir v_μ in $(\overset{0}{W}{}^{1,p}(\hat{G} \cap K_{2R_\varepsilon}(0)))^3$ wie vorher. Sei $v_\mu(x) = 0$ für $|x| > 2R_\varepsilon$. Dann ist $v_\mu \in \overset{0}{W}{}^{1,p}(\hat{G})$, $v_\mu(x) = 0$ für $x = \hat{G}_{a_0/\mu}$. $\eta_\mu \circ a \cdot P\varphi$ ist in $\hat{G}$ stetig differenzierbar und verschwindet in $\hat{G}_{a_0/\mu}$. Es ist

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu) = 0 \quad \text{in} \quad \hat{G}, \\
&|P\varphi - (\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu)\|_{0,p}^{\hat{G}} \leqq \\
&\leqq \|P\varphi - (\eta_\mu \circ a P\varphi - v_\mu)\|_{0,p}^{\hat{G} \cap K_{2R_\varepsilon}(0)} + \|P\varphi\|_{L^p(\{|x| > R_\varepsilon\})}, \\
&< \|P\varphi - \eta_\mu \circ a P\varphi\|_{0,p}^{\hat{G} \cap K_{2Re}(0)} + \|v_\mu\|_{0,p}^{\hat{G} \cap K_{2Re}(0)} + \varepsilon/2, \\
&< \varepsilon, \mu \geqq \mu_0 .
\end{aligned}$$

Damit haben wir $L^p(\hat{G})$ durch Vektorfelder v aus $(W^{1,p}_{\text{loc}}(\hat{G}))^3$ approcimiert mit

$\operatorname{div} v = 0$ in $\hat{G}$,

$v(x) = 0$ in einem individuellen Randstreifen $\hat{G}_\delta(v)$ mit $\delta(v) > 0$,

$$v \in \bigcap_{R, R \geqq R_0} (W^{1,p}(\hat{G} \cap K_R(0)))^3, \; R \text{ hinreichend groß},$$
$$v \in (L^p(\hat{G}))^3.$$

Im nächsten Schritt handelt es sich also darum, die genannten Vektorfelder v geeignet zu approximieren. Sei $R \geqq R_0$, R_0 hinreichend groß. Wir betrachten die Folge (K_μ) von Kugeln $K_\mu = K_{\mu R}(0)$ mit zugehörigen Lipschitzstetigen Funktionen ζ_μ wie im Beweis des Satzes 3.2. Wir können annehmen, daß

$$\|\nabla \zeta_\mu\|_{L^\infty(\hat{G})} \leqq 1/\mu R$$

ist. Wir haben wieder

$$\operatorname{div}(\zeta_\mu v) = (\nabla \zeta_\mu, v)$$

und wollen das Problem

$$(5.3) \qquad \begin{cases} \operatorname{div} w_\mu = (\nabla \zeta_\mu, v) & \text{in } \; \mu R < |x| < 2\mu R, \\ w_\mu = 0 \; \text{ für } \; |x| = \mu R & \text{und für } \; |x| = 2\mu R \end{cases}$$

betrachten. Wie wir gleich zeigen, hat das Problem (5.3) eine Lösung $w_\mu \in (\overset{0}{W}{}^{1,p}(K_{2\mu R}(0) - \overline{K_\mu R(0)}))^3$, und mit einer Konstante c, die nicht von μ abhängt, gilt

$$(5.4) \qquad \|w_\mu\|_{1,p}^{K_{2\mu R}(0) - \overline{K_\mu R(0)}} \leqq c\mu R \|(\nabla \zeta_\mu, v)\|_{0,p}^{K_{2\mu R}(0) - \overline{K_\mu R(0)}}.$$

w_μ setzen wir durch 0 auf $\hat{G}$ fort. Die $\zeta_\mu v - w_\mu$ sind divergenzfrei, haben kompakten Träger und approximieren v in $L^p(\hat{G})$ für $\mu \to \infty$. Anwendung der Friedrichsschen Glättung auf $\zeta_\mu v - w_\mu$ vollendet den Beweis. Wir müssen uns nun noch mit dem Problem (5.3) befassen. Entscheidend ist, daß die Konstante c in (5.4) nicht von μ abhängt. In $\mu R < |y| < 2\mu R$ setzen wir

$$\tilde{f}_\mu(y) = f_\mu\left(\frac{1}{\mu R} y\right) = \mu R (\nabla \zeta_\mu(y), v(y)).$$

