



**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

Fakultät für Mathematik und Physik
Lehrstuhl Angewandte Mathematik
– Partielle Differentialgleichungen
und mathematische Physik –
Prof. Dr. Wolf von Wahl

Diplomarbeit im Fach Mathematik

**Das Poincarésche Zentrumproblem
Anwendungen ebener autonomer nicht-degenerierter Systeme**

Eingereicht von Birgit Siebe
Bayreuth, im Juli 2003

Danksagung

„Wenn du ein Schiff bauen willst, so trommle nicht (nur) Leute zusammen, um Holz zu beschaffen, Werkzeuge vorzubereiten, Aufgaben zu vergeben und die Arbeit einzuteilen, sondern wecke in ihnen die Sehnsucht nach dem weiten, endlosen Meer.“

Antoine de Saint-Exupéry

Dieses Zitat von Antoine de Saint-Exupéry möchte ich an den Anfang meiner Diplomarbeit stellen, weil es den Umgang Herrn von Wahls mit seinen Studenten treffend beschreibt: für ihn ist Mathematik keine bloße Aneinanderreihung von logischen Aussagen, sondern viel mehr – etwas Faszinierendes und Besonderes. Diese Begeisterung für die Mathematik im allgemeinen und das *Poincarésche Zentrumproblem* im speziellen sprudelt immerzu aus ihm hervor und übertrug sich auf mich. So entschied ich mich für einen - selbstverständlich bescheidenen - Teilaspekt dieses berühmten Problems, das die Mathematiker seit über 100 Jahren beschäftigt und bis heute noch nicht vollständig gelöst ist.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei Herrn von Wahl für seine Unterstützung während meines Studiums und während der Entstehung dieser Arbeit bedanken, ohne die vieles nicht in dieser Form gelungen wäre. Seine Ermutigungen und nicht zuletzt sein netter Humor brachten mich über so manche Durststrecke hinweg. Herr von Wahl ließ mir in allem viel Freiheit: ich konnte meinen Ideen nachgehen, auch wenn Herr von Wahl voraussah, dass ich mich übernehmen oder der Versuch fehlschlagen würde. So konnte ich meine eigenen Erfahrungen sammeln, und ich kann sagen, dass ich viel gelernt und eine kleine Idee davon bekommen habe, was es heißt, Mathematik zu betreiben.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern, die mich in meinen Interessen stets gefördert und mich nach allen Kräften während meines Studiums unterstützt haben, und natürlich bei meinem Stiefvater, der es mir ermöglicht hat, die Mathematik noch tiefer kennenzulernen, indem ich parallel zum Lehramtsstudium das Diplom in Mathematik studieren konnte. Das Diplomstudium hat mir eine neue Sichtweise auf die Mathematik eröffnet. Danken möchte ich in diesem Zusammenhang allen Professoren an der Universität Bayreuth, die mir dieses Parallelstudium ermöglicht und mich nach besten Kräften unterstützt haben.

Neben meinen Eltern darf ich natürlich meine lieben Großeltern und meine Schwester Maike nicht vergessen: all diese Menschen waren während meines Studiums immer für mich da und haben mich - jeder auf seine Art - begleitet und unterstützt.

Ganz besonders danke ich Matthias, der mir während der Arbeit an meiner Diplomarbeit immer mit Verständnis begegnet ist und dessen Geduld mehr als einmal auf die Probe gestellt wurde. Seine Unterstützung hat mir geholfen, nicht aufzugeben und die Arbeit in dieser Form fertigzustellen.

Mein Dank gilt auch allen meinen Freunden, die mir immer wieder zugehört und mich aufgemuntert haben, wenn mit meiner Diplomarbeit nicht alles so klappte, wie es sollte, und natürlich allen, die diese Arbeit Korrektur gelesen und mich auf so manchen Fehler hingewiesen haben: meine Schwester, Astrid, Christoph, Gerhard, Jörg, Marianne, Michael, Robert und Wolfgang.

Bayreuth im Juli 2003

Birgit Siebe

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
1 Einleitung	1
1.1 Historische und systematische Einordnung des Problems	1
1.2 Der kleine Beitrag dieser Arbeit zum POINCARÉschen Zentrumproblem	6
2 Der nicht-degenerierte Fall	7
2.1 Die Stabilität der Gleichgewichtslösung	7
2.1.1 Das Ausgangssystem: Voraussetzungen und Definitionen	7
2.1.2 Eine notwendige Bedingung für eine Normalform	10
2.1.3 Eine vorbereitende lineare Substitution	12
2.1.4 Betrachtung des linearisierten Differentialgleichungssystems	14
2.1.5 Die beiden Hauptsätze des Artikels	18
2.1.6 Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2	32
2.1.7 Das Resultat: ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung	33
2.1.8 Spezialfall: $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Polynome	35
2.2 Die Existenz eines Zentrums im Ursprung	36
3 Anwendungen ebener autonomer Systeme	40
3.1 Ökologie	40
3.1.1 Das Räuber-Beute-Modell	40
3.1.2 Das Aussehen der Lösungskurven in der Nähe des Gleichgewichtspunktes	44
3.1.3 Verbesserungen am Räuber-Beute-Modell	45
3.2 Plasmaphysik	47
3.3 Elektrodynamik	47
3.4 Chemie	49
3.5 Hydrodynamik	49
3.6 Astrophysik	51
4 Ausblick	52

A Die Realitätsbedingungen	54
A.1 Erläuterungen zum Anhang A	54
A.2 Vorbemerkung	54
A.3 Die Ausgangssituation	54
A.4 Der rein imaginäre Fall	55
A.5 Die Eigenwerte und Eigenvektoren	56
A.6 Konjugiert komplexe Koeffizienten	57
A.7 Die Realitätsbedingungen	58
B Kurzbiographien	60
B.1 Henri Poincaré	61
B.2 David Hilbert	62
B.3 Carl Ludwig Siegel	62

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Historische und systematische Einordnung des Problems

Hinweis: Die Literaturangaben für dieses Kapitel sind - ebenso wie für das Anwendungskapitel (Kapitel 3) - mit Großbuchstaben im Literaturverzeichnis aufgeführt und nicht alphabetisch, sondern in der Reihenfolge sortiert, in der sie im Text verwendet werden. Dadurch wird eine Abgrenzung zu der Literatur speziell zum Thema der Diplomarbeit (die mit Ziffern numeriert wird) erreicht.

Gegenstand dieser Arbeit ist das sogenannte „*POINCARÉsche Zentrumproblem*“, das seine Wurzeln in himmelsmechanischen Fragestellungen hat. Vor mehr als 100 Jahren beschäftigte die Wissenschaft die Frage, wie stabil unser Sonnensystem sei. Der damalige König Oskar II. von Schweden und Norwegen setzte im Jahr 1885 sogar einen Preis auf die Lösung des sogenannten n -Körperproblems aus.¹ Obwohl der damalige Gewinner des Preises, Henri POINCARÉ (1854-1912), das Problem nicht lösen konnte, wurde ihm 1889 der Preis für seine, die künftige Entwicklung der Mechanik stark beeinflussenden Ideen zugesprochen.² Aus heutiger Sicht gesehen waren diese himmelsmechanischen Betrachtungen des ausgehenden 19. Jahrhunderts die Geburtsstunde der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen, zu der neben POINCARÉ auch der russische Mathematiker Alexander M. LJAPUNOFF (1857-1918) beitrug. Seit Johannes KEPLERs (1571-1630) „*Astronomia Nova*“ aus dem Jahr 1609 war bekannt, dass sich die Planeten nicht, wie noch zu Zeiten KOPERNIKUS angenommen, auf Kreisen, sondern auf Ellipsen um die Sonne bewegen. Interessant war nun die Frage, unter welchen Umständen man allgemein auf (stabile) geschlossene Bahnen schließen könne.

Bei einer mathematischen Betrachtung dieses Problems erhält man ausgehend von der Kreisgleichung die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

¹Das n -Körperproblem besteht in der Beschreibung des Gesamtverlaufs aller Lösungen der Bewegungsgleichungen für n Massenpunkte im dreidimensionalen euklidischen Raum für beliebig vorgegebene Anfangswerte, vgl. [19], §5.

²Die endgültige Lösung des n -Körperproblems gelang erst 1991 dem chinesischen Mathematiker Qidong WANG (vgl. [A]).

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)},$$

wobei p und q Störungsterme³ sind, die im Umfeld des Ursprungs Abweichungen von konzentrischen Kreisen hervorrufen. Darüber hinaus ist $x = y = 0$ der einzige Gleichgewichtspunkt in der Nähe des Ursprungs. Aus der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen ergibt sich nun als charakteristisches Verhalten der Lösungen dort einerseits die stabile Möglichkeit ausschließlich geschlossener Bahnen periodischer Lösungen um das Zentrum $(0,0)$ (sogenannter **Wirbelfall**)⁴ und andererseits die instabile Variante von spirilig um den Ursprung verlaufenden Bahnen (sogenannter **Strudelfall**)⁵.

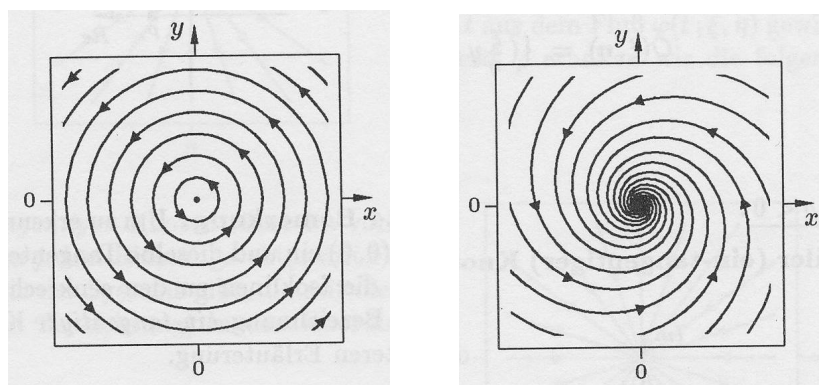


Abbildung 1.1: *Wirbel und Strudel*

Das *POINCARÉsche Zentrumproblem*, das zum erstenmal 1885 in [B] aufgeworfen wird,⁶ besteht nun darin, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, dass der Wirbelfall eintritt, d.h. der Ursprung ein Zentrum ist - oder in himmelsmechanischer Ausdrucksweise: der Planet weder in die Sonne stürzt, noch ins weite All abdriftet. So sehr anwendungsnah und physikalisch dieses Problem anmutet, so wenig trifft es doch tatsächlich die Interessenlage der Mathematiker der Jahrhundertwende. Die vielfältigen mathematischen Erfolge hatten das bisherige Kompaktum Mathematik aufgebläht und ausgefranst. Die Anzahl der mathematischen Teilgebiete hatte sich enorm vermehrt, und die höchst unterschiedlichen Entwicklungsziele der einzelnen Disziplinen traten der Vision von einem stabilen einheitlichen Gedankengebäude entgegen. Die Sorge der Mathematiker um einen inneren Zusammenhang der Mathematik, der Ruf nach der Pflege ihrer inneren Struktur wurde laut. Auch hier spielt nun die Person Henri POINCARÉ eine bedeutende Rolle. Seine Überzeugung, die Schwierigkeiten könnten nur durch

³ p, q sind i.a. Potenzreihen in x und y , die mit quadratischen Gliedern beginnen.

⁴Für eine genaue Definition der Begriffe „Wirbelfall“, „Strudelfall“ und „Zentrumproblem“ vgl. Kapitel 2.1.1.

⁵Die folgenden Bilder wurden [2], S. 552/553 entnommen.

⁶Den Begriff „Zentrum“ definiert POINCARÉ bereits 1881 in [C].

gemeinsames Handeln überwunden werden, ließ ihn 1894 in Zürich den 1. Internationalen Mathematikerkongress einberufen. Die Sitzung endete für die knapp hundert Teilnehmer allerdings in einem zu erwartenden Desaster, da wie bei einem Familienfest tatsächlich jeder von etwas anderem sprach. Ein fruchtbarer Gedankenaustausch konnte somit nicht stattfinden. Die einzige Entscheidung, die zustande kam, war die, den nächsten Kongress besser vorzubereiten, was dann auch geschah. Unter dem Vorsitz von Henri POINCARÉ fand vom 6. bis 12. August 1900 in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongress statt. Das gewichtigste Ereignis dieser Veranstaltung war sowohl aus damaliger wie auch aus heutiger Sicht David HILBERTs (1862-1943) Vortrag „*Mathematische Probleme*“ vom 8. August, den er in den Bereichen „*Geschichte und Bibliographie*“ und „*Didaktik und Methodologie*“ hielt. Der damals 38-jährige Professor der Universität Göttingen sprach vor gut der Hälfte der Kongressteilnehmer von seiner Überzeugung, dass spezielle Probleme die Mathematik im kommenden Jahrhundert inspirieren und formen würden.⁷ Daraufhin verlas HILBERT eine lange Liste dieser Probleme. Mehrere von ihnen konnten durch Wortmeldungen einzelner Anwesender im Auditorium sofort ad acta gelegt werden. Am Ende blieben 23 ungelöste Probleme übrig. Wir wollen unser Augenmerk hier ausschließlich auf das 16. Problem richten und verweisen für die anderen Probleme auf entsprechende Literatur (z.B. [D]). Carmen CHICONE und Tian JINGHUANG zitieren in [E] einen Auszug aus HILBERTs Problembeschreibung, den wir hier kurz wiedergeben möchten:

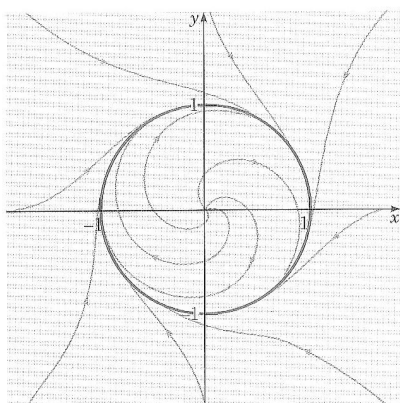
„[...] I wish to bring forward a question which, it seems to me, may be attacked by the [...] method of continuous variations of coefficients, and whose answer is of value for the topology of families of curves defined by differential equations. This is the question as to the maximum number and position of Poincaré’s boundary cycles (cycles limites) for a differential equation of the first order and degree of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

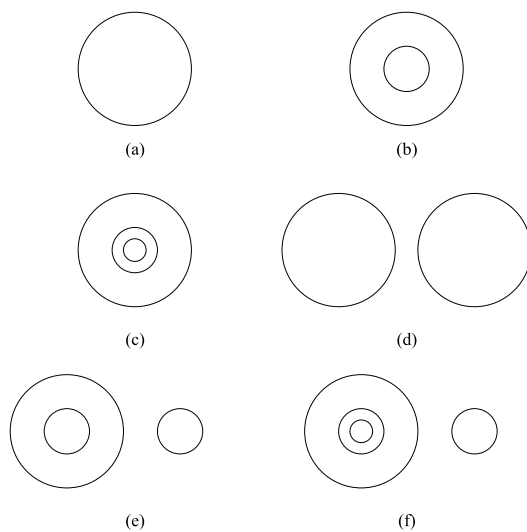
here X and Y are rational integral functions of the nth degree in x and y.“

Dieses Problem - bei dem es sich zudem nur um den zweiten Teil des 16. HILBERTschen Problems handelt (zum ersten Teil später mehr) - stellte sich als eines der schwierigsten unter HILBERTs ursprünglicher Auswahl heraus; tatsächlich ist es bis heute noch nicht einmal für quadratische Systeme gelöst. Lawrence M. PERKO gibt in [F] aus dem Jahr 1984 eine Zusammenfassung der bis dahin bekannten Konstellationen von Grenzyklen für das ebene quadratische System. Allgemein wird eine geschlossene Trajektorie auf der Phasenebene, gegen die sich für $t \rightarrow \infty$ von innen oder außen andere nicht-geschlossene Trajektorien spiralförmig bewegen, als „Grenzyklus“ bezeichnet, vgl. [2], S. 628. Dort findet sich auch das folgende Bild eines Grenzyklus:

⁷Markanterweise endete seine Einleitung mit der hochfliegenden Bekundung: „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.“ [*ignorabimus*“ lat. für „wir werden niemals wissen“]

Abbildung 1.2: *Beispiel für einen Grenzyklus*

Bekannt sind demnach konkrete Beispiele für quadratische Systeme mit den folgenden Konstellationen von Grenzyklen:

Abbildung 1.3: *Bekannte Konfigurationen von Grenzyklen quadratischer Systeme*

Beispiele für die Konfiguration (a) wurden von Max FROMMER [7] und Yeh YEN-CHIEN [G] gegeben. Für (b) und (c) lieferten N. BAUTIN [H] und CHIN [I] Beispiele. Sie zeigten, dass es quadratische Systeme gibt, die in einer kleinen Umgebung des Ursprungs zwei oder drei Grenzyklen besitzen; jedoch konnten sie nichts über die Situation außerhalb dieser kleinen Umgebung sagen. Die Abbildungen (d), (e) und (f) beziehen sich jeweils auf Konstellationen mit zwei kritischen Punkten. Die Beispiele für (d) fanden Yeh YEN-CHIEN [J], Tung CHIN-CHU [K] und PERKO [L]. Tung CHIN-CHU [K] lieferte auch ein Beispiel für (e). Schließlich entdeckte Shi

SONGLING [M] ein Beispiel mit mindestens vier Grenzyklen wie in (f). Tatsächlich sind bis heute nicht mehr Konfigurationen von Grenzyklen bei ebenen quadratischen Systemen bekannt. Carmen CHICONE und Tian JINGHUANG weisen hierbei auf die Schwierigkeit hin, dass HILBERTs 16. Problem unerwarteterweise in das Gebiet der algebraischen Geometrie zu führen scheint, mit dem Mathematiker aus dem Bereich der Differentialgleichungen nicht allzu gut vertraut sind. So veröffentlichten PETROVSKII und LANDIS 1958 eine Arbeit [N], in der sie eine Lösung von HILBERTs 16. Problem vorschlugen. Insbesondere zeigten sie (fälschlicherweise), dass ein ebenes quadratisches Problem höchstens drei Grenzyklen besitzen kann. Ihr Beweis verwendete in hohem Maße Resultate aus der algebraischen Geometrie von komplexen projektiven Räumen. Die Autoren mußten allerdings bald Irrtümer in ihrer Beweisführung zugeben (vgl. [O]), und es gelang ihnen nicht, sämtliche aus dem Weg zu räumen. 1967 schließlich gaben PETROVSKII und LANDIS in [P] zu, dass der Beweis eine nicht zu füllende Lücke aufweist. Beispiel (f) von Shi SONGLING konnte 1980 dann die Ungültigkeit des Beweises noch einmal untermauern. Auch in einem 1985 veröffentlichten Beweis von Yuanshun CHIN (vgl. [Q]) fanden IL'YASHENKO und Shi SONGLING 1988 (vgl. [R], [M]) Fehler.

