



Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik  
Lehrstuhl Mathematik VI -  
Partielle Differentialgleichungen und Mathematische Physik  
Prof. Dr. Wolf von Wahl

Diplomarbeit im Fach Mathematik

---

## Strudelgrößen bei dem Zentrumproblem

---

Eingereicht von Bertram Unger  
Bayreuth, den 31. Mai 2011

### **Danksagung**

Vielen Dank an Herrn Prof. Wolf von Wahl für die großzügige Unterstützung.  
Außerdem möchte ich mich bei meinen Eltern für die Ermöglichung des Diplomstudiums bedanken.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Anfangsglieder erster Ordnung</b>	<b>4</b>
2.1	Vergleichsdifferentialgleichung . . . . .	4
2.2	Sukzessives Lösen der Differentialgleichung $yf_{tx} - xf_{ty} - R = 0$ . . . . .	6
2.3	Die Bedeutung der Strudelgrößen . . . . .	9
2.4	Eindeutige Bestimmtheit der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße	10
<b>3</b>	<b>Anfangsglieder höherer Ordnung</b>	<b>14</b>
3.1	Umschreiben der Differentialgleichung in Polarkoordinaten . . . . .	14
3.2	Vergleichsdifferentialgleichung in Polarkoordinaten . . . . .	16
3.3	Existenz einer $2\pi$ -periodischen Stammfunktion . . . . .	17
3.4	$\pi$ -Periodizität der $2\pi$ -periodischen Lösungen . . . . .	21
	<b>Literatur</b>	<b>25</b>

# 1 Einleitung

Dieser Diplomarbeit liegt das „Poincarésche Zentrumproblem“ zu Grunde, das aus himmelsmechanischen Fragestellungen entstanden ist. Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigte sich die Wissenschaft damit, wie stabil unser Sonnensystem ist. Man fragte sich, unter welchen Bedingungen sich die Planeten auf stabilen, also geschlossenen Bahnen um die Sonne bewegen und nicht in spiralförmigen Bahnen in die Sonne hineinstürzen oder aus unserem Sonnensystem verschwinden.

Da seit Kepler bekannt war, dass sich die Planeten nicht auf exakten Kreisbahnen bewegen, betrachtet man Störungen der Kreisgleichungen  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$  um den kritischen Punkt bzw. Gleichgewichtspunkt  $(x, y) = (0, 0)$ . Das zu untersuchende ebene System, mit dem sich das zweite Kapitel dieser Arbeit beschäftigt, lautet also

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = y + Q(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = -(x + P(x, y)) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$x$  und  $y$  werden dabei als Anfangsglieder erster Ordnung bezeichnet,  $P$  und  $Q$  sind Polynome, die mit quadratischen Termen beginnen. Der lineare Teil von System (1.1) hat die Eigenwerte  $i$  und  $-i$ .

Die Frage ist nun, ob der kritische Punkt sowohl in der Zukunft, als auch in der Vergangenheit stabil ist. Dazu muss untersucht werden, ob die Lösungen von (1.1), die in der Nähe von  $(0, 0)$  beginnen, stets<sup>1</sup> in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $(0, 0)$  bleiben oder aus dieser Umgebung herauslaufen.

**Definition 1.1** Falls eine gelochte Umgebung  $G \setminus (0, 0)$  des kritischen Punktes existiert, in der alle in  $G \setminus (0, 0)$  liegenden Integralkurven geschlossen sind, so spricht man von einem Wirbel.

Andernfalls spricht man vom Strudel.<sup>2</sup>

**Bemerkung 1.2** Der Name Strudel erklärt sich daraus, dass im Nicht-Wirbelfall in  $G \setminus (0, 0)$ ,  $G$  hinreichend klein, alle Integralkurven Spiralen sind.<sup>3</sup>

Auch wenn es einfach scheint, die Wirbelfälle durch Bedingungen an die Koeffizienten  $P$  und  $Q$  vollständig zu erfassen, stellt dies ein noch immer ungelöstes Problem in der Mathematik dar.<sup>4</sup>

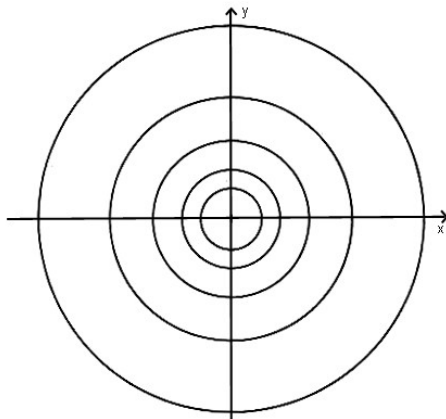
Im zweiten Kapitel wird zunächst gezeigt, wie man eine formale Potenzreihe  $F(x, y) =$

<sup>1</sup>auch bei Zeitumkehr

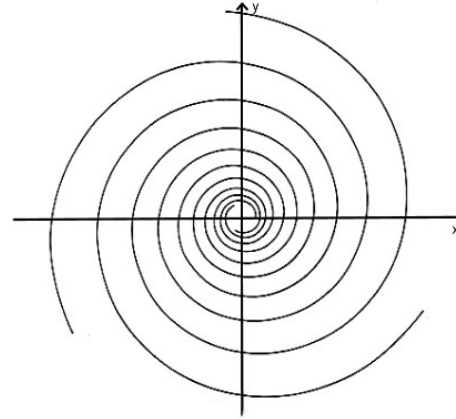
<sup>2</sup>Die folgenden Bilder sind leicht verändert aus [GF] entnommen.

<sup>3</sup>vgl. [Fr] S.395

<sup>4</sup>Nur im einfachsten Fall quadratischer  $P$  und  $Q$  ist das Problem bereits vollständig gelöst.



(a) Wirbelfall



(b) Strudelfall

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + F_3(x, y) + F_4(x, y) + \dots$  zum System (1.1) konstruieren kann so, dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(y + Q) - \frac{\partial F}{\partial y}(x + P) = \sum_{k=2}^{\infty} d_{\frac{2k-2}{2}}(x^{2k} + y^{2k})$$

gilt, wobei  $d_{\frac{2k-2}{2}}$  als Strudelgrößen bezeichnet werden. Sind alle Strudelgrößen gleich 0, so ist das Zentrum stabil (Wirbelfall). Ist aber eine der Zahlen  $d_{\frac{2k-2}{2}}$  ungleich 0, so liegt der Strudelfall vor. Im zweiten Teil des zweiten Kapitels wird analytisch gezeigt, dass die erste nicht verschwindende Strudelgröße eindeutig bestimmt ist.

Im dritten Kapitel geht es um das System mit Anfangsgliedern höherer Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = y^{2n+1} + Q(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y} = -(x^{2n+1} + P(x, y)) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

wobei  $n > 1$  und  $P$  und  $Q$  mit Gliedern von höherer Ordnung als  $2n + 1$  beginnen. Dieses wird zunächst auf Polarkoordinaten umgeschrieben. Nach der Korrektur eines Satzes von von Wahl und Frommer um einen Faktor wird am Ende der Arbeit der Frage nachgegangen, inwiefern die  $2\pi$ -periodischen Lösungen der zu untersuchenden Differentialgleichung sogar  $\pi$ -periodisch sind.

**Notation** Zur Vereinfachung werden im Folgenden die partiellen Ableitungen durch Indizes dargestellt. So gelten z.B. folgende Bezeichnungen:

$$F_x := \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \quad \text{und} \quad F_y := \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$$

## 2 Anfangsglieder erster Ordnung

Das in diesem Kapitel behandelte System (1.1) kann man leicht umschreiben auf folgende Form:

$$y' = -\frac{x + P(x, y)}{y + Q(x, y)} \quad (2.1)$$

wobei  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  konvergente Potenzreihen in einer offenen Umgebung um den kritischen Punkt sind, die mit quadratischen Gliedern beginnen:  $P(x, y) := \sum_{j=2}^{\infty} P_j(x, y)$ ,  $Q(x, y) := \sum_{j=2}^{\infty} Q_j(x, y)$ ,  $P_j$  und  $Q_j$  seien homogene Polynome vom Grad  $j$ .

