NACHRICHTEN
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN GÖTTINGEN
II. MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHE KLASSE

Jahrgang 1972 Nr. 11

Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen

Von

W. v. Wahl

VANDENHOECK & RUPRECHT IN GÖTTINGEN

Ausgegeben Dezember 1972

Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen

Von *Wolf von Wahl*, Bonn

Vorgelegt von Herrn E. Heinz in der Sitzung vom 21. April 1972

0. Einleitung und Bezeichnungen

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Anfangs-Randwertproblemen für lineare, semi- und quasilineare parabolische Systeme.

Im ersten Kapitel übertragen wir den Begriff der gebrochenen Potenz eines elliptischen Operators A unter Null-Dirichletbedingungen von den L^p-Räumen, in denen er üblicherweise erklärt ist, auf die C^α-Räume, $0 < \alpha < 1$. Entscheidend für die L^p-Theorie ist die Resolventenabschätzung von Agmon [1], nämlich:

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{L^p} \leqq \frac{c}{|\lambda|}, \qquad p > 1,$$

außerhalb eines Sektors der linken Halbebene. Wie wir beweisen, gilt in den C^α-Räumen die schwächere Ungleichung

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{C^\alpha} \leqq \frac{c}{|\lambda|^{1-\alpha/2m}}.$$

Durch ein Beispiel zeigen wir, daß diese Abschätzung nicht mehr verbessert werden kann (im Gegensatz zu einer Behauptung von Browder [4]). $2m$ ist hier die Ordnung des Operators A. Mit Hilfe der letzten Resolventenabschätzung lassen sich in sinnvoller Weise alle Potenzen A^γ, $|\gamma| > \alpha/2m$, in den C^α-Räumen erklären. Insbesondere gilt die Interpolationsungleichung

$$\|u\|_{2m+\beta} \leqq c\,\|A^\gamma u\|_\alpha, \quad 0 \leqq \beta < \cancel{\alpha}, \quad \frac{2\cancel{m} + \beta}{2m + \alpha} < \gamma < 1,$$

$/1-\frac{\alpha^{2}}{2m}$ $\ell m-1$

für $u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}) \cap D(A^\gamma)$ mit $D^{\tilde{\varkappa}} u \mid \partial\Omega = 0$, $\tilde{\varkappa}$ ein Multiindex mit $|\tilde{\varkappa}| \leqq m-1$. Ω bedeutet ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand $\partial\Omega$.

Für die Anwendung auf parabolische Gleichungen ist das Verhalten des zu einer Schar $\{A(t)\}$ elliptischer Operatoren gehörenden Evolutionsoperators $U(t, s)$, $t \geqq s$, von entscheidender Bedeutung. Es zeigt sich, daß der zunächst auf $L^p(\Omega)$ erklärte beschränkte Operator $U(t, s)$ auch ein beschränkter Operator von $C^\alpha(\overline{\Omega})$ in sich ist und, daß die Abschätzung

$$\| A^\gamma(t)\, U(t, s) \|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leqq \frac{c e^{-c(t-s)}}{|t-s|^{\gamma + \cancel{(1-\mu)}\alpha/2m}}, \qquad \alpha/2m < \gamma \leqq 1, \quad t > s,$$

gilt. Dies liefert beispielsweise das folgende Resultat: Sei u die schwache Lösung über $]0, T[\times \Omega$ der parabolischen Gleichung

$$u' + \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leqq m,\\ |\tilde{\beta}| \leqq m}} D^{\tilde{\alpha}} (A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, x)\, D^{\tilde{\beta}} u) = f(t)$$

im Sinne von **Lions** [9] mit dem Anfangswert $\varphi \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, den Randwerten 0 und der Inhomogenität $f \in L^2([0, T], C^\alpha(\overline{\Omega}))$[1]. Dann ist u für fast alle t aus $C^{2m+\beta}(\overline{\Omega})$, $0 \leqq \beta < \alpha$ — ein Ergebnis, das sich ohne Randbedingungen an f nur schwerlich aus der L^p-Theorie ableiten ließe.

Danach beschäftigen wir uns mit semilinearen parabolischen Systemen

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \sum_{|\tilde{\alpha}| \leqq m} A_{\tilde{\alpha}}(t, x) D^{\tilde{\alpha}} u_\lambda = f_\lambda(t, x, \boldsymbol{u}, D^1\boldsymbol{u}, \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}), \quad \lambda = 1, \ldots, L,$$

in Diagonalform (**Fettdruck** bedeutet, daß es sich um einen Vektor handelt). Unser Hauptergebnis besteht in der Herleitung einer a-priori Schranke für $\sup\limits_{0 \leqq t \leqq T} \|\boldsymbol{u}(t)\|_{C^{2m-1+\alpha}(\bar{\Omega})}$ bzw. $\int\limits_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^{1+\varepsilon_0}_{C^{2m-1+\alpha}(\bar{\Omega})} dt$ mit einem $\varepsilon_0 > 0$, falls die f_λ einer Wachstumsbedingung der Form

$$|f_\lambda(t, x, \boldsymbol{u}, D^1\boldsymbol{u}, \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u})| \leqq \varepsilon(|\boldsymbol{u}|) \sum_{\nu=1}^{m} D^\nu \boldsymbol{u}(x)|^{2m/\nu} + K, \quad K \text{ konstant},$$

genügen, eine a-priori Schranke für $|\boldsymbol{u}|$ gegeben ist, die Funktion $\varepsilon(|\boldsymbol{u}|)\,|\boldsymbol{u}|$ einer Kleinheitsbedingung genügt und $m = 1, > \frac{n}{2}$ bzw. $\frac{n}{2}$ ist. Als besonders wichtig erweist es sich dabei, daß die Schranke für $\varepsilon(|\boldsymbol{u}|)\,|\boldsymbol{u}|$ von K unabhängig ist. Die Koeffizienten $A_{\tilde{\alpha}}$ brauchen lediglich von x stetig und von t hölderstetig abzuhängen.

Falls eine Höldernorm in x und t der Lösung $\boldsymbol{u}$ des quasilinearen Systems

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leqq m,\\ |\tilde{\beta}| \leqq m}} D^{\tilde{\alpha}} (A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, x, \boldsymbol{u}) D^{\tilde{\beta}} u_\lambda) = f_\lambda(t, x, \boldsymbol{u}, D^1\boldsymbol{u}, \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}), \quad \lambda = 1, \ldots, L,$$

bekannt ist, braucht man weder eine Kleinheitsbedingung an $\varepsilon(|\boldsymbol{u}|)\,|\boldsymbol{u}|$ noch eine Beziehung zwischen m und n.

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Sei X ein Banachraum. Unter $C^\nu([0, T], X)$ verstehen wir den Banachraum aller bis zur Ordnung ν stetig

[1]) Dies ist der Raum aller fast überall erklärten und meßbaren Abbildungen $f:]0, T[\to C^\alpha(\overline{\Omega})$ mit

$$\int_0^T \|f(t)\|^2_{C^\alpha(\bar{\Omega})}\, dt < \infty.$$

differenzierbaren Abbildungen von $[0, T]$ in X. Mit $C^{\nu+\alpha}([0, T], X)$, $0<\alpha<1$, bezeichnen wir den Banachraum aller bis zur Ordnung ν stetig differenzierbaren Abbildungen u, für die

$$\sup_{t,s\in[0,T]} \frac{1}{|t-s|^\alpha} \left\| \frac{d^\nu u}{dt^\nu}(t) - \frac{d^\nu u}{dt^\nu}(s) \right\|_X + \sum_{\lambda=0}^{\nu} \sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{d^\lambda u}{dt^\lambda}(t) \right\|_X$$

endlich ist. $L^p([0, T], X)$, $1 \leqq p \leqq \infty$, ist der Banachraum aller meßbaren Abbildungen $u:]0, T[\to X$ mit Norm

$$\Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\Big)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X .$$

Ω ist stets eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. $H^{\nu,p}(\Omega)$ ist der Banachraum aller auf Ω erklärten meßbaren komplexwertigen Funktionen mit in $L^p(\Omega)$ liegenden Distributionsableitungen bis zur Ordnung ν. Seine Norm wird mit $\|\cdot\|_{\nu,p}$ oder $\|\cdot\|_{H^{\nu,p}(\Omega)}$ bezeichnet. $\mathring{H}^{\nu,p}(\Omega)$ ist wie üblich die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega)$ in der $H^{\nu,p}(\Omega)$-Norm. Die Norm von $C^0([0, T], H^{\nu,p}(\Omega))$ bezeichnen wir mit $|||\cdot|||_{\nu,p}$.

Wir werden häufig Funktionen betrachten, die auf $Q_T := [0, T] \times \overline{\Omega}$ stetig sind und für die

$$\sup_{t,s\in[0,T]} \frac{|f(x,t)-f(x,s)|}{|t-s|^\gamma}$$

mit einem γ, $1 > \gamma \geqq 0$, endlich ist. Wir setzen dann

$$|||f|||_{\gamma,Q_T} := \sup_{(t,x)\in Q_T} |f(t,x)| + \sup_{(t,s)\in[0,T],\, x\in\overline{\Omega}} \frac{|f(x,t)-f(x,s)|}{|t-s|^\gamma}$$

$$||||f||||(r) := \sup_{t,s\in[0,T],\, |t-s|\leq r,\, x\in\overline{\Omega}} |f(t,x)-f(s,x)| + \sup_{t\in[0,T],\, x,y\in\{|x-y|\leq r\}\cap\overline{\Omega}} |f(t,x)-f(t,y)|,$$

$$||||f||||_x(r) := \sup_{t\in[0,T],\, x,y\in\{|x-y|\leq r\}\cap\overline{\Omega}} |f(t,x)-f(t,y)|.$$

Im Falle $\gamma = 0$ schreiben wir auch $|||f|||$ statt $|||f|||_{0,Q_T}$. $C^\nu(\overline{\Omega})$ bzw. $C^{\nu+\alpha}(\overline{\Omega})$ ist der Banachraum der auf $\overline{\Omega}$ erklärten stetigen komplexwertigen Funktionen, die in Ω ν-mal stetig differenzierbar sind und deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung ν auf $\overline{\Omega}$ stetig bzw. hölderstetig mit dem Exponenten α sind.

Wir sagen, daß Ω zur Klasse $C^{\nu+\alpha}$ gehört, wenn für $\partial\Omega$ lokal eine Darstellung

$$x_k = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

mit $\varphi \in C^{\nu+\alpha}$ gilt und Ω lokal auf einer Seite von $\partial\Omega$ liegt. Ist die Funktion g auf $\partial\Omega$ definiert, so sagen wir, daß g zu $C^{\nu+\alpha}(\partial\Omega)$ gehört, wenn es eine $\mathbb{R}^n$-Umgebung U von $\partial\Omega$ und $\tilde{g} \in C^{\nu+\alpha}(\overline{U})$ mit $\tilde{g}\,|\,\partial\Omega = g$ gibt. Wir setzen dann

$$\|g\|_{\nu+\alpha,\partial\Omega} := \inf_{(U,\tilde{g})} \|\tilde{g}\|_{C^{\nu+\alpha}(\overline{U})}, \|g\|_{\partial\Omega} := \|g\|_{0,\partial\Omega}.$$

Für ein beliebiges $\delta > 0$ setzen wir

$$\Omega_\delta := \{x \mid |x - y| < \delta,\ y \in \Omega\}.$$

Sei A eine lineare Abbildung eines Banachraums X mit (dichtem) Definitionsbereich $D(A)$ und Adjungierter A^*. Wie üblich ist $R(A)$ der Wertebereich, $N(A)$ der Nullraum.

Die Norm von $C^\nu(\overline{\Omega})$ bzw. $C^{\nu+\alpha}(\overline{\Omega})$ wird mit $\|\,.\,\|_\nu$ bzw. $\|\,.\,\|_{\nu+\alpha}$ bezeichnet. Außerdem benutzen wir die Abkürzungen $\|\,.\,\|_p := \|\,.\,\|_{L^p(\Omega)} := \|\,.\,\|_{0,p}$ und $H^\nu(\Omega) := H^{\nu,2}(\Omega)$, $\mathring{H}^\nu(\Omega) := \mathring{H}^{\nu,2}(\Omega)$ sowie $\|\,.\,\| := \|\,.\,\|_0$,

$$D_j := \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$D^{\tilde\alpha} := \prod_{j=1}^{n} D_j^{\alpha_j},$$

wobei $\tilde\alpha$ ein Multiindex mit den Komponenten $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist. $\mathbb{N}$ bedeutet stets die Menge aller positiven ganzen Zahlen, $\mathbb{R}^+$ ist die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.

1. Resolventenabschätzungen

$1-\frac{3\alpha}{2m}$, $\alpha+\frac{3\alpha}{2m}<1$, T und m, α seien im folgenden beliebige feste positive Zahlen, $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$. Ω sei ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit dem Rand $\partial\Omega$, das von der Klasse C^{4m} sei. N sei die Anzahl aller n-Tupel $\tilde\alpha$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $|\tilde\alpha| \leqq 2m - 1$.

Es seien Abbildungen

$$A_{\tilde\alpha} : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \to \mathbb{C}, \quad |\tilde\alpha| \leqq 2m,$$

gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$A_{\tilde\alpha} : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \quad |\tilde\alpha| = 2m,$$

$$A_{\tilde\alpha}(\,.\,) \in C^{\alpha'}([0, T],\ C^\alpha(\overline{\Omega})), \quad \alpha' = \alpha + \frac{3\alpha}{2m},$$

$$(1) \quad M\,|\xi|^{2m} \geqq \sum_{|\tilde\alpha| = 2m} A_{\tilde\alpha}(t, x)\,\xi^{\tilde\alpha} \geqq M^{-1}\,|\xi|^{2m}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in [0, T] \times \overline{\Omega},$$

mit einer positiven Konstanten M. Die Norm von $C^\alpha([0, T], C^\alpha(\overline{\Omega}))$ werde mit $\|\,.\,\|_\alpha$, die von $C^0([0, T], C^{\nu+\alpha}(\overline{\Omega}))$ mit $|||\,.\,|||_{\nu+\alpha}$ bezeichnet. Wir setzen $|||\,.\,||| := |||\,.\,|||_0$.

