manuscripta math. 11, 199 - 201 (1974)

K 1

EINIGE BEMERKUNGEN ZU MEINER ARBEIT "GEBROCHENE POTENZEN EINES ELLIPTISCHEN OPERATORS UND PARABOLISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN RÄUMEN HÖLDERSTETIGER FUNKTIONEN"

Wolf von Wahl

This paper deals with C^α - estimates for evolution operators for parabolic equations.

Herr H. Kielhöfer hat mich darauf hingewiesen, daß eine Abschätzung

$$\|u\|_{2m+\alpha} \leq c\,\|(\mathcal{A}+\lambda)u\|_\alpha$$

nicht gleichmäßig für alle λ in der Resolventenmenge eines elliptischen Operators $\mathcal{A}$ der Ordnung 2m unter Null-Dirichletbedingungen über einer beschränkten offenen Punktmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ mit hinreichend glattem Rand gelten kann. Wir ziehen einige Folgerungen hieraus und berichtigen einige Resultate in unserer Arbeit [2]. Für $t \geqslant 0$ ist

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} A_{\tilde{\alpha}}(t,x) D^{\tilde{\alpha}}, \quad D^{\tilde{\alpha}} = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\tilde{\alpha}_\nu}$$

ein in t,x gleichmäßig elliptischer Operator mit reellen führenden Koeffizienten. Im übrigen sollen die $A_{\tilde{\alpha}}$ in $C^{\alpha+3\alpha/2m}([0,T],C^\alpha(\bar{\Omega}))$ liegen, $T>0$. Hierbei ist $0<\alpha<1$, $\alpha+3\alpha/2m<1$. Wir betrachten $\mathcal{A}(t)$ auf dem Raum $D(\mathcal{A}(t))=D(\mathcal{A}(0))$ der Funktionen u aus $C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$, deren Ableitungen bis zur Ordnung m-1 auf $\partial\Omega$ verschwinden sollen. c ist im folgenden eine von n,α,m, der Elliptizitätskonstanten der $\mathcal{A}(t)$ und der Norm der $A_{\tilde{\alpha}}$ in $C^{\alpha+3\alpha/2m}([0,T],C^\alpha(\bar{\Omega}))$ abhängige Konstante. $\|\cdot\|_{k+\alpha}$ steht für die $C^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$-Norm, $k\in\mathbb{N}$. Dann gilt

SATZ 1: Es existieren Konstanten $\varepsilon, \Lambda_0 > 0$ derart, daß für alle $\lambda \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \pi/2 + \varepsilon \geq \arg\lambda \geq -\pi/2 - \varepsilon,\ |\lambda| \geq \Lambda_0\}$ die folgende Abschätzung gilt:

$$|\lambda| \|u\|_0 + |\lambda|^{1-\alpha/2m} \|u\|_\alpha + \|u\|_{2m} + |\lambda|^{-\alpha/2m} \|u\|_{2m+\alpha} \leq$$
$$\leq c \|(\mathcal{A}(t) + \lambda)u\|_\alpha, \quad u \in D(\mathcal{A}(0)).$$

BEWEIS: [2], S. 235/236.

Unser Beispiel in [2] auf S. 236 zeigt sowohl, daß der Exponent von $|\lambda|$ vor $\|u\|_\alpha$ als auch der von $|\lambda|$ vor $\|u\|_{2m+\alpha}$ nicht mehr verbessert, d.h. vergrößert werden können. Auf die letzte Tatsache hat mich ebenfalls Herr Kielhöfer aufmerksam gemacht.