### 2.1 Vergleichsdifferentialgleichung

Um zu prüfen, ob die Lösungen der Differentialgleichung (2.1) vom Wirbel- oder Strudeltyp sind, wendet man ein Verfahren an, das auf den Mathematiker Dehn zurückgeht, der Frommers Doktorvater war. Bei diesem Verfahren konstruiert man eine geeignete Vergleichsdifferentialgleichung  $\tilde{y}' = -\frac{F_x}{F_y}$ , mit der formalen Potenzreihe  $F = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \sum_{i=3}^n f_i(x, y) + (\text{Restglied}(n+1). \text{ Ordnung})$  mit homogenen Polynomen  $f_i$  vom Grad  $i$ , deren Lösungen sicher vom Wirbeltyp sind.<sup>5</sup>

Falls die Vergleichsdifferentialgleichung so gebildet werden kann, dass deren Feldrichtungen in einer bestimmten Umgebung um  $(0,0)$  nie mit den Feldrichtungen der Ausgangsdifferentialgleichung (2.1) übereinstimmen, so sind nicht beide Differentialgleichungen vom Wirbeltyp. Da dies aber von der Vergleichsdifferentialgleichung vorausgesetzt wird, ist (2.1) vom Strudeltyp. Wir beschränken uns auf eine hinreichend kleine gelochte Umgebung von  $(0,0)$ .

Im Folgenden sei  $P := P(x, y)$ ,  $Q := Q(x, y)$  und  $f_2 = f_2(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ .

Sei  $(y + Q)F_y \neq 0$ . Dann liefert der Vergleich von  $y'$  und  $\tilde{y}'$ :

$$y' - \tilde{y}' = -\frac{x + P}{y + Q} + \frac{F_x}{F_y} = \frac{-(x + P)F_y + F_x(y + Q)}{(y + Q)F_y} = \frac{1}{(y + Q)F_y} \det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ x + P & y + Q \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Ist die Differenz (2.2) immer  $\neq 0$ , so besitzen Ausgangs- und Differentialgleichung in  $G \setminus (0,0)$  also nie die gleichen Feldrichtungen.

Im Fall  $(y + Q)F_y = 0$  ist  $(x + P)F_x \neq 0$  und man muss die Integralkurve nach  $y$  parametrisieren, nämlich

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = -\frac{y + Q}{x + P} + \frac{F_y}{F_x}$$

und erhält das selbe Kriterium.

Wäre im Fall  $(y + Q)F_y = 0$  auch  $(x + P)F_x = 0$ , würde in hinreichend kleiner

<sup>5</sup>vgl. [Fr] S.398

Umgebung um  $(0, 0)$  folgen:

$$y^2 + F_y Q = 0 \text{ und } x^2 + F_x P = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Somit genügt es, die Determinante zu betrachten. <sup>6</sup> Im Folgenden wird untersucht, wann diese identisch verschwindet oder nie verschwindet. Es wird sich zeigen, dass andere Fälle nie eintreten, wenn man über  $f_i, i \geq 3$  geeignet verfügt.

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ x + P & y + Q \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ x & y \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ P & Q \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\det \begin{pmatrix} f_{2x} & f_{2y} \\ x & y \end{pmatrix}}_{=0} + \det \begin{pmatrix} \sum_{l=3}^{\infty} f_{lx} & \sum_{l=3}^{\infty} f_{ly} \\ x & y \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{\infty} f_{ix} & \sum_{i=2}^{\infty} f_{iy} \\ P & Q \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=3}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{lx} & f_{ly} \\ x & y \end{pmatrix} + \sum_{i=2}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{ix} & f_{iy} \\ P & Q \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=3}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{lx} & f_{ly} \\ x & y \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i=2 \\ j \geq 2}}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{ix} & f_{iy} \\ P_j & Q_j \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=3}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{lx} & f_{ly} \\ x & y \end{pmatrix} + \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\substack{i+j-1=l \\ i \geq 2; j \geq 2}}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{ix} & f_{iy} \\ P_j & Q_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Als Ansatz zur Bestimmung der Koeffizienten vertauscht man nun Reihenbildung mit Determinante)

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=3}^{\infty} \left[ \det \begin{pmatrix} f_{lx} & f_{ly} \\ x & y \end{pmatrix} + \sum_{\substack{i+j-1=l \\ i \geq 2; j \geq 2}}^{\infty} \det \begin{pmatrix} f_{ix} & f_{iy} \\ P_j & Q_j \end{pmatrix} \right] \\ &=^! 0 \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>vgl. [vW06]

## 2.2 Sukzessives Lösen der Differentialgleichung

$$y f_{lx} - x f_{ly} - R = 0$$

Man betrachtet nun die Summe für jeden Grad  $l \geq 3$  separat. Die gesamte Summe kann nämlich zu 0 gemacht werden, indem jeder Summand

$$y f_{lx} - x f_{ly} + \sum_{\substack{i+j-1=l \\ i \geq 2; j \geq 2}} (f_{ix} Q_j - f_{iy} P_j)$$

beginnend bei  $l=3$  sukzessive durch geeignete Wahl der  $f_l$  zu 0 wird.

Um besser rechnen zu können, werden noch einige Bezeichnungen vorgenommen <sup>7</sup>:

### Notation

$$\begin{aligned} R &= - \sum_{\substack{i+j-1=l \\ i \geq 2; j \geq 2}} (f_{ix} Q_j - f_{iy} P_j) = \sum_{\nu+\mu=l} r_{\nu\mu} x^\nu y^\mu & (2.3) \\ f_l &= \sum_{\nu+\mu=l} p_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \\ f_{lx} &= \sum_{\nu+\mu=l} \nu p_{\nu\mu} x^{\nu-1} y^\mu = \sum_{\nu+\mu=l-1} (\nu+1) p_{\nu+1\mu} x^\nu y^\mu \\ y f_{lx} &= \sum_{\nu+\mu=l-1} (\nu+1) p_{\nu+1\mu} x^\nu y^{\mu+1} = \sum_{\nu+\mu=l} (\nu+1) p_{\nu+1\mu-1} x^\nu y^\mu \\ f_{ly} &= \sum_{\nu+\mu=l} \mu p_{\nu\mu} x^\nu y^{\mu-1} = \sum_{\nu+\mu=l-1} (\mu+1) p_{\nu\mu+1} x^\nu y^\mu \\ x f_{ly} &= \sum_{\nu+\mu=l} (\mu+1) p_{\nu-1\mu+1} x^\nu y^\mu \end{aligned}$$

$\Rightarrow y f_{lx} - x f_{ly} + \sum_{\substack{i+j-1=l \\ i \geq 2; j \geq 2}} (f_{ix} Q_j - f_{iy} P_j) = 0$  kann man schreiben als

$$(\nu+1) p_{\nu+1\mu-1} - (\mu+1) p_{\nu-1\mu+1} = r_{\nu\mu}, \forall \nu, \mu \text{ mit } \nu + \mu = l \quad (2.4)$$

---

<sup>7</sup>vgl. [vW69] S.2



Gleichung (2.4) kann man wie folgt als Gleichungssystem ausschreiben:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot p_{1l-1} &= r_{0l} \\ 2 \cdot p_{2l-2} - l \cdot p_{0l} &= r_{1l-1} \\ 3 \cdot p_{3l-3} - (l-1) \cdot p_{1l-1} &= r_{2l-2} \\ &\vdots \\ l \cdot p_{l0} - 2p_{l-22} &= r_{l-11} \\ -p_{l-11} &= r_{l0} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Im Folgenden soll nun dieses Gleichungssystem analog zu [vW69] zunächst für ungerade  $l$  und anschließend für gerade  $l$  untersucht werden.

**Hilfssatz 2.1** Sei  $\nu + \mu = l$  ungerade. Dann hat (2.4) eine eindeutige Lösung  $p_{0l}, p_{1l-1}, p_{2l-2}, \dots, p_{l0}$ .

**Beweis** <sup>8</sup> Um das Gleichungssystem (2.5) lösen zu können unterteilt man es in zwei Gleichungssysteme. Man betrachtet zuerst die Gleichungen mit  $\nu$  gerade, d.h.  $\nu+1, \nu-1$  ungerade:

$$1 \cdot p_{1l-1} = r_{0l} \quad (2.6)$$

$$3 \cdot p_{3l-3} - (l-1) \cdot p_{1l-1} = r_{2l-2} \quad (2.7)$$

$$5 \cdot p_{5l-5} - (l-3) \cdot p_{3l-3} = r_{4l-4} \quad (2.8)$$

$$\vdots$$

$$l \cdot p_{l0} - 2p_{l-22} = r_{l-11} \quad (2.9)$$

und anschließend die Gleichungen mit  $\nu$  ungerade, d.h.  $\nu+1, \nu-1$  gerade:

$$2 \cdot p_{2l-2} - l \cdot p_{0l} = r_{1l-1} \quad (2.10)$$

$$4 \cdot p_{4l-4} - (l-2) \cdot p_{2l-2} = r_{3l-3} \quad (2.11)$$

$$\vdots$$

$$(l-1)p_{l-11} - 3p_{l-33} = r_{l-22} \quad (2.12)$$

$$-p_{l-11} = r_{l0} \quad (2.13)$$

Man kann das Gleichungssystem (2.6)-(2.9) mit  $\frac{l+1}{2}$  Gleichungen und  $\frac{l+1}{2}$  Unbekannten eindeutig lösen, indem man zunächst jede Zeile nach  $p_{\nu+1\mu-1}$  auflöst und schließlich sukzessive  $p_{1l-1}$  in (2.7) einsetzt,  $p_{3l-3}$  ausrechnet und das Ergebnis in (2.8) einsetzt usw. Man sieht also, dass alle  $p_{\lambda\delta}$  mit  $\lambda$  ungerade und  $\delta$  gerade eindeutig bestimmt sind.