Das *POINCARÉsche Zentrumproblem* ist aufs engste mit HILBERTs 16. Problem verwandt. Einen möglichen Weg, um Grenzyklen zu erzeugen, beschreibt Dana SCHLOMIUK in [T] und bezieht sich dabei auf [U] und [V]:

One way to produce limit cycles is by perturbing a system which has a continuous family of closed orbits, in such a way as to create limit cycles in the perturbation from some of the closed orbits in the original system. Each system with a center has a continuous family of closed orbits and thus each system could create limit cycles in perturbations.

In [T] wird zudem eine klare Verbindung zwischen der Theorie der polynomialen Vektorfelder und der Theorie der algebraischen Kurven aufgezeigt, und zwar offenbart diese sich gerade im *POINCARÉschen Zentrumproblem*. Tatsächlich suggeriert bereits HILBERTs Formulierung des 16. Problems in zwei Teilen derartige Verbindungen. Der erste Teil des Problems wird heute nämlich ganz klar in das Gebiet der algebraischen Geometrie eingeordnet. Ausgangspunkt ist eine Arbeit von Karl Gustav Axel HARNACK aus dem Jahr 1876, die beweist, dass eine Kurve n -ten Grades in der projektiven Ebene höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ Züge⁸ hat und dass dieses Maximum auch erreicht wird. Das Problem manifestiert sich nun in der Frage, wie diese Züge zueinander liegen. Bisher konnte lediglich bewiesen werden, dass mindestens einer der elf Züge einer Kurve 6. Grades im Inneren eines von einem anderen Zug umschlossenen Gebietes liegt (vgl. [D], S. 257). In [T] ergibt sich nun, dass algebraische Kurven genauso wie höher-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeiten auf ganz natürliche Weise in der Theorie der polynomialen Vektorfelder auftauchen.

⁸Unter einem Zug oder auch Kurvenzug versteht man eine aus mehreren aufeinanderfolgenden Einzelkurven zusammengesetzte Kurve mit Übergangsbedingungen. So ist zum Beispiel ein Polygonzug ein (Kurven-)Zug, der ausschließlich Linien enthält; die dazugehörige Übergangsbedingung lautet Stetigkeit.

1.2 Der kleine Beitrag dieser Arbeit zum POINCARÉschen Zentrumproblem

Die vorliegende Diplomarbeit gliedert sich in zwei große Kapitel: ein Kapitel, das den theoretischen Hintergrund der Arbeit darstellt (2) und ein anwendungsorientiertes Kapitel (Kapitel 3), das sich auf die vorher behandelte Theorie bezieht.

Allgemein betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + p(x, y)}{y^{2n-1} + q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1.1)$$

wobei $p(x, y)$, $q(x, y)$ Potenzreihen sind, die mit Termen der Ordnung $\geq 2n$ beginnen.

In **Kapitel 2** leiten wir für den **nicht-degenerierten Fall**⁹, also den Fall, dass in (1.1) $n = 1$ ist, ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung eines Differentialgleichungssystems der Art (1.1) her, das auf den Überlegungen von C. L. SIEGEL in seinem Buch „*Vorlesungen über Himmelsmechanik*“ [19], §25 basiert. Im zweiten Teil von Kapitel 2 beweisen wir dann einen Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Zentrums im Ursprung formuliert. Dieser Satz stellt zusammen mit dem Stabilitätskriterium aus Unterkapitel 2.1 das wichtigste Resultat des zweiten Kapitels dar.

Die Beschäftigung mit Differentialgleichungen der Form (1.1) ist, wie in der Einleitung betont, nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch vor allem durch Problemfälle aus den Naturwissenschaften motiviert. Zu deren Illustration liefert **Kapitel 3** signifikante Anwendungen bzw. Problemstellungen aus sechs verschiedenen Teildisziplinen: Elektrodynamik, Ökologie, Plasmaphysik, Chemie, Hydrodynamik und Astrophysik. Sämtliche Beispiele beschränken sich dabei auf höchstens kubische rechte Seiten von (1.1).

Im Ausblick (**Kapitel 4**) haben wir kurz interessante (unseres Wissens nach) ungelöste Fragen bzw. Probleme zusammengestellt, die sich im Rahmen des behandelten Themas aktuell ergeben haben.

Im **Anhang** befinden sich schließlich technische sowie historische Addita. Die Realitätsbedingungen stellen klar, wann die Lösungen von (1.1) in dem Verfahren von C.L. SIEGEL aus Kapitel 2 reell sind (Anhang A). Daran fügt sich ein kurzer Abriss von Biographien der Mathematiker an, deren Werke für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung sind (Anhang B).

⁹Der **degenerierte Fall**, d.h. der Fall, für den in (1.1) $n \geq 2$ gilt, wird z.B. in [3] behandelt.

Kapitel 2

Der nicht-degenerierte Fall

2.1 Die Stabilität der Gleichgewichtslösung

2.1.1 Das Ausgangssystem: Voraussetzungen und Definitionen

Wie in der Einleitung erwähnt, leistet diese Arbeit einen kleinen Beitrag auf dem Weg zur Lösung des „*POINCARÉ'schen Zentrumproblems*“. Wir klären daher zunächst, was darunter zu verstehen ist:

Definition 2.1 (POINCARÉ'sches Zentrumproblem) *Für die Differentialgleichung (1.1) sind diejenigen Potenzreihen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ gesucht, bei denen alle in einer hinreichend kleinen Umgebung des Ursprungs verlaufenden Lösungskurven geschlossen sind (Wirbelfall).*¹

Es geht also darum, diejenigen Potenzreihen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ zu finden, für die alle Lösungskurven, die in einer hinreichend kleinen ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$$

des Ursprungs verlaufen, geschlossen sind.² In diesem Fall ist der Ursprung ein sog. stabiler Gleichgewichtspunkt. Genauer formuliert stellt sich der mathematische Sachverhalt wie folgt dar:

Es sei $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten zunächst etwas allgemeiner ein System von m Differentialgleichungen

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \dots, m). \tag{2.1}$$

Definition 2.2³ *Es sei $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges System von m Differentialgleichungen 1. Ordnung. Existiert ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^0) = 0$, dann bezeichnet man die Lösung $x = x(t) = x^0$*

¹Zur Definition von „Wirbelfall“ vgl. Definition 2.4.

²Bei den gesuchten Lösungskurven handelt es sich also um sog. JORDANKurven.

³Diese Definition ist [18], Kapitel 1 entnommen.

als **Gleichgewichtslösung** oder **Gleichgewichtspunkt**.

Das System (2.1) besitze $x = (x_1, \dots, x_m) = 0$ als Gleichgewichtslösung.⁴ Die Funktionen $f_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) seien von der reellen Variablen t unabhängig und werden in der Umgebung von $x = 0$ als konvergente Potenzreihen der Variablen x_1, \dots, x_m mit reellen Koeffizienten vorausgesetzt. Die $f_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) sind daher in einer Umgebung $U(0) \subset \mathbb{C}$ von 0 holomorph und enthalten kein konstantes Glied, da $x = 0$ Gleichgewichtspunkt ist, also $f(0) = 0$ gelten muss.

Mit $x(t, 0, \xi)$ werde die Lösung von (2.1) zur Anfangsbedingung $x(0, \xi) = \xi$ bezeichnet. Zur Untersuchung der Stabilität von (2.1) in $x = 0$ benötigen wir eine Abbildung S_t in einer genügend kleinen Umgebung U des Ursprungs, die jedem $\xi \in U$ ein $x(t, 0, \xi)$ zuordnet.

Definition 2.3⁵ Eine Abbildung S_t heißt **stabil in 0**, wenn zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $U_\varepsilon(0)$ mit $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $B_\delta(0)$ mit $\delta > 0$ existiert derart, dass

$$S_t = x(t, 0, \xi), \quad \xi \in B_\delta(0), \quad (2.2)$$

in $U_\varepsilon(0)$ bleibt für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $\xi \in B_\delta(0)$.

Dabei handelt es sich um *Stabilität schlechthin*, d.h. der Gleichgewichtspunkt ist sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft stabil. Andere Autoren wie z.B. [VON WAHL] definieren Stabilität nur als *zukünftige Stabilität*.

Für die Untersuchung, wann der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ stabil ist, muss $S_t(\cdot)$ in der Umgebung U von 0 für alle reellen t (also sowohl positive als auch negative) betrachtet werden. Dazu wird (2.1) im folgenden durch eine geeignete Variablensubstitution

$$x_k = \varphi_k(u) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.3)$$

in eine möglichst einfache Form gebracht. Der Nullpunkt muss dabei erhalten bleiben.

Die Lösungskurven, die um den kritischen Punkt verlaufen, lassen sich in zwei verschiedene Typen einteilen: in Wirbel und in Strudel. Diese bisher intuitiv verwendeten Bezeichnungen definieren wir nun genauer:

Definition 2.4 Sind in der in Definition 2.1 betrachteten Umgebung des Ursprungs (die Null sei ausgenommen) alle Lösungskurven von (1.1) geschlossen, so spricht man von einem **Wirbel** oder **Zentrum**; es liegt der **Wirbelfall** in Null vor. Andernfalls erhält man einen **Strudel**; analog spricht man von **Strudelfall**.

⁴Die Beschränkung auf die Gleichgewichtslösung $x = 0$ stellt dabei keine wesentliche Einschränkung dar. Ein Beweis dieser Behauptung findet sich in [23], Kapitel 3 (LJAPUNOV-Stabilität).

⁵Dies ist die Definition von Stabilität, die SIEGEL z.B. in [19] verwendet.

Nach Klärung der für diese Arbeit zentralen Begriffe kommen wir nun zum Inhalt des 2. Kapitels. Es stellt im ersten Teil im wesentlichen eine Ausarbeitung des Kapitels „§25. Das POINCARÉsche Zentrumproblem“ aus dem Buch „Vorlesungen über Himmelsmechanik“ [19] von Carl Ludwig SIEGEL dar. Kleine Ungenauigkeiten in SIEGELs Argumentation führen wir aus. SIEGEL stellt in diesem Kapitel ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung der Gleichgewichtslösung $(x, y) = (0, 0)$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

vor. Die Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ werden dabei als konvergente Potenzreihen mit reellen Koeffizienten vorausgesetzt.

Den Ausführungen in Kapitel 1 stellen wir ein Flussdiagramm voran, das die wesentlichen Schritte auf dem Weg zu den beiden Hauptresultaten des ersten Kapitels, dem Stabilitätskriterium (Satz 2.18) und dem Zentrumssatz (Satz 2.24), schematisch darstellt und die Orientierung in den Überlegungen und Beweisen erleichtern soll. Die genauen Definitionen und Formulierungen der Sätze finden sich in den jeweiligen Unterkapiteln.

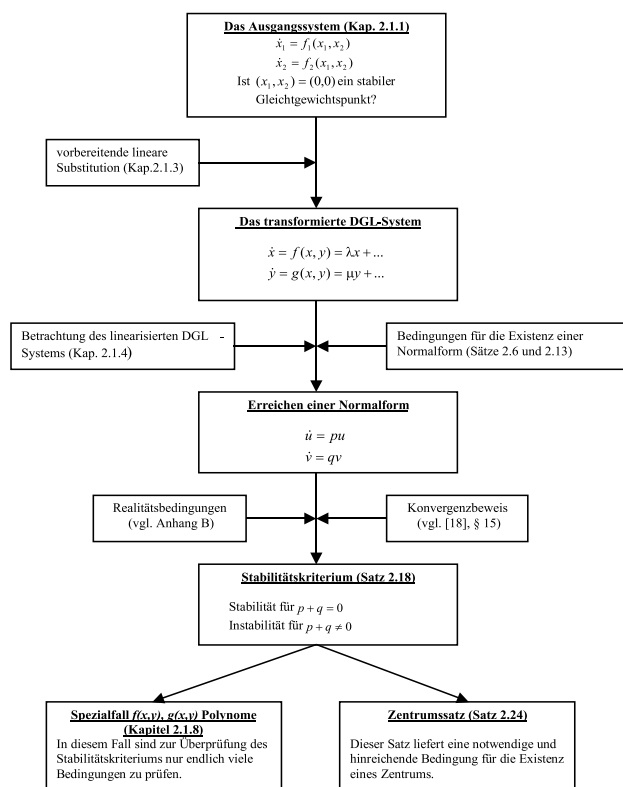


Abbildung 2.1: Flussdiagramm zu Kapitel 2

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form (2.11), das mittels einer linearen Substitution transformiert wird. Dadurch beginnen die Potenzreihen $f(x, y)$, $g(x, y)$ mit den Gliedern λx bzw. μy , wobei λ, μ die Eigenwerte der linearen Anteile von $(f(x, y), g(x, y))^t$ sind.

Im nächsten Schritt wird das System (2.13) in eine möglichst einfach Form („Normalform“) gebracht. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Normalform wird schon in Abschnitt 2.1.2 hergeleitet. Außerdem ergibt sich aus der Betrachtung des linearisierten Systems, dass die Eigenwerte λ, μ rein imaginär und $\neq 0$ sein müssen.

Das erste wesentliche Resultat ist das Stabilitätskriterium (Satz 2.18), zu dessen Beweis die sog. Realitätsbedingungen und ein Konvergenzbeweis notwendig sind. Da zur Stabilitätsprüfung i.a. unendlich viele Bedingungen zu prüfen sind, ist dieses Ergebnis nur von theoretischer Bedeutung. Beschränkt man sich hingegen darauf, dass $f(x, y)$, $g(x, y)$ Polynome sind, wird das Problem theoretisch in endlich vielen Schritten lösbar (Abschnitt 2.1.8).

Im zweiten Teil von Kapitel 2 wird das zweite zentrale Ergebnis, das wir „Zentrumssatz“ genannt haben, formuliert und bewiesen. Der Zentrumssatz enthält eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Zentrums.

2.1.2 Eine notwendige Bedingung für eine Normalform

Das Stabilitätskriterium (Satz 2.18), das das wesentliche Ergebnis von Kapitel 2.1 darstellt, geht von einem Differentialgleichungssystem in einer besonderen Form aus, die wir in dieser Arbeit als *Normalform* bezeichnen werden:

$$\dot{u}_k = p_k u_k \quad (k = 1, \dots, m), \quad (2.5)$$

wobei die $p_k = p_k(u_1, \dots, u_m)$ für $k = 1, \dots, m$ Potenzreihen mit näher zu bestimmenden Eigenschaften sind.

Bevor wir den Satz 2.13, der sich mit dem Erzeugen eben dieser Normalform beschäftigt, formulieren können, leiten wir eine notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen Normalform her, die aus dem System (2.1) entstehen soll.

Die $\varphi_k(u) = \varphi_k(u_1, \dots, u_m)$ seien wieder Potenzreihen, die ebenfalls kein konstantes Glied enthalten. Sonst bliebe 0 als Gleichgewichtspunkt nicht erhalten. Wir rechnen mit formalen Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten und nehmen dabei auf die Konvergenz der Operationen Addition, Multiplikation und Differentiation zunächst keine Rücksicht.⁶ Die Differentiation lässt sich im Ring der formalen Potenzreihen für (2.3) folgendermaßen formalisieren:

⁶Das Rechnen mit formalen Potenzreihen erweist sich an dieser Stelle als zweckmäßig. Definieren wir für die formalen Potenzreihen, die endlich viele Unbestimmte und außerdem komplexe Koeffizienten haben, Gleichheit, Summe und Produkt nach den Regeln, die im konvergenten Fall gelten, so bilden die Potenzreihen einen Ring ohne Nullteiler, den wir hier mit $R(z)$ bezeichnen. Die partiellen Ableitungen nach den Variablen erklären wir gliedweise. Dabei ist die Differentiation eines Polynoms rein algebraisch erklärt. Weiter gelten in $R(z)$ die Kettenregel und die üblichen Ableitungsregeln für Summen und Produkte. Für genauere Ausführungen vgl. [19], §14.

$$\frac{d}{dt} x_k = \dot{x}_k = \sum_{l=1}^m \varphi_{ku_l} \cdot \dot{u}_l \quad (2.6)$$

Wir setzen voraus, dass die Substitution (2.3) umkehrbar ist. Daher hat die Koeffizientenmatrix der linearen Anteile von $\varphi_k(\cdot)$ eine von 0 verschiedene Determinante. Dies ist äquivalent dazu, dass die Funktionaldeterminante $|\varphi_u|$ als Potenzreihe ein nicht verschwindendes konstantes Glied hat (= nicht-degenerierter Fall). φ_u ist somit invertierbar.