Man überlegt sich leicht, daß vermöge unserer Regularitätsvoraussetzungen an die Koeffizienten $A_{\tilde{\alpha}}$ die Abschätzungen

(γ) $<$
(1) $\quad \|\mathcal{A}^\gamma(t)U(t,s)\| \leq ce^{-c(t-s)}/(t-s)^{\gamma+\alpha/2m}, 0 \leq \gamma \not\leq 1, t > s,$

gelten. Hierbei ist $U(t,s)$ der zur Gleichung $du/dt + \mathcal{A}(t) = 0$ gehörige Evolutionsoperator in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ und die Norm ist die der beschränkten Operatoren in $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Die Beweise können so geführt werden wie in [2], Kap. 2 und 3, wo auch die gebrochenen Potenzen $\mathcal{A}^\gamma(t)$ definiert sind. Satz 1 liefert die Abschätzung

$$\|U(t,s)u\|_{2m} \leq ce^{-c(t-s)}/(t-s), \quad t > s, u \in D(\mathcal{A}(0))$$

und statt Satz 4 in [2] haben wir: Sei $0 \leq \beta < 1 - \alpha^2/2m$, $\gamma \in](2m-1+\beta)/(2m+\alpha), 1[$. Dann ist

$$\|u\|_{2m-1+\beta} \leq c \|\mathcal{A}^\gamma(t)u\|_\alpha, \quad u \in D(\mathcal{A}(0)).$$

Entsprechend ist in unseren Aussagen L1 und L2 über die schwachen Lösungen linearer parabolischer Gleichungen $2m+\beta$ durch $2m-1+\beta$ zu ersetzen, ebenso in Satz 8. Außerdem muß in Satz 8 bei den Abschätzungen, die $(2m+\alpha)$-Normen betreffen, α hinreichend klein gewählt werden. Auch bleibt die dort (S. 253) verwendete Technik zur Erzielung von a-priori Abschätzungen anwendbar, da man zu (A 7) in [2] in der gleichen Weise ein Analogon zeigen kann, nämlich:

$$\|D^m u\|_\beta \leq c \|u\|_{m+\alpha}^{(m+\beta-\gamma)/(m+\alpha-\gamma)} \|u\|_\gamma^{(\alpha-\beta)/(m+\alpha-\gamma)},$$

$m \in \mathbb{N}, 0 \leq \beta \leq \alpha < 1, 0 \leq \gamma < 1, u \in C^{m+\alpha}(\bar{\Omega}).$

Weiter gilt für die Regularität der schwachen Lösungen linearer parabolischer Differentialgleichungen der folgende Satz ($\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der Summe der $L^2(\Omega)$ - Normen der Ableitungen bis zur Ordnung m):

SATZ 2: Es sei $f \in C^{\alpha/2m+\varepsilon}(]0,T],C^\alpha(\bar{\Omega})) \cap L^2(]0,T[,C^\alpha(\bar{\Omega}))$ mit einem $\varepsilon > 0$. Es sei $\varphi \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap C^\alpha(\bar{\Omega})$ bzw. aus $C^\alpha(\bar{\Omega})$, wenn die $\mathcal{A}(t)$ von Divergenzstruktur sind. Dann ist die schwache Lösung u von $u' + \mathcal{A}(t)u = f$ im Sinne von [2] bzw. von [1] mit dem Anfangswert φ und den Randwer- 0 in

$$\bigcap_{\delta, T > \delta > 0} L^\infty(]\delta,T[\,,C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}))$$

und ihre Ableitung u' nach t im Sinne der vektorwertigen Distributionen in

$$\bigcap_{\delta, T > \delta > 0} L^\infty(]\delta,T[\,,C^\alpha(\bar{\Omega})).$$

BEWEIS: Der Beweis folgt aus der Integraldarstellung der schwachen Lösung in [2] , Kap. 4.

Literatur

[1] LIONS,J.L.: Équations Differentielles Operationelles et Problémes aux Limites. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer (1961).

[2] V. WAHL,W.: Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen, Nachr. Akademie der Wiss. Göttingen, II. Mathematisch-Physikalische Klasse, 231-258 (1972).

Prof. Dr. Wolf von Wahl
Mathematisches Institut
der Universität
53 B O N N
Wegelerstr. 10

(Eingegangen am 29. Juni 1973)