---

<sup>8</sup>siehe [vW69]

Startet man im Gleichungssystem (2.10)-(2.13) mit ebenfalls je  $\frac{l+1}{2}$  Gleichungen und Unbekannten rückwärts mit Gleichung (2.13) und setzt  $p_{l-11}$  in Gleichung (2.12) ein, erhält man  $p_{l-33}$ . Führt man das so fort, erhält man sukzessive eindeutig bestimmte  $p_{\lambda\delta}$  mit  $\lambda$  gerade und  $\delta$  ungerade. Damit sind für ungerade  $l$  nun alle Koeffizienten  $p$  so bestimmt, dass gilt:

$$y f_{lx} - x f_{ly} - R = 0$$

Sei nun  $\nu + \mu = l$  gerade.

Auch hier unterteilt man (2.5) in zwei Gleichungssysteme, zunächst wieder mit Gleichungen mit  $\nu + 1, \nu - 1$  ungerade:

$$1p_{1l-1} = r_{0l} \tag{2.14}$$

$$3p_{3l-3} - (l-1) \cdot p_{1l-1} = r_{2l-2} \tag{2.15}$$

$\vdots$

$$(l-1)p_{l-11} - 3p_{l-33} = r_{l-22} \tag{2.16}$$

$$-p_{l-11} = r_{l0} \tag{2.17}$$

und anschließend mit  $\nu + 1, \nu - 1$  gerade:

$$2p_{2l-2} - lp_{0l} = r_{1l-1} \tag{2.18}$$

$$4p_{4l-4} - (l-2)p_{2l-2} = r_{3l-3} \tag{2.19}$$

$\vdots$

$$lp_{l0} - 2p_{l-22} = r_{l-11} \tag{2.20}$$

Das Gleichungssystem (2.14)-(2.17) hat nun  $\frac{l}{2} + 1$  Gleichungen für die  $\frac{l}{2}$  Unbekannten  $p_{1l-1}, p_{3l-3}, \dots, p_{l-11}$ . Um dieses eindeutig zu lösen, verlangt man, dass die Koeffizienten von  $x^l$  und  $y^l$  gleich werden, indem man (2.17) streicht und (2.14) durch die Zeile  $p_{1l-1} + p_{l-11} = r_{0l} - r_{l0}$  ersetzt.

So folgt:

$$\left. \begin{array}{rclcl} p_{1l-1} & + 0 + \dots & + 0 & + p_{l-11} & = r_{0l} - r_{l0} \\ -(l-1)p_{1l-1} & + 3p_{3l-3} & + 0 & + \dots & = r_{2l-2} \\ 0 & - (l-3)p_{3l-3} & + 5p_{5l-5} & + 0 + \dots & = r_{4l-4} \\ \vdots & & & & \\ 0 & + \dots & - 3p_{l-33} & + (l-1)p_{l-11} & = r_{l-22} \end{array} \right\} \tag{2.21}$$

mit der quadratischen  $\frac{l}{2} \times \frac{l}{2}$ -Matrix  $A =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -(l-1) & 3 & 0 & \dots & \\ 0 & -(l-3) & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -(l-5) & 7 & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & -3 & (l-1) \end{pmatrix}$$

Um die Determinante von  $A$  zu ermitteln, entwickelt man sie nach der ersten Zeile. Man erhält also:  $\det A = 1 \cdot B + (-1)^{\frac{l}{2}+1} \cdot C$ , wobei  $B$  eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen  $3, 5, \dots, l-3, l-1$  und  $C$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen  $-(l-1), -(l-3), \dots, -5, -3$  ist. Es folgt:

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (l-1) + (-1)^{\frac{l}{2}+1} (-1)^{\frac{l}{2}-1} (l-1) \cdot (l-3) \cdot \dots \cdot 3 \\ &= 2 \cdot \prod_{k=1}^{\frac{l}{2}} (2k-1) \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Somit hat (2.21) genau eine Lösung.

Das Gleichungssystem (2.18)-(2.20) hat für  $l$  gerade  $\frac{l}{2}$  Gleichungen für die  $\frac{l}{2} + 1$  Unbekannten  $p_{0l}, p_{2l-2}, \dots, p_{l0}$ .

Verwendet man  $p_{0l}$  als freien Parameter  $\lambda$ , dann sind  $p_{2l-2}, \dots, p_{l0}$  wohlbestimmte lineare Funktionen von  $\lambda$ . □

### 2.3 Die Bedeutung der Strudelgrößen

**Definition 2.2**  $d_{\frac{l-2}{2}} = p_{1l-1} - r_{0l} = -p_{l-11} - r_{l0}$  werde als  $\frac{l-2}{2}$ -te Strudelgröße bezeichnet.<sup>9</sup>

Damit sind für gerade  $l$  nun alle Koeffizienten  $p$  so bestimmt, dass gilt:

$$\begin{aligned} yf_{lx} - xf_{ly} - R &= p_{1l-1}y^l - p_{l-11}x^l - r_{0l}y^l - r_{l0}x^l \\ &= d_{\frac{l-2}{2}}(x^l + y^l) \end{aligned} \tag{2.23}$$

Insgesamt gilt für die formale Potenzreihe  $F$ :

$$\det \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ x + P & y + Q \end{pmatrix} = \sum_{k=2}^{\infty} d_{\frac{2k-2}{2}}(x^{2k} + y^{2k})$$

---

<sup>9</sup>Frommer hat den Begriff in [Fr] eingeführt.

**Bemerkung 2.3** <sup>10</sup> Die Frage, ob die Ausgangsdifferentialgleichung nun vom Wirbel- oder Strudeltyp ist, kann nun ausschließlich durch die Strudelgrößen beantwortet werden. Es gilt nämlich: falls  $\exists l, l$  minimal, s.d.  $d_{\frac{l-2}{2}} \neq 0$ , dann beginnt der Zähler von  $y' - \tilde{y}'$  mit den Gliedern  $d_{\frac{l-2}{2}}(x^l + y^l)$ . Es gibt also eine bestimmte Umgebung um  $(0,0)$ , s.d. der Zähler positiv bzw. negativ definit ist. Somit stimmen die Feldrichtungen von Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung nie überein und die Ausgangsdifferentialgleichung ist vom Strudeltyp.

Ist  $d_{\frac{l-2}{2}} > 0$ , so sind die Integralkurven Spiralen, die sich gegen den Uhrzeigersinn dem Ursprung nähern. Für  $d_{\frac{l-2}{2}} < 0$  nähern sie sich im Uhrzeigersinn dem Ursprung.

Ist  $d_{\frac{l-2}{2}} = 0$  kann zunächst keine Aussage getroffen werden. Frommer zeigt allerdings: Die Ausgangsdifferentialgleichung ist genau dann vom Wirbeltyp, wenn  $d_{\frac{l-2}{2}} = 0 \forall l \in \mathbb{N}$  <sup>11</sup> Hier ist allerdings eine Lücke im Frommerschen Beweis, die man schließen kann. <sup>12</sup>

Nun soll noch kurz die Frage geklärt werden, von welchen Zusatzpolynomen  $P_j$  und  $Q_j$  die Strudelgröße  $d_{\frac{l-2}{2}}$  abhängig ist.

Sei  $p = (p_{1l-1}, \dots, p_{l-11})^T$  und sei  $w = (r_{0l}, r_{2l-2}, \dots, r_{l-22})^T$ . Dann ist  $p = A^{-1}w$ . Somit sieht man mit der Definition von  $R$  in Gleichung (2.3), dass  $d_{\frac{l-2}{2}}$  von  $P_2, Q_2, P_3, Q_3, \dots, P_{l-1}, Q_{l-1}$ . Dies ist gleichbedeutend mit  $d_k = d_k(P_2, Q_2, P_3, Q_3, \dots, P_{2k+1}, Q_{2k+1})$ .