Lemma 2.5 (2.1) geht durch die Substitution (2.3) über in

$$\dot{u} = \varphi_u^{-1} f(\varphi(u)). \quad (2.7)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \varphi_{ku_l} \cdot \dot{u}_l &= f_k(x) \quad (k = 1, \dots, m) \\ \Leftrightarrow \varphi_u \dot{u} &= f(\varphi(u)) \\ \Leftrightarrow \dot{u} &= \varphi_u^{-1} f \circ \varphi(u) \end{aligned}$$

□

Umgekehrt führt die inverse Substitution (2.7) in (2.1) über.

Die Substitution (2.3) soll nun so bestimmt werden, dass (2.7) in Normalform dargestellt werden kann.

Satz 2.6 (notwendige Bedingung für die Existenz einer Normalform) *Mittels einer umkehrbaren Substitution (2.3) sei das Ausgangssystem (2.1) bereits in (2.7) überführt worden. Weiter sei ein zweites System*

$$\dot{u}_k = h_k(u) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.8)$$

gegeben, wobei die $h_k(\cdot)$ Potenzreihen in u_1, \dots, u_m ohne konstantes Glied seien.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine umkehrbare Substitution (2.3) existiert, die (2.1) in (2.8) überführt, ist, dass F und H gleiche Elementarteiler⁷ haben. F und H bezeichnen dabei die Matrizen, die den linearen Anteilen von $f(x)$ und $h(u)$ entsprechen.

Beweis:

⁷Zur Definition von „Elementarteilern“ vgl. [6], S. 186

Einerseits ist $\dot{u} = \varphi_u^{-1} f \circ \varphi(u)$, andererseits soll $\dot{u} = h(u)$ sein. Damit erhalten wir folgendes System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die unbekanntenen Reihen φ_k :

$$f(\varphi(u)) = \varphi_u h(u) \quad (2.9)$$

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (2.9) ergibt sich aus dem Vergleich der linearen Glieder. Sind F, H, C die Matrizen, die den linearen Teilen von $f(x), h(u), \varphi(u)$ entsprechen, so folgt:

$$\begin{array}{l} FC = CH \\ \xLeftrightarrow{C \text{ invertierbar}} C^{-1}FC = H \end{array} \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) bedeutet, dass F und H äquivalent, ja sogar ähnlich zueinander sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn F und H gleiche Elementarteiler haben, vgl. [6], Seite 186. \square

2.1.3 Eine vorbereitende lineare Substitution

Bevor wir zu den beiden zentralen Sätzen des Kapitels 2.1 kommen, beschränken wir uns auf den Spezialfall $m = 2$. In diesem Fall stellt sich das Differentialgleichungssystem (2.1) wie folgt dar:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{R}_1(x_1, x_2) \\ \hat{R}_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei die Matrix F die linearen Anteile des Differentialgleichungssystems beinhaltet und die Summanden $\hat{R}_1(x_1, x_2)$ und $\hat{R}_2(x_1, x_2)$ die Glieder der Ordnung ≥ 2 in x_1, x_2 repräsentieren. Für dieses System führen wir nun eine lineare Substitution durch, die sich als zweckmäßig erweisen wird.

Die Eigenwerte von F , die wir mit λ und μ bezeichnen, mögen verschieden sein. Daher ist F diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T aus Eigenvektoren von F , so dass TFT^{-1} Diagonalgestalt hat:

$$D := TFT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Unser Ziel ist es nun, durch eine lineare Transformation das System (2.11) auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + R_1(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y) = \mu y + R_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

zu bringen. $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ stehen für die Terme von der Ordnung ≥ 2 , und $f(x, y)$ und $g(x, y)$ sind diejenigen Funktionen, die durch die Transformation aus $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ hervorgegangen sind.

Als lineare Transformation wählen wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

und formen (2.11) unter der Ausnutzung von $T^{-1}T = I_2$, I_2 die 2×2 -Einheitsmatrix, äquivalent um:

$$\begin{aligned} T^{-1}T \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= FT^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \quad | \cdot T \text{ von links} \\ \stackrel{(2.14)}{\iff} TT^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= TFT^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x + t_{11} \cdot \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + t_{12} \cdot \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \dot{y} &= \mu y + t_{21} \cdot \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + t_{22} \cdot \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{aligned} & \quad (2.15) \end{aligned}$$

wenn

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

ist.

Vergleichen wir jetzt (2.15) mit Gleichung (2.13), so stimmen die beiden Systeme überein, wenn wir $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ jeweils mit den letzten beiden Summanden auf der rechten Seite von (2.15) identifizieren.

2.1.4 Betrachtung des linearisierten Differentialgleichungssystems

Da es sich bei der Untersuchung der Stabilität der Gleichgewichtslösung $(x_1, x_2)^t = (0, 0)^t$ bezüglich der Variablen x_1, x_2 um ein lokales Problem handelt, ist es sinnvoll, zunächst jeweils nur den linearen Anteil von $f(x, y), g(x, y)$, den wir weiterhin mit F bezeichnen, zu berücksichtigen, da uns das Verhalten des linearen Systems Hinweise auf das Verhalten des Gesamtsystems (2.13) geben kann. Das linearisierte Differentialgleichungssystem, das aus (2.13) hervorgeht, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x \\ \dot{y} &= \mu y \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Im folgenden müssen wir in bezug auf die Eigenwerte λ, μ von F drei Fälle unterscheiden:

- (i) λ und μ haben Realteile, die sämtlich $\neq 0$ sind (reeller Fall),
- (ii) λ und μ sind rein imaginär und $\neq 0$ (imaginärer Fall) und
- (iii) ein Eigenwert ist 0.

(i) Der reelle Fall

Bemerkung 2.7 *Der Vollständigkeit halber behandeln wir an dieser Stelle kurz den reellen Fall, d.h. den Fall, für den λ und μ reell sind. Im folgenden zeigt sich dann aber, dass die zugehörigen Lösungen unbeschränkt wachsen und damit für unsere Stabilitätsbetrachtung nicht relevant sind.*

Lemma 2.8 *Im reellen Fall $\lambda = \bar{\lambda} \neq 0, \mu = \bar{\mu} \neq 0$ können wir $f(x, y) = \bar{f}(x, y)$ und $g(x, y) = \bar{g}(x, y)$ voraussetzen.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \overline{f(x, y)} &= \overline{\lambda x + \dots} \\ &\stackrel{\lambda = \bar{\lambda}}{=} \overline{\lambda x + \dots} \\ &\stackrel{\text{Koeffizienten reell } (*)}{=} f(x, y) \end{aligned}$$

Analog zeigt man $g(x, y) = \bar{g}(x, y)$. □

Bemerkung zu (*): Nach Voraussetzung waren die Koeffizienten von $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ reell. Es stellt sich die Frage, ob diese Eigenschaft durch die lineare Substitution erhalten bleibt. Dies ist der Fall, da wegen Gleichung (2.15) die Koeffizienten von $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ durch

die lineare Substitution lediglich mit t_{ij} ($i, j = 1, 2$) und einem Vielfachen von $\frac{1}{\det T}$ (aus T^{-1}) multipliziert werden. T besitzt aber nur rein reelle Einträge. Damit ist der letzte Schritt in obigem Beweis gerechtfertigt. \square

Betrachten wir also das lineare System (2.16). Eine vollständige Lösung von (2.13) ist

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{\lambda t} = ae^{Re(\lambda)t} e^{iIm(\lambda)t} \text{ mit } \lambda = Re(\lambda) + iIm(\lambda) \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= be^{\mu t} = be^{Re(\mu)t} e^{iIm(\mu)t} \text{ mit } \mu = Re(\mu) + iIm(\mu) \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da die Lösungen wegen der reellen Exponenten $Re(\lambda) \cdot t, Re(\mu) \cdot t$ unbeschränkt wachsen, kommen sie als periodische Lösungen für das linearisierte System (2.16) nicht in Frage. Die Lösung des linearen Systems legt die Vermutung nahe, dass auch das nicht-lineare System (2.13) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Null keine periodischen Lösungen besitzen kann. Genauer gilt:

Satz 2.9 (Fehlende Periodizität bei reellen Eigenwerten) *Sind die Realteile der Eigenwerte der Matrix der linearen Anteile von (2.1) sämtlich von 0 verschieden, so gibt es für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ im Gebiet $U_\varepsilon(0)$ keine periodischen Lösungen von (2.1).* \square

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [20], S. 193 oder ausführlicher in [18], S. 10 f.

Bemerkung 2.10 *Der Fall, dass ein Eigenwert einen Imaginärteil $\neq 0$ und der andere Eigenwert einen Imaginärteil $= 0$ besitzt, kann nicht eintreten, da im zwei-dimensionalen Fall mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von F sein muss. Das bedeutet, dass entweder $\lambda = a+ib$ und $\mu = \bar{\lambda} = a-ib$ Eigenwerte von F mit $a, b \neq 0$ sind oder λ und μ rein reell sind. In beiden Fällen greift jedenfalls Satz 2.9.*

Da in unserem Fall die Voraussetzungen des Satzes 2.9 erfüllt sind, kann es keine periodischen Lösungen geben. Der reelle Fall wird daher im folgenden nicht mehr betrachtet. Interessant für uns ist hingegen der rein imaginäre Fall:

(ii) Der rein imaginäre Fall $\lambda = \bar{\mu} \neq 0$

Zunächst beweisen wir einen Satz, den wir im Laufe der Arbeit an verschiedenen Stellen benötigen werden:

Satz 2.11 *Im imaginären Fall $\lambda = \bar{\mu}$ kann $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ vorausgesetzt werden.*

Beweis:

Wir leiten jetzt Bedingungen her, unter denen $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{g}(y, x) \\ \stackrel{(2.15)}{\Leftrightarrow} & \begin{aligned} (I) \quad & t_{11} = \overline{t_{21}}, t_{12} = \overline{t_{22}} \quad \text{und} \\ (II) \quad & \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned} \end{aligned}$$

falls T wie oben $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ ist.

Wegen (I) können wir T also in der Form

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.17)$$

schreiben.

Die zu T inverse Matrix T^{-1} ergibt sich damit zu

$$T^{-1} = \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} & -\beta \\ -\bar{\alpha} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Wir formen jetzt Bedingung (II) um. Damit muss

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{T} \end{aligned}$$

gelten. Diese Bedingung ist für die Matrix T aus (2.17) erfüllt, da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{=\bar{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} = T$$

ist.

Wegen $TFT^{-1} = D$ mit einer Diagonalmatrix D besteht T^{-1} aus den Eigenvektoren von F . Mit der Abkürzung $\rho := \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}$ ergeben sich die Eigenvektoren x_λ und x_μ zu den Eigenwerten λ bzw. μ zu

$$x_\lambda = \rho \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_\mu = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Da die Eigenvektoren zu konjugiert komplexen Eigenwerten ebenfalls zueinander konjugiert komplex sein müssen, folgt die Behauptung, da $x_\lambda = \overline{x_\mu}$, wie in der Rechnung gezeigt, äquivalent zu $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ ist. \square

Betrachten wir das zu (2.1) gehörige lineare System (2.16), so erhalten wir folgenden Satz:

Satz 2.12 *Das lineare System (2.16) besitzt nur im Fall rein imaginärer Eigenwerte periodische Lösungen.* \square

Beweis:

Annahme: $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ oder $\operatorname{Re}(\mu) \neq 0$.

O.B.d.A. sei $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ mit $\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mu \in i\mathbb{R}$. Dann findet sich die vollständige Lösung von (2.16) zu

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{\lambda t} = a e^{\lambda_r t} e^{i\lambda_i t} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= b e^{\mu t} \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_r t} = \infty$ ist, ist die Lösung $(x(t), y(t))^T$ nicht beschränkt, kommt also als periodische Lösung nicht in Frage. λ und μ müssen daher im linearen System (2.16) rein imaginär gewählt werden. \square

(iii) Ein Eigenwert ist 0

In diesem Fall ist auch der zweite Eigenwert 0. Mit diesem Problem beschäftigt sich C.L. SIEGEL in [20], Abschnitt 2. Die Beweise sind so umfangreich, dass deren Ausarbeitung den hier gewählten Rahmen sprengen würde.

Die Betrachtung des linearen Systems (2.16) gibt uns Hinweise darauf, dass periodische Lösungen des nicht-linearen Systems (2.13) nur für den Fall konjugierter rein imaginärer Eigenwerte existieren können. Wir setzen daher im folgenden voraus, dass die Eigenwerte λ und μ von F konjugiert-komplex, rein imaginär und $\neq 0$ sind.

2.1.5 Die beiden Hauptsätze des Artikels

Nachdem wir das Ausgangssystem (2.4) mittels einer linearen Substitution in die Gestalt (2.13) überführt haben, bringen wir das so erhaltene System auf Normalform. Dazu gilt Satz 2.13. Bis hierher werden Konvergenzfragen ausgeklammert, und es wird ausschließlich mit formalen Potenzreihen gerechnet. Mittels des Stabilitätskriteriums (Satz 2.18) lässt sich dann prüfen, ob die Gleichgewichtslösung stabil ist. Stabilität liegt vor, wenn die Summe $p + q$ der in der Normalform auftretenden Potenzreihen p, q verschwindet.

Satz 2.13 (Erzeugen einer Normalform) *Das System (2.13) kann durch eine geeignete Substitution der Gestalt*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

auf die Normalform

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pu, \\ \dot{v} &= qv \end{aligned} \quad (2.20)$$

gebracht werden, wenn $\lambda = -\mu$ die beiden rein imaginären Eigenwerte $\neq 0$ von F sind. Dabei sind p, q Potenzreihen in dem Produkt $w = uv$ allein und $\varphi_k(u, v), \psi_k(u, v)$ homogene Polynome in u, v vom Grad k ($k = 2, 3, \dots$). Wenn die Reihen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ für $k > 0$ enthalten, ist die Substitution eindeutig bestimmt.

Beweis:

Im folgenden setzen wir die Normalform (2.20) in (2.19) ein und verifizieren dann mittels eines Koeffizientenvergleichs, dass solche Potenzreihen $p(u, v), q(u, v)$ existieren und eindeutig bestimmt sind.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ \Rightarrow \dot{x} &= \frac{d}{dt} \varphi(u, v) = \varphi_u(u, v) \dot{u} + \varphi_v(u, v) \dot{v} = \varphi_u pu + \varphi_v qv \\ \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \\ \Rightarrow \dot{y} &= \frac{d}{dt} \psi(u, v) = \psi_u(u, v) \dot{u} + \psi_v(u, v) \dot{v} = \psi_u pu + \psi_v qv \end{aligned}$$

Es sind also wegen $g(\varphi, \psi) = \bar{f}(\psi, \varphi)$ (vgl. Satz 2.11) die (2.9) entsprechenden partiellen Differentialgleichungen

$$\varphi_u p u + \varphi_v q v = f(\varphi, \psi) = \lambda \varphi + f_2(\varphi, \psi) + f_3(\varphi, \psi) + \dots \quad (2.21)$$

$$\psi_u p u + \psi_v q v = \bar{f}(\psi, \varphi) = -\lambda \psi + \bar{f}_2(\psi, \varphi) + \bar{f}_3(\psi, \varphi) + \dots \quad (2.22)$$

durch Potenzreihen φ, ψ, p, q der Form (2.19) zu lösen, wobei $f_l(\varphi, \psi)$ homogene Polynome in φ, ψ vom Grad l sind. Für p, q ist der Ansatz

$$p = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} w^r, \quad q = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} w^r \quad (2.23)$$

zu machen. Es werde also $a_{2r+1} = b_{2r+1} = 0$ für $r = 0, 1, 2, \dots$ vorausgesetzt.

Koeffizientenvergleich in (2.21) und (2.22):

Bevor wir einen Koeffizientenvergleich in (2.21) und (2.22) durchführen können, sind einige Vorbetrachtungen notwendig:

Mit

$$\varphi_u = 1 + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} + \dots$$

$$\varphi_v = \varphi_{2v} + \varphi_{3v} + \dots$$

$$\psi_u = \psi_{2u} + \psi_{3u} + \dots$$

$$\psi_v = 1 + \psi_{2v} + \psi_{3v} + \dots$$

hat man

$$\begin{aligned} \varphi_u p u &= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{ku}\right) \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ &= a_0 u + \sum_{r=1}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{ku} \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ \varphi_v q v &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{kv}\right) \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v \\ \psi_u p u &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \psi_{ku}\right) \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ \psi_v q v &= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{kv}\right) \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v \\ &= b_0 v + \sum_{r=1}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{kv} \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v. \end{aligned}$$

φ_{ku} bedeutet dabei die partielle Ableitung von φ_k nach u in der Entwicklung $\varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots$. Mit $\varphi_{kv}, \psi_{ku}, \psi_{kv}$ ($k = 2, 3, \dots$) verhält es sich entsprechend.