Da v ergiebigkeitsfrei ist, ist

$$\int_{K_{2\mu R}(0) - K_{\mu R}(0)} (\nabla \zeta_\mu(y), v(y))\, dy = 0.$$

Sei $x = \frac{1}{R} y$, also $f_\mu(x) = f_\mu(\frac{1}{\mu R} y)$, $1 < |x| < 2$. Nach [9, I.5, I.8, S. 212] gibt es ein $u \in (\overset{0}{W}{}^{1,p}(\{1 < |x| < 2\}))^3$ mit $\operatorname{div}_x u_\mu = f$ in $1 < |x| < 2$ und

$$(5.5) \qquad \|u_\mu\|_{1,p}^{\{1<|x|<2\}} \leqq c \|f_\mu\|_{0,p}^{\{1<|x|<2\}}.$$

Sei $\tilde{u}_\mu(y) = u_\mu(\frac{1}{R}y)$, $\mu R < |y| < 2\mu R$. Wegen

$$\frac{\partial \tilde{u}_{\mu,i}}{\partial y_i} = \frac{\partial u_{\mu,i}}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\mu R}y\right)\frac{1}{\mu R}$$

folgt

$$\operatorname{div}_y \tilde{u}_\mu = \frac{1}{\mu R}\tilde{f}_\mu(y) = (\nabla\zeta_\mu(y), v(y)).$$

Aus (5.5) ergibt sich

$$\frac{1}{\mu R}\|\tilde{u}_\mu\|_{0,p}^{\{\mu R<|y|<2\mu R\}} + \|V_y\tilde{u}_\mu\|_{0,p}^{\{\mu R<|y|<2\mu R\}}$$
$$\leqq c\|(\nabla\zeta_\mu, v\|_{0,p}^{\{\mu R<|y|<2\mu R\}}$$

mit der von μ unabhängigen Konstante c aus (5.5). Offenbar ist $\tilde{u}_\mu \in \left((\overset{\circ}{W}_{1,p}(K_{2\mu R}(0) - \overline{K_{\mu R}(0)})\right)^3$. Wir setzen $w_\mu = \tilde{u}_\mu$.

Literatur

[1] Calderón, A.P., Zygmund, A.: On singular integrals. Am.J.Math. 78, 289–309 (1956).

[2] Fujiwara, D., Morimoto, H.: An L_r-theorem of the Helmholtz decomposition of vector fields. J.Fac.Sci.Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 24, 685–700 (1977).

[3] Lions, J.L., Magenes, E.: Problemi ai limiti non omogenei (III), (V). Ann. Scuola Norm.Sup. Pisa 15, 41–103 (1961) bzw. ibid. 16, 1–44 (1962).

[4] Miyakawa, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math.J. 12, 115–140 (1982).

[5] Simader, C.G., Sohr, H.: A new approach to the Helmholtz decomposition in L^q-spaces for bounded and exterior domains. Erscheint demnächst.

[6] Smirnov, W.I.: Lehrgang der Höheren Mathematik IV. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin (1958).

[7] Triebel, H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North Holland: Amsterdam, New York, Oxford (1978).

[8] Wahl, W. von: A remark to a paper of Kato and Ikebe. Manuscripta math. 20, 197–208 (1977).

[9] Wahl, W. von: Das Außenraumproblem für die instationären Navier-Stokes Gleichungen. Rudolf-Lipschitz-Vorlesung: Sonderforschungsbereich 256, Bonn (1989).