## 2.4 Eindeutige Bestimmtheit der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße

Anschaulich ist ersichtlich, dass die erste nicht verschwindende Strudelgröße eindeutig bestimmt ist, da diese die Geometrie bestimmt, wie in Bemerkung 2.3 angedeutet. Nun soll aber ein analytischer Beweis erbracht werden. Dazu zunächst ein Lemma zur Darstellung von  $p_{\nu\mu}$  in Abhängigkeit der freien Parameter  $\lambda$ . Sei  $p_{0l} = \lambda_{\frac{l}{2}-1}$ .

**Lemma 2.4** Für  $\nu + \mu = \kappa \geq 4$  gilt:

$$p_{\nu\mu} = p_{\nu\mu}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\lfloor \frac{\nu+\mu}{2} \rfloor - 1}) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{\nu+\mu}{2} \rfloor - 1} \pi_{\nu\mu j} \lambda_j + \Pi_{\nu\mu} \quad (2.24)$$

mit Konstanten  $\pi_{\nu\mu j}$  und  $\Pi_{\nu\mu}$ .

<sup>10</sup>vgl. [Fr] S401

<sup>11</sup>vgl. [Fr] S403

<sup>12</sup>[vW, Persönliche Mitteilung]

**Beweis** <sup>13</sup> Sei  $l$  gerade. (2.18)-(2.20) lässt sich mit  $p_{0l} = \lambda_{\frac{l}{2}-1}$  schreiben als:

$$p_{2ql-2q} = c_{2ql-2q} \lambda_{\frac{l}{2}-1} + \sum_{m=0}^{\frac{l}{2}-1} d_{2ql-2q, 2m+1l-(2m+1)} r_{2m+1l-(2m+1)} \quad (2.25)$$

Dabei sind  $c_{2ql-2q}$  und  $d_{2m+1l-(2m+1)}$  Konstanten. Mit  $r_{2m+1l-(2m+1)} = \sum_{\kappa=2}^{l-1} \sum_{\nu+\mu=\kappa} g_{2m+1l-(2m+1)\nu\mu} p_{\nu\mu}$ , wobei  $g_{2m+1l-(2m+1)\nu\mu}$  Konstanten, ergibt sich:

$$p_{2ql-2q} = c_{2ql-2q} \lambda_{\frac{l}{2}-1} + \sum_{m=0}^{\frac{l}{2}-1} \sum_{\kappa=2}^{l-1} \sum_{\nu+\mu=\kappa} d_{2ql-2q, 2m+1l-(2m+1)} g_{2m+1l-(2m+1)\nu\mu} p_{\nu\mu} \quad (2.26)$$

Aus dem System (2.21) und Gleichung (2.23) folgt:

$$p_{2q+1l-(2q+1)} = \sum_{m=0}^{\frac{l}{2}} e_{2q+1l-(2q+1), 2ml-2m} r_{2ml-2m} \quad \text{für } q \in [0, 1, \dots, \frac{l-2}{2}] \quad (2.27)$$

mit Konstanten  $e_{2q+1l-(2q+1), 2ml-2m}$ .

(2.27) schließt  $p_{1l-1} = d_{\frac{l-2}{2}} + r_{0l}$  für  $q = 0$  genauso mit ein, wie  $p_{l-11} = -d_{\frac{l-2}{2}} - r_{l0}$  für  $q = \frac{l-2}{2}$ .

Mit  $r_{2ml-2m} = \sum_{\kappa=2}^{l-1} \sum_{\nu+\mu=\kappa} h_{2ml-2m\nu\mu} p_{\nu\mu}$ , wobei  $h_{2ml-2m\nu\mu}$  Konstanten, ergibt sich:

$$p_{2q+1l-(2q+1)} = \sum_{m=0}^{\frac{l}{2}} \sum_{\kappa=2}^{l-1} \sum_{\nu+\mu=\kappa} e_{2q+1l-(2q+1), 2ml-2m} h_{2ml-2m\nu\mu} p_{\nu\mu} \quad (2.28)$$

Nach dieser geleisteten Vorarbeit kann das Lemma nun bewiesen werden durch Induktion über  $\kappa$ :

Induktionsanfang:  $\kappa = 4$

Da  $p_{\nu\mu}$  mit  $\nu + \mu < 4$  nicht von  $\lambda_i$  abhängig, folgt aus (2.26):  $p_{2q4-2q} = c_{2q4-2q} \lambda_1 + C_{2q4-2q}$ ,  $q \in \{0, 1, 2\}$ , und aus (2.28):  $p_{2q+14-(2q+1)} = C_{2q+14-(2q+1)}$ ,  $q \in \{0, 1\}$ . Setzt man nun  $\Pi_{2q4-2q} := C_{2q4-2q}$ ,  $\Pi_{2q+14-(2q+1)} := C_{2q+14-(2q+1)}$ ,  $\pi_{2q4-2q1} := c_{2q4-2q}$  und  $\pi_{2q+14-(2q+1)1} = 0$  erhält man die Darstellung (2.24) für  $\kappa = 4$ .

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei bewiesen für  $\kappa \leq l-1$ .

Induktionsbeweis: Die Behauptung für  $\kappa = l$  folgt wieder sofort aus den Darstellungen (2.26) und (2.28).  $\square$

**Satz 2.5**  $d_1$  ist eindeutig bestimmt. Ist  $d_1 = 0$ , so ist  $d_2$  eindeutig bestimmt. Ist auch

<sup>13</sup>vgl. [vW06]

$d_2 = 0$ , so ist  $d_3$  eindeutig bestimmt. Usw.

**Beweis** <sup>14</sup> Mit  $l$  gerade, dem vorherigen Lemma und der Darstellung von  $r$  als Doppelsumme wie oben folgt:

$$\begin{aligned} d_{\frac{l-2}{2}} &= p_{1l-1} - r_{0l} \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{l-2}{2}} \delta_{lj} \lambda_j + \Delta_l, \end{aligned} \tag{2.29}$$

wobei  $\delta_{lj}$  und  $\Delta_l$  konstant und eindeutig bestimmt.

$d_1$  ist nach Berechnung bei Frommer [Fr] S.400f. eindeutig bestimmt. Also ist  $\delta_{41} = 0$ . Sei nun  $d_1 = 0$ . Ist in  $d_2(l = 6)$  das Paar  $(\delta_{61}, \delta_{62}) \neq (0, 0)$ , so kann man  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2$  derart wählen, s.d. einmal

$$d_2(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)) > 0$$

und

$$d_2(\lambda = (\lambda'_1, \lambda'_2)) < 0.$$

Nach Bemerkung 2.3 sind die Integralkurven im ersten Fall Spiralen, die sich gegen den Uhrzeigersinn dem Ursprung nähern. Im zweiten Fall sind es Spiralen, die sich im Uhrzeigersinn dem Ursprung nähern.

Dies ist aber ein Widerspruch. Somit ist  $(\delta_{61}, \delta_{62}) = (0, 0)$  und  $d_2$  eindeutig bestimmt. Ist  $d_2 = 0$  so fährt man auf diese Weise fort.  $\square$

(2.29) kann noch weiter verbessert werden. Dies zeigt der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz 2.6**

$$d_{\frac{l-2}{2}} = d_{\frac{l-2}{2}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}}) = \sum_{j=1}^{\frac{l-4}{2}} \delta_{lj} \lambda_j + \Delta_l, \tag{2.30}$$

wobei  $\delta_{lj}$  und  $\Delta_l$  konstant und eindeutig bestimmt.

**Beweis** Nach Gleichung (2.28) gilt für  $\nu + \mu = l$ ,  $l$  gerade,  $\nu, \mu$  ungerade:

$$p_{\nu\mu} = p_{\nu\mu}(p_{\rho\sigma}, \sigma + \rho \leq l - 1)$$

Der freie Parameter  $\lambda_{\frac{l-2}{2}} = p_{0l}$  geht also in obiger Gleichung nicht ein. Es gilt somit:

$$p_{\nu\mu} = p_{\nu\mu}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}}), \text{ wobei } \nu, \mu \text{ ungerade. Insbesondere ist: } p_{1l-1} = p_{1l-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}}).$$

$$r_{0l} = \sum_{\kappa=2}^{l-1} \sum_{\nu+\mu=\kappa} h_{0l\nu\mu} p_{\nu\mu}, \text{ wobei } h_{0l\nu\mu} \text{ Konstanten. Somit ist auch } r_{0l} \text{ höchstens von den}$$

---

<sup>14</sup>vgl. [vW06]

freien Parametern  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}}$  abhängig.