Durch Induktion wird jetzt bewiesen, dass in (2.21) und (2.22) auf beiden Seiten die Glieder vom Grad k jeweils zur Übereinstimmung gebracht werden können ($k = 1, 2, \dots$):

- Induktionsanfang: $k = 1$

Setzt man die oben gefundenen Beziehungen in (2.21) und (2.22) ein, so ergibt ein Vergleich der linearen Glieder:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda \\ b_0 &= -\lambda \end{aligned}$$

- Induktionsschritt: $k-1 \rightarrow k$

Induktionsvoraussetzung: In (2.21), (2.22) stimmen auf beiden Seiten die Glieder bis zum Grad $k-1$ ($k \geq 2$) überein. Hierdurch sind bereits $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$), a_κ, b_κ ($\kappa < k-1$) eindeutig festgelegt.

Terme k -ten Grades in (2.21):

$$\begin{aligned} a_{2r}(uv)^r u + \varphi_{ku} \underbrace{a_0}_{=\lambda} (uv)^0 u + \sum_{l=2}^{k-1} \varphi_{lu} a_{k-l} w^{\frac{k-l}{2}} u + \varphi_{kv} \underbrace{b_0}_{=-\lambda} v + \sum_{l=2}^{k-1} \varphi_{lv} b_{k-l} w^{\frac{k-l}{2}} v \\ = \lambda \varphi_k + \sum_{l=2}^k \{f_l(\varphi, \psi)\}_k \quad \text{mit} \quad r = \frac{k-1}{2} \end{aligned}$$

Für gerades k ist $2r$ wegen $r = \frac{k-1}{2}$ ungerade. Nach Voraussetzung ist in diesem Fall $a_{2r} = b_{2r} = 0$. Daher genügt es, den Fall „ k ungerade“ zu betrachten.

Mit $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ seien dabei die Anteile k -ten Grades von $f_l(\varphi, \psi)$ aus (2.21) für $l = 1, \dots, k$ bezeichnet. Die anderen Anteile liefern keinen Beitrag. Wir betrachten jetzt die $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ genauer:

Für $l = 2, \dots, k$ ist

$$\begin{aligned} f_l(\varphi, \psi) &= \sum_{i+j=l} \gamma_{ij}(\varphi(u, v))^i (\psi(u, v))^j \\ &= \sum_{i+j=l} \gamma_{ij} (u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots)^i (v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots)^j. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ ($l = 2, \dots, k$) die folgende Beziehung:

$$\{f_l(\varphi, \psi)\}_k = \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d},$$

wobei $i + j = l$ und $\varphi_1 \equiv u$, $\psi_1 \equiv v$ ist und die $\varphi_k(u, v)$, $\psi_k(u, v)$ homogene Polynome in den Veränderlichen u, v vom Grad k sind.

Summieren wir über alle Glieder k -ten Grades in $f_2(\varphi, \psi), \dots, f_k(\varphi, \psi)$, ergibt sich

$$\sum_{l=2}^k \{f_l(\varphi, \psi)\}_k = \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d},$$

wobei die Bezeichnungsweise von oben weiter gültig sein möge.

Insgesamt können wir diese gefundene Beziehung nun in (2.21) einsetzen und erhalten damit:

$$\lambda(\varphi_{ku}u - \varphi_{kv}v - \varphi_k) + a_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}u = P_k, \quad (2.24)$$

worin

$$\begin{aligned} P_k := & - \sum_{l=2}^{k-1} [\varphi_{lu}a_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}u + \varphi_{lv}b_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}v] + \\ & + \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ist.

Terme k -ten Grades in (2.22):

Analog zu den Termen k -ten Grades in (2.22) erhält man hier

$$\lambda(\psi_{ku}u - \psi_{kv}v + \psi_k) + b_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}v = Q_k, \quad (2.26)$$

worin

$$\begin{aligned} Q_k := & - \sum_{l=2}^{k-1} [\psi_{lu}a_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}u + \psi_{lv}b_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}v] + \\ & + \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \delta_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \psi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \varphi_{c_d} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ist.

Zusammenfassung:

Mittels des Koeffizientenvergleichs erhält man also die Beziehungen (2.24) und (2.26):

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi_{ku}u - \varphi_{kv}v - \varphi_k) + a_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}u &= P_k \\ \lambda(\psi_{ku}u - \psi_{kv}v + \psi_k) + b_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}v &= Q_k\end{aligned}$$

Dabei sind P_k, Q_k die in (2.25) und (2.27) angegebenen homogenen Polynome in u, v vom Grad k , deren Koeffizienten sich durch die Koeffizienten der schon bekannten $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$) und a_κ, b_κ ($\kappa < k - 1$) ausdrücken lassen.

Bestimmung der a_{k-1}, b_{k-1} ($k = 2, 3, \dots$):

Fall 1: k gerade

Nach Voraussetzung ist dann $a_{k-1} = b_{k-1} = 0$.

Fall 2: $k = 2r + 1$ ungerade

Da in φ_k, ψ_k nach Voraussetzung keine Glieder der Form uw^r bzw. w^rv enthalten sind, folgt, dass in (2.24) die a_{k-1} ($k = 2, 3, \dots$) sind demnach eindeutig bestimmt. Analog ergibt sich aus (2.26), dass auch die b_{k-1} eindeutig bestimmt sind.

Bestimmung der φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$):

Die homogenen Polynome φ_k, ψ_k lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \sum_{g+h=k} \alpha_{gh}u^g v^h \\ \psi_k &= \sum_{g+h=k} \beta_{gh}u^g v^h\end{aligned}\tag{2.28}$$

Damit werden die Koeffizienten der entsprechenden Glieder auf den linken Seiten von (2.24), (2.26) gleich

$$\lambda(g - h - 1) \alpha_{gh}\tag{2.29}$$

$$\lambda(g - h + 1) \beta_{gh}\tag{2.30}$$

sein. Da die Reihen φ und ψ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ ($k > 0$) enthalten, gilt $g \neq h + 1$ bzw. $g \neq h - 1$.

Damit sind die φ_k, ψ_k eindeutig bestimmt. \square

Insgesamt ist gezeigt, dass die Gleichungen (2.21), (2.22) durch formale Potenzreihen φ, ψ, p, q erfüllt werden können.

Bemerkung 2.14 *Im Fall der Konvergenz von f, g sind auch φ, ψ konvergent, falls $p + q = 0$ ist.*⁸

Im Satz 2.18 verwenden wir folgende Schreibweise:

Schreibweise 2.15 *Für eine Potenzreihe $h(\xi, \eta) = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu, \mu} \xi^\nu \eta^\mu$ mit komplexen Koeffizienten $a_{\nu, \mu} \in \mathbb{C}$ möge*

$$\bar{h}(\xi, \eta) := \sum_{\nu, \mu} \bar{a}_{\nu, \mu} \xi^\nu \eta^\mu$$

bedeuten.

Zum Beweis der Instabilität in Satz 2.18 benötigen wir zwei Resultate, die wir der Übersicht halber vor den eigentlichen Satz stellen:

Lemma 2.16 (Realitätsbedingungen für \dot{u} und \dot{v}) *Die Polynome $\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)$ bzw. $\tilde{p}(u, v), \tilde{q}(u, v)$ mögen aus $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ bzw. $p(u, v), q(u, v)$ hervorgehen, indem $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ bzw. $p(u, v), q(u, v)$ nach den Gliedern der Ordnung $2n-1$ bzw. $2n-2$ abgebrochen werden. Weiter sei*

$$\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(u, v) \\ \tilde{\psi}(u, v) \end{pmatrix}.$$

(a) *Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J_\Phi(u, v)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R_1(u, v) \\ R_2(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

mit

$$J_\Phi(u, v)^{-1} = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_v(u, v) & -\tilde{\varphi}_v(u, v) \\ -\tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_u(u, v) \end{pmatrix},$$

der (invertierten) Jacobimatrix von $\Phi(u, v)$.

⁸Den Beweis dieser Behauptung findet man in [19], §15.

(b) Weiter erhält man als Realitätsbedingungen im „abgebrochenen Fall“:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}} &= R_2(\bar{v}, \bar{u}) \\ \dot{\tilde{v}} &= R_1(\bar{v}, \bar{u})\end{aligned}\quad (2.32)$$

Beweis:

(a) Wir führen in (2.13) eine konvergente Substitution (d.h. eine Substitution mit konvergenten Potenzreihen) mit den „abgebrochenen Variablentransformationen“

$$\begin{aligned}x &= \tilde{\varphi}(u, v) \\ y &= \tilde{\psi}(u, v)\end{aligned}\quad (2.33)$$

durch und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(u, v) &= \tilde{\varphi}_u(u, v) \cdot \dot{u} + \tilde{\varphi}_v(u, v) \cdot \dot{v} = f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \dot{\tilde{y}}(u, v) &= \tilde{\psi}_u(u, v) \cdot \dot{u} + \tilde{\psi}_v(u, v) \cdot \dot{v} = g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_v(u, v) \\ \tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\psi}_v(u, v) \end{pmatrix}}_{=J_{\Phi}(u, v)} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= J_{\Phi}^{-1}(u, v) \cdot \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R_1(u, v) \\ R_2(u, v) \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.34)$$

$$\text{mit } J_{\Phi}^{-1}(u, v) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_v(u, v) & -\tilde{\varphi}_v(u, v) \\ -\tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_u(u, v) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $J_{\Phi}(u, v)$ von Φ ist invertierbar, da wegen $\tilde{\varphi}(u, v) = u + \dots$ und $\tilde{\psi}(u, v) = v + \dots$ ihre Determinante $J_{\Phi}(u, v) = 1 + O(|\check{u}|^2) \neq 0$ mit $\check{u} = (u, v)^t$ ist.

Daher wird (2.31) zu

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \rho [\tilde{\psi}_v(u, v) \cdot f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) - \tilde{\varphi}_v(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))] \\ \dot{v} &= \rho [-\tilde{\psi}_u(u, v) \cdot f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) + \tilde{\varphi}_u(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))]\end{aligned}\quad (2.35)$$

$$\text{mit } \rho := \rho(u, v) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)}.\quad (2.36)$$

(b) Aus den Realitätsbedingungen (vgl. A.7 im Anhang A)

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u, v) &= \tilde{\psi}(v, u), \\ \tilde{\psi}(u, v) &= \tilde{\varphi}(v, u),\end{aligned}\tag{2.37}$$

die - wie man leicht sieht - auch für $\tilde{\varphi}(u, v)$ und $\tilde{\psi}(u, v)$ gelten, weiß man, dass $\tilde{\psi}(u, v)$ aus $\tilde{\varphi}(u, v)$ hervorgeht, indem man $\tilde{\varphi}(u, v)$ konjugiert und u und v (und damit auch ∂u und ∂v) vertauscht. Daher erhält man als Realitätsbedingungen für die partiellen Ableitungen von $\tilde{\varphi}(u, v)$ und $\tilde{\psi}(u, v)$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_u(u, v) &= \tilde{\psi}_v(v, u), \\ \tilde{\varphi}_v(u, v) &= \tilde{\psi}_u(v, u).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Mit Satz 2.11 folgt dann

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \bar{\rho} [\tilde{\varphi}_u(\bar{v}, \bar{u}) \cdot g(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u})) - \tilde{\psi}_u(\bar{v}, \bar{u}) \cdot f(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u}))] = R_2(\bar{v}, \bar{u}) \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{\rho} [-\tilde{\varphi}_v(\bar{v}, \bar{u}) \cdot g(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u})) + \tilde{\psi}_v(\bar{v}, \bar{u}) \cdot f(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u}))] = R_1(\bar{v}, \bar{u})\end{aligned}$$

$$\text{mit } \bar{\rho} = \frac{1}{\tilde{\psi}_v(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\varphi}_u(\bar{v}, \bar{u}) - \tilde{\psi}_u(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\varphi}_v(\bar{v}, \bar{u})} = \rho(\bar{v}, \bar{u}).$$

□

Lemma 2.17 (Lemma von GRONWALL) Gegeben sei ein Intervall der Form $I = [0, b)$ mit $0 < b \leq \infty$ und zwei Konstanten $\delta \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Genügt dann eine auf I stetige Funktion $y : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralungleichung

$$0 \leq y(t) \leq \delta + \varepsilon \left| \int_0^t y(\sigma) d\sigma \right| \quad \forall t \in I,\tag{2.39}$$

so folgt hieraus die Abschätzung

$$0 \leq y(t) \leq \delta e^{\varepsilon t} \quad \forall t \in I.$$

Beweis:

Vgl. z.B. [1], Beweis von Satz 7.6.2, S. 315.

□

Satz 2.18 (Stabilitätskriterium) Die Gleichgewichtslösung ist dann und nur dann stabil, wenn

$$p + q = \sum_{r=1}^{\infty} (a_{2r} + b_{2r}) w^r = 0 \quad (2.40)$$

ist, also wenn

$$a_{2r} + b_{2r} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}^* \quad (2.41)$$

ist.

Instabilität liegt hingegen vor, wenn $p + q \neq 0$ ist.

(i) Beweis der Instabilität:

(2.41) sei nicht für alle $r \in \mathbb{N}^*$ erfüllt. Daher kann man ein $c \neq 0$ und ein $n > 1$ finden, so dass für die Potenzreihen p, q aus (2.23)

$$p + q = cw^{n-1} + \dots \quad (2.42)$$

ist. Wegen der Realitätsbedingung (vgl. (A.8) im Anhang A)

$$p(uv) = \bar{q}(uv)$$

ist

$$p + q = \bar{q} + q = 2 \operatorname{Re}(q) \in \mathbb{R}$$

und $w = uv = u\bar{u} = |u|^2 \in \mathbb{R}$. Daher muss c reell sein.

Nach [19], S. 177 können wir nun t durch $\frac{2}{c}t$ ersetzen. Damit wird der Vorfaktor c zu 2.

Übergang zu Polynomen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{p}, \tilde{q}$:

Um die Konvergenzuntersuchung zu umgehen, brechen wir die Reihen φ, ψ bzw. p, q wie in Lemma 2.16 nach den Gliedern der Ordnung $2n - 1$ bzw. $2n - 2$ ab, wodurch sie in $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{p}, \tilde{q}$ übergehen.⁹

⁹Hinweis: Im Falle der Instabilität stellt die Untersuchung der Konvergenz der Reihen φ, ψ, p, q noch ein offenes Problem dar.

Die Realitätsbedingungen für den Fall abgebrochener Potenzreihen:

- (a) Der Vollständigkeit halber nennen wir an dieser Stelle noch einmal die Realitätsbedingungen (2.37) (vgl. Lemma Beweis von 2.16 (b)):

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u, v) &= \tilde{\psi}(v, u), \\ \tilde{\psi}(u, v) &= \tilde{\varphi}(v, u).\end{aligned}$$

- (b) Behauptung: Es gilt die folgende Aussage:

Ist

$$v(0) = \bar{u}(0), \tag{2.43}$$

so folgt

$$v(t) = \bar{u}(t)$$

für $t \in [0, T] \subset I_{max}$.¹⁰ Dabei ist I_{max} das maximale Existenzintervall von (2.34).

Beweis:

Wegen (2.34) und (2.32) gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= R_2(\bar{v}, \bar{u}) = R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) \\ \dot{v} &= R_2(u, v) = R_2(t, u(t), v(t))\end{aligned}$$

Dabei ist

$$R_2(u, v) = J_{\mathbb{F}}^{-1}(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)).$$

Nach Voraussetzung ist $g : U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ in einer ε -Umgebung des Ursprungs holomorph. Da außerdem $J_{\mathbb{F}}^{-1}(u, v)$ stetig differenzierbar ist, ergibt sich $R_2(u, v)$ ebenfalls als stetig differenzierbar auf $U_\varepsilon(0)$. Folglich ist für $R_2(u, v)$ die LIPSCHITZ-Bedingung für alle $(u, v), (\bar{v}, \bar{u}) \in U_\varepsilon(0)$ und $t \in [0, T] \subset I_{max}$, I_{max} maximales Existenzintervall von (2.34), mit einer LIPSCHITZ-Konstanten L erfüllt, die von $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ abhängt.

¹⁰Um eine für den Beweis notwendige LIPSCHITZ-Bedingung für $R_2(u(t), v(t))$ zu erhalten, müssen wir uns auf das kompakte Intervall $[0, T]$ beschränken.

Sei $y(t) := |\bar{u}(t) - v(t)|$, wobei $|\cdot|$ die l_1 -Norm (Summennorm) ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 0 \leq y(t) &= \left| \int_0^t [R_2(\sigma, \bar{v}(\sigma), \bar{u}(\sigma)) - R_2(\sigma, u(\sigma), v(\sigma))] d\sigma \right| \\
 &\leq \int_0^t |R_2(\sigma, \bar{v}(\sigma), \bar{u}(\sigma)) - R_2(\sigma, u(\sigma), v(\sigma))| d\sigma \\
 &\leq \int_0^t L \cdot \left| \begin{pmatrix} \bar{v}(\sigma) \\ \bar{u}(\sigma) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(\sigma) \\ v(\sigma) \end{pmatrix} \right| d\sigma \\
 &= L \cdot \int_0^t (|\bar{v}(\sigma) - u(\sigma)| + |\bar{u}(\sigma) - v(\sigma)|) d\sigma \\
 &\stackrel{|\bar{x}|=|x|}{=} 2L \cdot \left(\int_0^t y(\sigma) d\sigma \right) \\
 &\leq L^* \cdot \left| \int_0^t y(\sigma) d\sigma \right|
 \end{aligned}$$

mit $L^* := 2L > 0$.