Weiter setzen wir im folgenden

$$\mathscr{A}(t)u := \sum_{|\tilde\alpha| \leq 2m} A_{\tilde\alpha}(t, x) D^{\tilde\alpha} u, \quad u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}), \quad D^{\tilde\alpha} u \mid \partial\Omega = 0, \quad |\tilde\alpha| \leqq m - 1,$$

$$\mathscr{A}_p(t)u := \sum_{|\tilde\alpha| \leq 2m} A_{\tilde\alpha}(t, x)\, D^{\tilde\alpha} u, \quad u \in H^{2m,p}(\Omega) \cap \mathring{H}^{m,p}(\Omega), \quad p > 1.$$

Für unsere Zwecke wird es sich als günstig erweisen, $\mathscr{A}(t)$ und $\mathscr{A}_p(t)$ gleichzeitig zu benutzen.

Wir sind nun in der Lage, unseren ersten Satz zu formulieren:

Satz 1. *Es existieren Konstanten $\varepsilon, \Lambda_0 > 0$ derart, daß für alle* ε, Λ_0 mit

$$\lambda \in \Lambda = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C},\ \tfrac{1}{2}\pi + \varepsilon \geqq \arg \lambda \geqq -\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon, \cancel{\operatorname{Re}\lambda \geqq \Lambda_0}\}$$ $(\lambda - \Lambda_0) - \vartheta - \vartheta$

die folgenden Abschätzungen gelten:

$$(2)\quad |\lambda|\,\|u\|_0 + |\lambda|^{(2m-\alpha)/2m}\,\|u\|_\alpha + |\lambda|^{(1-\alpha)/2m}\,\|u\|_{2m-1+\alpha} + \|u\|_{2m+\alpha} + |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_{2m+\alpha} - \vartheta \leqq c_1\,\|(\mathscr{A}(t) + \lambda)u\|_\alpha,$$

$$(3)\quad \sum_{j=0}^{2m} |\lambda|^{(2m-j)/2m}\,\|u\|_{j,p} \leqq c_2\,\|(\mathscr{A}_p(t) + \lambda)u\|_p.$$

$\varepsilon, \Lambda_0, c_1$ und c_2 sind dabei nur von Ω, n, α bzw. p, M und $\sup\limits_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} |||A_{\tilde{\alpha}}|||_\alpha$ abhängige positive Konstanten.

Bemerkung 1. $c_1, c_2, \ldots$ bedeuten im folgenden stets von Ω, n, α bzw. p, M und $\sup\limits_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} |||A_{\tilde{\alpha}}|||_\alpha$ abhängige Konstanten.

Beweis des Satzes 1. Wir benutzen eine von Agmon [1] erfundene Methode. Zuerst beschäftigen wir uns mit (2). Der Operator

$$\mathscr{L}(t) := \mathscr{A}(t) + (-1)^m e^{i\vartheta} \frac{\partial^{2m}}{\partial \tau^{2m}}, \qquad -\frac{1}{2}\pi - \varepsilon \leqq \vartheta \leqq \frac{1}{2}\pi + \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0,$$

ist elliptisch in dem Sinn, daß

$$\Big| \sum_{|\tilde{\alpha}| = 2m} A_{\tilde{\alpha}}(t,x)\xi^{\tilde{\alpha}} + e^{i\vartheta}\xi_0^{2m} \Big| \geqq c_5 |\xi|^{2m}, \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega},$$

ist, wenn nur ε hinreichend klein gewählt wird. Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\zeta(\tau) = 1, \quad |\tau| \cancel{\geqq} 1, \qquad 1 \leqq$$
$$\zeta(\tau) = 0, \quad |\tau| \geqq 3/2.$$

Die Funktion $\tilde{u}(\tau, x) = \zeta(\tau) e^{i\mu\tau} u(x)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$, $D^{\tilde{\alpha}} u \mid \partial\Omega = 0$, $|\tilde{\alpha}| \leqq m - 1$, liegt dann in $C^{2m+\alpha}([-2, +2] \times \overline{\Omega})$ und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$ verschwinden am Rande von $[-3/2, +3/2] \times \overline{\Omega}$.

Wir setzen $[-3/2, +3/2] \times \overline{\Omega} \,|{=}\, \Omega^{**}$ sowie $[-1, +1] \times \Omega \,|{=}\, \Omega^{*}$. $|\vartheta|:$ $|\vartheta|:$

Wie in [2], S. 668, Theorem 7.3., gezeigt wird, gilt eine Ungleichung

$$\|\tilde{u}\|_{C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega^*})} \leqq c_3\,\|\mathscr{L}(t)\tilde{u}\|_{C^\alpha(\overline{\Omega^{**}})} + c_4\|\tilde{u}\|_{C^\alpha(\overline{\Omega^{**}})}.$$

Nun ist

$$\|\mathscr{L}(t)\tilde{u}\|_{C^\alpha(\overline{\Omega^{**}})} \leqq c_5\{\|\zeta(\tau)e^{i\mu\tau}\|_{C^\alpha([-2,+2])} \cdot \|(\mathscr{A}(t) + \mu^{2m}e^{i\vartheta})u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + |\mu|^{2m-1}(\|e^{i\mu\tau}\|_{C^0([-2,+2])}\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|e^{i\mu\tau}\|_{C^\alpha([-2,+2])}\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})})\}$$

für $\mu \geqq 1$, und weiter gilt die Ungleichung

$$\|\tilde{u}\|_{C^{2m+\alpha}([-1,+1]\times\bar{\Omega})} \geqq c_6 \Big\{ \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{C^{j+\alpha}(\bar{\Omega})} + |\mu|^{2m+\alpha} \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} \sup_{\tau,\tilde{\tau}\in[-1,+1]} \left| \frac{e^{i\mu\tau} - e^{i\mu\tilde{\tau}}}{|\mu\tau - \mu\tilde{\tau}|^{\alpha}} \right|$$

$$+ |\mu|^{2m} \sup_{\substack{\tau,\tilde{\tau}\in[-1,+1] \\ x,\tilde{x}\in\bar{\Omega}}} \left| \frac{e^{i\mu\tau} u(x) - e^{i\mu\tilde{\tau}} u(\tilde{x})}{|(\tau-\tilde{\tau})^2 + |x-\tilde{x}|^2|^{\alpha/2}} \right| + |\mu| \sup_{\substack{\tau,\tilde{\tau}\in[-1,+1] \\ x,\tilde{x}\in\bar{\Omega} \\ |\tilde{\beta}| = 2m-1}} \left| \frac{e^{i\mu\tau} D^{\tilde{\beta}} u(x) - e^{i\mu\tilde{\tau}} D^{\tilde{\beta}} u(\tilde{x})}{|(\tau-\tilde{\tau})^2 + |x-\tilde{x}|^2|^{\alpha/2}} \right| \Big\},$$

$$\geqq c_7 \Big\{ |\mu|^{2m+\alpha} \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + |\mu|^{2m} \|u\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + |\mu| \, \|u\|_{C^{2m-1+\alpha}(\bar{\Omega})} + \sum_{j=0}^{2m} |\mu|^{2m-j} \|u\|_{C^{j}(\bar{\Omega})} \Big\}.$$ /j+α

Weil $\|\zeta(\tau) e^{i\mu\tau}\|_{C^{\alpha}([-2,+2])} \leqq c(|\mu|^{\alpha} + 1)$ ist, folgt, falls $|\mu|$ hinreichend groß ist:

/– $$|\mu|^{2m} \|u\|_{C^0(\bar{\Omega})} + |\mu|^{2m+\alpha} \|u\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})} + |\mu|^{1-\alpha} \|u\|_{C^{2m-1+\alpha}} \leqq c_8 \|\mathscr{A}(t) + \mu^{2m} e^{i\vartheta}) u\|_{C^{\alpha}(\bar{\Omega})}.$$

Setzen wir $\lambda = \mu^{2m} e^{i\vartheta}$, so erhalten wir (2). Der Beweis von (3) nach demselben Schema ist in [1] enthalten. Man muß hierzu von einer Ungleichung der Form

$$\|\tilde{u}\|_{H^{2m,p}(\Omega^*)} \leqq c_9 \{ \|\mathscr{L}(t)\tilde{u}\|_{L^p(\Omega^{**})} + \|\tilde{u}\|_{L^p(\Omega^{**})} \}$$

Gebrauch machen.

Satz 2. *Λ liegt in des Resolventenmenge von $\mathscr{A}(t)$ und $\mathscr{A}_p(t)$.*

Beweis. Falls die Koeffizienten $A_{\tilde{\alpha}}(t, x)$ hinreichend glatt sind, etwa für ein $\delta > 0$ aus $C^{\alpha}([0, T], C^{2m+2}(\bar{\Omega}_\delta))$ sind, folgt, daß

$$(\mathscr{A}_p(t))^* = \mathscr{A}'_{p/(p-1)}(t)\,^{2)}$$

ist (Browder [5], Theorem 14), so daß auch $(\lambda \in \Lambda)$

$$(\mathscr{A}_p(t) + \lambda)^* = \mathscr{A}'_{p/(p-1)}(t) + \bar{\lambda},$$
$$(R(\mathscr{A}_p(t) + \lambda))^{\perp} = N(\mathscr{A}'_{p/(p-1)}(t) + \bar{\lambda})$$

ist. Wie wir eben gezeigt haben, ist der Nullraum des letzten Operators gerade das Nullelement. Erneute Anwendung von Satz 1 zeigt, daß der Wertebereich von $\mathscr{A}_p(t)$ der gesamte Raum ist. Ein geläufiges Approximationsargument in Verbindung mit Satz 1 liefert dann die Behauptung des Satzes für $\mathscr{A}_p(t)$. Hieraus folgt auch die Behauptung für $\mathscr{A}(t)$, indem man p $> \frac{n}{1-\alpha}$ wählt,
|x ein Approximationsargument und dann Theorem 4 in [5] sowie Satz 1 verwendet.

Bemerkung 2. Es sei darauf hingewiesen, daß die Abschätzungen aus Satz 1 nicht mehr verbessert werden können. Dies zeigt das Beispiel der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u'' - \lambda u = 1, \qquad \lambda \geqq 4,$$

[2]) $\mathscr{A}'_{p/(p-1)}(t)$ ist die formale Adjungierte.

die unter den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0$$

gelöst werden soll. Man zeigt leicht, daß die Green'sche Funktion $G(x, \xi)$ durch

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\,x\,\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(\xi-1)}{\sqrt{\lambda}\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}, & x \leqq \xi, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x-1)\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}\,\xi}{\sqrt{\lambda}\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}, & x > \xi \end{cases}$$

gegeben ist (über ξ soll integriert werden). Dies führt auf die Lösungsformel

$$u(x) = \frac{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}x - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x-1) - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}{\lambda\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Somit ist mit $f \equiv 1$ in $[0, 1]$:

$$\|(-\Delta+\lambda)^{-1}(-f)\|_\alpha = \frac{1}{\lambda}\left\|\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}x - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x-1) - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}\right\|_0$$
$$+ \frac{1}{\lambda^{1-\alpha/2}}\sup_{x,x'\in[0,1]}\left|\frac{\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}x - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x-1) - (\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}x' - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x'-1))}{(\sqrt{\lambda}\,|x-x'|)^\alpha\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}}\right|.$$

Es sei $\tilde{\Gamma}(\sqrt{\lambda}x) = \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}x - \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}(x-1)$. Wir haben

$$\left|\frac{\tilde{\Gamma}(y) - \tilde{\Gamma}(y')}{|y-y'|^\alpha}\right| \begin{cases} = \left|\dfrac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial y}(\tilde{y})\right| & \text{für} \quad |y-y'| = 1, \\[2ex] \leqq |\tilde{\Gamma}(y)| + |\Gamma(y')| & \text{für} \quad |y-y'| > 1, \end{cases}$$

wobei $\tilde{y}$ ein Wert zwischen y und y' ist. Nun ist

$$|\tilde{\Gamma}(y)| \leqq \operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{\lambda}$$

$$|\operatorname{Cof} 1 - \operatorname{Cof}(\sqrt{\lambda}-1)| \leqq \left|\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial y}\right)(y)\right|, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad \left|\left(\frac{\partial\tilde{\Gamma}}{\partial y}\right)(y)\right| \leqq 2(\operatorname{Sin}\sqrt{\lambda}+1),$$
$$0 \leqq y \leqq \sqrt{\lambda}.$$

Damit ist zugleich ein Satz von F. E. Browder widerlegt, der in [4] S. 77, u. a. behauptet, daß bei Null-Dirichletbedingungen

$$\|(-\Delta+\lambda)^{-1}g\|_\alpha \leqq \frac{c}{\lambda}\|g\|_\alpha, \qquad g \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

λ hinreichend groß und positiv, ist, c eine von g unabhängige Konstante.

Von jetzt an setzen wir voraus, daß $\Lambda_0 < 0$ ist. Es wird sich nämlich erweisen, daß die Addition eines Terms $-k\Lambda_0 u$, $k \in \mathbb{N}$, zu $\mathscr{A}(t)u$ bzw. $\mathscr{A}_p(t)u$ ohne Einfluß auf die Herleitung unserer a-priori Schranken für die Lösungen parabolischer Systeme ist.