Also gilt:  $d_{\frac{l-2}{2}} = p_{1l-1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}}) - r_{0l}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\frac{l-4}{2}})$ . In (2.29) ist daher  $\delta_{l-\frac{2}{2}} = 0$  und der Satz ist bewiesen.  $\square$

### 3 Anfangsglieder höherer Ordnung

Im Folgenden sollen Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)} \quad (3.1)$$

untersucht werden, wobei  $A(x, y)$  und  $B(x, y)$  nun Anfangsglieder höherer Ordnung haben, d.h.  $n > 1$ .  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  seien wieder konvergente Potenzreihen in einer offenen Umgebung  $U$  um  $(0,0)$ . Diese beginnen nun mit Gliedern der Ordnung  $2n$ :  $P(x, y) := \sum_{j=2n}^{\infty} P_j(x, y)$ ,  $Q(x, y) := \sum_{j=2n}^{\infty} Q_j(x, y)$ ,  $P_j$  und  $Q_j$  seien homogene Polynome vom Grad  $j$ .

#### 3.1 Umschreiben der Differentialgleichung in Polarkoordinaten

Um diese Differentialgleichung zu untersuchen, ist der Ansatz einer Vergleichsdifferentialgleichung, deren Lösungen algebraische Kurvenscharen sind, nicht zielführend.<sup>15</sup> Deshalb wird (3.1) zunächst in Polarkoordinaten umgeschrieben.

**Bemerkung 3.1** Ganz allgemein kann man (3.1) umschreiben auf die sogenannte 1-Form  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0 \in \Omega^1(U)$ ,  $(A, B) \neq (0, 0)$ ,  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U$  offene Umgebung von  $(0,0)$ .

Sei  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(r, \varphi) \\ \Phi_2(r, \varphi) \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi)$ ,  $\Phi : V \rightarrow U$ ,

$V := \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$ ,  $\Phi$  diffeomorph.

Da nach Hilfssatz 11.3.17 aus [KvW] gilt  $\omega = (\omega \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ , ist die Kurve  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ ,  $t \rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$  genau dann Lösung von  $\omega = 0$ , wenn  $\Phi^{-1} \circ \gamma : [s, k] \rightarrow V$ ,  $t \rightarrow \begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$  Lösung von  $\omega \circ \Phi = 0$  ist. Die transformierte Kurve ist also Lösung der transformierten Gleichung.

**Satz 3.2** a) Die Differentialgleichung  $y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$  lautet umgeschrieben auf Polarkoordinaten:

$$r' = r \cdot \frac{A \circ \Phi(r, \varphi) \sin \varphi - B \circ \Phi(r, \varphi) \cos \varphi}{A \circ \Phi(r, \varphi) \cos \varphi + B \circ \Phi(r, \varphi) \sin \varphi} \quad (3.2)$$

<sup>15</sup>vgl. [Fr] S.411



b) Mit  $A = x^{2n-1} + P(x, y)$  und  $B = y^{2n-1} + Q(x, y)$  kann man (3.2) schreiben als

$$r' = \frac{\sum_{i \geq 0} r^{i+1} p_{2n+i}(\varphi)}{\sum_{i \geq 0} r^i q_{2n+i}(\varphi)} =: \frac{Z(\varphi, r)}{N(\varphi, r)}, \quad (3.3)$$

wobei  $p_{2n+i}(\varphi) = P_{2n-1+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \sin \varphi - Q_{2n-1+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \cos \varphi$   
 und  $q_{2n+i}(\varphi) = P_{2n-1+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \cos \varphi + Q_{2n-1+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot \sin \varphi$ .  
 Insbesondere ist  $p_{2n} = \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi$   
 und  $q_{2n} = \cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi$ .

**Beweis** a) Sei  $\omega$  wie in obiger Bemerkung. Mit  $dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi$  und  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  gilt:

$$\begin{aligned} dx &= \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi \\ dy &= \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$\Rightarrow \omega \circ \Phi = A \circ \Phi(r, \varphi)(\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) + B \circ \Phi(r, \varphi)(\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) =$   
 $r(-A \circ \Phi(r, \varphi) \sin \varphi + B \circ \Phi(r, \varphi) \cos \varphi) d\varphi + A \circ \Phi(r, \varphi) \cos \varphi + B \circ \Phi(r, \varphi) \sin \varphi dr =$   
 $0$ . Daraus ergibt sich Darstellung (3.2).

b) Setzt man  $A = x^{2n-1} + P(x, y)$  und  $B = y^{2n-1} + Q(x, y)$  in (3.2) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} r' &= r \frac{r^{2n-1} \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + P \circ \Phi \sin \varphi - r^{2n-1} \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi - Q \circ \Phi \cos \varphi}{r^{2n-1} \cos^{2n} \varphi + P \circ \Phi \cos \varphi + r^{2n-1} \sin^{2n} \varphi + Q \circ \Phi \sin \varphi} \\ &= r \frac{r^{2n-1} [\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r^{2n-1}} (P \circ \Phi \sin \varphi - Q \circ \Phi \cos \varphi)]}{r^{2n-1} [\cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi + \frac{1}{r^{2n-1}} (P \circ \Phi \cos \varphi + Q \circ \Phi \sin \varphi)]} \\ &= r \frac{\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi + \sum_{i \geq 1} r^i (P_{2n-1+i} \sin \varphi - Q_{2n-1+i} \cos \varphi)}{\cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi + \sum_{i \geq 1} r^i (P_{2n-1+i} \cos \varphi + Q_{2n-1+i} \sin \varphi)} \\ &= r \frac{\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi + \sum_{i \geq 1} r^i p_{2n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{\cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi + \sum_{i \geq 1} r^i q_{2n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi)} \\ &= \frac{\sum_{i \geq 0} r^{i+1} p_{2n+i}(\varphi)}{\sum_{i \geq 0} r^i q_{2n+i}(\varphi)} \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.3**  $p_{2n+i}(\varphi)$  und  $q_{2n+i}(\varphi)$  kann man folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 p_{2n+i}(\varphi) &= p_{2n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sum_{\alpha+\beta=2n+i} c_{\alpha\beta} \cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi \\
 q_{2n+i}(\varphi) &= q_{2n+i}(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sum_{\alpha+\beta=2n+i} d_{\alpha\beta} \cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi.
 \end{aligned}$$

Dabei sind  $c_{\alpha\beta}$  und  $d_{\alpha\beta}$  Konstanten.

### 3.2 Vergleichsdifferentialgleichung in Polarkoordinaten

Nun wird analog zu Kapitel 1 eine Vergleichsdifferentialgleichung eingeführt. In Polarkoordinaten lautet diese

$$\tilde{r}' = -\frac{F_\varphi(\varphi, r)}{F_r(\varphi, r)} = -\frac{\sum_{i \geq 0} r^{i+1} f'_{2n+i}(\varphi)}{\sum_{i \geq 0} (i+1)r^i f_{2n+i}(\varphi)} \quad (3.4)$$

mit den Lösungen  $F(\varphi, r) = \sum_{i \geq 0} r^{i+1} f_{2n+i}(\varphi)$ , wobei die  $f_{2n+i}$  passend zu bestimmende Koeffizientenfunktionen seien.

**Bemerkung 3.4** Die Vergleichsdifferentialgleichung ist vom Wirbeltyp, falls die  $f_{2n+i} \forall i$   $2\pi$ -periodische Funktionen sind und die  $F$ -Reihe für kleine  $r$  konvergiert.