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von GRONWALL (Lemma 2.17) für $\delta = 0$ und $\varepsilon = L^*$ erfüllt. Es gilt also die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 0 \leq |R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) - R_2(t, u(t), v(t))| &\leq 0 \cdot e^{L^*t}, \quad t \in [0, T] \subset I_{max} \\
 \Leftrightarrow R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) - R_2(t, u(t), v(t)) &= 0, \quad t \in [0, T] \subset I_{max}
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zwangsweise, dass

$$\bar{u}(t) = v(t), \quad t \in [0, T] \subset I_{max}.$$

□

Die „abgebrochene Normalform“:

In diesem Zusammenhang benötigen wir die beiden folgenden Aussagen, die wir anschließend beweisen:

Behauptung:

(a) Durch den Abbruch der Potenzreihen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ und p, q nach den Gliedern der Ordnung $2n - 1$ bzw. $2n - 2$ für ein $n \geq 2$ erhält man als neue Normalform, die wir im folgenden als „abgebrochene Normalform“ bezeichnen werden:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \tilde{p}u + O(|\check{u}|^{2n}) \\
 \dot{v} &= \tilde{q}v + O(|\check{u}|^{2n})
 \end{aligned}
 \quad \text{mit } \check{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

(b) Außerdem gilt

$$\tilde{p} + \tilde{q} = c(uv)^{n-1} = cw^{n-1} \stackrel{(*)}{=} 2w^{n-1} \text{ mit } c \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

(*) Diese Wahl von c ist möglich, vgl. dazu [19], S. 177.

Beweis:

(a) Setzen wir die abgebrochenen Polynome $\tilde{\varphi}(u, v)$, $\tilde{\psi}(u, v)$ in das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_u(u, v) \dot{u} + \tilde{\varphi}_v(u, v) \dot{v} &= f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \tilde{\psi}_u(u, v) \dot{u} + \tilde{\psi}_v(u, v) \dot{v} &= g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Führen wir analog zum Beweis von Satz 2.13 einen Koeffizientenvergleich durch, so erhalten wir (2.44). Setzen wir nämlich in (2.46) die Normalform

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{p} u \\ \dot{v} &= \tilde{q} v \end{aligned}$$

ein, so gibt es für die Anteile vom Grad $\geq 2n$ in $f_k(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))$ auf der linken Seite keine entsprechenden Summanden. Daher muss die Normalform zu (2.44) modifiziert werden.

(b) Dies folgt aus (2.42) und der Definition von \tilde{p}, \tilde{q} . □

Der Ursprung als instabile Gleichgewichtslage

Behauptung:

Sei $c \neq 0$. Dann ist der Ursprung instabile Gleichgewichtslage von

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Beweis:

Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ die zugehörige Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{p}u + O(|\tilde{u}|^{2n}) \\ \dot{v} &= \tilde{q}v + O(|\tilde{v}|^{2n}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

mit $\check{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

O.E. sei wieder $c = 2$. Für eine reelle Lösung von (2.11) ist wegen der Realitätsbedingung (A.9) im Anhang A $v = \bar{u}$ und daher $w = uv = u\bar{u} = |u|^2 \geq 0$. Dann ist wegen $w = |u|^2 \geq 0$ zumindest

$$\dot{w} = 2w^n + O(w^{n+\frac{1}{2}}),$$

denn für $w = uv$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{u}v + u\dot{v} \\ &= (\tilde{p}u + O(|\check{u}|^{2n})v + u(\tilde{q}v + O(|\check{u}|^{2n}))) \\ &\stackrel{w=|u|^2}{=} (\tilde{p} + \tilde{q})w + O(w^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\stackrel{(2.45)}{=} 2w^n + O(w^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Man wähle nun eine positive Zahl r so, dass für $w < r$ Konvergenz der rechten Seite von (2.49) eintritt und (2.49) die Ungleichung

$$\dot{w} - w^n \geq 0 \tag{2.50}$$

erfüllt, wobei $t \geq 0$ und t im Existenzintervall von (2.48) liegt.

Annahme: Der Nullpunkt von (2.47) ist stabil.

Dann muss, da alle verwendeten Transformationen den Nullpunkt invariant lassen, für alle hinreichend kleinen $u_0 := u(0)$, $v_0 := \bar{u}(0)$ der Ausdruck

$$w(t) = |u(t)|^2 < r$$

bleiben, und die Lösung $(u(t), v(t))^t$ insbesondere für alle $t \geq 0$ existieren.

Dies ist jedoch ein Widerspruch: Wegen $w \geq 0$ ist auch $w^n \geq 0$. Für $w < r$ ist $\dot{w} \geq w^n \geq 0$. Damit ist w für $w < r$ eine monoton wachsende Funktion von t .

Behauptung: Für $t = 0$ sei $0 < w(0) =: w_0 < r$. Dann ergibt (2.50), dass

$$w - w_0 \geq w_0^n t \quad (t > 0) \tag{2.51}$$

ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &\geq w^n && \Big| \int_0^t \dots dt \\
 \Rightarrow \int_0^t \dot{w} dt &\geq \int_0^t w^n dt \\
 \Leftrightarrow w(t) - w_0 &\geq w_0^n t && (2.52)
 \end{aligned}$$

□

(2.51) gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$, also auch für $t = \frac{r}{w_0^n} \in \mathbb{R}^+$. Einsetzen dieses speziellen t -Wertes in (2.52) ergibt:

$$\begin{aligned}
 w - w_0 &\geq w_0^n \frac{r}{w_0^n} = r \\
 \Leftrightarrow w &\geq r + \underbrace{w_0}_{>0} > r
 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $w < r$.

Insgesamt liegt somit für $p + q \neq 0$ Instabilität vor.

(ii) Beweis der Stabilität:

Nun sei (2.41) für alle $r \in \mathbb{N}^*$ erfüllt, d.h. es gilt $p = -q$. Damit tritt der Konvergenzbeweis aus [19], §15 inkraft. Dort wird mittels Majorantenkriterium bewiesen, dass für konvergente Potenzreihen f, g unter der Zusatzbedingung $p + q = 0$ die Funktionen φ und ψ ebenfalls konvergente Potenzreihen sind.

Aus $\dot{u} = pu$, $\dot{v} = qv$ und $p + q = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= \dot{u}v + \dot{v}u \\
 &= pu v + qv u = (p + q)w = 0
 \end{aligned}$$

Also ist w zeitlich konstant.

Wegen $p = \sum a_{2r} w^r$ und $q = \sum b_{2r} w^r$ sind p, q dann ebenfalls zeitlich konstant. Als Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = pu$ und $\dot{v} = qv$ erhalten wir jetzt:

$$u = u_0 e^{pt}, \quad v = v_0 e^{qt} \quad (2.53)$$

Aus der Realitätsbedingung (A.9) im Anhang A folgt, dass wir für reelle Lösungen des Systems (2.11) $v = \bar{u}$, also $v_0 = \bar{u}_0$ wählen müssen.

Wegen der Realitätsbedingung (A.8) im Anhang A und (2.41) ist $\bar{q} = -q \in i\mathbb{R}$, also auch $p \in i\mathbb{R}$. p ist also rein imaginär. Jetzt ist wegen $p \in i\mathbb{R}$, also $p = |p|i$,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{pt} \\ &= u_0 e^{i|p|t} \\ &= u_0 (\cos |p|t + i \sin |p|t) \\ &= \underbrace{u_0 \cos |p|t}_{=:r \in \mathbb{R}} + i \underbrace{u_0 \sin |p|t}_{=:s \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Dies entspricht einem Kreis um den Ursprung mit Radius u_0 , der in der Zeit $\frac{2\pi}{|p|}$ einmal durchlaufen wird. Wählt man r, s wie angegeben, so stellt die Gleichung für $u(t)$ in der (r, s) -Ebene konzentrische Kreise dar, die in der Zeit $\frac{2\pi}{|p|}$ gleichförmig durchlaufen werden.

Dies zeigt Stabilität und motiviert den Namen „Zentrumproblem“.

2.1.6 Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2

Wir transformieren die Lösungen (2.53) zunächst zurück auf die Koordinaten x, y .¹¹

Lemma 2.19 *Mittels (2.19) und (2.53) ergeben sich die Koordinaten x und y als konvergente FOURIERsche Reihen in der Veränderlichen $|p|t$.*

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{pt} = u_0 e^{i|p|t} \\ v(t) &= v_0 e^{qt} = v_0 e^{-pt} = v_0 e^{-i|p|t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x = \varphi(u, v) &= u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y = \psi(u, v) &= v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots, \end{aligned}$$

¹¹Die Koordinaten x, y hatten wir nach der linearen Substitution in Abschnitt 2.1.3 aus x_1, x_2 erhalten.

wobei die φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$) homogene Polynome in den u, v vom Grad k sind. Für die Gestalt der φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$) ergab sich im Koeffizientenvergleich (vgl. (2.28)):

$$\begin{aligned}\varphi_k(u, v) &= \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u^g v^h = \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u_0^g e^{i|p|tg} v_0^h e^{-i|p|th} = \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \\ \psi_k(u, v) &= \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u^g v^h = \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u_0^g e^{i|p|tg} v_0^h e^{-i|p|th} = \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t}\end{aligned}$$

für $k > 1$, $|g - h| \neq 1$ nach Voraussetzung.¹² Damit erhalten wir:

$$x(|p|t) = u_0 e^{i|p|t} + \sum_{g+h=2}^{\infty} \alpha_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \quad (2.54)$$

$$y(|p|t) = \bar{u}_0 e^{-i|p|t} + \sum_{g+h=2}^{\infty} \beta_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \quad (2.55)$$

Diese FOURIERreihen für x, y in der Veränderlichen $|p|t$ sind konvergent, da aus dem Konvergenzbeweis wegen $p + q = 0$ folgt, dass φ, ψ ebenfalls konvergent sind und $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ ist. □

Um die Lösung nun in den ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2 aus (2.11) zu erhalten, müssen wir die lineare Substitution (2.14) rückgängig machen, d.h. die Lösungen $x_1(|p|t), x_2(|p|t)$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(|p|t) \\ x_2(|p|t) \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} x(|p|t) \\ y(|p|t) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} & -\beta \\ -\bar{\alpha} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(|p|t) \\ y(|p|t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}x(|p|t) - \beta y(|p|t) \\ -\bar{\alpha}x(|p|t) + \alpha y(|p|t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.1.7 Das Resultat: ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung

In diesem Abschnitt wird das Verfahren in knapper Weise zusammengefasst, ohne im Detail auf die genauen Voraussetzungen einzugehen.

¹²Vgl. dazu Satz 2.13: dort wird vorausgesetzt, dass in $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ für $k > 0$ enthalten sein darf.

Um über die Stabilität der Gleichgewichtslösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + \dots \\ \dot{y} &= g(x, y) = \mu y + \dots \end{aligned} \quad ,$$

das durch eine lineare Substitution aus

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

hervorgegangen ist, in dem Fall zu entscheiden, dass $\lambda = -\mu$ rein imaginär und $\neq 0$ ist, haben wir also folgendes Verfahren gefunden:

1. Berechne die Koeffizienten a_{2r}, b_{2r} ($r = 1, 2, \dots$) der Potenzreihen p, q rekursiv.
2. Überprüfe, ob $c_r = a_{2r} + b_{2r} = 0$ ist für alle $r = 1, 2, \dots$.

Wir haben somit bisher gezeigt, dass es eindeutig bestimmte Potenzreihen φ, ψ, p, q gibt, so dass wir mit geeigneter Festlegung der Zeiteinheit die rechte Seite unseres Systems schreiben können als

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ix + \sum_{g+h>1} \alpha_{gh} x^g y^h \\ g(x, y) &= -iy + \sum_{g+h>1} \beta_{gh} x^g y^h \quad \text{mit } \beta_{gh} = \overline{\alpha_{hg}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Im Koeffizientenvergleich werden die a_k, b_k durch die Koeffizienten der schon bekannten $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$) und a_κ, b_κ ($\kappa < k-1$) ausgedrückt.

Speziell ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich im Beweis zu Satz 2.13 mit der abkürzenden Schreibweise $\alpha_k = \{\alpha_{gh} | g+h=k\}$ für $a_{k-1} = a_{2r}$:

- $k = 3$
 a_2 und b_2 sind Linearkombinationen von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ und $a_0 = \lambda, b_0 = -\lambda$.
 Also: $a_2, b_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2]$
- $k = 5$ ¹³
 a_4 ist Linearkombination von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ und $a_0 = \lambda, b_0 = -\lambda, a_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2], b_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2]$.
 Also: $a_4, b_4 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4]$
- Mittels vollständiger Induktion erhalten wir demnach:
 $a_{k-1} = a_{2r}, b_{k-1} = b_{2r} \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2r}, \beta_{2r}]$

Somit ergibt sich für die c_r :

$$c_r = a_{2r} + b_{2r} \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2r}, \beta_{2r}] := \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq k-1=2r} \quad (2.57)$$

¹³Erinnerung: für gerades k gilt per definitionem $a_{k-1}, b_{k-1} = 0$

2.1.8 Spezialfall: $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Polynome

Speziell werde nun noch angenommen, dass f und g aus (2.56) Polynome eines festen Grades l sind. Damit werden alle c_r Polynome der endlich vielen α_{gh}, β_{gh} ($g + h \leq l$). Zu erwarten ist offensichtlich, dass eine nun endliche Anzahl an Koeffizienten zu einer endlichen Anzahl an zu verifizierenden Bedingungen $c_k = 0, \quad k = 1, \dots, m(l) < \infty$ führt. Tatsächlich ermöglicht uns die Voraussetzung eines endlichen Grades eine iterative Anwendung des HILBERTschen (Ideal-) Basissatzes.

Satz 2.20 (HILBERTscher Basissatz, 1. Variante) *Ist R ein NOETHERscher Ring, so auch der Polynomring $R[X]$.*

Beweis:

vgl. [12], S. 66, Satz 6.6

□

Durch Induktion ergibt sich aus dem HILBERTschen Basissatz, dass für jeden NOETHERschen Ring R auch $R[X_1, \dots, X_n]$ NOETHERsch ist. Dabei gilt folgende Definition:

Definition 2.21 (NOETHERscher Ring) ¹⁴

R heißt NOETHERscher Ring, wenn jedes Ideal von R endlich erzeugt ist.

In unserem Kontext ist $R[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq l}$. (\mathbb{C} ist ein Körper, dadurch Hauptidealring und somit NOETHERsch.)

HILBERT formulierte seinen Satz unter anderem für den NOETHERschen Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$, K ein Körper, in einer scheinbar allgemeineren Fassung (siehe z.B. [22], §115):

Satz 2.22 (HILBERTscher Basissatz, 2. Variante) *In jeder Untermenge C eines Rings R mit Einselement (nicht nur in jedem Ideal) gibt es endlich viele Elemente c_1, \dots, c_m so, dass jedes Element c von C sich in der Gestalt*

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m, \quad \gamma_m \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt.

Dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folge des HILBERTschen Basissatzes, 1.Variante. Denn wenn I das von C erzeugte Ideal ist, so hat zunächst I eine Basis:

$$I = (a_1, \dots, a_s).$$

Jedes Element a_r ($r = 1, \dots, s$) hängt (als Element des von C erzeugten Ideals) von endlich vielen Größen von C ab:

¹⁴Diese Definition ist ebenfalls [12], S. 65 entnommen.

$$a_r = \sum_{k=1}^m \gamma_{rk} c_k.$$

Also hängen alle Elemente von I von den endlich vielen c_k linear ab; das gilt nun insbesondere für die Elemente von C .

Demnach sind nun alle c_r endlich erzeugt, d.h. es gibt ein $m = m(l)$, so dass sich alle c_r in der Form

$$c_r = \sum_{k=1}^m \gamma_{rk} c_k \quad (r = 1, 2, \dots) \quad \text{mit } \gamma_{rk} \in \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq l}$$

schreiben lassen.

Um zu untersuchen, ob die c_r sämtlich verschwinden, was für die Stabilität notwendig und hinreichend ist, haben wir also nur die endlich vielen Gleichungen $c_k = 0$ für $k = 1, \dots, m$ nachzuprüfen. Allerdings ergibt sich aus dem Beweis des HILBERTschen Basissatzes noch keine obere Schranke für m als Funktion von l . Lediglich der quadratische Fall $l = 2$, auch bekannt als DULACsches Problem, konnte dahingehend komplett gelöst werden, dass nicht nur $m(2) = 7$ bestimmt wurde, sondern man auch endlich viele Bedingungen für die Existenz eines Zentrums in den Koeffizienten von p und q explizit angeben kann. Dazu beigetragen haben neben vielen anderen Mathematikern DULAC (1908), KAPTEYN (1911, 1912), FROMMER (1934) und BAUTIN (1952).

2.2 Die Existenz eines Zentrums im Ursprung

Betrachtet werde das zweidimensionale System von Differentialgleichungen (2.11) aus Abschnitt 2.1.3, das - wie dort ausgeführt - bereits durch eine lineare Substitution auf die Form (2.13) gebracht wurde. Zusätzlich sei im Hinblick auf die Anwendung von Satz 2.13 $\lambda = -\mu$, $\lambda, \mu \neq 0$ rein imaginär. Konkret beschäftigen wir uns nun also mit dem folgenden System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + R_1(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) = -\lambda y + R_2(x, y), \end{aligned} \tag{2.58}$$

mit $(x, y) = (0, 0)$ als Gleichgewichtslösung, $f(x, y)$, $g(x, y)$ konvergente Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 0)$, $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ Terme von der Ordnung ≥ 2 .