Im folgenden wird der Λ begrenzende und sich aus zwei Halbstrahlen zusammensetzende Weg mit Γ bezeichnet.

2. Gebrochene Potenzen

In der L^p-Theorie der parabolischen Differentialgleichungen spielen bekanntlich die gebrochenen Potenzen von $\mathscr{A}_p(t)$ eine bedeutende Rolle. Wir werden entsprechende Begriffe in $C^\alpha(\overline{\Omega})$ einführen.

Definition 1. *Für* $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ *sei*

$$\mathscr{A}^{-\gamma}(t)u := \frac{\sin \pi\gamma}{\gamma} \int_0^\infty \lambda^{-\gamma}(\lambda + \mathscr{A}(t))^{-1} u \, d\lambda, \qquad 1 > \gamma > 1 - (1 - \alpha/2m) = \alpha/2m$$

gesetzt. — Dann ist $\mathscr{A}^{-\gamma}(t)$ beschränkt. Sei nun

$$\mathscr{A}^{-\gamma}(t)u = 0.$$

Nun ist $(\lambda + \mathscr{A}(t))^{-1}u = (\lambda + \mathscr{A}_p(t))^{-1}u$. Somit folgt: $u = 0$ ([6], 159—161). Demnach ist $\mathscr{A}^{-\gamma}(t)$ eineindeutig. Es sei

$$\mathscr{A}^{\gamma}(t) := (\mathscr{A}^{-\gamma}(t))^{-1}.$$

Hieraus folgt, daß $\mathscr{A}^{\gamma}(t)$ abgeschlossen ist.

Es erweist sich als vorteihaft, noch eine andere Definition der gebrochenen Potenzen zu geben. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen. In Analogie zur $L^p(\Omega)$-Theorie geben wir die

Definition 2. *Wir setzen*

$$e^{-\mathscr{A}(t)\tau}u := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda\tau}(\lambda + \mathscr{A}(t))^{-1} u \, d\lambda, \qquad u \in C^\alpha(\overline{\Omega}),\ \tau > 0. \tag{4}$$

Wie man sofort erkennt, ist $e^{-\mathscr{A}(t)\tau}$ ein beschränkter Operator. Aus Satz 1 folgen die Abschätzungen

$$\| e^{-\mathscr{A}(t)\tau} u \|_\alpha \leqq \frac{c_{10} e^{-c_{11}\tau}}{\tau^{\alpha/2m}} \| u \|_\alpha, \tag{5}$$

$$\| \mathscr{A}^l(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} u \|_\alpha \leqq \frac{c_{12} e^{-c_{13}\tau}}{\tau^{l}} \| u \|_\alpha, \qquad l(1+\frac{\alpha}{2m}) \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Bei der Ableitung von (6) hat man zu beachten, daß $e^{-\mathscr{A}(t)\tau}$ die Halbgruppeneigenschaft

$$e^{-\mathscr{A}(t)(\tau+\sigma)} = e^{-\mathscr{A}(t)\tau} e^{-\mathscr{A}(t)\sigma}$$

besitzt (zum Beweis siehe [6] S. 102, 103). Wegen (5) erzeugt allerdings $-\mathscr{A}(t)$ keine Halbgruppe der Klasse C^0 in $C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Definition 3. *Für* $\gamma > \alpha/2m$ *setzen wir*

Lu

$$\mathscr{A}^{-\gamma}(t)u = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-\mathscr{A}(t)\sigma} \sigma^{\gamma-1} u \, d\sigma, \qquad u \in C^\alpha(\overline{\Omega}). \tag{7}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß Definition 1 und Definition 3 in ihrem Geltungsbereich übereinstimmen ([6], S. 161). Die weiteren nach Definition 1 gegebenen Bemerkungen können übernommen werden. In der Tat ist auch

$$\mathscr{A}^{-1}(t)u = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty e^{-\mathscr{A}(t)\sigma} u \, d\sigma,$$

weil dies für $\mathscr{A}_p^{-1}(t)u$ gilt (siehe [6], S. 158/9). Es ist nun leicht zu zeigen, daß

(8) $\mathscr{A}^{-\gamma_1}(t)\mathscr{A}^{-\gamma_2}(t)u = \mathscr{A}^{-(\gamma_1+\gamma_2)}(t)u, -\gamma_1, -\gamma_2$ oder $\gamma_1, \gamma_2 > \alpha/2m$, $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$,

ist.

Satz 3. *Sei* $1 > \gamma > \alpha/2m$. *Dann ist* $1 - \frac{\alpha}{2m}$

$$\mathscr{A}^\gamma(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} \in \mathscr{L}(C^\alpha(\overline{\Omega}))$$

und

$$\| \mathscr{A}^\gamma(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} \| \leqq \frac{c_{14} e^{-c_{15}\tau}}{\tau^{\gamma + \cancel{(1-\gamma)} \alpha/2m}}.$$

$-\vartheta \quad 1\vartheta$

Beweis. Sei $-1 > \beta > -2$. Wie in [6], S. 159, erhält man $1 - \frac{\alpha}{2m} \quad 2 + \frac{\alpha}{2m}$

$$\| \mathscr{A}^\beta(t) v \|_\alpha \leqq \frac{c_{16} \varepsilon^{-\beta-1-\frac{\alpha}{2m}}}{(-\beta-1)\Gamma(-\beta)} \| \mathscr{A}^{-1}(t) v \|_\alpha + \frac{c_{17} \varepsilon^{-\beta-2-\frac{\alpha}{2m}}}{(-\beta-2)\Gamma(-\beta)} \| \mathscr{A}^{-2}(t) v \|_\alpha,$$
$$\varepsilon > 0, \ v \in C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Nimmt man das Minimum der rechten Seite bezüglich ε, so ergibt sich:

$$\| \mathscr{A}^\beta(t) v \|_\alpha \leqq c_{18} \| \mathscr{A}^{-1}(t) v \|_\alpha^{\beta+2} \cdot \| \mathscr{A}^{-2}(t) v \|_\alpha^{-\beta-1}.$$ $1 + \frac{\alpha}{2m} \quad 1 - \frac{\alpha}{2m}$

Setzen wir $v = \mathscr{A}^2(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} w$ mit $w \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, so ergibt sich:

$$\| \mathscr{A}^\beta(t) \mathscr{A}^2(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} w \|_\alpha \leqq c_{19} \frac{e^{-c_{20}\tau}}{\tau^{\cancel{2+\beta+(-\beta-1)\alpha/2m}}} \| w \|_\alpha.$$ $\longmapsto \ (1 + \frac{\alpha}{2m})(\beta + \frac{\alpha}{2m} + 2) + (-\beta - 1 - \frac{\alpha}{2m})\frac{\alpha}{2m}$

Nun ist wegen (8)

$$\mathscr{A}^2(t) e^{-\mathscr{A}(t)\tau} w = \mathscr{A}^{-\beta}(t) \mathscr{A}^{2+\beta}(t) \cdot e^{-\mathscr{A}(t)\tau} w.$$

Hieraus folgt Satz 3 ($\gamma = 2 + \beta$).

$+\alpha + \alpha^2/2m$

Satz 4. *Sei* $0 < \beta < \cancel{\alpha}1$. *Sei* $\gamma \in](2m + \beta)/(2m + \alpha), 1[$. *Dann ist* $1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{m}$ $2m-1$

$$\| u \|_{2m+\beta} \leqq c_{21} \| \mathscr{A}^\gamma(t) u \|_\alpha, \quad u \in D(\mathscr{A}(t)) \cap D(\mathscr{A}^\gamma(t)).$$ $2m-1 \quad t - \frac{\alpha}{2m}$

Beweis. Mit (8) zeigt man zunächst leicht, daß $D(\mathscr{A}^\gamma(t)) \subset D(\mathscr{A}^2(t))$ ist. Nach [2], S. 657, ist

$$\| u \|_{2m+\beta} \leqq d_1 \| u \|_{2m+\alpha}^{(2m+\beta)/(2m+\alpha)} \| u \|_0^{1-(2m+\beta)/(2m+\alpha)} + d_2 \| u \|_0$$ $1-1+ \quad 1-1+ \quad 1-1+$

mit nur von Ω abhängigen Konstanten d_1, d_2. Für alle hinreichend kleinen $\delta > 0$ ist daher

$$\| u \|_{2m+\beta} \leqq d_3 \delta^{1-(2m+\beta)/(2m+\alpha)} \| u \|_{2m+\alpha} + d_4 \delta^{-(2m+\beta)/(2m+\alpha)} \| u \|_0,$$ $1-1+ \quad 1-1+ \quad 1-1+$
$$\leqq c_{22} \delta^{1-(2m+\beta)/(2m+\alpha)} \| \mathscr{A}(t) u \|_\alpha + d_4 \delta^{-(2m+\beta)/(2m+\alpha)} \| u \|_0$$ $1-1+ \quad 1-1+$

mit nur von Ω abhängigen Konstanten d_3, d_4. Aus Satz 1 wissen wir, daß

$$\|(\lambda + \mathscr{A}(t))^{-1} u\|_0 \leqq \frac{c_{23}}{|\lambda|} \|u\|_\alpha .$$

$\lambda \in \Gamma$, $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, ist. Der weitere Beweis kann dann so geführt werden wie auf S. 178 in [6].

3. Gebrochene Potenzen und Evolutionsoperatoren in $C^\alpha(\overline{\Omega})$

Unsere Annahmen über $\mathscr{A}_p(t)$ zeigen insbesondere, daß für jedes $t \in [0, T]$ der Operator $\mathscr{A}_p(t)$ mit Definitionsbereich $H^{2m,p}(\Omega) \cap \mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ eine analytische Halbgruppe erzeugt. Darüber hinaus liefern sie die Existenz des Evolutionsoperators, d. h. einer Operatorenschar

$$\{U_p(t, \tau) \mid U_p(t, \tau) \in \mathscr{L}(L^p(\Omega)), \quad T \geqq t \geqq \tau \geqq 0\}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. $U_p(t, \tau)$ ist stark stetig,
2. $U_p(t, \tau)$ ist stark stetig differenzierbar für $T \geqq t > \tau \geqq 0$,
3. $U_p(t, \tau)$ bildet für $T \geqq t > \tau \geqq 0$ $L^p(\Omega)$ in $D(\mathscr{A}_p(t))$ ab,
4. Es ist

$$\frac{\partial U_p(t, \tau)}{\partial t} + \mathscr{A}_p(t)\, U_p(t, \tau) = 0, \qquad T \geqq t > \tau \geqq 0,$$
$$U_p(t, t) = I$$

([6], S. 108f.).

Nach [6], S. 111, ist

lσ

$$U_p(t, \tau)\, x = e^{-(t-\tau)\mathscr{A}_p(\tau)} x + \int_\tau^t e^{-(t-\sigma)\mathscr{A}_p(\sigma)} \Phi_p(\sigma, \tau)\, x\, d\cancel{t},$$

wobei

$$\Phi_p(t, \tau)\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_{p,k}(t, \tau)\, x, \qquad x \in L^p(\Omega),$$

ist mit

lφ lσ

$$\Phi_{p,1}(t, \tau)\, x = (\mathscr{A}_p(t) - \mathscr{A}_p(\tau)) e^{-(t-\tau)\mathscr{A}_p(\tau)} x,$$
$$\Phi_{p,k+1}(t, \tau)\, x = \int_\tau^t \cancel{\Phi}_{p,k}(t, \sigma)\, \Phi_{p,1}(\sigma, \tau)\, x\, d\cancel{t}.$$

Die obige Reihe konvergiert dabei für $t > \tau$ in der Topologie von $\mathscr{L}(L^p(\Omega))$, die Integrale sind als Bochner-Integrale in $L^p(\Omega)$ aufzufassen (Die $\Phi_{p,k}$ sind beschränkte Operatoren).

Satz 5. *$\Phi_p(t, \tau)$ bildet $C^\alpha(\overline{\Omega})$ in sich ab. Als Abbildung von $C^\alpha(\overline{\Omega})$ in sich werde $\Phi_p(t, \tau)$ mit $\Phi(t, \tau)$ bezeichnet. Dann ist, falls $|\Lambda_0|$ hinreichend groß ist,*

$$\|\Phi(t, \tau)\, x\|_\alpha \leqq \frac{\tilde{c}_1 e^{-\tilde{c}_2(t-\tau)}}{|t - \tau|^{1-\alpha}} \|x\|_\alpha, \qquad t > \tau, \quad x \in C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Bemerkung 3. Mit $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots$ werden Konstanten bezeichnet, die neben $\Omega, T, \sup_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\mathscr{A}, n, M}$ auch noch von / $\leq$

$$\sup_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} \left\{ \sup_{t, \sigma \in [0, T]} \frac{1}{|t-\sigma|^{\alpha'}} |||A_{\tilde{\alpha}}(t) - A_{\tilde{\alpha}}(\sigma)||| \right\},$$

$$\sup_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} \left\{ \sup_{\substack{t, \sigma \in [0, T] \\ x, y \in \bar{\Omega}}} \left| \frac{A_{\tilde{\alpha}}(t, x) - A_{\tilde{\alpha}}(\sigma, x) - (A_{\tilde{\alpha}}(t, y) - A_{\tilde{\alpha}}(\sigma, y))}{|t-\sigma|^{\alpha'} |y-x|^{\alpha}} \right| \right\}$$

abhängen, $\alpha' = \alpha + 3\alpha/2m < 1$

Beweis von Satz 5. Analog zu Φ werden die $\Phi_{p,k}$ als Abbildungen von $C^\alpha(\bar{\Omega})$ in sich mit $\cancel{\Phi}_k$ bezeichnet. Letzteres ist in der Tat der Fall: Wegen / Φ

$$\|\mathscr{A}(t)\cancel{e}\| \leq \cancel{e^{-\tau\mathscr{A}(t)}} \frac{c_{24}}{\tau^{\prime}} e^{-c_{13}\tau}$$

/ $e^{-\mathscr{A}(t)\tau}$ $\angle$ ϑ /$1+\alpha/2m$

kann man induktiv leicht zeigen, daß

$$\|\Phi_k(t, \tau)\| \leq e^{-c_{13}(t-\tau)} \tilde{c}_3^k \frac{|t-\tau|^{k\alpha \cancel{-\alpha}}}{|t-\tau| \, \Gamma(k\alpha)}$$

/ϑ

ist. Nun ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_3^k |t-\tau|^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha)} \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/(1-\alpha)}} \right\}^{1-\alpha} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\tilde{c}_3^k)^{1/\alpha} |t-\tau|^k}{(\Gamma(k\alpha))^{1/\alpha}} \right\}^{\alpha} \leq \tilde{c}_3 e^{\tilde{c}_4(t-\tau)} \Big/ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k/(1-\alpha)}} \right\}^{1-\alpha},$$

/$|t-\tau|^\alpha$

wobei wir Stirling's Formel benutzt haben. Hieraus folgt, falls $|\Lambda_0| \geq 2\tilde{c}_4$ ist:

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq \frac{c_3 e^{-\tilde{c}_4(t-\tau)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}},$$

was zu beweisen war. — Von nun an sei $|\Lambda_0| \geq 2\tilde{c}_4$.