[10] Weyl, H.: The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math.J. 7, 411–444 (1940).

Jahrgang 1984:

Nr. 1 *H. G. F. Wilsdorf*, Mikrostrukturelle Vorgänge an der Riß-Spitze in kubisch flächenzentrierten Metallen und Legierungen. 12 S. 3 S. Tafeln 5,– DM

Nr. 2 *Z. G. Liu*, Die Entmischung einer Nickel-Kupfer-Aluminium-Legierung, untersucht mit der Atomsonde. 20 S. 6,– DM

Jahrgang 1983:

Nr. 1 *E. Schunke*, Die rezente periglaziale Morphodynamik im Narssaq Distrikt, Süd-Grönland. 42 S. 11,– DM

Nr. 2 *Y. Kitaoka*, Tensor products of positive definite quadratic forms, VI. 7 S. 4,– DM

Jahrgang 1982:

Nr. 1 *E. Heinz*, Über das absolut stetige Spektrum singulärer Differentialgleichungssysteme. 10 S. 4,– DM

Nr. 2 *A. Reich*, Diskrete Werteverteilung Dirichletscher Reihen. 7 S. 4,– DM

Nr. 3 *V. Vogelsang*, Über das lokale Verhalten der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. 9 S. 4,– DM

Nr. 4 *H.-J. Klemmt*, Asymptotische Entwicklungen für kanonische Weierstraßprodukte und Riemanns Überlegungen zur Nullstellenanzahl der Zetafunktion. 24 S. 6,– DM

Jahrgang 1981:

Nr. 1 *K. B. Gundlach*, Nullstellen Hilbertscher Modulformen. 38 S. 10,– DM

Nr. 2 *E. Voigt*, Heteromorphie und taxonomischer Status von *Lopholepis* v. Hagenow, 1851, *Cavarinella* Marsson, 1887 und ähnlichen Cyclostomata-Genera (Bryozoa, ob. Kreide). 53 S. 20,– DM

Nr. 3 *F. Schulz*, Über elliptische Monge-Ampèresche Differentialgleichungen mit einer Bemerkung zum Weylschen Einbettungsproblem. 16 S. 4,– DM

Nr. 4 *H. Lewy*, Über die Darstellung ebener Kurven mit Doppelpunkten. 22 S. 6,– DM

Nr. 5 *W. von Wahl*, Klassische Lösbarkeit im Großen für nichtlineare parabolische Systeme und das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$. 47 S. 12,– DM

Jahrgang 1980:

Nr. 1 *Schroeder, Troe, Unterberg*, Zur Druckabhängigkeit des Käfigeffekts in Lösungen. 6 S. 4,– DM

Nr. 2 *M. Eichler*, Über die Darstellung von Modulformen durch Thetareihen. 18 S. 5,– DM

Nr. 3 *E. Heinz*, Ein mit der Theorie der Minimalflächen zusammenhängendes Variationsproblem. 12 S. 4,– DM

Jahrgang 1979:

Nr. 1 *E. Heinz*, Über die analytische Abhängigkeit der Lösungen eines linearen elliptischen Randwertproblems von Parametern. 20 S. 5,– DM

Nr. 2 *G. Dziuk*, Das Verhalten von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung an C-Randkurven. 8 S. 4,– DM

Nr. 3 *M. Eichler*, Über die Wirkung von Hecke-Operatoren auf die Thetareihen. 11 S. 4,– DM

Nr. 4 *S. Hildebrandt* u. *K.-O. Widman*, Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme. 19 S. 5,– DM

Nr. 5 *J. Fay*, On the Riemann-Jacobi Formula. 13 S. 4,– DM

Nr. 6 *E. Voigt*, Wann haben sich die Feuersteine der Oberen Kreide gebildet? 70 S. 18,– DM

Nr. 7 *H. Pecher*, Existenzsätze für reguläre Lösungen semilinearer Wellengleichungen. 23 S. 6,– DM