Definition 2.23 (Konstante der Bewegung) *Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U = U_\varepsilon(0) - \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt Konstante der Bewegung auf U von (2.58), falls $F(x(t), y(t)) = \text{const.}$ für alle Zeiten t und Lösungskurven $(x(t), y(t))^t$ von (2.58) gilt.*

Damit können wir jetzt den zweiten zentralen Satz dieses Kapitels formulieren:

Satz 2.24 (Zentrumssatz) ¹⁵ *Das analytische System (2.58) hat genau dann ein Zentrum im Ursprung, wenn das System in einer Umgebung des Ursprungs eine Konstante der Bewegung $F(x, y)$ besitzt, die den Term xy enthält, holomorph und keine Konstante ist.*

Beweis:¹⁶

Das System (2.58) besitze ein Zentrum im Ursprung, d.h. der Wirbelfall trete ein. Gemäß Satz 2.18 ist dann Bedingung (2.41) erfüllt. Damit tritt der Konvergenzbeweis aus [19], §15 in Kraft, und für $w(t) = u(t) \cdot v(t)$ folgt

$$\dot{w}(t) = 0. \quad (2.59)$$

$w(t)$ ist also zeitlich konstant auf den Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pu, \\ \dot{v} &= qv \end{aligned}$$

und kommt als Kandidat für die gesuchte Konstante der Bewegung in Frage. Wir betrachten nun noch einmal die Substitution (2.19) aus Satz 2.13:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \end{aligned}$$

Die φ_k, ψ_k ($k = 2, \dots$) sind dabei homogene Polynome vom Grad k in den Variablen u, v . Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} =: \phi(u, v).$$

Unter Ausnutzung des Wirbelfalls sind φ und ψ konvergente (komplexe) Potenzreihen und damit beliebig oft (komplex) differenzierbar. Die Substitution ϕ ist also holomorph. Ihre JACOBI-matrix ergibt sich zu

$$J_\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} + \dots & \psi_{2u} + \psi_{3u} + \dots \\ \varphi_{2v} + \varphi_{3v} + \dots & 1 + \psi_{2v} + \psi_{3v} + \dots \end{pmatrix}.$$

Da $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein konstantes Glied enthalten, bleibt der Ursprung als Gleichgewichtspunkt von (2.4) erhalten. Wir erhalten somit

¹⁵Dieser Name wurde von uns gewählt und stellt somit keine allgemein gebräuchliche Bezeichnung dar.

¹⁶Der folgende Beweis greift stark auf Satz 2.18 zurück. Die Bezeichnungen werden hier übernommen, ohne noch einmal definiert zu werden.

$$J_\phi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da demnach die Funktionaldeterminante im Ursprung nicht verschwindet, ist nach dem **lokalen Biholomorphiekriterium** (vgl. [16], S. 223) die inverse Substitution ϕ^{-1} holomorph in einer Umgebung des Ursprungs. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

Wählen wir nun $w(t)$ aus (2.59) als Konstante der Bewegung, so ergibt sich durch Rücktransformation von u, v auf x, y :

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t)) &:= w(t) = w(u(t), v(t)) = w(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))) \\ &= u(x(t), y(t)) \cdot v(x(t), y(t)) = x(t) y(t) + \dots \end{aligned}$$

Wir haben also eine Konstante der Bewegung $F(x, y)$ gefunden, die den Term xy enthält, holomorph und keine Konstante ist.

Für den Fall, dass man bereits über eine derartige Konstante der Bewegung $F(x, y)$ verfügt, die den Term xy enthält, verweisen wir auf [20], Seite 197. Dort wird gezeigt, dass dann Bedingung (2.41) erfüllt ist, was nach Satz 2.18 bedeutet, dass der Wirbelfall eintritt, d.h. das System (2.4) ein Zentrum im Ursprung hat.

□

Es bleibt noch die Frage zu klären, wie wir nun aus den bisherigen Ergebnissen eine *reelle* Konstante der Bewegung erhalten. Dies wollen wir nun zeigen:

Es ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

gemäß (2.14), wobei T eine komplexe 2×2 -Matrix ist,

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(2.17)}{=} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ \overline{t_{11}} & \overline{t_{12}} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $(x_1(t), x_2(t))^t$ die reelle Lösung.

Allgemein gilt für reelle x_1, x_2 :

$$F(x, y) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2} \operatorname{Re} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu + i \sum_{\nu+\mu \geq 2} \operatorname{Im} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu$$

mit $x = t_{11}x_1 + t_{12}x_2, y = t_{21}x_1 + t_{22}x_2$. Also sind $\sum Re\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu, \sum Im\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu$ reelle Konstanten der Bewegung.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= t_{11}t_{21}x_1^2 + (t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21})x_1x_2 + t_{12}t_{22}x_2^2 \\ &\stackrel{(2.17)}{=} |t_{11}|^2x_1^2 + (t_{11}\overline{t_{12}} + t_{12}\overline{t_{11}})x_1x_2 + |t_{22}|^2x_2^2 \end{aligned}$$

Da T nach Voraussetzung invertierbar ist, ist $\det T = t_{11}\overline{t_{12}} - t_{12}\overline{t_{11}} \neq 0$, und mit $t_{11} := a_1 + ia_2, t_{12} := b_1 + ib_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} \det T &= (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) - (b_1 + ib_2)(a_1 - ia_2) \\ &= a_1b_1 - ia_1b_2 + ia_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_1 + ia_2b_1 - ia_1b_2 - a_2b_2 \\ &= -2i(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0 \end{aligned}$$

Aus $\det T \neq 0$ folgt auch $t_{11}, t_{12} \neq 0$, also $|t_{11}|^2 > 0, |t_{22}|^2 > 0$. Damit ist klar, dass die Reihe der Realteile $\sum_{\nu+\mu \geq 2} Re\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu$ die gesuchte reelle Konstante der Bewegung ist. Die reelle quadratische Form $|t_{11}|^2x_1^2 + (t_{11}\overline{t_{12}} + t_{12}\overline{t_{11}})x_1x_2 + |t_{22}|^2x_2^2$ ist also positiv definit, woraus wiederum die Geschlossenheit der Integralkurven sofort zu ersehen ist.

Hinweis:

Dana SCHLOMIUK et al. gaben in ihrer Arbeit „Integrability of plane quadratic vector fields“ bereits eine schwächere Version von Satz (2.24) an; sie verwendeten anstelle der komplexen eine reelle Konstante der Bewegung (vgl. [17], p. 5-7).

Kapitel 3

Anwendungen ebener quadratischer und kubischer autonomer Systeme

Das Studium des in dieser Arbeit betrachteten Differentialgleichungssystems (2.4) hat eine lange Tradition in der mathematischen und physikalischen Forschung. Wir wollen speziell für den Fall, dass die rechte Seite des Systems aus höchstens kubischen Polynomen besteht, einige signifikante Beispiele aus den Naturwissenschaften geben.

Bemerkung 3.1 (a) *In den folgenden Beispielen ist der Gleichgewichtspunkt der jeweiligen Differentialgleichung nicht immer der Ursprung. Man kann allerdings mittels einer geeigneten Transformation erreichen, dass $(0,0)$ zum Gleichgewichtspunkt wird.*¹
(b) *Nicht alle Beispiele führen auf das Zentrumproblem. Es ist jeweils angemerkt, ob dies der Fall ist oder nicht.*

3.1 Ökologie

3.1.1 Das Räuber-Beute-Modell

Stellvertretend für alle anderen Anwendungen dieses Kapitels zeigen wir in diesem Abschnitt anhand des Räuber-Beute-Modells, wie bei einem gegebenen ebenen autonomen System Stabilitätsbetrachtungen konkret durchgeführt werden können.

Betrachtet wird das folgende Problem: Eine Spezies (der Räuber) frisst eine andere Spezies (die Beute), wobei das Opfer von einer anderen Nahrungsquelle lebt. Die Population der Beute und diejenige des Räubers zur Zeit t wird mit $x(t)$ und $y(t)$ bezeichnet. Zusätzlich werden folgende Annahmen gemacht:

¹Vgl. hierzu [23], Kapitel 3 (LJAPUNOV-Stabilität).

1. Bei Abwesenheit des Räubers wächst die Populationsrate der Beute proportional zur gegenwärtigen Population; für $y = 0$ gilt somit $dx/dt = ax$ mit $a > 0$.
2. In Abwesenheit der Beute stirbt der Räuber aus; für $x = 0$ gilt somit $dy/dt = -cy$ mit $c > 0$.
3. Die Anzahl der Begegnungen zwischen Raubtier und Beutetier ist proportional zum Produkt ihrer Populationen. Jedes dieser Zusammentreffen bedingt eine Wachstumszunahme des Räubers, während das Wachstum der Beute eingeschränkt wird. Die Wachstumsrate des Räubers nimmt daher mit dem Term der Form γxy zu, wohingegen die Wachstumsrate der Beute mit dem Term $-\alpha xy$ abnimmt, wobei γ und α positive Konstanten sind.

Diese Voraussetzungen führen demnach auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \dot{y} &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x) \end{aligned} \quad \text{mit } a, c, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+. \quad (3.1)$$

Diese Gleichungen sind als **LOTKA-VOLTERRA-Gleichungen** bekannt. Sie wurden in einer Reihe von Veröffentlichungen durch LOTKA im Jahr 1925 und VOLTERRA im Jahr 1926 entwickelt.

Satz 3.2 (Zentrum bei den LOTKA-VOLTERRA-Gleichungen) *Gegeben seien die LOTKA-VOLTERRA-Gleichungen (3.1). Dann ist der Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$ ein Zentrum von (3.1).*

Beweis:

Die Gleichgewichtspunkte² von (3.1) sind die Lösungen der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Man sieht leicht, dass $(0, 0)$ und $(c/\gamma, a/\alpha)$ Lösungen von (3.2), also Gleichgewichtspunkte sind. Wir untersuchen nun - analog zu Kapitel 2 - die Lösungen des zugehörigen linearen Systems in der Nähe dieser kritischen Punkte.

Der Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$:

Hier ist das zugehörige lineare System gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

²Zur Definition von Gleichgewichtspunkt vgl. Definition 2.2.

Als Eigenwerte von (3.3) erhalten wir $\lambda = a$ und $\mu = -c$ mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$\vec{v}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung von (3.3) zu

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da für $c_1 \neq 0$ die Lösung für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt ist, kann $(0,0)$ kein Zentrum sein. Es handelt sich bei $(0,0)$ um einen sog. Sattelpunkt.³

Definition 3.3 Hat die 2×2 -Matrix A der linearen Anteile von

$$x'(t) = Ax(t) + b(t),$$

wobei $b(t)$ den nicht-linearen Anteil der Differentialgleichung repräsentiert, zwei reelle Eigenwerte λ und μ mit $\lambda < 0 < \mu$, so ist der Gleichgewichtspunkt ein **Sattelpunkt**.

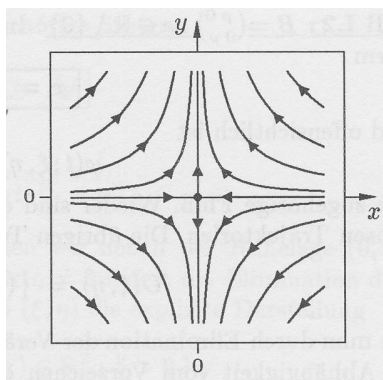


Abbildung 3.1: Beispiel für einen Sattelpunkt

³Eine übersichtliche Klassifikation der Gleichgewichtspunkte von linearen ebenen autonomen Systemen findet sich in [1], Kapitel 5.3.

Der Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$:

Zunächst müssen wir, da der Gleichgewichtspunkt nicht im Ursprung liegt, das System (3.1) mittels $u := x - (c/\gamma)$ und $v := y - (a/\alpha)$ geeignet transformieren. Damit geht (3.1) über in

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{\alpha c}{\gamma}v - \alpha uv \\ \dot{v} &= \frac{\gamma a}{\alpha}u + \gamma uv \end{aligned} \quad (3.4)$$

Als zu (3.4) gehöriges lineares System erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Die Eigenwerte von (3.5) berechnen sich zu $\lambda = i\sqrt{ac}$ und $\mu = -i\sqrt{ac}$. Wir haben also zwei zueinander konjugiert komplexe, rein imaginäre Eigenwerte. Dieses System lässt sich auf die Form

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}} \\ \dot{\tilde{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{ac} & 0 \\ 0 & i\sqrt{ac} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

bringen. Aus Satz 2.12 folgt dann, dass der kritische Punkt $(0,0)$, der durch die beschriebenen Transformationen aus $(c/\gamma, a/\alpha)$ hervorgegangen ist, ein Zentrum von (3.6) und damit auch von (3.5) ist.

Diese Aussage wollen wir nun durch eine konkrete Rechnung verifizieren. Dazu stellen wir das System (3.5) in einer anderen, jedoch äquivalenten Form dar:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}.$$

Diese Differentialgleichung lässt sich leicht durch Trennung der Variablen lösen. Man erhält als Lösungen

$$\frac{\gamma a}{\alpha}u^2 + \frac{\alpha c}{\gamma}v^2 = k^2 \text{ mit } k \in \mathbb{R}_0.$$

Die Trajektorien des linearen Systems (3.5) sind also Ellipsen um $(0,0)$ und der kritische Punkt ein Zentrum.

Betrachten wir nun das ursprüngliche nicht-lineare System (3.1). Es lässt sich umschreiben in

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)} \quad (3.7)$$

und durch Trennung der Variablen lösen. Als Lösungen erhält man

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = K \text{ mit } K \in \mathbb{R}.$$

Wie man in Abbildung 3.2 exemplarisch sieht,⁴ bilden diese Lösungen für festes K geschlossene Kurven um den kritischen Punkt $(c/\gamma, a/\alpha)$. Somit ist der kritische Punkt für das allgemeine nichtlineare System (3.1) ebenfalls ein Zentrum.

Die folgende Abbildung zeigt die Lösungen um den Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$. Dabei haben wir $\alpha = a = \gamma = c = 1$ gewählt. Der Gleichgewichtspunkt wird durch diese Wahl zu $(1, 1)$.

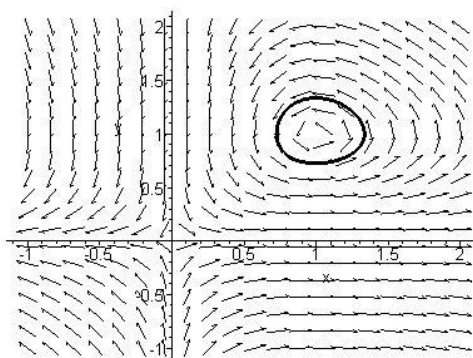


Abbildung 3.2: Plot der Lösungen von (3.7) um den Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$. Die Parameter sind alle auf 1 gesetzt.

3.1.2 Das Aussehen der Lösungskurven beim Räuber-Beute-Modell in der Nähe des Gleichgewichtspunktes

Die periodischen Variationen von Räuber- und Beutepopulationen können genauer berechnet werden, wenn die Abweichungen vom Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$ klein sind und wir deswegen das lineare System verwenden können. Die Lösungen des linearen Systems (3.5) sind von der Form

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{c}{\gamma} k \cos(\sqrt{ac} t + \varphi_0) \\ v(t) &= +\frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin(\sqrt{ac} t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei die Konstanten k und φ_0 aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Somit ergeben sich für das ursprüngliche lineare System (3.3) die Lösungen

⁴Wir verzichten an dieser Stelle auf eine explizite Rechnung und verweisen auf [2], S. 608.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} k \cos(\sqrt{ac} t + \varphi_0) \\ y(t) &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} k \sin(\sqrt{ac} t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Diese Gleichungen gelten für die elliptischen Trajektorien, die in der Nähe des kritischen Punktes $(c/\gamma, a/\alpha)$ liegen. Mit Hilfe von (3.9) lassen sich einige Schlussfolgerungen über die periodischen Variationen der Räuber-Beutepopulationen auf solchen Trajektorien ziehen:

1. Die Größe der Räuber- und Beutepopulationen variiert sinusförmig mit der Periode $2\pi/\sqrt{ac}$. Diese Schwingungsperiode ist unabhängig von den Anfangsbedingungen.
2. Die periodischen Verläufe beider Populationen sind um $\pi/2$ phasenverschoben: die Beutepopulation eilt der Räuberpopulation voraus.
3. Die Amplituden der Schwingungen sind kc/γ für die Beute und $\frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}k$ für den Räuber und hängen daher sowohl von den Anfangsbedingungen als auch von den Parametern des Problems ab.
4. Die Durchschnittspopulationen des Räubers und der Beute für eine ganze Periode sind jeweils durch c/γ und a/α gegeben. Sie entsprechen daher den Gleichgewichtspopulationen.⁵

Periodische Variationen der Räuber- und Beutepopulationen, wie sie sich aufgrund der Gleichung (3.1) ergeben, sind tatsächlich in der Natur beobachtet worden.⁶ Die Beschreibungen basieren auf Aufzeichnungen der Hudson Bay Company in Kanada. Das vermehrte Vorkommen von Luchsen und Schneehasen konnte anhand der in den Jahren 1845-1935 abgegebenen Pelze bestimmt werden und wies ein deutlich periodisches Verhalten mit einer Periode von 9-10 Jahren auf. Den Maxima der jeweiligen Populationen folgten relativ schnell Populationsabnahmen, wobei die Maxima der Luchs- und Schneehasenpopulationen phasenverschoben auftraten. Den Maxima der Schneehasenpopulationen folgten ungefähr nach einem Jahr die Maxima der Luchspopulationen.