Satz 6. *$U_p(t, \tau)$ ist für $t \geq \tau$ ein beschränkter Operator von $C^\alpha(\bar{\Omega})$ in $C^\alpha(\bar{\Omega})$. Als solchen bezeichnen wir ihn mit $U(t, \tau)$. Überdies gilt für $t > \tau$, daß*

$$\mathscr{A}^\gamma(t) \, U(t, \tau), \quad \alpha/2m < \gamma < 1,$$

ein beschränkter Operator ist und einer Abschätzung

$$\|\mathscr{A}^\gamma(t) \, U(t, \tau)\| \leq \frac{\tilde{c}_4 e^{-\tilde{c}_5(t-\tau)}}{|t-\tau|^{\gamma + \cancel{(1-\gamma)}\alpha/\cancel{2}m}}$$

$-\vartheta$ /ϑ

genügt.

Beweis. Wie wir bereits bewiesen hatten, ist

$$\|\mathscr{A}^\gamma(t) e^{-(t-\tau)\mathscr{A}(t)}\| \leq \frac{c_{25} e^{-c_{15}(t-\tau)}}{|t-\tau|^{\gamma + \cancel{(1-\gamma)}\alpha/\cancel{2}m}}.$$

$-\vartheta$ /ϑ

Mit dem vorhergehenden Satz folgt jetzt Satz 6.

Noch einige Abschätzungen werden benötigt. Es gelten:

Hilfssatz 1. *Es ist für $t \geq s > \tau \geq 0, \frac{\alpha}{2m} < \eta < \alpha(1 - \alpha/2m)$*

$$\|\Phi(t, \tau) - \Phi(s, \tau)\| \leq \tilde{c}_6 \, |t-s|^{\alpha(1-\alpha/2m)-\eta} \cdot |s-\tau|^{-1+\eta} e^{-\tilde{c}_7(s-\tau)}.$$

$1-\frac{\alpha}{2m}$

Beweis. Der Beweis wird so durchgeführt wie der von Lemma 4.6., S. 117, in [6].

Hilfssatz 2. *Es ist für $t > s \geqq 0$*

$$\|\mathscr{A}(t)\left(e^{-(t-s)\mathscr{A}(t)} - e^{-(t-s)\mathscr{A}(s)}\right)\| \leqq \frac{\tilde{c}_8 e^{-\tilde{c}_9(t-s)}}{|t-s|^{1-\alpha+\alpha/2m}}.$$

Beweis. Der Beweis kann nach dem Muster des Beweises von Lemma 4.1, S. 111—113 in [6], durchgeführt werden. Statt der dort verwendeten gleichmäßigen Beschränktheit der Operatoren der Halbgruppe hat man hier die bereits bewiesene Relation

$$\| e^{-\tau\mathscr{A}(t)} \| \leqq \frac{c_{26}}{\tau^{\alpha/2m}} e^{-c_{11}\tau}$$

zu benutzen.

Hilfssatz 1 und 2 dienen uns dazu, das folgende Analogon zur $L^p(\Omega)$-Theorie der analytischen Halbgruppen zu beweisen:

Satz 7. *Für $t > \tau \geqq 0$ ist*

$$\|\mathscr{A}(t)\ U(t,\tau)\| \leqq \frac{\tilde{c}_{10} e^{-\tilde{c}_{11}(t-\tau)}}{|t-\tau|^{1+\alpha/2m}}$$

(insbesondere ist $\mathscr{A}(t)\ U(t,\tau)$, $t > \tau$, also ein beschränkter Operator).

Beweis. Der Beweis ergibt sich mit Hilfssatz 1 und 2 sofort aus der Identität ($x \in C^\alpha(\overline{\Omega})$)

$$\int_\tau^t e^{-(t-s)\mathscr{A}(s)}\Phi(s,\tau)x\,ds = \int_\tau^t e^{-(t-s)\mathscr{A}(s)}\left(\Phi(s,\tau) - \Phi(t,\tau)\right)x\,ds$$
$$+ \int_\tau^t \left(e^{-(t-s)\mathscr{A}(s)} - e^{-(t-s)\mathscr{A}(t)}\right)\Phi(t,\tau)x\,ds + \int_\tau^t e^{-(t-s)\mathscr{A}(t)}\Phi(t,\tau)x\,ds.$$

Bemerkung 4. Die Beweise der Meßbarkeit aller auftretenden Integranden sowie der stetigen Differenzierbarkeit von

$$e^{-(t-s)\mathscr{A}(\tau)}x, \qquad t > s, \quad x \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

und der Stetigkeit von

$$\mathscr{A}(t)\ U(t,s)x, \qquad t > s, \quad x \in C^\alpha(\overline{\Omega}),$$

sind übergangen worden, da sie keinerlei Schwierigkeiten bieten.

Wir benötigen noch einen Satz aus der $L^p(\Omega)$-Theorie der gebrochenen Potenzen von $\mathscr{A}_p(t)$ und des Evolutionsoperators $U_p(t,s)$, $t \geqq s$.

Hilfssatz 3. *Sei $0 \leqq \gamma \leqq 1$, $\gamma < \delta \leqq 1 + \alpha$, $\delta - \gamma \leqq 1$. Dann gilt für $t \geqq s > \sigma$:*

$$\|\mathscr{A}_p^\gamma(t)\left(U_p(t,\sigma) - U_p(s,\sigma)\right)\|_p \leqq \frac{c_{27} e^{-c_{28}(s-\sigma)}}{|t-s|^{-(\delta-\gamma)}|s-\sigma|^\delta}.$$

Beweis. Der Beweis befindet sich in [6], S. 161.

Hilfssatz 4. *Wir haben für* $t > \tau$

$$\|\mathscr{A}(t)\, U(t,\tau)\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\| \leqq \frac{\tilde{c}_{11}\, e^{-\tilde{c}_{12}(t-\tau)}}{|t-\tau|^{\alpha/2m}}.$$

Beweis. Der Beweis kann so geführt werden wie der von Lemma 6.2 in [6], S. 122. Die Abschätzung wird hier aus der Integralungleichung

$$\|\mathscr{A}(t)\, U(t,\tau)\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x\|_\alpha \leqq \frac{\tilde{c}_{12}\, e^{-\tilde{c}_{13}(t-\tau)}}{|t-\tau|^{\alpha/2m}} + \int_\tau^t \frac{\tilde{c}_{14}\, e^{-\tilde{c}_{13}(s-\tau)}}{|t-\sigma|^{1-\alpha}}\, \|\mathscr{A}(\sigma)\, U(\sigma,\tau)\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x\|_\alpha\, d\sigma,$$

$x \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, gefolgert. Dies ist möglich, da $\mathscr{A}(\sigma)\, U(\sigma,\tau)\;\; \mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x$ für $\sigma > \tau$ /-
stetig ist, und man die folgende Integralgleichung betrachten kann

$$\mathscr{A}(t)\, U(t,\tau)\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x = \mathscr{A}(t)\, e^{-(t-\tau)\mathscr{A}(t)}\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x$$
$$+ \int_\tau^t \mathscr{A}(t)\, e^{-(t-\sigma)\mathscr{A}(t)}\,(\mathscr{A}(t) - \mathscr{A}(\sigma))\,\mathscr{A}^{-1}(\sigma)\cdot \mathscr{A}(\sigma)\, U(\sigma,\tau)\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x\, d\sigma.$$

Dieselbe läßt sich durch Iteration lösen. Sodann kann man den Beweis eines Unitätssatzes ausführen und die Lösung mit $\mathscr{A}(t)\, U(t,\tau)\,\mathscr{A}^{-1}(\tau)\, x$ identifizieren.

Wie in [6], S. 127, können wir zeigen, daß

$$\|\mathscr{A}(t)\,(U(t,\sigma) - e^{-(t-\sigma)\mathscr{A}(t)})\| \leqq \frac{\tilde{c}_{14}\, e^{-\tilde{c}_{15}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{1-\alpha+\alpha/2m}}$$

ist. Außerdem gilt:

$$\|\mathscr{A}(t) \int_0^t e^{-(t-\sigma)\mathscr{A}(t)}\, x\, d\sigma\|_\alpha \leqq c_{29}(1 + 1/t^{\alpha/2m})\, \|x\|_\alpha, \qquad x \in C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Insgesamt ergibt sich daher der

Hilfssatz 5. *Sei* $x \in C^\alpha(\overline{\Omega})$. *Dann liegt*

$$\int_0^t U(t, \cancel{t})\, x\, d\sigma, \qquad t > 0,$$ /σ

im Definitionsbereich von $\mathscr{A}(0)$, *und überdies gilt die Abschätzung*

$$\|\mathscr{A}(t) \int_0^t U(t,\sigma)\, x\, d\sigma\|_\alpha \leqq \tilde{c}_{16}(1 + 1/t^{\alpha/2m}).$$

4. Ein neuer Regularitätssatz für schwache Lösungen linearer parabolischer Differentialgleichungen

A. Integraldarstellung der schwachen Lösung der Differentialgleichung $u' + \mathscr{A}(t)u = f$

In diesem Kapitel sei $\varphi \in C^\alpha(\overline{\Omega}) \cap \mathring{H}^m(\Omega)$ sowie

$$f(.) \in L^2([0,T], C^\alpha(\overline{\Omega})) \cap C^{\alpha/2m+\varepsilon}(]0,T], C^\alpha(\overline{\Omega}))$$

Wir beginnen mit einer Definition. Unter einer schwachen Lösung der parabolischen Differentialgleichung $u' + \mathscr{A}(t)u = f$ in $[0, T]$ mit dem Anfangswert φ und den Randwerten 0 verstehen wir eine Abbildung

$$u(.) \in L^2([0, T], \mathring{H}^m(\Omega)) \cap L^2([0, T], H^{2m}(\Omega))$$

mit folgenden Eigenschaften ($\tilde{\varphi}(.) \in C^1([0, T], L^2(\Omega))$, $\tilde{\varphi}(T) = 0$):

$$-\int_0^T (u, \tilde{\varphi}')\, dt^{3)} + \int_0^T (\mathscr{A}_2(t)u, \tilde{\varphi})\, dt = \int_0^T (f, \tilde{\varphi})dt + (\varphi, \tilde{\varphi}(0))$$

es folgt daraus, daß zunächst $u'(.) \in L^2([0, T], L^2(\Omega))$ und dann weiter

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \| u(t) \|_{m,2}^2 + \int_0^T \| \mathscr{A}_2(t)\, u(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$
$$\leqq c(\| \varphi \|_{\mathring{H}^m(\Omega)}, T, \int_0^T \| f(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt, M, \|||A_{\tilde{\alpha}}|||\|)^{4)}$$

ist, wie unter Verwendung geläufiger Approximationsargumente analog zum Beweis von Satz A1 gezeigt werden kann, vgl. [9], S. 45. Dies Vorgehen liefert auch die Eindeutigkeit.

Satz L1. *Es ist*

$$u(t) = U_2(t, 0)\varphi + \int_0^t U_2(t, \sigma)\, f(\sigma) d\sigma$$

für alle $t \in [0, T]$.

Beweis. Sei $\{f_\nu\}$ eine Folge von Elementen aus $C^1([0, T], L^2(\Omega))$ mit

$$f_\nu \to f$$

in $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ für $\nu \to \infty$. Nach [6], Kapitel 9, gilt für die zugehörige schwache Lösung u_ν von $u_\nu' + \mathscr{A}(t)u_\nu = f_\nu$ in $[0, T]$ mit dem Anfangswert $\tilde{\varphi}$ die Integralidentität

$$u_\nu(t) = U_2(t, 0)\tilde{\varphi} + \int_0^t U_2(t, \sigma)\, f_\nu(\sigma) d\sigma, \qquad \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\Omega)$$

(die schwache Lösung ist hier in Wahrheit eine „starke"). Wir wollen $\int_0^T \| \mathscr{A}_2(t) u_\nu(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt$ unabhängig von ν a-priori abschätzen: Es ist wie oben

$$|||u_\nu|||_{m,2} + \int_0^T \| \mathscr{A}_2(t) u_\nu(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqq c(\| \tilde{\varphi} \|_{\mathring{H}^m(\Omega)}, T, \int_0^T \| f(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt, M, \|||A_{\tilde{\alpha}}|||\|)^{4)},$$

also gilt für eine Teilfolge

$$u_{\nu_\mu} \to u \text{ schwach in } L^2([0, T], H^{2m}(\Omega)),$$
$$u_{\nu_\mu} \to u \text{ „weak-star" in } L^\infty([0, T], \mathring{H}^m(\Omega)),$$
$$u_{\nu_\mu} \to u \text{ in } C^0([0, T], L^2(\Omega)),$$

woraus in der Tat Satz L1 folgt.