Nr. 8 *W. von Wahl*, Analytische Abbildungen und semiliniare Differentialgleichungen in Banachräumen. 48 S. 12,– DM

Jahrgang 1978:

Nr. 1 *M. Gärtner* u. *W. von Wahl*, Quasilineare elliptische Gleichungen höherer Ordnung. 29 S. 8,– DM

Nr. 2 *J. C. C. Nitsche*, The Higher Regularity of Liquid Edges in Aggregates of Minimal Surfaces. 21 S. 7,– DM

Nr. 3 *W. von Wahl,* Existenzsätze für nichtlineare elliptische Systeme. 10 S. 4,– DM
Nr. 4 *W. Jost,* Ein technisches Problem. 4 S. 4,– DM
Nr. 5 *M. Kneser,* Konstruktive Lösung p-adischer Gleichungssysteme. 3 S. 4,– DM

Jahrgang 1977:

Nr. 1 *A. Reich,* Universelle Werteverteilung von Eulerprodukten. 17 S. 4,– DM
Nr. 2 *R.-D. Kulle,* Über die Nenner von Fourierkoeffizienten. 8 S. 4,– DM
Nr. 3 *H. Ney* u. *P. Haasen,* Die Statische Reibungsspannung in Mischkristallen. 3 S. 4,– DM
Nr. 4 *Y. Kitaoka,* Tensor products of positive definite quadratic forms. 14 S. 4,– DM
Nr. 5 *W. Jäger,* Das Randverhalten von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung bei C^{α}-Rändern. 11 S. 4,– DM
Nr. 6 *A. Reich,* Die relative Häufigkeit der Funktionswerte analytischer Funktionen. 9 S. 4,– DM
Nr. 7 *A. Reich,* Über den Satz von Jessen-Wintner für topologische Gruppen. 8 S. 4,– DM
Nr. 8 *B. L. van der Waerden,* Über die Methode der kleinsten Quadrate. 13 S. 4,– DM

Jahrgang 1976:

Nr. 1 *L. Cremer,* Darstellung des Geigenkörpers als ein Schwingungssystem mit vier Freiheitsgraden im tiefen Frequenzbereich. 11 S. 4,– DM
Nr. 2 *H. Grauert,* Statistische Geometrie. 20 S. 5,– DM
Nr. 3 *F. Tomi,* Über elliptische Differentialgleichungen 4. Ordnung mit einer starken Nichtlinearität. 10 S. 4,– DM
Nr. 4 *W. Bartenwerfer,* Ein Konvergenzsatz für O-Koketten affinoider Funktionen. 30 S. 8,– DM
Nr. 5 *W. v. Wahl,* Regularitätssätze für semilineare parabolische Differentialgleichungen mit starker Nichtlinearität. 10 S. 4,– DM
Nr. 6 *M. Schneider,* Stabile Vektorraumbündel von Rang 2 auf der projektiven Ebene. 4 S. 4,– DM
Nr. 7 *Ch. H. Tzeng,* Fastperiodizitätseigenschaften von Dirichletfunktionen. 11 S. 4,– DM
Nr. 8 *H. Mensching* u. *F. Ibrahim,* Desertifikation im zentraltunesischen Steppengebiet. 20 S. u. 2 Vierfarbkarten 5,– DM
Nr. 9 *J. Grosche,* Über die Fundamentalgruppen Quotientenräumen Siegelscher und Hilbert-Siegelscher Modulgruppen. 24 S. 6,– DM
Nr. 10 *J. Grosche,* Ein Beitrag zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulgruppen. 14 S. 4,– DM
Nr. 11 *W. Jäger,* Ein Maximumprinzip für ein System nichtlinearer Differentialgleichungen. 8 S. 4,– DM

Für die Redaktion verantwortlich:
Gunther v. Minnigerode, Vorsitzender d. Math.-Phys. Kl. d. Akad. d. Wissensch.
Gesamtherstellung: Hubert & Co., Göttingen