3.1.3 Verbesserungen am Räuber-Beute-Modell

Möchte man die zu kritisierende Tatsache eliminieren, dass die Beutepopulation in Abwesenheit des Räubers unbegrenzt wächst, so kann man zum Beispiel Gleichung (3.1) derart verändern,

⁵Die Durchschnittswerte der Beute- und Räuberpopulationen sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{T} \int_A^{A+T} x(t) dt, \\ \bar{y} &= \frac{1}{T} \int_A^{A+T} y(t) dt, \end{aligned}$$

wobei T die Periode der Schwingung und A eine nicht-negative Konstante ist.

⁶Diese Ausführungen sind aus [2], S. 608 f. entnommen. BOYCE und DiPRIMA zitieren dabei ODUM (nach: E.P. Odum. *Fundamentals of Ecology*, 3. Auflage, Philadelphia: Saunders, 1971, S. 191 f.).

dass sie sich für $y = 0$ auf eine logistische Gleichung für die Population x reduziert. Das System stellt sich nun wie folgt dar:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - \alpha xy - \sigma x^2 = x(a - \alpha y - \sigma x), \\ \dot{y} &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x)\end{aligned}$$

Diese Änderung hat interessanterweise zur Folge, dass sich der Gleichgewichtspunkt $(c/\gamma, a/\alpha)$ nach $(c/\gamma, a/\alpha - \sigma c/\alpha\gamma)$ verschiebt und ein asymptotisch stabiler Punkt wird. Er ist je nach den Parameterwerten in den Differentialgleichungen entweder ein Knoten oder ein Strudel.

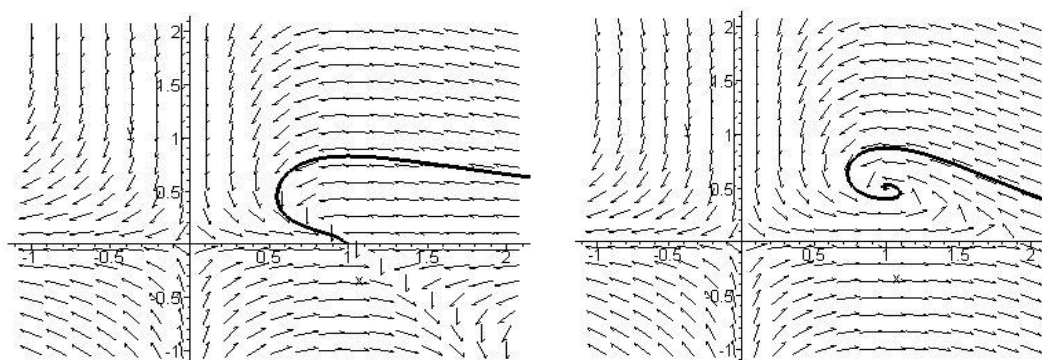


Abbildung 3.3: Für den Knoten wurde $\sigma = 1.0$, für den Strudel $\sigma = 0.5$ gewählt.

Definition 3.4 Hat die 2×2 -Matrix A der linearen Anteile von $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, wobei $b(t)$ den nicht-linearen Anteil der Differentialgleichung repräsentiert, zwei reelle, verschiedene Eigenwerte mit demselben Vorzeichen, so ist der Gleichgewichtspunkt ein **Knotenpunkt**.

Die folgende Abbildung zeigt einen solchen **Knoten**:

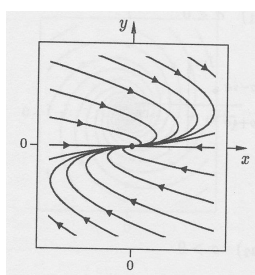


Abbildung 3.4: Beispiel für einen Knoten

3.2 Plasmaphysik

J. Reece ROTH betrachtet in [W] und [X] eine Verallgemeinerung der LOTKA-VOLTERRA-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= C_0 + C_1x + C_2y + C_3xy + C_4x^2 + C_5y^2 \\ \dot{y} &= A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy + A_4x^2 + A_5y^2\end{aligned}\quad (3.10)$$

Diese Gleichungen lassen sich aus einem plasma-physikalischen Kontext ableiten, indem man von den Kontinuitätsgleichungen für die drei beteiligten Komponenten (Ionen, Elektronen und neutrale Teilchen) eines teilweise ionisierten Gases ausgeht und annimmt, dass deren räumliche Verteilung in einer kleinen Umgebung homogen ist. Der physikalische Hintergrund sind dabei niedrig-frequente periodische Fluktuationen in der Lebensdauer von geladenen und ungeladenen Plasmapartikeln. Eine der drei Gleichungen kann dann durch die Annahme der Homogenität zudem eliminiert werden. Dies führt (unter Vernachlässigung von 3-Körper-Problemen) zu zwei Gleichungen ähnlich zu (3.10). Dabei repräsentiert entweder die Variable x die Dichte von neutralen Teilchen und y die Dichte der Elektronen oder andersherum. ROTH konnte in [Y] experimentell nachweisen, dass die periodischen Lösungen von (3.10) mit einer Eigenmode der Plasma-Oszillation identifiziert werden können. Die Frequenz, Wellenform und die Amplitude der Oszillation in der Elektronendichte ist dabei charakteristischerweise allein durch die Koeffizienten C_i , A_i , $i = 0, \dots, 5$ festgelegt.

Das konkrete Aussehen der Trajektorien hängt von der Wahl der Koeffizienten C_i , A_i , $i = 0, \dots, 5$ ab, so dass sich keine allgemeine Aussage für das Auftreten eines Zentrums treffen lässt. Für den Spezialfall, dass $C_0 = C_3 = A_0 = A_1 = 0$ ist, stellt COPPEL in [5] allgemeine Bedingungen für ein Zentrum im Ursprung auf. Die Differentialgleichung (3.10) lässt sich in diesem Fall folgendermaßen darstellen:

$$y' = -\frac{x + ax^2 + (2b + \alpha)xy + cy^2}{y + bx^2 + (2c + \beta)xy + dy^2}$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Zentrum im Ursprung ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned}I) \quad & a + c = b + d = 0, \\ II) \quad & \alpha(a + c) = \beta(b + d) \text{ und } a\alpha^3 - (3b + \alpha)\alpha^2\beta + (3c + \beta)\alpha\beta^2 - d\beta^3 = 0, \\ III) \quad & \alpha + 5(b + d) = \beta + 5(a + c) = 2(a^2 + d^2) + ac + bd = 0.\end{aligned}$$

3.3 Elektrodynamik

Betrachtet man den Stromfluss in einem elektrischen Schwingkreis (Triodengenerator), wobei C für die Kapazität des Kondensators, L für die Induktivität der Spule und R für einen OHMSchen Widerstand (genauer eine Tunnelodiode) steht, der wie im folgenden Bild angeordnet ist,

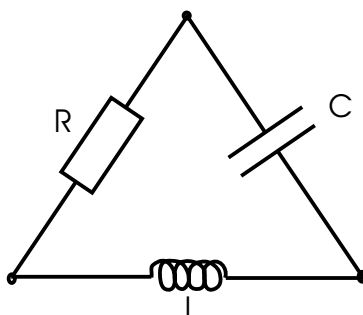


Abbildung 3.5: Schaltbild zum VAN-DER-POL-Schwingkreis

so lässt sich zunächst das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} L \cdot \frac{dI_L}{dt} &= U_C - F(I_R), \\ C \cdot \frac{dU_C}{dt} &= -I_L, \end{aligned}$$

ableiten. Dabei ist $F(I_R)$ die Charakteristik von R , I_L der Strom durch die Spule, I_R der Strom durch den OHMschen Widerstand und U_C die Spannung, die am Kondensator abfällt. Mit den Substitutionen

$$\tilde{t} := \frac{1}{\sqrt{CL}}t, \quad x := I_L, \quad y := \varepsilon U_C, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{C}{L}}$$

und der kubischen Charakteristik einer Tunnel diode $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ erhält man schließlich die VAN-DER-POL-Gleichung

$$x\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

die wir auch als System

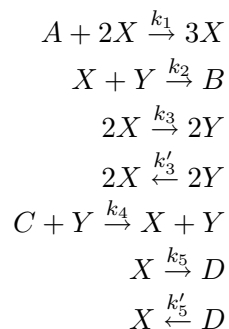
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - \varepsilon(x^2 - 1)y, \end{aligned}$$

schreiben können.

Die VAN-DER-POL-Gleichung spielte in der Entwicklung der Theorie der nicht-linearen Oszillatoren und der qualitativen Untersuchung von Differentialgleichungen eine wichtige Rolle. Das System besitzt um den Ursprung einen eindeutigen Grenzzyklus, dessen Gestalt von ε abhängt.

3.4 Chemie

C. ESCHER untersucht in [Z] Modelle offener, isothermaler und homogener chemischer Reaktionssysteme mit zwei Zwischenstadien. So führen zum Beispiel die Reaktionsgleichungen



auf die Differentialgleichungen (mit den Konzentrationen x , y und den Austauschraten k_i^7 , k'_i)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (k_1[A] - 2k_3)x^2 - k_2xy + 2k'_3y^2 - k_5x + k_4[C]y + k'_5[D], \\
 \dot{y} &= 2k_3x^2 - k_2xy - 2k'_3y^2.
 \end{aligned}$$

Im wesentlichen entspricht dies dem Beispiel von TUNG aus [K] für die Konstellation (e) dreier Grenzyklen aus der Einleitung.

3.5 Hydrodynamik

In der Hydrodynamik interessiert man sich u.a. für die Bewegungsformen von Fluiden. Aus der globalen Bilanzgleichung für die Masse eines Fluids im Inneren eines festen Volumens erhält man eine lokale Gleichung für die Massenerhaltung, die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{3.11}$$

wobei ρ die Massendichte und \mathbf{v} den Geschwindigkeitsvektor der Flüssigkeit beschreibt. Betrachtet man nun ein inkompressibles Fluid, d.h. eines, bei dem die Massendichte im Verlauf der Bewegung in jedem Volumenelement konstant bleibt ($d\rho/dt = 0$), erhält man aus (3.11) die einfache Form (Inkompressibilitätsbedingung):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{3.12}$$

Im Fall einer ebenen Strömung lässt sich (3.12) als

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{3.13}$$

⁷ $k_1[A]$ bezeichnet die Austauschrate von A , $k_4[C]$, $k_5[D]$ analog.

schreiben. Die BLASIUSsche Gleichung⁸

$$\eta''' + \eta\eta'' = 0 \quad (3.14)$$

erhält man aus (3.13), wenn man speziell das Geschwindigkeitsprofil im Inneren einer Grenzschicht untersucht, die sich entlang einer flachen Platte in einer gleichförmigen Strömung der Geschwindigkeit U parallel zu der Platte ausbildet.

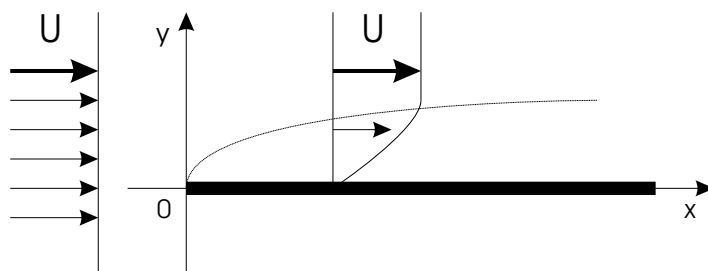


Abbildung 3.6: Entstehung einer Grenzschicht

Die Grenzschicht entsteht entlang einer flachen, halbunendlichen Platte, deren Kante in 0 senkrecht zur Abbildungsebene verläuft, und die sich in einer gleichförmigen Strömung der Geschwindigkeit U befindet. Die Geschwindigkeitsgradienten, die sich an der Wand aufgrund der verschwindenden Geschwindigkeit auf der Oberfläche bilden, diffundieren senkrecht zur Platte und werden gleichzeitig von der Strömung mitgerissen. Man beachte, dass in Abbildung 3.6 die Skala in y -Richtung stark vergrößert ist.

Gleichung (3.14) kann nun durch eine Variablentransformation

$$u = \frac{\eta\eta'}{\eta''}, \quad v = \frac{\eta'^2}{\eta\eta''}, \quad t = \ln |\eta'|$$

in das System

$$\dot{u} = u(1 + u + v), \quad (3.15)$$

$$\dot{v} = v(2 + u - v) \quad (3.16)$$

überführt werden. Die Eigenwerte des linearen Anteils von (3.15) berechnen sich zu 1 und 2. Sie sind damit beide reell und positiv. Somit liegt im Gleichgewichtspunkt ein Knoten vor.

⁸Zum Zweck der Übersichtlichkeit beschränken wir uns hier auf die Angabe, dass $\eta = \eta(x, y, v_x, v_y, U)$ ist.

3.6 Astrophysik

Die EMDEN-FOWLER-Gleichung aus der Astrophysik (vgl. z.B. [AA])

$$(\xi^2 \eta')' + \xi^\lambda \eta^n = 0$$

geht durch die Variablentransformation

$$x = \frac{\xi \eta'}{\eta}, \quad y = \frac{\xi^{c-1} \eta^n}{\eta'}, \quad t = \ln |\xi|$$

über in das System

$$\dot{x} = -x(1 + x + y) \tag{3.17}$$

$$\dot{y} = y(\lambda + 1 + nx + y). \tag{3.18}$$

Die Eigenwerte λ , μ des linearen Anteils von (3.17) berechnen sich zu $\lambda = -1$ und $\mu = -1 - c$. Damit ist λ nicht rein imaginär, und es kann somit kein Zentrum vorliegen.

Kapitel 4

Ausblick

Im Zuge dieser Arbeit traten einige (alte und neue) Probleme zutage, die bisher noch nicht (vollständig) gelöst sind und an denen es sich lohnen könnte zu arbeiten:

- Als neue Herausforderung kann die Übertragung der Aussage des Zentrumssatzes (Satz 2.24) auf den degenerierten Fall angesehen werden. Wie erfolgreich ein derartiges Unterfangen sein kann, ist allerdings nicht abzusehen.
- Es weist bereits SIEGEL in [19] darauf hin, dass im Falle der Instabilität, also für $p+q \neq 0$, die Untersuchung der Konvergenz der Reihen φ , ψ , p , q noch ein offenes Problem darstellt.
- Wir bemerkten bereits in Kapitel 2, dass SIEGEL seine Ausführungen in [20] sehr knapp hält. In diesem Zusammenhang machte zudem SCHMATZ in [18] auf die von SIEGEL betonten Schwierigkeiten aufmerksam, sobald mehrere Paare von rein imaginären Eigenwerten auftreten.
- Am Ende von Unterkapitel 2.1 hatten wir schon erwähnt, dass im zweidimensionalen Fall für Polynome zur Stabilitätsuntersuchung letztendlich nur sieben Bedingungen ($m(l=2) = 7$) zu prüfen sind. Für $l > 2$ ist die Bestimmung einer solchen Schranke für $m(l)$ ein interessantes Problem.
- Und natürlich die Lösung von POINCARÉs Zentrumproblem und HILBERTs 16. Problem ...

..., wobei das Zentrumproblem ohne Bescheidenheit einen gewissen Vorsprung vor HILBERTs 16. Problem genießt: zumindest der quadratische Fall ist für ersteres vollständig gelöst. So zitiert zum Beispiel COPPEL 1966 in [5] hinreichende und notwendige Bedingungen an die Koeffizienten eines quadratischen Systems. COLLINS gibt 2001 in [4] für das spezielle kubische System

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(\alpha x + \beta y + Ax^2 + Bxy + Cy^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(\alpha x + \beta y + Ax^2 + Bxy + Cy^2),\end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, A, B, C \in \mathbb{R}$, die Bedingungen

$$\begin{aligned}A + C &= 0, \\A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 &= 0\end{aligned}$$

an. VON WAHL liefert 2003 in [24] die Bedingungen für ein spezielles System beliebigen Grads. Für HILBERTs 16. Problem kann PERKO in [13] immerhin eine Lösung¹ für quadratische Systeme angeben, deren Trajektorien im Phasenraum für $t \geq 0$ begrenzt sind.

Da der “Vorsprung“ des Zentrumproblems allerdings marginal scheint, bleibt es weiterhin spannend, welches Problem zuerst gelöst werden wird.

¹Allerdings mitunter nicht in Form algebraischer, sondern analytischer Bedingungen an die Koeffizienten.

Anhang A

Die Realitätsbedingungen

A.1 Erläuterungen zum Anhang A

Im Teil A des Anhangs findet sich im wesentlichen ein Teil eines Handouts, das wir zu einem Vortrag zum POINCARÉschen Zentrumproblem in einem Hauptseminar an der Universität Bayreuth¹ geschrieben haben. Es werden die sog. Realitätsbedingungen gemäss [19], §14 hergeleitet, die in Kapitel 2 benötigt werden. Im Vergleich zum Seminar wurde die Bezeichnungsweise an die in dieser Diplomarbeit verwendete angepasst.

A.2 Vorbemerkung

Am Ende dieses Abschnitts über die Realitätsbedingungen steht eine Beziehung der Form

$$\text{Lösung} = \overline{\text{Lösung}},$$

woraus folgt, dass die Lösung reell ist. Auf dem Weg dorthin ergeben sich sukzessive drei Bedingungen, die dafür notwendig sind.