[3]) .′ bedeutet Differentiation im Sinn der vektorwertigen Distribution (S. [9], S. 5).

[4]) Die heißt, daß die Konstante c außer möglicherweise von Ω, n, m und α von $\| \varphi \|_{\mathring{H}^m(\Omega)}, \ldots, M$ und $\sup \|||A_{\tilde{\alpha}}|||\|$ abhängt. Entsprechendes gilt im folgenden.

Durch Identifikation von $U_2(t, \sigma)$ mit $U(t, \sigma)$ ergibt sich eine wesentlich stärkere Aussage, nämlich die Hölderstetigkeit der Ableitungen in x der Lösung für fast alle $t \in [0, T]$. Zuvor sei noch bemerkt, daß sich statt der Randwerte 0 auch die Randbedingung

$$u(t) - g(t) \in \mathring{H}^m(\Omega)$$

verschreiben läßt mit einer Funktion $g(t, x)$, die geeigneten Regularitätsbedingungen genügt, etwa

$$g(.) \in C^0([0, T], H^{2m\cancel{,p}}(\Omega)) \cap C^1([0, T], L\cancel{^p}(\Omega)), \qquad \cancel{p > \frac{n}{1-\alpha}}.$$ 1,3,9, L^2 –8

Satz L2. *Es gibt genau eine Abbildung $u : [0, T] \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ mit*

$$u(.) \in \bigcap_{\substack{0 \leqq \beta < \alpha, \\ 1 \geqq \varrho_\beta > \varrho_\beta^0}} L^{1/\varrho_\beta}([0, T], C^{2\cancel{m}+\beta}(\overline{\Omega})), \qquad \varrho_\beta^0 := \frac{2\cancel{m} + \beta}{2m + \alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{2m}\right) + \frac{\alpha}{2m},$$ /m – 1

$$u'(.) \in \bigcap_{\substack{0 \leqq \beta < \alpha, \\ 1 \geqq \varrho_\beta > \varrho_\beta^0}} L^{1/\varrho_\beta}([0, T], C^{\beta}(\overline{\Omega}))$$

und mit

(L₁) $$D^{\tilde\alpha} u(t) \mid \partial\Omega = 0, \quad |\tilde\alpha| \leqq m - 1, \quad \textit{für fast alle } t \in [0, T],$$

(L₂) $$\int_0^T \| u(t) \|_{2\cancel{m}+\beta}^{1/\varrho_\beta} dt \leqq \tilde c_4 \{ \| t^{-\varrho_\beta^0} e^{-\tilde c_5 t} \|_{L^{1/\varrho_\beta}}^{1/\varrho_\beta} + \int_0^T \| f(t) \|_\alpha^{1/\varrho_\beta} dt \}$$ /m – 1

(L₃) $$u'(t) + \mathscr{A}(t) u(t) = f(t) \qquad \textit{für fast alle } t \in [0, T],$$

(L₄) $$u(0) = \varphi.$$

Beweis. Zum Beweis benötigen wir lediglich die Beziehungen

$$\| U(t, \sigma) v \|_{2m+\beta} \leqq c_{30} \| \mathscr{A}^\gamma(t)\, U(t, \sigma) v \|_\alpha$$

$$\| \mathscr{A}^\gamma(t)\, U(t, \sigma) v \|_\alpha \leqq \frac{\tilde c_4 e^{-\tilde c_5 (t-\sigma)} \| v \|_\alpha}{|t - \sigma|^{\gamma + (1-\gamma)\alpha/2m}}, \quad \frac{2m + \beta}{2m + \alpha} < \gamma < 1, \; v \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \; T \geqq t > \sigma \geqq 0,$$

und die Ungleichung von Hausdorff-Young. Die beiden vorhergehenden Ungleichungen folgen aus Satz 4 und 6.

B. Behandlung des Falles, daß der Operator $\mathscr{A}(t)$ von Divergenzstruktur ist

In diesem Falle ist ein wesentlich schärferes Resultat erhältlich. Wir setzen neben unseren bisherigen Voraussetzungen über $\mathscr{A}(t)$ voraus, daß

$$\mathscr{A}(t) = \sum_{\substack{|\tilde\alpha| \leqq m, \\ |\tilde\beta| \leqq m}} D^{\tilde\alpha} (A_{\tilde\alpha\tilde\beta}(t, x) D^{\tilde\beta})$$

ist mit

$$A_{\tilde\alpha\tilde\beta}(.) \in C^\alpha([0, T], C^{m+\alpha}(\overline{\Omega})).$$

Weiter sei

$$f(\,.\,) \in L^2([0, T], C^\alpha(\overline{\Omega})), \qquad \varphi \in C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Dann verstehen wir unter einer schwachen Lösung der Gleichung $u' + \mathscr{A}(t)u = f$ in $[0, T]$ zum Anfangswert φ eine Abbildung

$$u(\,.\,) \in L^2([0, T], \mathring{H}^m(\Omega))$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$-\int_0^T (u, \tilde{\varphi}')\,dt + \int_0^T \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leqq m,\\ |\tilde{\beta}| \leqq m}} (A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t, x) D^{\tilde{\beta}} u, D^{\tilde{\alpha}} \tilde{\varphi})\,dt = \int_0^T (f, \tilde{\varphi})\,dt - (\varphi, \tilde{\varphi}(0)),$$

$$\tilde{\varphi}(\,.\,) \in C^1([0, T], L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T], \mathring{H}^m(\Omega)), \qquad \varphi(T) = 0.$$

Nach [9], S. 46—48, existiert genau eine schwache Lösung in $[0, T]$ der Gleichung $u' + \mathscr{A}(t)u = f$ zum Anfangswert φ.

Nach [9], S. 55, gilt die a-priori Abschätzung

$$\tfrac{1}{2}\| u(t) \|^2 + \operatorname{Re} \int_0^T \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leqq m,\\ |\tilde{\beta}| \leqq m}} (A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(t,x) D^{\tilde{\beta}} u(t), D^{\tilde{\alpha}} u(t))\,dt = \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u(t))\,dt + \tfrac{1}{2} \| \varphi \|^2,$$

wobei zu bemerken ist, daß $u(\,.\,) \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$ ist ([9], S. 53). Sei nun

$$f_\nu(\,.\,) \in C^1([0, T], L^2(\Omega)), \qquad \varphi_\nu \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$f_\alpha \to f, \; \varphi_\nu \to \varphi$$

in der $L^2([0, T], L^2(\Omega))$-Norm. Durch ein geläufiges Konvergenzargument läßt sich dann zeigen, daß die schwache Lösung von $u' + \mathscr{A}(t)u = f$ in der Tat durch

$$u(t) = U_2(t, 0)\varphi + \int_0^t U_2(t, \sigma) f(\sigma)\,d\sigma$$

gegeben wird. (Vgl. auch den Beweis von Satz L 1). Dies führt zu

Satz L3. *$\mathscr{A}(t)$ und f mögen die oben genannten Voraussetzungen erfüllen. Dann existiert genau eine Abbildung $u : [0, T] \to C^\alpha(\overline{\Omega})$ mit folgenden Eigenschaften:*

m-1 ∩

$$u(\,.\,) \in \cancel{\bigcup_{\substack{0 \leqq \beta < \alpha\\ 1 \geqq \varrho_\beta > \varrho_\beta^0}}} L^{1/\varrho_\beta}([0, T], C^{2\cancel{m}+\beta}(\overline{\Omega})),$$

$$u'(\,.\,) \in \bigcap_{\substack{0 \leqq \beta < \alpha\\ 1 \geqq \varrho_\beta > \varrho_\beta^0}} L^{1/\varrho_\beta}([0, T], C^\beta(\overline{\Omega}))$$

sowie den Eigenschaften (L_1) *bis* (L_4) *des Satzes* L 2 *(ϱ_β^0 ist ebenfalls die Konstante des Satzes* L 2).

Bemerkung 5. Ist zusätzlich $f(.) \in C^0(]0, T], C^\alpha(\bar\Omega))$, so ist hier wie in Kap. IV, A offenbar auch

$$u(.) \in C^0(]0, T], C^{2m+\beta}(\bar\Omega)) \cap C^1(]0, T] \times \bar\Omega).$$

Außerdem darf zu $\mathscr{A}(t)u$ ein Term der Gestalt

$$\sum_{|\beta| \leqq m} B_{\tilde\beta}(t, x) D^{\tilde\beta} u$$

mit $B_{\tilde\beta}(.) \in C^0([0, T], C^\alpha(\bar\Omega))$ addiert werden, ohne die Ergebnisse zu verändern.

5. Eine Integralgleichung (Semilineare parabolische Differentialgleichungssysteme)

Im folgenden sei $\varphi \in C^{2m+\alpha}(\bar\Omega)$, $D^{\tilde\alpha}\varphi \mid \partial\Omega = 0$, $|\tilde\alpha| \leqq m - 1$, f eine auf $[0, T] \not\subset \bar\Omega$ definierte komplexwertige Funktion, die dort stetig ist und für die /x

$$\|f\|_\gamma = \sup_{t,\sigma\in[0,T]} \frac{\|f(t) - f(\sigma)\|_\alpha}{|t-\sigma|^\gamma} + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_\alpha$$

endlich ist, wobei γ eine positive Zahl $\leqq \alpha$ ist. Dann betrachten wir die Abbildung mit $\frac{\alpha}{2m} < \gamma$

$$u(t) = U(t, 0)\varphi + \int_0^t U(t, \sigma) f(\sigma) d\sigma, \qquad 0 \leqq t \leqq T.$$

Es ist

$$\left\|\int_0^t U(t,\sigma) f(\sigma) d\sigma\right\|_{2m+\alpha} \leqq \left\|\int_0^t U(t,\sigma) f(t) d\sigma\right\|_{2m+\alpha} + \int_0^t \|U(t,\sigma)(f(\sigma) - f(t))\|_{2m+\alpha} d\sigma.$$

Der letzte Term sei mit I bezeichnet. Es ist

$$I \leqq \int_0^t c_{30} \|\mathscr{A}(t)\, U(t,\sigma)(f(t) - f(\sigma))\|_\alpha d\sigma,$$

$$\leqq \int_0^t \frac{\tilde c_{10} e^{-\tilde c_{11}(r-\sigma)}}{(t-\sigma)^{1+\alpha/2m}} \|f(t) - f(\sigma)\|_\alpha d\sigma,$$

$$\leqq \int_0^t \frac{\tilde c_{10} e^{-\tilde c_{11}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{1-\gamma+\alpha/2m}} \frac{\|f(t) - f(\sigma)\|_\alpha}{|t-\sigma|^\gamma} d\sigma.$$

Weiter ist, falls ϱ, $0 < \varrho < 1$, hinreichend nahe bei 1 liegt, sogar

$$\|v\|_{2m-1+\alpha} \leqq c_{31} \|\mathscr{A}_p^\varrho(t) v\|_p, \qquad p > \frac{n}{1-\alpha}\,^{5)},$$

$$v \in H^{2m,p}(\Omega) \cap \mathring{H}^{m,p}(\Omega).$$

[5]) Mit Hilfe der multiplikativen Ungleichungen aus [2], S. 630, und [6], S. 27, und der wohlbekannten Tatsache, daß $H^{1,p}(\Omega)$ stetig in $C^{1-n/p}(\bar\Omega)$ einbettbar ist, kann dies analog zu Lemma 17.2 und 17.1 in [6] bewiesen werden.

Nun ist aber

$$\|\mathscr{A}_p^\varrho(t)(u(t)-u(\sigma))\|_p$$
$$\leqq \mathscr{A}_p^\varrho(t)(U_p(t,0)-U_p(\sigma,0))\varphi\|_p$$

/σ̃
$$+\int_0^\sigma \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)(U_p(t,\tilde\sigma)-U_p(\sigma,\tilde\sigma))f(\tilde\sigma)\|_p d\cancel{\sigma} + \int_\sigma^t \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)\,U_p(t,\tilde\sigma)\,f(\tilde\sigma)\|_p d\tilde\sigma,$$
$$\leqq \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)(U_p(t,0)-U_p(\sigma,0))\varphi\|_p$$
$$+\int_\sigma^t \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)\,U_p(t,\tilde\sigma)\,f(\tilde\sigma)\|_p\,d\tilde\sigma + (t-\sigma)^{\delta-\varrho}\int_0^\sigma \frac{c_{27}e^{-c_{28}(\sigma-\tilde\sigma)}}{|\sigma-\sigma|^\delta}\|f(\tilde\sigma)\|_p d\tilde\sigma,$$

wobei $1>\delta>\varrho$ ist (s. Hilfssatz 3). Demnach ist für $\gamma=\delta-\varrho$

$$\frac{\|u(t)-u(\sigma)\|_{2m-1+\alpha}}{|t-\sigma|^\gamma} \leqq \frac{1}{|t-\sigma|^\gamma}\|\mathscr{A}_p^\varrho(t)(U_p(t,0)-U_p(\sigma,0))\varphi\|_p$$

$$(9)\qquad +\frac{1}{|t-\sigma|^\gamma}\int_\sigma^t \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)\,U(t,\tilde\sigma)\,f(\tilde\sigma)\|_p d\tilde\sigma + \int_0^\sigma \frac{c_{27}e^{-c_{28}(\sigma-\tilde\sigma)}}{|\sigma-\tilde\sigma|^\delta}\|f(\tilde\sigma)\|_p d\tilde\sigma.$$

Tragen wir noch nach, daß

$$(10)\qquad \|\mathscr{A}_p^\varrho(t)\,U_p(t,\sigma)\| \leqq \frac{c_{32}e^{-c_{33}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^\varrho}$$

ist ([6], S. 160, Problem (6)).