Wie in Kapitel 2 vergleicht man nun die Feldrichtungen der Ausgangs- und der Vergleichsdifferentialgleichung, indem man die Differenz von  $r' - \tilde{r}'$  bildet:

$$r' - \tilde{r}' = \frac{Z(\varphi, r)}{N(\varphi, r)} + \frac{F_\varphi(\varphi, r)}{F_r(\varphi, r)} = \frac{1}{N(\varphi, r)F_r(\varphi, r)} \det \begin{pmatrix} F_r(\varphi, r) & F_\varphi(\varphi, r) \\ -N(\varphi, r) & Z(\varphi, r) \end{pmatrix}$$

**Lemma 3.5 Cauchy Produkt von Reihen:**  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  seien absolut konvergente Reihen. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) \quad (3.5)$$

Man möchte nun die  $f_{2n+i}$  als  $2\pi$ -periodische Funktionen so bestimmen, dass die Feldrichtungen von Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung für hinreichend kleine  $r$  übereinstimmen. Ist das möglich, so ist die Ausgangsdifferentialgleichung vom Wirbeltyp. Wenn die Feldrichtungen für kleine  $r$  nie übereinstimmen, ist sie vom Strudeltyp. <sup>16</sup> Frommer geht dabei allerdings davon aus, dass „alle  $f_{2n+i}$  periodisch  $\Rightarrow$  Wirbeltyp“ gilt. Das müsste man noch beweisen, da über die Konvergenz der Reihen

---

<sup>16</sup>[Fr], S. 412

in (3.4) zunächst nichts bekannt ist.<sup>17</sup>

Analog zum Vorgehen in Kapitel 2 untersucht man zunächst die Differenz  $r' - \tilde{r}'$  und setzt diese gleich Null. Es ist  $N(\varphi, r) = q_{2n}(\varphi)r^0 + \mathcal{O}(r^1)$  und  $F_r(\varphi, r) = f'_{2n}(\varphi)r^1 + \mathcal{O}(r^2)$  im Fall der Konvergenz für kleine  $r$ ,<sup>18</sup> wobei  $f_{2n} \neq 0$ , wie man in (3.8) sehen wird. Die Funktionen  $N(\varphi, r)$  und  $F_r(\varphi, r)$  haben also positiv bzw. negativ definite Koeffizienten niedrigster Ordnung. Deshalb ist  $N(\varphi, r) \cdot F_r(\varphi, r) \neq 0$  für hinreichend kleine  $r$  und es genügt, die Determinante gleich 0 zu setzen:

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{pmatrix} F_r(\varphi, r) & F_\varphi(\varphi, r) \\ -N(\varphi, r) & Z(\varphi, r) \end{pmatrix} \\
 &= Z(\varphi, r)F_r(\varphi, r) + N(\varphi, r)F_\varphi(\varphi, r) \\
 &= \sum_{i \geq 0} r^{i+1} p_{2n+i}(\varphi) \sum_{i \geq 0} (i+1)r^i f_{2n+i}(\varphi) + \sum_{i \geq 0} r^i q_{2n+i}(\varphi) \sum_{i \geq 0} r^{i+1} f'_{2n+i}(\varphi) \\
 &= r \left( \sum_{i \geq 0} r^i p_{2n+i}(\varphi) \sum_{i \geq 0} (i+1)r^i f_{2n+i}(\varphi) + \sum_{i \geq 0} r^i q_{2n+i}(\varphi) \sum_{i \geq 0} r^i f'_{2n+i}(\varphi) \right) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 3.5}}{=} \sum_{i \geq 0} \left[ \sum_{\kappa=0}^i (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) \right] r^{i+1} \quad (3.6) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

### 3.3 Existenz einer $2\pi$ -periodischen Stammfunktion

Nun untersucht man sukzessive für  $i \geq 0$ , ob  $2\pi$ -periodische Lösungen für folgende Differentialgleichung existieren, die zunächst noch etwas umgeformt wird:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\kappa=0}^i (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) = 0 \\
 & \Rightarrow p_{2n}(\varphi)(i+1)f_{2n+i}(\varphi) + q_{2n}(\varphi)f'_{2n+i}(\varphi) + \\
 & + \sum_{\kappa=0}^{i-1} (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) = 0
 \end{aligned}$$

Da  $q_{2n} = \cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi > 0 \forall \varphi$ , kann man die Gleichung durch  $q_{2n}$  teilen.

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow f'_{2n+i}(\varphi) + \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} f_{2n+i}(\varphi) + \\
 & + \sum_{\kappa=0}^{i-1} \frac{1}{q_{2n}(\varphi)} (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) = 0
 \end{aligned}$$

---

<sup>17</sup>siehe hierzu Bemerkung 3.10

<sup>18</sup>vgl. Bemerkung 3.10

Für  $i = 0$  ergibt sich das homogene Problem:

$$f'_{2n}(\varphi) + \frac{p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} f_{2n}(\varphi) = 0 \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow f_{2n}(\varphi) = a \cdot \exp\left(-\int_0^\varphi \frac{p_{2n}(\psi)}{q_{2n}(\psi)} d\psi\right) \text{ mit } f_{2n}(0) = a, a \neq 0 \quad (3.8)$$

$\frac{p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)}$  ist Komposition aus Sinus- und Cosinusfunktionen und deshalb  $2\pi$ -periodisch. Da  $p_{2n}(\varphi) = \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi - \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi$  und  $q_{2n}(\varphi) = \cos^{2n} \varphi + \sin^{2n} \varphi$  (vgl. Satz 3.2), ist  $\frac{p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)}$  ungerade und es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (3.9)$$

Somit sind alle  $f_{2n}(\varphi)$  in (3.8)  $2\pi$ -periodisch.

Für  $i \geq 1$  ergibt sich das inhomogene Problem

$$f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi) f_{2n+i}(\varphi) + b_{2n+i}(\varphi) = 0, \quad (3.10)$$

wobei  $a(\varphi) := \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)}$ ,

$$b_{2n+i}(\varphi) = \sum_{\kappa=0}^{i-1} \frac{1}{q_{2n}(\varphi)} (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1) f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi) f'_{2n+\kappa}(\varphi)).$$

Zunächst ein allgemeiner Satz zu periodischen Lösungen des inhomogenen Problems:

**Satz 3.6** Seien  $a(\varphi)$  und  $b(\varphi)$   $\omega$ -periodisch und

$$\begin{aligned} L_\omega &= \{f \mid f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), f'(\varphi) + a(\varphi)f(\varphi) = 0, f \text{ ist } \omega\text{-periodisch}\}, \\ L_\omega^* &= \{f \mid f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), f'(\varphi) - a(\varphi)f(\varphi) = 0, f \text{ ist } \omega\text{-periodisch}\}, \end{aligned}$$

Dann besitzt das inhomogene Problem zu gegebenen  $b(\varphi)$  genau dann eine  $\omega$ -periodische Lösung  $f$ , wenn gilt:

$$\int_0^\omega \langle b(\sigma), e(\sigma) \rangle d(\sigma) = 0 \quad \forall e \in L_\omega^*. \quad (3.11)$$

**Beweis** Siehe II.3 Satz in [vWVL].

Im Folgenden wird ein Spezialfall dieses Satzes mit  $n = 2$  und  $\omega = 2\pi$  verwendet. Seien  $f_{2n+j} \forall j \in [1, \dots, i-1]$   $2\pi$ -periodisch, so ist  $b_{2n+i}(\varphi)$   $2\pi$ -periodisch. Dies folgt aus der Definition von  $b_{2n+i}(\varphi)$ . Somit kann man folgende Folgerung zu Satz 3.6 formulieren:

**Folgerung 3.7** Seien  $f_{2n+j} \forall j \in [1, \dots, i-1]$   $2\pi$ -periodisch, so hat die inhomogene Differentialgleichung (3.10) genau dann eine  $2\pi$ -periodische Lösung, wenn gilt:

$$\int_0^{2\pi} f_{2n}^{-1}(\sigma) \cdot b_{2n+i}(\sigma) d\sigma = 0,$$

wobei  $f_{2n}^{-1} = \exp\left(\int_0^\varphi \frac{p_{2n}(\psi)}{q_{2n}(\psi)} d\psi\right)$ .

Frommer schreibt auf S.412 in [Fr] mit der Notation dieser Arbeit folgendes: „[...] ist  $f_{2n+k}$  die erste Funktion, die auf Grund der Differentialgleichung  $q_{2n}f'_{2n+k} + (k+1)p_{2n}f_{2n+k} + q_{2n}b_{2n+k} = 0$  nicht periodisch wird, so gibt es, da die Lösungen der verkürzten Differentialgleichung  $q_{2n}f'_{2n+k} + (k+1)p_{2n}f_{2n+k} = 0$  und der Koeffizient  $q_{2n}$  von  $f'_{2n+k}$  nach Voraussetzung periodische, definite Funktionen sind, eine ganz bestimmte Konstante  $c_k$ , so dass die Lösungen der Differentialgleichung  $q_{2n}f'_{2n+k} + (k+1)p_{2n}f_{2n+k} + q_{2n}b_{2n+k} = c_k$  periodisch sind.“

Dies soll nun genauer untersucht werden.