Wir wollen unsere Ergebnisse auf semilineare parabolische Differentialgleichungen anwenden. Sei N die Anzahl aller partiellen Ableitungen nach n Variablen bis zur Ordnung $2m-1$. Sei für $\lambda=1,\ldots,L$ jeweils eine Abbildung

$$f_\lambda:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{NL}\times\mathbb{R}^{NL}\to\mathbb{C},\qquad \boldsymbol{f}:=(f_1,\ldots,f_L),$$

gegeben mit einer der folgenden Eigenschaften:

A. *f_λ ist stetig in allen Variablen differenzierbar und genügt der Wachstumsbedingung*

$$|f_\lambda(t,x\,\boldsymbol{u}(x),D^1\boldsymbol{u}(x),\ldots,D^{2m-1}\boldsymbol{u}(x)|\leqq\mu_1(\|\boldsymbol{u}\|)\sum_{\nu=1}^m|D^\nu\boldsymbol{u}(x)|^{\frac{2m}{\nu}}+K.$$

/λ
B. *f_γ ist stetig nach allen Variablen differenzierbar und genügt der Wachstumsbedingung*

$$\|f_\lambda(t,\boldsymbol{u},D^1\boldsymbol{u},\ldots,D^{2m-1}\boldsymbol{u})\|_{\hat\lambda}\leqq\mu_2(\|\boldsymbol{u}\|)\sum_{\nu=1}^{2m-1}\|D^\nu\boldsymbol{u}\|^{\frac{2m}{\nu}-1}\|D^\nu\boldsymbol{u}\|_{\hat\lambda}+K,\quad 0\leqq\hat\lambda<1.$$

C. *f_λ genügt der Bedingung* A *und ist zweimal stetig nach t, x und den letzten $2NL$ Variablen differenzierbar. Hierbei sind $x\in\bar\Omega$, $t\in[0,T]$, $\boldsymbol{u}\in C^{2m}(\bar\Omega)\times\cdots\times C^{2m}(\bar\Omega)$ (L-Mal). Weiter bezeichnen μ_1, μ_2 und später ν zwei Funktionen aus $C^0(\mathbb{R}^+,R^+)$*[6] *und $C^0(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$*[6] *mit folgenden Eigenschaften*

$$\mu_\eta(\sigma)\geqq\mu_\eta(\sigma'),\quad\sigma\geqq\sigma',\quad\eta=1,2\qquad \nu(\sigma,\tilde\sigma)\to0\quad\textit{für}\quad\sigma\to\infty$$

[6]) Dies ist die Menge aller stetigen Abbildungen von $\mathbb{R}^+$ bzw. $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{R}^+$.

und zwar gleichmäßig, falls $\tilde{\sigma}$ in einem Kompaktum variiert. Der elliptische Operator

$$\mathscr{A}(t) = \sum_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} A_{\tilde{\alpha}}(t, x) D^{\tilde{\alpha}}$$

erfülle die Voraussetzungen des ersten Kapitels. Weiter sei

$$\mathscr{A}_0(t) := \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| \leqq m, \\ |\tilde{\beta}| \leqq m}} D^{\tilde{\alpha}}(A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},0}(t, x) D^{\tilde{\beta}}), \qquad (t, x) \in Q_T,$$

mit $A_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},0}(\,.\,) \in C^1([0, T], C^{m+\alpha}(\overline{\Omega}))$ *und*

$$(\mathscr{A}(t) u, \mathscr{A}_0(t) u) \geqq c(M, T, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||)\, \|u\|^2_{2m,2}, \quad u \in H^{2m}(\Omega) \cap \mathring{H}^m(\Omega),$$

eine den Voraussetzungen des ersten Kapitels genügende Schar elliptischer Operatoren der Ordnung $2m$, wie sie gemäß Anhang existiert.

Dann gilt der folgende

Satz 8. *Sei $\boldsymbol{u}$ eine Abbildung von $[0, T] \times \overline{\Omega}$ in $(C^0(\overline{\Omega}))^L$ mit folgenden Eigenschaften: $\boldsymbol{u}$ ist stetig in $[0, T] \times \overline{\Omega}$ stetig differenzierbar in $]0, T[\, \times \Omega$ bei festem t aus $]0, T[$ $2m$-Mal stetig nach den übrigen Variablen in Ω differenzierbar. $\boldsymbol{u}$ genügt in $]0, T[\, \times \Omega$ dem parabolischen System*

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + \mathscr{A}(t) u_\lambda = f_\lambda(t, x, \boldsymbol{u}, D^1\boldsymbol{u}, \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}), \qquad \lambda = 1, \ldots, L,$$

hat den Anfangswert

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{\varphi} \in (C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}))^L$$

mit

$$D^{\tilde{\alpha}}\boldsymbol{\varphi} \mid \partial\Omega = 0, \quad |\tilde{\alpha}| \leqq m - 1,$$

und erfüllt die Regularitäts- und Randbedingungen

$$\boldsymbol{u}(\,.\,) \in C^0([0, T], H^{2m,p}(\Omega)), \qquad p > \frac{n+2}{1-\alpha},$$
$$(D^{\tilde{\alpha}}\boldsymbol{u})(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega.$$

Dann sind die folgenden Aussagen richtig, falls $M_1 \geqq |||\boldsymbol{u}|||$ ist:

1. *f erfülle A. Wenn $|||\boldsymbol{u}|||\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)$ unterhalb einer für $m = 1$ von Ω, M und n abhängigen und für $m \geqq n/2$ unterhalb einer von Ω, M und den $||||A_{\tilde{\alpha}}||||_\infty$ abhängigen Schranke liegt, so ist*

$$(11)\begin{cases} \int_0^T \|\boldsymbol{u}(t)\|^{1+\varepsilon_0}_{2m-1+\alpha} dt \leqq c(T, M, \|\mathscr{A}(0)\boldsymbol{\varphi}\|_{L^\infty(\Omega)}{}^{7)}, M_1, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||_\infty, |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}, K) \\ \qquad\qquad\qquad \text{für ein } \varepsilon_0 > 0,\ m \geqq n/2, \\ |||\boldsymbol{u}|||_{2m-1+\alpha} \leqq c(p, T, M, \|\mathscr{A}_p(0)\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(\Omega)}, M_1, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||, |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}, K), \\ \qquad\qquad\qquad m > n/2, \\ |||\boldsymbol{u}|||_{1+\alpha} \leqq c(p, T, M, \|\mathscr{A}_p(0)\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(\Omega)}, M_1, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||, K),\ m = 1,\ p > \frac{n+2}{1-\alpha}. \end{cases}$$

[7]) $\mathscr{A}(0)\boldsymbol{\varphi}$ ist der Vektor $(\mathscr{A}(0)\varphi_1, \ldots, \mathscr{A}(0)\varphi_L) \in (C^\alpha(\overline{\Omega}))^L$. Entsprechendes gilt im folgenden.

Erfüllt f zusätzlich B. *und ist $m = 1$ oder $m > n/2$, so ist*

$$u_\lambda(.) \in C^0(]0, T], C^{2m+\beta}(\overline{\Omega})), \qquad 0 \leqq \beta < \alpha$$

und

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m+\beta} \leqq c(\beta, T, M, \| \boldsymbol{\varphi} \|_{2m+\alpha}, M_1, \| A_{\tilde{\alpha}} \|_\alpha, K)(1 + 1/t^{\alpha/2m}).$$

2. *f erfülle C. Dann ist $u_\lambda(.) \in C^0(]0, T], C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}))$ und*

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m+\alpha} \leqq c(T, M, \| \boldsymbol{\varphi} \|_{2m+\alpha}, M_1, \| A_{\tilde{\alpha}} \|_\alpha, K)(1 + 1/t^{\alpha/2m}). \tag{12}$$

Falls m, n beliebig aus $\mathbb{N}$ sind, gelten die folgenden Aussagen:

3. *Sei für ein γ, $1 > \gamma > 0$, $|||\boldsymbol{u}|||_\gamma < \infty$. f erfülle* B., *es sei $M_2 \geqq |||\boldsymbol{u}|||_\gamma$. Dann ist $u_\lambda(.) \in C(]0, T], C^{2m+\beta}(\overline{\Omega}))$, $0 \leqq \beta < \alpha$, und*

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m+\beta} \leqq c(T, M, \| \boldsymbol{\varphi} \|_{2m+\alpha}, M_2, \| A_{\tilde{\alpha}} \|_\alpha, K)(1 + 1/t^{\alpha/2m}). \tag{13}$$

Ist f zweimal stetig nach den letzten $2LN$ Variablen differenzierbar, so ist $u_\lambda(.) \in C^0(]0, T], C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}))$ und ebenfalls

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m+\alpha} \leqq c(T, M, \| \boldsymbol{\varphi} \|_{2m+\alpha}, M_2, \| A_{\tilde{\alpha}} \|_\alpha, K)(1 + 1/t^{\alpha/2m}). \tag{14}$$

Außerdem ist beide Male wieder

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha} \leqq c(p, T, M, \| \mathscr{A}_p(0) \boldsymbol{\varphi} \|_{L^p(\Omega)}, M_2, ||| A_{\tilde{\alpha}} |||_{\alpha, Q_T}, |||| A_{\tilde{\alpha}} ||||_\alpha, K), \; p > \frac{n+2}{1-\alpha}.$$

Beweis. Wir beschäftigen uns zunächst mit der $(2m + \alpha)$-Norm von $\boldsymbol{u}(t)$. Als schwache Lösung unseres parabolischen Systems hat $\boldsymbol{u}(t)$ eine Integraldarstellung: Wie schon bewiesen, gilt für die Komponenten u_λ von $\boldsymbol{u}$ die Integraldarstellung

$$u_\lambda(t) = U(t, 0)\varphi_\lambda + \int_0^t U(t, \sigma) f_\lambda(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1\boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\sigma)) d\sigma, \; 1 \leqq \lambda \leqq L.$$

(Vgl. Kapitel IIIB).

Daher ist, falls $u_\lambda(.) \in C^0(]0, T], C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}))$ ist,

$$\begin{aligned}
\| u_\lambda(t) \|_{2m+\alpha} \leqq{} & \| U(t, 0)\varphi_\lambda \|_{2m+\alpha} + \| \int_0^t U(t, \sigma) f_\lambda(t, \boldsymbol{u}(t), D^1\boldsymbol{u}(t), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t)) d\sigma \|_{2m+\alpha} \\
& + \int_0^t \| U(t, \sigma)(f_\lambda(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1\boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\sigma)) \\
& \qquad - f_\lambda(t, \boldsymbol{u}(t), D^1\boldsymbol{u}(t), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t))) \|_{2m+\alpha} d\sigma, \\
\leqq{} & \| \int_0^t U(t, \sigma) f_\lambda(t, \boldsymbol{u}(t), D^1\boldsymbol{u}(t), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t)) d\sigma \|_{2m+\alpha} + \| U(t, 0)\varphi_\lambda \|_{2m+\alpha} \\
& + \tilde{c}_{10} \int_0^t \frac{e^{-\tilde{c}_{11}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{1-\gamma}} \frac{1}{|t-\sigma|^\gamma} \| f_\lambda(t, \boldsymbol{u}(t), D^1\boldsymbol{u}(t), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t)) \\
& \qquad - f_\lambda(\sigma, u(\sigma), D^1\boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\sigma)) \|_\alpha d\sigma, \qquad 0 < \gamma < 1.
\end{aligned}$$

Nun ist nach Voraussetzung

$$\| f_\lambda(t, \boldsymbol{u}(t), D^1\boldsymbol{u}(t), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t)) - f_\lambda(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1\boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\sigma)) \|_\alpha$$
$$\leqq \sup_{\sigma \leqq \tau \leqq t} \left\| \frac{\partial f_\lambda}{\partial t} (\tau, \boldsymbol{u}(\tau), D^1\boldsymbol{u}(\tau), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\tau)) \right\|_\alpha |t - \sigma|$$
$$+ c_{34} \sum_{\tilde\nu=1}^{NL} \Bigg\{ \sup_{\substack{\sigma \leqq \tau \leqq t \\ 1 \leqq \tilde\mu \leqq NL}} \left\| \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial y_{\tilde\nu} \partial y_{\tilde\mu}} (\tau, \boldsymbol{u}(\tau), D^1\boldsymbol{u}(\tau), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(t)) \right\|_\alpha$$ /δ
$$\cdot \| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha} \| D^{\tilde\alpha_{\tilde\nu}} \boldsymbol{u}(t) - D^{\tilde\alpha_{\tilde\nu}} \boldsymbol{u}(\sigma) \|$$ /τ
$$+ \sup_{\sigma \leqq \tau \leqq t} \left\| \frac{\partial f_\lambda}{\partial y_{\tilde\nu}} (\tau, \boldsymbol{u}(\tau), D^1\boldsymbol{u}(\tau), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\tau)) \right\| \cdot \| D^{\tilde\alpha_{\tilde\nu}\alpha} \boldsymbol{u}(t) - D^{\tilde\alpha_{\tilde\nu}} \boldsymbol{u}(\sigma) \|_\alpha \Bigg\},$$

so daß wir nach (9) und (10) für hinreichend nahe bei 1 liegende δ, ϱ, $1 > \delta < \varrho < 0$, $\gamma = \delta - \varrho$ setzen können, wenn die Abschätzung für $|||\boldsymbol{u}|||_{2m-1+\alpha}$ erbracht ist. Wenden wir uns nun dem Fall zu, daß $m = 1$ ist und die Schranke für $|||\boldsymbol{u}|||\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)$ von n, M und Ω abhängen darf. Nach Lemma 3.3 in [7], Kap. II, ist

$$|||\boldsymbol{u}|||_{1+\beta}^p \leqq c(p) \left\{ \int_0^T \left\| \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \right\|_p^p dt + \sum_{|\alpha| \leqq 2} \int_0^T \| D^\alpha \boldsymbol{u} \|_p^p dt \right\} \quad \text{mit} \quad \beta < 1 - (n+2)/p.$$

Mit Hilfe des Theorems 9.1 in [7], Kap. IV, kann man die Behauptung des Satzes in dem erwähnten Fall ganz analog zu Hilfssatz 2 in [10] beweisen.

Es sei nun $\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)\, |||\boldsymbol{u}|||$ hinreichend klein sowie $m \not> \frac{n}{2}$. Wie wir bereits /≥
wissen ist (Skalarmultiplikation der Gleichung mit $\mathscr{A}_0(t) u_\lambda(t)$ bezüglich jeder Komponente, s. Satz A 1)

$$\int_0^T \| \mathscr{A}_2(t) u_\lambda(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leqq \begin{cases} c(T, M, \| \mathscr{A}_2(0) \varphi \|_{L^2(\Omega)}, ||||A_{\tilde\alpha}||||_x, K) & m \geqq 2,\ n \geqq 3, \\ c(T, M, \| \mathscr{A}_2(0) \varphi \|_{L^2(\Omega)}, K) & m = 1 = n/2 \end{cases}$$ $/\ |||\nabla^m A_{\tilde\alpha\tilde\beta}$

$|||A_{\tilde\alpha\tilde\beta}, 0$

Nun ist, falls wir $m \geqq 2$ voraussetzen,

$$\| u_\lambda(t) \|_{m+1,2} \leqq c_{35} \| \mathscr{A}_2^\varrho(t) u_\lambda(t) \|_{L^2(\Omega)}, \quad \varrho \in \left] \frac{m+1}{2m}, \frac{m+2}{2m} \right[$$

([6], S. 179). Mit Hilfe der Integralgleichung für die Komponenten $u_\lambda(t)$ der Lösung folgt hieraus die Ungleichung

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{m+1,2} \leqq c_{36} \| \mathscr{A}_2^\varrho(t) U_2(t, 0) \mathscr{A}_2^{-1}(0) \| \, \| \mathscr{A}_2(0) \varphi \|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \int_0^t \frac{c_{37} e^{-c_{38}(t-\sigma)}}{|t - \sigma|^\varrho} \| \boldsymbol{f}(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1\boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1}\boldsymbol{u}(\sigma)) \|_{L^2(\Omega)} d\sigma,$$
$$\leqq c_{40} \| \mathscr{A}_2(0) \varphi \|_{L^2(\Omega)} + c_{39} \int_0^t \frac{e^{-c_{41}(t-\sigma)}}{|t - \sigma|^\varrho} (\| \mathscr{A}_2(\sigma) \boldsymbol{u}(\sigma) \|_{L^2(\Omega)} + K)\, d\sigma$$

([6] S. 29, 160, 161). Nach dem Satz von Hausdorff-Young ist somit

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{m+1,2} \in \bigcap_{1 \leqq p < 2m} L^p(]0, T[),$$

$$\left(\int_0^t \| \boldsymbol{u}(t) \|_{m+1,2}^p dt\right)^{1/p} \leqq c_{40} T^{1/p} \| \mathscr{A}_2(0) \varphi \| + c_{42} \left(\int_0^t (\| \mathscr{A}_2(t) \boldsymbol{u}(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + K^2)\, dt \right)^{1/2}.$$

Weiter ist nach einem bereits verwendeten Argument für $p > \frac{n}{1-\alpha}$ und hinreichend nahe bei 1 liegendes $\varrho \in]0, 1[$ sowohl (s. (A 6))

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha} &\leqq c_{43} \| \mathscr{A}_p(0) \varphi \|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \int_0^t \frac{e^{-c_{44}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho}} \cdot \| f(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1 \boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1} \boldsymbol{u}(\sigma)) \|_{L^p} d\sigma \\ &\leqq c_{43} \| \mathscr{A}_p(0) \varphi \|_{L^p(\Omega)} + c_{45} \int_0^t \frac{e^{-c_{44}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho}} \Big(\| \boldsymbol{u}(\sigma) \|_{2m-1+\alpha}^{\frac{2m - m/2p + \hat{\delta}/p}{2m - n/p - \hat{\delta}/p}} + K \Big) \, d\sigma, \quad \hat{\delta}/p \\ &\qquad = 1 - n/p - \alpha \end{aligned}$$

als auch nach einem Argument des Anhangs ((A 1) und (A 2))

$$\tag{15} \begin{aligned} \| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha} &\leqq c_{43} \| \mathscr{A}_p(0) \varphi \|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + c_{46} \int_0^t \frac{e^{-c_{44}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho}} \big(\| \boldsymbol{u}(\sigma) \|_{m+1,2}^{1-\varepsilon_1} \cdot \| \boldsymbol{u}(\sigma) \|_{2m-1+\alpha}^{m(1+\varepsilon_1)/(2m-1+\alpha)} + K \big) \, d\sigma. \end{aligned}$$

mit $\varepsilon_1 = 1 - \frac{2n}{np - 2p}$, $n \geqq 3$, $\varepsilon_1 = 1 - 2/p$, $m = n/2 = 1$. Die iterative Anwendung des Satzes von Hausdorff-Young und (A 2) zeigen nun, daß zunächst $\| u(t) \|_{2m-1+\alpha} \in L^{(2m - m/2p + \hat{\delta}_0/p)/(2m - n/p - \hat{\delta}_0/p)}(]0, T[)$ mit einem gewissen $\hat{\delta}_0 > 0$ ist. $c_2, c_9, c_{27}, c_{28}, c_{32}, c_{33}, c_{36}, \ldots, c_{46}$ hängen nach [1] und [6], S. 158 u. f., von M_1, p, n, m, M, Ω und $\sup\limits_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}$, $\sup\limits_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} ||||A_{\tilde{\alpha}}||||_{\alpha}$ ab. Mit (A 6) folgt dann aus Theorem 10.4 in [7], Kap. VII, daß

$$\| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha} \in \bigcap_{\tilde{p} \geqq 1} L^{\tilde{p}}(]0, T[), \qquad m > n/2,$$

sowie

$$\Big(\int_0^T \| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m-1+\alpha}^{\tilde{p}} dt \Big)^{1/\tilde{p}} \leqq c(\tilde{p}, T, M, \| \mathscr{A}(0) \varphi \|_{L^\infty(\Omega)}, M_1, |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}, K, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||)$$

ist. Hieraus folgt bereits, daß auch

$$\tag{16} |||u|||_{2m-1+\alpha} \leqq c(T, M, \| \mathscr{A}(0) \varphi \|_{L^\infty(\Omega)}, M_1, |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}, K, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||)$$

ist, doch können wir ein noch weitergehendes Resultat herleiten: Sei $0 \leqq \beta < \alpha$, $\varrho \in \Big] \frac{2m+\beta}{2m+\alpha}, 1 \Big[$. Dann ist nach Satz 6

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{u}(t) \|_{2m+\beta} &\leqq \tilde{c}_{12} \| \mathscr{A}(t) U(t, 0) \mathscr{A}^{-1}(0) \| \; \| \mathscr{A}(0) \varphi \|_{\alpha} \\ &\quad + \int_0^t \frac{\tilde{c}_{13} e^{-\tilde{c}_{14}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho + (1-\varrho)\alpha/2m}} \| \boldsymbol{f}(\sigma, \boldsymbol{u}(\sigma), D^1 \boldsymbol{u}(\sigma), \ldots, D^{2m-1} \boldsymbol{u}(\sigma)) \|_{\alpha} \, d\sigma, \\ &\leqq \tilde{c}_{12} \| \mathscr{A}(t) U(t, 0) \mathscr{A}^{-1}(0) \| \; \| \mathscr{A}(0) \varphi \|_{\alpha} \\ &\quad + \int_0^t \frac{\tilde{c}_{15} e^{-\tilde{c}_{14}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho + (1-\varrho)\alpha/2m}} \Big\{ \| \boldsymbol{u}(\sigma) \|_{2m-1+\alpha}^{\frac{2m+\alpha}{2m-1+\alpha}} + K \Big\} \, d\sigma, \end{aligned}$$

woraus mit Hilfssatz 4 folgt, daß

(17) $\|u(t)\|_{2m+\beta} \leqq c(\beta, T, M, \|\mathscr{A}(0)\varphi\|_\alpha, M_1, \|A_{\tilde{\alpha}}\|_\alpha, K)(1 + 1/t^{\alpha/2m})$

ist. — Sei nun $m \geqq 1$. Sei $\beta, 0 \leqq \beta < \alpha$, beliebig vorgegeben. Sei $1 - \varrho$, $0 < \varrho < 1$, so klein, daß wieder

$$\|v\|_{2m+\beta} \leqq c_{47} \|\mathscr{A}^\varrho(t) v\|_\alpha, \qquad v \in D(\mathscr{A}^2(t)),$$

ist. Dann ist wie vorhin und nach (A 9)

$$\|u(t)\|_{2m+\beta} \leqq \tilde{c}_{16} \|\mathscr{A}(t) U(t, 0) \mathscr{A}^{-1}(0)\| \cdot \|\mathscr{A}(0)\varphi\|_\alpha$$

$$+ \tilde{c}_{17} \int_0^t \frac{e^{-\tilde{c}_{14}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho+(1-\varrho)\alpha/2m}} \{ \sum_{\nu=1}^{2m-1} \|D^\nu u(\sigma)\|_\alpha \cdot \|D^\nu u(\sigma)\|_0 + K\} \, d\sigma$$ $/ \frac{2m}{v} - 1$

$$\leqq \tilde{c}_{16} \|\mathscr{A}(t) U(t, 0) \mathscr{A}^{-1}(0)\| \cdot \|\mathscr{A}(0)\varphi\|_\alpha$$

$$+ \tilde{c}_{18} \int_0^t \frac{e^{-\tilde{c}_{14}(t-\sigma)}}{|t-\sigma|^{\varrho+(1-\varrho)\alpha/2m}} (\|u(\sigma)\|_\gamma^2 + 1) \Big(\sum_{\nu=1}^{2m-1} \|u(\sigma)\|_{2m+\beta}^{\left(\frac{\nu-\gamma}{\nu+\alpha-\gamma} \frac{2m-\nu}{\nu} + 1\right) \frac{\nu+\alpha}{2m+\beta}} + K \Big) \, d\sigma.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist, falls β hinreichend nahe bei α liegt,

$$\left(\frac{\nu-\gamma}{\nu+\alpha-\gamma} \, \frac{2m-\nu}{\nu} + 1 \right) \frac{\nu+\alpha}{2m+\beta} < 1.$$

Nach einem geläufigen Argument folgt hieraus, daß auch jetzt

(18) $\|u(t)\|_{2m+\beta} \leqq c(\beta, T, M, \|\mathscr{A}(0)\varphi\|_\alpha, M_2, \|A_{\tilde{\alpha}}\|_\alpha, K)\ (1 + 1/t^{\alpha/2m})$

ist. Natürlich läßt sich unter Ausnutzung von (A 9) und der a-priori Schranke für $|||u|||_{\gamma}^{p}$ auch zeigen, daß

(19) $|||u|||_{2m-1+\alpha} \leqq c(T, M, \|\mathscr{A}_p(0)\varphi\|_{L^p(\Omega)}, M_2, |||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T}, K, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||)_x$

ist.

Bemerkung 6. Satz 8 bleibt richtig, wenn man in Bedingung A. an f den Faktor $\mu_1(\|u\|)$ durch den Faktor $\mu_1(\|u\|) + \nu(\|u\|_m, \|u\|)$ ersetzt, da dann Satz A 1 richtig bleibt. Falls die Komponenten von φ nur in $H^{2m,p}(\Omega) \cap \mathring{H}^{m,p}(\Omega)$ liegen, bleibt Satz 8 richtig, wenn man $1/t^{\alpha/2m}$ durch $1/t$ ersetzt.

Bemerkung 7. Zur Ableitung von (11) genügt es offenbar, vorauszusetzen, daß f stetig, die $A_{\tilde{\alpha}} \in C^0([0, T] \times \Omega)$ sind und

$$|||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T} < \infty$$

ist. Außerdem stützt sich der Nachweis von (11) für $m \geqq n/2$ nur auf eine a-priori Schranke von

$$|||u||| + \int_0^T \|\mathscr{A}_2(t) u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + |||u|||_{m,2},$$

wie sie unter einer Kleinheitsbedingung an $|||\boldsymbol{u}|||\,\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)$ für alle m, n im Anhang abgeleitet wird. — Was die Abhängigkeit der Schranke für $|||\boldsymbol{u}|||\,\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)$, $m \geqq n/2$, von Ω anbetrifft, so hängt sie nur von $\partial\Omega$, für $n = 2$ genauer nur von der Krümmung des Randes ab ([8], S. 226, 175, 381 und [5], S. 45/46); für konvexes Ω und $m = n/2 = 1$ hängt die Schranke für $|||\boldsymbol{u}|||\,\mu_1(|||\boldsymbol{u}|||)$ nur von M^{-1} und $\sup\limits_{|\alpha| \leqq 2m} |||A_{\bar{\alpha}}|||$ ab ([8], S. 227).