**Satz 3.8** Es gibt eine eindeutig bestimmte formale Potenzreihe  $F(\varphi, r) = \sum_{i \geq 0} r^{i+1} f_{2n+i}(\varphi)$

mit stetig differenzierbaren  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $f_{2n+i}$ ,  $f_{2n+i}(0) = 1$  und eine eindeutig bestimmte Folge  $c_2, c_3, \dots$  s.d.

$$\det \begin{pmatrix} F_r(\varphi, r) & F_\varphi(\varphi, r) \\ -N(\varphi, r) & Z(\varphi, r) \end{pmatrix} = \sum_{j=2}^{\infty} c_j q_{2n} r^j,$$

wobei  $q_{2n} = \cos^{2n}\varphi + \sin^{2n}\varphi$ .

**Beweis** Berechnet man die Determinante, wie oben ausgeführt, so setzt man die Zeile (3.6)  $= \sum_{i \geq 0} c_{i+1} q_{2n} r^{i+1}$ . Für  $i \geq 0$  erhält man die sukzessive zu lösenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & p_{2n}(\varphi)(i+1)f_{2n+i}(\varphi) + q_{2n}(\varphi)f'_{2n+i}(\varphi) + \\ & + \sum_{\kappa=0}^{i-1} (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) = c_{i+1}q_{2n}, \end{aligned}$$

die jeweils noch durch  $q_{2n}$  geteilt werden können, wodurch sich ergibt:

$$\begin{aligned} & f'_{2n+i}(\varphi) + \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} f_{2n+i}(\varphi) + \\ & + \sum_{\kappa=0}^{i-1} \frac{1}{q_{2n}(\varphi)} (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) = c_{i+1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Gleichung (3.12) entspricht der Gleichung (3.2) in [vW70] und somit wird für den weiteren Beweis dahin verwiesen. Es wurde in [vW70] lediglich vergessen, im Schritt

zu Gleichung (3.2), die rechte Seite ebenfalls durch  $q_{2n} = \cos^{2n}\varphi + \sin^{2n}\varphi$  zu teilen, weshalb auch in Theorem 2 dieser Faktor auf der rechten Seite fehlt.

**Bemerkung 3.9** Frommer hat ebenfalls den Faktor übersehen und der oben zitierte Text müsste bei ihm demnach heißen: „[...] so gibt es [...] eine ganz bestimmte Konstante  $c_k$ , so dass die Lösungen der Differentialgleichung  $q_{2n}f'_{2n+k} + (k+1)p_{2n}f_{2n+k} + q_{2n}b_{2n+k} = q_{2n}c_k$  periodisch sind.“

**Bemerkung 3.10** Frommer schreibt auf S.412 in [Fr], dass den Konstanten  $c_j$  die Bedeutung der Strudelgrößen  $d_j$  wie in Def 2.3 zukäme. Folglich würde laut Frommer ein Wirbel vorliegen, falls alle  $c_j = 0$  sind (vgl. Bem 2.3). Allerdings ist hierfür zunächst notwendig, dass die formale Potenzreihe  $F(\varphi, r)$  für kleine  $r$  konvergiert. Frommer beweist das nicht. Hier ist also noch eine Lücke, die auch in dieser Arbeit nicht geschlossen wird. Im folgenden Lemma kann aber eine Aussage über die Ausgangsdifferentialgleichung getroffen werden, falls ein  $c_\lambda \neq 0$  ist. Man benötigt jedoch zunächst ebenfalls die Konvergenz der  $F$ -Reihe für kleine  $r$ . Doch kann diese Voraussetzung möglicherweise leicht eliminiert werden, indem man bei der Entwicklung von  $F$  nur endlich viele Terme berücksichtigt und ein Restglied einführt. Für  $n = 1$  lassen sich alle Beweislücken bei Frommer schließen.

**Lemma 3.11** Die  $F$ -Reihe sei für kleine  $r$  konvergent. Falls ein  $\lambda$  existiert, so dass  $c_\lambda \neq 0$ , so ist die Ausgangsdifferentialgleichung vom Strudeltyp.

**Beweis** <sup>19</sup>  $c_{\lambda_0}$  mit  $\lambda_0 \geq 2$  sei die erste Konstante der Folge  $c_2, c_3, \dots$ , die nicht verschwindet. Mit  $F(\varphi, r) = \sum_{i=0}^{\lambda_0-1} r^{i+1} f_{2n+i}(\varphi)$  erhält man:

$$\begin{aligned} r' - \tilde{r}' &= \frac{Z(\varphi, r)F_r(\varphi, r) + N(\varphi, r)F_\varphi(\varphi, r)}{N(\varphi, r)F_r(\varphi, r)} \\ &= \frac{1}{NF_r} \left\{ c_{\lambda_0} q_{2n} r^{\lambda_0} + \sum_{i \geq \lambda_0} \left[ \sum_{\kappa=0}^i (p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa+1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi)) \right] r^{i+1} \right\} \\ &= \frac{1}{NF_r} (c_{\lambda_0} q_{2n} r^{\lambda_0} + \mathcal{O}(r^{\lambda_0+1})) \\ &= \frac{c_{\lambda_0}}{f_{2n}} r^{\lambda_0-1} + \mathcal{O}(r^{\lambda_0}) \end{aligned}$$

Nach (3.8) mit  $f_{2n}(0) = 1$  ist  $f_{2n}(\varphi) = \exp\left(-\int_0^\varphi \frac{p_{2n}(\psi)}{q_{2n}(\psi)} d\psi\right)$  und somit  $> 0$ . Da  $c_{\lambda_0} \neq 0$  nach Voraussetzung, ist der Ursprung ( $r = 0$ ) ein Strudel.  $\square$

---

<sup>19</sup>vgl. S.7 in [vW70]

### 3.4 $\pi$ -Periodizität der $2\pi$ -periodischen Lösungen

Im Folgenden sollen die Lösungen der Differentialgleichung  $f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi) + b_{2n+i}(\varphi) = 0$  noch auf  $\pi$ - bzw.  $2\pi$ -Periodizität in Abhängigkeit gerader bzw. ungerader  $i$  untersucht werden (vgl. [Fr] S.413). Vor dem Satz zunächst eine Bemerkung:

**Bemerkung 3.12** a) Aus  $\cos \varphi = -\cos(\varphi + \pi)$  und  $\sin \varphi = -\sin(\varphi + \pi)$  und der Darstellung aus Bemerkung 3.3 folgt für  $i$  gerade:

$$p_{2n+i}(\varphi) = p_{2n+i}(\varphi + \pi) \text{ und } q_{2n+i}(\varphi) = q_{2n+i}(\varphi + \pi) \quad (3.13)$$

b) Für  $i$  ungerade gilt:

$$p_{2n+i}(\varphi) = -p_{2n+i}(\varphi + \pi) \text{ und } q_{2n+i}(\varphi) = -q_{2n+i}(\varphi + \pi) \quad (3.14)$$

**Satz 3.13**  $f_{2n+j}$  sei  $2\pi$ -periodisch für alle geraden  $j < i$ . Ist  $i$  ungerade, so hat die Differentialgleichung  $f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi) + b_{2n+i}(\varphi) = 0$  genau eine  $2\pi$ -periodische Lösung. Falls  $i$  gerade, so ist  $f_{2n+i}$  nicht notwendigerweise  $2\pi$ -periodisch. Besitzt die Differentialgleichung allerdings eine  $2\pi$ -periodische Lösung ist diese sogar  $\pi$ -periodisch.

**Beweis** <sup>20</sup> Der Beweis erfolgt durch Induktion über  $i$ .

$a(\varphi) = \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)}$  ist nach Bemerkung 3.12  $\pi$ -periodisch und ungerade, wie schon in (3.9) ausgenutzt. Somit gilt:

$$\int_0^\pi \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(i+1)p_{2n}(\varphi)}{q_{2n}(\varphi)} d\varphi = 0. \quad (3.15)$$

Induktionsanfang: Sei  $i = 0$ .

Die Lösung  $f_{2n}$  der homogenen Differentialgleichung (siehe (3.8)) ist mit (3.15) nicht nur  $2\pi$ -periodisch, sondern sogar  $\pi$ -periodisch.

Induktionsvoraussetzung: Sei  $f_{2n+j}$  für gerade  $j < i$   $\pi$ -periodisch, d.h.

$$f_{2n+j}(\varphi + \pi) = f_{2n+j}(\varphi) \quad (3.16)$$

und für ungerade  $j < i$   $2\pi$ -periodisch, d.h.

$$f_{2n+j}(\varphi + \pi) = -f_{2n+j}(\varphi). \quad (3.17)$$

Induktionsbeweis:

1. Fall: Sei  $i$  ungerade.

---

<sup>20</sup>vgl. S.7f. in [vW70]

Dann gilt:  $b_{2n+i}(\varphi + \pi) = -b_{2n+i}(\varphi)$ . Dies sieht man, wenn man die einzelnen Summanden von  $b_{2n+i}(\varphi + \pi)$  für gerade und ungerade  $\kappa$  untersucht, wie im Folgenden gezeigt:

Durch Einsetzen von (3.14) und (3.16) erhält man nämlich für gerade  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{p_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)(\kappa + 1)}_{=-p_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=f_{2n+\kappa}(\varphi)} + \underbrace{q_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-q_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f'_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=f'_{2n+\kappa}(\varphi)} \\ & = - \left( p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa + 1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi) \right). \end{aligned}$$

Und mit (3.13) und (3.17) erhält sich für ungerade  $\kappa$ :

$$\begin{aligned} & \underbrace{p_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)(\kappa + 1)}_{=p_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-f_{2n+\kappa}(\varphi)} + \underbrace{q_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=q_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f'_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-f'_{2n+\kappa}(\varphi)} \\ & = - \left( p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa + 1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{2n+i}(\varphi + \pi) + a(\varphi + \pi)f_{2n+i}(\varphi + \pi) + b_{2n+i}(\varphi + \pi) &= 0 \\ f'_{2n+i}(\varphi + \pi) + a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi + \pi) - b_{2n+i}(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$-f'_{2n+i}(\varphi) - a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi) - b_{2n+i}(\varphi) = 0, \quad (3.19)$$

(3.18)-(3.19) ergibt  $f'_{2n+i}(\varphi + \pi) + f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi) [f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi)]$ . Somit löst  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi)$  das homogene Problem. Man erhält

$$\begin{aligned} f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi) &= (f_{2n+i}(\pi) + f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^\varphi a(\psi)d(\psi)\right) \right) \\ f_{2n+i}(\varphi + 2\pi) + f_{2n+i}(\varphi + \pi) &= (f_{2n+i}(\pi) + f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^{\varphi+\pi} a(\psi)d(\psi)\right) \right) \\ &= (f_{2n+i}(\pi) + f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^\varphi a(\psi)d(\psi)\right) \right) \end{aligned}$$

Somit erhält man  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi) = f_{2n+i}(\varphi + 2\pi) + f_{2n+i}(\varphi + \pi)$  und daraus folgt  $f_{2n+i}(\varphi + 2\pi) = f_{2n+i}(\varphi)$ . Nun wird noch gezeigt, dass es für ungerade  $i$  genau eine Lösung mit  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi) = 0$  gibt. Die Differentialgleichung mit Anfangswert  $f_{2n+i}(-\frac{\pi}{2})$  lautet

$$f_{2n+i}(\varphi) = f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \exp\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^\varphi a(\psi)d\psi\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^\varphi \exp\left(-\int_{-\tilde{\varphi}}^\varphi a(\psi)d\psi\right) b(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}$$



Somit erhält man:

$$f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)e^0$$

$$f_{2n+i}\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(\psi)d\psi\right) - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\int_{-\tilde{\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} a(\psi)d\psi\right) b(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}$$

Aus  $f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + f_{2n+i}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  folgt:

$$f_{2n+i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \exp\left(-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(\psi)d\psi\right)\right)^{-1} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\int_{-\tilde{\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} a(\psi)d\psi\right) b(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}$$

$$\stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\int_{-\tilde{\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} a(\psi)d\psi\right) b(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi}$$

und die Lösung ist durch  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) + f_{2n+i}(\varphi) = 0$  eindeutig festgelegt.

2. Fall: Sei  $i$  gerade.

Dann gilt:  $b_{2n+i}(\varphi + \pi) = b_{2n+i}(\varphi)$ . Dies folgt analog zum ungeraden Fall aus der Betrachtung der Summanden von  $b_{2n+i}(\varphi + \pi)$ :

Durch Einsetzen von (3.13) und (3.16) erhält man für gerade  $\kappa$ :

$$\underbrace{p_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=p_{2n+i-\kappa}(\varphi)}(\kappa + 1) \underbrace{f_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=f_{2n+\kappa}(\varphi)} + \underbrace{q_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=q_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f'_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=f'_{2n+\kappa}(\varphi)}$$

$$= p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa + 1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi).$$

Und mit (3.14) und (3.17) erhält sich für ungerade  $\kappa$ :

$$\underbrace{p_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-p_{2n+i-\kappa}(\varphi)}(\kappa + 1) \underbrace{f_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-f_{2n+\kappa}(\varphi)} + \underbrace{q_{2n+i-\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-q_{2n+i-\kappa}(\varphi)} \underbrace{f'_{2n+\kappa}(\varphi + \pi)}_{=-f'_{2n+\kappa}(\varphi)}$$

$$= p_{2n+i-\kappa}(\varphi)(\kappa + 1)f_{2n+\kappa}(\varphi) + q_{2n+i-\kappa}(\varphi)f'_{2n+\kappa}(\varphi).$$

$$f'_{2n+i}(\varphi + \pi) + a(\varphi + \pi)f_{2n+i}(\varphi + \pi) + b_{2n+i}(\varphi + \pi) = 0$$

$$f'_{2n+i}(\varphi + \pi) + a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi + \pi) + b_{2n+i}(\varphi) = 0 \tag{3.20}$$

$$f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi)f_{2n+i}(\varphi) + b_{2n+i}(\varphi) = 0, \tag{3.21}$$

(3.20)-(3.21) ergibt  $f'_{2n+i}(\varphi + \pi) - f'_{2n+i}(\varphi) + a(\varphi) [f_{2n+i}(\varphi + \pi) - f_{2n+i}(\varphi)]$ . Somit löst

$f_{2n+i}(\varphi + \pi) - f_{2n+i}(\varphi)$  das homogene Problem. Man erhält

$$\begin{aligned} f_{2n+i}(\varphi + \pi) - f_{2n+i}(\varphi) &= (f_{2n+i}(\pi) - f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^\varphi a(\psi)d(\psi)\right) \right) \\ f_{2n+i}(\varphi + 2\pi) - f_{2n+i}(\varphi + \pi) &= (f_{2n+i}(\pi) - f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^{\varphi+\pi} a(\psi)d(\psi)\right) \right) \\ &= (f_{2n+i}(\pi) - f_{2n+i}(0)) \left( \exp\left(-\int_0^\varphi a(\psi)d(\psi)\right) \right) \end{aligned}$$

Somit erhält man  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) - f_{2n+i}(\varphi) = f_{2n+i}(\varphi + 2\pi) - f_{2n+i}(\varphi + \pi)$ . Falls  $f_{2n+i}(\varphi) = f_{2n+i}(\varphi + 2\pi)$  folgt  $f_{2n+i}(\varphi + \pi) = f_{2n+i}(\varphi)$ .

Im geraden Fall ist also jede Lösung, die  $2\pi$ -periodisch ist, notwendigerweise auch  $\pi$ -periodisch.  $\square$

**Folgerung 3.14** Bei den  $f_{2n+i}$  mit ungeraden Indizes ist keine Wirbelbedingung enthalten. Nur bei der Bestimmung der  $f_{2n+i}$  mit  $i$  gerade treten besondere Bedingungen für einen Wirbel auf. <sup>21</sup>

---

<sup>21</sup>[Fr] S.413

## Literatur

- [Fr] Frommer, M. (1934): "Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiralförmiger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen, Band 109, S. 395 - 424.*
- [GF] Grauert, H. , Fischer, W. (1973): Differential- und Integralrechnung II. *Springer-Verlag.*
- [KvW] Kerner, H. und von Wahl, W.(2005): Mathematik für Physiker. *Springer-Verlag.*
- [vW06] von Wahl, W. (2006): Strudelgrößen. *Aufzeichnungen vom 14.02.2006. Persönliche Mitteilungen.*
- [vW69] von Wahl, W. (2007): On the differential equation  $yp_x - xp_y = R$  for real analytic functions with unknown  $p$ . *Manuskript 69. <http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/vwpublic.html>.*
- [vW70] von Wahl, W. (2007): Generation of Centres by Adding Higher Order Terms in  $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$ . *Manuskript 70. <http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/vwpublic.html>.*
- [vWVL] von Wahl, W.: Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen. *<http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/ode.pdf>.*

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, noch nicht in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Bayreuth, den 31. Mai 2011

(Bertram Unger)