Anhang

Nach [6], S. 27, ist für $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $p > n \geqq 3$

(A 1) $$\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)^{1/p} \leqq c \sup_{|\bar{\alpha}|=2} \| D^{\bar{\alpha}} u \|^a_{L^2(\Omega)} \| \nabla u \|^{1-a}_{C^0(\overline{\Omega})},$$

wobei

$$a = \frac{2}{p(1-2/n)}$$

ist. Sei $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1 - n/p$. Sei Ω wie in Kap. I.,

$$q_1 := \frac{2m-1+\alpha}{m(2-a)},$$

$$q_2 := \frac{2m-\varepsilon}{a}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Nun ist für $\alpha_0 = 1 - n/p$, $m \geqq n/2$, $\varepsilon = n/2p$

(A 2) $$\frac{m(2-a)}{2m-1+\alpha_0} + \frac{a}{2m-\varepsilon} < \frac{2m-(m-1)a}{2m-1+\alpha_0} \leqq 1,$$

so daß, falls $1 - n/p - \alpha$ hinreichend klein ist, auch

(A 3) $$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} < 1$$

ausfällt.

Weiter sei bemerkt, daß

(A 4) $$\frac{m(2-a)}{2m-1+\alpha} < 1$$

ist, falls $m > n/2 - 1$ ist und $1 - n/p - \alpha$ hinreichend klein ist.

Wir benötigen noch eine Abschätzung im Fall $n = 2$. Trivialerweise ist für $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

(A 5) $$\Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)^{1/p} \leqq \Big(\int\limits_\Omega |\nabla u|^4 dx\Big)^{1/p} \| \nabla u \|^{1-4/p}_{C^0(\overline{\Omega})}, \qquad p > 4.$$

Für eine Schar elliptischer Operatoren

$$\mathscr{A}(t) = \sum_{|\bar{\alpha}| \leqq 2} A_{\bar{\alpha}}(t, x) D^{\bar{\alpha}}$$

die den Bedingungen des ersten Kapitels genügt, gilt bekanntlich nach [6], S. 26, [8], S. 224

$$\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leqq c(M)\, \|\mathscr{A}(t)u\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{1/2}_{C^0(\bar\Omega)}.$$

Daher ist

$$\|\nabla u\|_{C^0(\bar\Omega)} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leqq c(M)\, \|\mathscr{A}(t)u\|^{2/p}_{L^2(\Omega)} \|u\|^{2/p}_{C^0(\bar\Omega)} \|\nabla u\|^{2-4/p}_{C^0(\bar\Omega)}.$$

Überdies ist mit

$$q_1 := p, \qquad q_2 := p/(p-1)$$

die Größe

$$\frac{p}{p-1}\cdot\frac{2-4/p}{2-(2+\delta)/p} = \frac{p(p-2)}{(p-1)(p-1-\delta/2)} < 1,$$

falls δ, $\delta > 0$, hinreichend klein ist, weil trivialerweise $p(p-2)/(p-1)^2 < 1$ ist.

Weiter ist

$$\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\Big)^{1/p} \leqq \|\nabla u\|^{1/p}_{L^2(\Omega)} \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{2(p-1)}\, dx\Big)^{1/2p} \leqq \|\nabla u\|^{1/p+1/2p}_{L^2(\Omega)} \Big(\int_\Omega |\nabla u|^{2(2(p-1)-1)}\, dx\Big)^{1/4p}$$

usw. Hieraus erhält man zu jedem positiven δ nach endlich vielen, etwa $N(\delta)$, Schritten die Abschätzung

$$\text{(A 6)} \qquad \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\Big)^{1/p} \leqq \|\nabla u\|^{2/p-\tilde\delta}_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|^{1-2/p+\tilde\delta}_{C^0(\bar\Omega)}, \qquad 0 < \tilde\delta < \delta.$$

Wir benötigen noch eine Interpolationsungleichung. Es ist

$$\text{(A 7)} \qquad \|u\|_m \leqq c(\varepsilon\, \|u\|_{m+\alpha} + \varepsilon^{-1/\alpha} \|u\|_{m-1}), \qquad u \in C^{m+\alpha}(\bar\Omega)$$

([3], S. 251). Wie auf S. 252 in [3] zeigt man, daß

$$\|u\|_1 \leqq c(\varepsilon\, \|u\|_{1+\varrho} + \varepsilon^{-(1-\gamma)/\varrho}\, \|u\|_\gamma)$$

ist, $1 \geqq \varrho$, $\gamma > 0$, woraus sich mit (A 7) induktiv die Ungleichung

$$\text{(A 8)} \qquad \|u\|_m \leqq c(\varepsilon\, \|u\|_{m+\alpha} + \varepsilon^{-(m-\gamma)/\alpha}\, \|u\|_\gamma)$$

ergibt ([3], S. 251). Durch Bilden des Minimums bezüglich ε folgt

$$\text{(A 9)} \qquad \|u\|_m \leqq c\, \|u\|^{\frac{m-\gamma}{m-\gamma+\alpha}}_{m+\alpha} \|u\|^{\frac{\cancel{m-\gamma}\ \alpha}{m-\gamma+\alpha}}_{\gamma},$$

wie aufgrund bereits vorhandener Interpolationslemmata zu erwarten war.

Sei wieder

$$\mathscr{A}(t) = \sum_{|\bar\alpha| \leqq 2m} A_{\bar\alpha}(t, x) D^{\bar\alpha}, \qquad A_{\bar\alpha} \in C^0([0, T] \times \bar\Omega),$$

eine Schar elliptischer Differentialoperatoren, für die

$$\|A_{\bar\alpha}\|_\alpha < \infty \qquad \text{ist für } (m, n) \neq (1, 2).$$

und für die

$$|||A_{\tilde{\alpha}}|||_{\alpha, Q_T} < \infty \qquad \text{ist für } (m, n) = (1, 2),$$

und die den Elliptizitäts- und Positivitätsbedingungen des ersten Kapitels genügen. Sei weiter für jedes $\tilde{\alpha}$, $|\tilde{\alpha}| \leqq 2m$, eine Folge $\{A_{\tilde{\alpha},\nu}\}$ von Funktionen aus $C^{2m+1}([0, T] \times \overline{\Omega})$ gegeben mit

$$|||A_{\tilde{\alpha},\nu} - A_{\tilde{\alpha}}||| \to 0, \qquad \nu \to \infty.$$

Von den für $\nu \geqq \nu_0$ elliptischen Operatoren

$$\mathscr{A}_\nu(t) := \sum_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} A_{\tilde{\alpha},\nu}(t, x) D^{\tilde{\alpha}}$$

können wir voraussetzen, daß sie sich in der Form

$$\mathscr{A}_\nu(t) = \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}| = m, \\ |\tilde{\beta}| = m}} D^{\tilde{\alpha}}(\tilde{A}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},\nu}(t, x) D^{\tilde{\beta}}) + \sum_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m-1} \tilde{A}_{\tilde{\alpha},\nu}(t, x) D^{\tilde{\alpha}}$$

$|\tilde{\beta}$

schreiben lassen mit

$, \nu$ $, \nu$ $, \nu$ $$\tilde{A}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta},\nu} \in C^{m+1}([0, T] \times \overline{\Omega}), \quad \tilde{A}_{\tilde{\alpha},\nu} \in C^{m+1}([0, T] \times \overline{\Omega}), \quad \tilde{A}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = \overline{\tilde{A}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}} = \tilde{A}_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}},$$

d. h. daß sie einen formal selbstadjungierten Hauptteil besitzen.

Sei weiter

$$f := \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$$

eine stetige Abbildung, die der Wachstumsbeschränkung A. aus Kapitel V. genügt. Dann gilt:

Satz A1. *Sei* $\varphi \in H^{2m}(\Omega) \cap \mathring{H}^m(\Omega)$,

$$u(.) \in C^0([0, T], H^{2m}(\Omega)) \cap C^0([0, T], \mathring{H}^m(\Omega)) \cap C^1([0, T], L^2(\Omega))$$

mit

$$|||u||| \leqq M_1 < \infty,$$

$$\frac{du}{dt} + \mathscr{A}(t)u = f(t, u, D^1u, \ldots, D^{2m-1}u),$$

$$u(0) = \varphi.$$

Dann ist

$|||\nabla^m A_{\tilde{\alpha},\nu_0}|||$, $|||A_{\tilde{\alpha},\nu_0}|||$

$$|||u|||^2_{m,2} + \int_0^T \|\mathscr{A}(t)u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \leqq \begin{cases} c(T, M, \|\varphi\|_{m,2}, M_1, K), & (m, n) = (1, 2) \\ c(T, M, \|\varphi\|_{m,2}, M_1, ||||A_{\tilde{\alpha}}||||_x, K) & \text{sonst}, \end{cases}$$

wenn nur $|||u||||\mu_1(|||u|||)$ *unterhalb einer von* Ω, M *bzw. den* $||||A_{\tilde{\alpha}}||||_x$ *abhängigen, aber von* K *unabhängigen Schranke liegt,* und ν_0 hinreichend groß ist.

Beweis. Der formal selbstadjungierte Hauptteil von $\mathscr{A}_\nu(t)$ sei mit $\tilde{\mathscr{A}}_\nu(t)$ bezeichnet. Wir multiplizieren die Differentialgleichung skalar mit $\mathscr{A}_\nu(t)u$

und beachten die folgenden Relationen:

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{du}{dt},\ \tilde{\mathscr{A}}_\nu(t)u\right) = \frac{d}{dt}(u,\ \tilde{\mathscr{A}}_\nu(t)u) - (u,\ \tilde{\mathscr{A}}'_\nu(t)u),$$

$$\int_0^t |(f(\tau, u(\tau), D^1u(\tau), \ldots, D^{2m-1}u(\tau)),\ \mathscr{A}_\nu(\tau)\,u(\tau))|\,d\tau$$

$$\leqq \int_0^t |||u|||\,\mu(|||u|||)\,\|u(\tau)\|_{2m,2}\,\|\mathscr{A}(\tau)\,u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\,d\tau$$

$$+ \int_0^t |||u|||\,\mu_1(|||u|||)\,\|u(\tau)\|_{2m,2}\,\|(\mathscr{A}(\tau) - \mathscr{A}_\nu(\tau))\,u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\,d\tau$$

$$+ K\int_0^t \|\mathscr{A}_\nu(\tau)\,u(\tau)\|_{L^1(\Omega)}\,d\tau,$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_0^t (\mathscr{A}(\tau)u(\tau),\ \mathscr{A}_\nu(\tau)\,u(\tau))\,d\tau$$

$$\geqq \int_0^t \|\mathscr{A}(\tau)\,u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau - \int_0^t |(\mathscr{A}(\tau)\,u(\tau),\ (\mathscr{A}(\tau) - \mathscr{A}_\nu(\tau))\,u(\tau))|\,d\tau,$$

$$\int_0^t \left|\left(\frac{du}{dt}(\tau), A_{\tilde{\alpha},\nu}(\tau)\,D^{2m-1}u(\tau)\right)\right| d\tau \leqq \int_0^t \|\mathscr{A}(\tau)u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\|\cancel{\mathscr{A}}_{\tilde{\alpha},\nu}(\tau)\,D^{2m-1}u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\,d\tau \qquad /\tilde{A}$$

$$+ \int_0^t |||u|||\,\mu_1(|||u|||)\,\|u(\tau)\|_{2m,2}\,\|A_{\tilde{\alpha},\nu}(\tau)\,D^{2m-1}u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\,d\tau$$

$$+ K\int_0^t \|A_{\tilde{\alpha},\nu}(\tau)\,D^{2m-1}u(\tau)\|_{L^1(\Omega)}\,d\tau$$

$$\leqq \varepsilon\int_0^t \|\mathscr{A}(\tau)\,u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau$$

$$+ c(|||u|||\,\mu_1(|||u|||),\ |||A_{\tilde{\alpha},\nu}|||,\ M,\ ||||A_{\tilde{\alpha}}||||_x,\ \varepsilon)\int_0^t \|u(\tau)\|^2_{m,2}\,d\tau,$$

wobei wir von der multiplikativen Ungleichung in [6], S. 27, und Theorem 2 in [5] Gebrauch gemacht haben. Theorem 17.1 in [8], S. 224, zeigt, daß in der letzten Ungleichung $||||A_{\tilde{\alpha}}||||_x$ durch M ersetzt werden kann für $(m,n) = (1,2)$. Mit Hilfe der eben genannten Sätze und der Gårdingschen Ungleichung für $\tilde{\mathscr{A}}_\nu(t)$, $\nu \geqq \nu_0$, folgt dann, indem man ν hinreichend groß macht, Satz A1.

Literatur

[1] S. Agmon, On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems, Comm. Pure Appl. Math. vol. 15 (1962) 119—147.

[2] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic parti~~c~~al differential equations satisfying general boundary conditions. I, Comm. Pure Appl. Math. vol. 12 (1951) 623—727.

[3] L. Bers, F. John and M. Schechter, Partial Differential Equations. New York-London-Sydney: Interscience Publishers 1964.
[4] F. E. Browder, A Priori Estimates for Elliptic and Parabolic Equations, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. IV. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society 1960.
[5] F. E. Browder, On the Spectral Theory of Elliptic Partial Differential Equations I, Math. Ann. **142** (1961) 22—130.
[6] A. Friedman, Partial Differential Equations. New York, Chikago, San Francisco, Atlanta, Dallas, Montreal, Toronto, London, Sydney: Holt, Rinehart and Winston 1969.
[7] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Uralceva, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Translations of Mathematical Monographs 23. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society 1968.
[8] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, Linear and Quasilinear Elliptic Equations. New York and London: Academic Press 1968.
[9] J. L. Lions, Équations Differentielles Operationelles et Problémes aux Limites. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1961.
[10] F. Tomi, Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. **111** (1969) 350—366.