A.3 Die Ausgangssituation

Wie in Kapitel 2 betrachten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

das auch hier die in Kapitel 2 genannten Voraussetzungen erfüllen möge. Die lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

¹Hauptseminar zum POINCARÉschen Zentrumproblem, Wintersemester 2002/03 bei Prof. Wolf VON WAHL

führt uns (A.1) genau wie in Kapitel 2.1.3 über in

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2}. \quad (\text{A.2})$$

A.4 Der rein imaginäre Fall

Gemäß Satz 2.12 beschränken wir uns nun auf den rein imaginären Fall $\mu = \bar{\lambda}$. In Satz 2.13 wird gezeigt, dass es dann eine eindeutig bestimmte Substitution der Gestalt $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ gibt, so dass (A.2) auf die Normalform

$$\dot{u} = pu, \quad \dot{v} = qv$$

gebracht werden kann, wobei p, q Potenzreihen in dem Produkt $u \cdot v$ sind. Dies sei hier vorausgesetzt.

Man erhält dann:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u pu + \varphi_v qv \\ \psi_u pu + \psi_v qv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv.$$

Also mit (A.2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv &= D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\ &\quad - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv = T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \left[T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Gleichung (A.3) besitzt also die Lösung $T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u,v) \\ \psi(u,v) \end{pmatrix}$, $p(u,v)$, $q(u,v)$, die nach dem Koeffizientenvergleich in Satz 2.13 eindeutig bestimmt ist.

A.5 Die Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Spalten von T^{-1} bestehen aus den Eigenvektoren x_λ , x_μ zu den Eigenwerten λ , μ der Matrix F . Wir schreiben also $T^{-1} = (x_\lambda | x_\mu)$.

Berücksichtigt man, dass $\mu = \bar{\lambda}$, $I_2 = I_2$, I_2 die zweireihige Einheitsmatrix, und $\bar{F} = F$, dann erhält man

$$(\mu I_2 - F)x_\mu = 0 \tag{A.5}$$

$$(\mu I_2 - F)\bar{x}_\lambda = 0. \tag{A.6}$$

Aus (A.5) und (A.6) folgt:

$$x_\mu = \bar{x}_\lambda \varrho_\lambda,$$

$$x_\lambda = \bar{x}_\mu \varrho_\mu,$$

wobei ϱ_λ und ϱ_μ skalare Faktoren sind.

Indem man nun $x_\lambda \sqrt{\varrho_\mu}$ für x_λ und $x_\mu \sqrt{\varrho_\lambda}$ für x_μ schreibt, kann man nach [19], S. 85 erreichen, dass $\varrho_\lambda = \varrho_\mu = 1$ wird, also $x_\mu = \bar{x}_\lambda$.

Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
 \overline{TT^{-1}} &= (x_\lambda | x_\mu)^{-1} (\bar{x}_\lambda | \bar{x}_\mu) \\
 &= (x_\lambda | \bar{x}_\lambda)^{-1} (\bar{x}_\lambda | x_\lambda) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J
 \end{aligned}$$

A.6 Konjugiert komplexe Koeffizienten

Wir gehen nun in Gleichung (A.3) zu konjugiert komplexen Koeffizienten über, wobei die Unbestimmten u, v fest bleiben mögen:

$$\begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix}, \quad p \rightsquigarrow \overline{p}, \quad q \rightsquigarrow \overline{q}$$

Damit wird die rechte Seite von (A.3) zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{f_1} \left(\overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ \overline{f_2} \left(\overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \left((T^{-1} J) \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left((T^{-1} J) \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right] \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right] \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ersetzt man also in (A.3)

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} & \text{durch} \quad J \begin{pmatrix} \overline{\varphi} \\ \overline{\psi} \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \overline{\psi} \quad \text{bzw.} \quad \psi = \overline{\varphi}, \\ p & \text{durch} \quad \overline{p}, \\ q & \text{durch} \quad \overline{q}, \end{array}$$

so bleibt (A.3) gültig. Allerdings erhalten wir noch keine eindeutige Lösung, weil die Bedingung, dass $\varphi(u, v) - u, \psi(u, v) - v$ mit quadratischen Gliedern beginnen (vgl. die Voraussetzungen zu Satz 2.13), nicht erfüllt ist. Wir formulieren diese Bedingung jetzt noch einmal in der Schreibweise des zweidimensionalen Problems:

(B) Die Reihen $\overline{\psi}(u, v) - u$ und $\overline{\varphi}(u, v) - v$ mögen mit quadratischen Gliedern beginnen.

Nun gilt explizit:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(u, v) - u &= (v + \overline{\psi_2} + \overline{\psi_3} + \dots) - u \\ \overline{\varphi}(u, v) - v &= (u + \overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_3} + \dots) - v \end{aligned}$$

Um Bedingung **(B)** zu erfüllen, müssen demnach u und v in (A.3) vertauscht werden. Damit ergibt sich offenbar, dass die $J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}(v, u) \\ \overline{\varphi}(v, u) \end{pmatrix}$, $\overline{q}(v, u)$, $\overline{p}(v, u)$ ebenfalls eine Lösung von (A.3) darstellen.

A.7 Die Realitätsbedingungen

Wegen der im Koeffizientenvergleich von [19], §25 bzw. §14 bewiesenen Eindeutigkeit der Substitution folgen nun die drei Bedingungen, die für eine reelle Lösung von (A.3) notwendig sind:

1. Bedingung

Es ist

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \quad | \cdot T \text{ von links} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\psi}(v, u) \\ \overline{\varphi}(v, u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \overline{\psi}(v, u) \\ \psi(u, v) &= \overline{\varphi}(v, u). \end{aligned} \tag{A.7}$$

2. Bedingung

Es gilt

$$p(u, v) = \overline{q}(v, u). \tag{A.8}$$

Speziell für $p(u, v) = p(uv)$ und $q(v, u) = q(uv)$ hat man dann:

$$p(uv) = \overline{q}(uv)$$

3. Bedingung

Wählt man nun noch

$$v = \overline{u}, \tag{A.9}$$

so ist im Falle der Konvergenz $p(u, v) = \bar{q}(\bar{u}, \bar{v})$, also p und q komplex konjugiert und

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) \end{pmatrix},$$

also $T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix}$ zwangsweise reell.

Anhang B

Kurzbiographien

In diesem Abschnitt stellen wir die Kurzbiographien dreier bedeutender Mathematiker vor, deren Arbeiten für unser Thema maßgeblich waren.¹



Abbildung B.1: *Henri Poincaré (links), David Hilbert (Mitte) und Carl Ludwig Siegel (rechts)*

¹Die Bilder stammen aus dem Internet:

Links: <http://www.univ-nancy2.fr/ACERHP/chp/hpcoinvh.html>

Mitte: <http://www2.evansville.edu/ck6/bstud/hilbert.html>

Rechts: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Siegel.html>

B.1 Henri Poincaré (1854-1912)²

Jules Henri POINCARÉ wurde am 29. April 1854 in Nancy geboren und starb am 17. Juli 1912 in Paris. Er stammte aus einer einflussreichen Familie: sein Cousin Raymond war Präsident und Premierminister von Frankreich und sein Vater war Professor für Medizin an der Universität von Nancy.

POINCARÉ wird gemeinhin als der führende Mathematiker seiner Zeit angesehen. Er entdeckte Grundlegendes auf mehreren Gebieten der Mathematik, insbesondere auf den Gebieten der komplexen Funktionentheorie, der partiellen Differentialgleichungen und der Himmelsmechanik.

Er studierte Bergbau, Mathematik und Physik in Paris. Mit dem Jahr 1881 übernahm er eine Lehrtätigkeit an der dortigen Universität. Dort hatte er die Lehrstühle für experimentelle Mechanik, mathematische Physik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Himmelsmechanik und Astronomie inne.

In seiner Dissertation aus dem Jahr 1879 stellt POINCARÉ einen Weg zur Untersuchung der Eigenschaften von Differentialgleichungen dar. Er bestimmte nicht nur die Integrale solcher Gleichungen, sondern er war auch der Erste, der die allgemeinen geometrischen Eigenschaften solcher Funktionen untersuchte. Er erkannte, dass diese Methode nützlich für die Lösung von Problemen wie dem der Stabilität des Sonnensystems ist. Während seiner Beschäftigung mit Differentialgleichungen benutzte POINCARÉ LOBACHEVSKYs nicht-euklidische Geometrie. Später wendete POINCARÉ die Methoden, die er in seiner Doktorarbeit vorgestellt hatte, auf die Himmelsmechanik an. Seine Arbeiten zur Untersuchung der Stabilität des Sonnensystems ermöglichten die Untersuchungen von chaotisch-deterministischen Systemen. Die Methoden, die er dabei verwendete, gaben den Anstoß für die Entwicklung der Topologie.

Auf dem Gebiet der Differentialgleichungen war er ein Pionier in der Anwendung asymptotischer Reihen, einem der mächtigsten Mittel der gegenwärtig angewandten Mathematik. Er verwendete unter anderem asymptotische Reihenentwicklungen, um Lösungen an irregulären, singulären Punkten zu bestimmen.

POINCARÉ skizzierte eine vorbereitende Version der speziellen Relativitätstheorie und erkannte, dass die Lichtgeschwindigkeit die größt mögliche Geschwindigkeit ist und dass die Masse eines Teilchens von seiner Geschwindigkeit abhängt. Er formulierte das Relativitätsprinzip und leitete die LORENTZ-Transformationen her. Sein wichtigstes Theorem, dass jedes isolierte mechanische System nach einer endlichen Zeit (POINCARÉ Recurrence Time) zu seinem Ausgangszustand zurückkehrt, ist der Ausgangspunkt vieler philosophischer und naturwissenschaftlicher Entropieanalysen. Außerdem verstand er, wie radikal sich die Quantentheorie von der klassischen Physik unterscheidet. POINCARÉ interessierte sich sehr für die Philosophie der Naturwissenschaften und die Grundlagen der Mathematik. Er setzte sich für die traditionellen Darstellungsweisen

²Quellen: [2] und [AB]

und gegen den Formalismus ein. In diesem Zusammenhang kritisierte er CANTORs Mengenlehre. Während seines Lebens schrieb er verschiedene Artikel zur philosophischen Interpretation mathematischer Logik.

B.2 David Hilbert (1862-1943)³

David HILBERT (23.01.1862 - 14.02.1943) wurde in Königsberg geboren. Sein Vater und sein Großvater waren Richter. Im Jahre 1885 promovierte er mit einer Dissertation über Invariantentheorie. Nachdem er 1892 zunächst Professor in Königsberg wurde, erhielt er 1895 einen Lehrstuhl in Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 blieb. HILBERTs mathematische Interessen waren weit gestreut, von der Invariantentheorie über die algebraische Zahlentheorie, Grundlagen der Geometrie, Analysis bis hin zur Relativitätstheorie. Seine herausragenden längeren Arbeiten enthalten den 370 Seiten starken Zahlbericht (1895-97), in dem er einen großen Teil der algebraischen Zahlentheorie überarbeitete, und seinen axiomatischen Zugang zur euklidischen Geometrie (1899). Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris stellte HILBERT seine berühmte Liste von 23 Problemen vor, denen sich seiner Meinung nach die Mathematiker verstärkt zuwenden sollten. Einige dieser Probleme sind noch immer ungelöst.

Nach seinen Arbeiten zur Geometrie war sein größter Wunsch, die Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie zu beweisen und dadurch die Mathematik aus der Grundlagenkrise zu führen, die auch Philosophen wie Bertrand RUSSELL stark interessierte. Einige Mathematiker lehnten seine Methode zur Behebung dieser Grundlagenkrise ab, und im Jahre 1931 zerschlug Kurt GÖDEL alle Hoffnungen auf einen Erfolg, indem er zeigte, daß in einer widerspruchsfreien Formalisierung der natürlichen Zahlen ein Satz A existiert, so dass weder A noch Nicht-A in dieser Formalisierung bewiesen werden können. Um 1903 führte HILBERT bei der Untersuchung eines Problems von Integralgleichungen den unendlichdimensionalen euklidischen Raum ein, der heute nach ihm benannt wird.

B.3 Carl Ludwig Siegel (1896-1981)⁴

Carl Ludwig SIEGEL wurde am 31. Dezember 1896 in Berlin geboren. Er studierte dort und in Göttingen Mathematik, Physik und Astronomie und wurde schon mit 25 Jahren als ordentlicher Professor an die Universität Frankfurt berufen. 1938 folgte er einem Ruf an die Georgia Augusta in Göttingen. 1940 nutzte er eine Dienstreise nach Norwegen, um von dort mit dem letzten Schiff vor der deutschen Besetzung des Landes in die USA zu emigrieren, wo er zusammen mit Albert EINSTEIN am Institute for Advanced Study in Princeton lehrte. Als einer der ganz wenigen Mathematiker kehrte SIEGEL nach dem Zweiten Weltkrieg nach Deutschland zurück und lehrte von 1951 bis zu seiner Emeritierung 1959 an seiner alten Wirkungsstätte in

³Quelle: [AC]

⁴Quelle: [AD]

Göttingen. Hier starb Carl Ludwig SIEGEL am 4. April 1981.

Das wissenschaftliche Werk Carl Ludwig SIEGELs ist ungewöhnlich umfangreich und tiefeschürfend. Es umfasst drei klassische Gebiete der Mathematik. Im Mittelpunkt steht die *analytische Zahlentheorie*, in der er die große Tradition des 19. Jahrhunderts fortsetzte und seine in Fachkreisen berühmte Theorie der quadratischen Formen schuf. Bei diesen Forschungen entdeckte er als sein zweites Arbeitsfeld *wichtige Funktionen in mehreren komplexen Variablen* - die heute nach ihm benannten „SIEGELschen Modulfunktionen“. Schließlich beschäftigte sich SIEGEL intensiv mit der *Himmelsmechanik*, die ihm insbesondere durch seine Untersuchungen zum Dreikörperproblem und zu Stabilitätsfragen wichtige Fortschritte verdankt. Seine Leistungen fanden Anerkennung durch die Verleihung zahlreicher Auszeichnungen, unter anderen den israelischen Wolf-Preis und die Aufnahme in den Orden Pour le mérite für Wissenschaften und Künste. Neben seiner wissenschaftlichen Bedeutung ist besonders hervorzuheben, dass SIEGEL einerseits, ohne direkt persönlich bedroht zu sein, sich dem nationalsozialistischen Regime durch Emigration entzog und andererseits nach dem Zweiten Weltkrieg nach Deutschland zurückkehrte.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, 1997
- [2] W.E. Boyce/R.C. DiPrima. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, 1995
- [3] M. Brandl. *Das Poincarésche Zentrumproblem - Nicht-degenerierter und degenerierter Fall*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2003
- [4] C. B. Collins. *Poincaré's Reversibility Condition*, J. of Math. Analysis and Applications 259, 2001, pp. 168-187
- [5] W. Coppel. *A survey of quadratic systems*, J. Differential Equations 2, 1966, pp. 293-304
- [6] G. Eisenreich. *Algebra Lexikon*, Akademie-Verlag Berlin, 1989
- [7] M. Frommer. *Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen* in *Mathematische Annalen 109*, Springer Verlag Berlin, 1935
- [8] H. Grauert, W. Fischer. *Differential- und Integralrechnung II*, 2. Auflage Springer Verlag, 1973
- [9] H. Grauert, I. Lieb. *Differential- und Integralrechnung III*, 1. Auflage, Springer Verlag, Jahr 1968
- [10] E. Kamke. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I*, 9. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart, 1977
- [11] H. Klein. *Der Verlauf der Integralkurven von $y' = \frac{P}{Q}$ in der Nähe der Null für homogene Polynome P, Q von ungeradem Grad*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2001
- [12] E. Kunz. *Algebra*, 2. Auflage, Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 1994
- [13] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, 2nd. ed., 1996, Springer-Verlag New York, Inc.

- [14] O. Perron. *Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte*, in: *Mathematische Annalen 113*, Springer Verlag, 1937
- [15] A. Prell. *Periodische Lösungen von $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ mit Anfangsbedingungen höherer Ordnung in $A(x, y)$ und $B(x, y)$* , Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2003
- [16] R. Remmert. *Funktionentheorie I*, 2. Auflage, Springer Verlag, 1995
- [17] D. Schlomiuk. *Integrability of plane quadratic vector fields*, *Expositiones Mathematicae* 8 (1990), S. 3-25
- [18] J. Schmatz. *Bemerkungen zur Hopf-Verzweigung bei analytischen Systemen $\dot{x} = f(x)$ bei einem Paar mehrfach konjugierter rein imaginärer Eigenwerte der Linearisierung*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2000
- [19] C.L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer Verlag 1956
- [20] C.L. Siegel. *Gesammelte Abhandlungen. Band IV. Kapitel 94 „Periodische Lösungen von Differentialgleichungen“*, herausgegeben von K. Chandrasekharan und H. Maaß, Springer Verlag, 1979
- [21] A. Teichert. *Die Strudelbedingungen für $y' = \frac{P}{Q}$ an der Stelle einer Unbestimmtheit*, Zulassungsarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2001
- [22] B.L. van der Waerden. *Algebra II*, 5. Auflage, Springer Verlag Berlin, Jahr 1967
- [23] W. von Wahl. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesung an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2001
- [24] Wolf von Wahl. *Remarks on Poincaré's Center Problem*, Vortrag, Zürich, 07.02.2003
- [A] Q. Wang. *The global solution of the n-body problem*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 50 (1991), pp. 73-88
- [B] Henri Poincaré. *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, *Journal de Mathématiques pures et appliquées, séries 4*, v.1, 1885, pp. 167-244
- [C] H. Poincaré. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, *Journal de Mathématiques, séries 3*, v. 7, 1881, pp. 375-422
- [D] Marek Kordos. *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte*, 1. Auflage, Klett, 1999
- [E] C. Chicone, Tian Jinguang. *On general properties of quadratic systems*, *Am. Math. Monthly*, 89 (1982), pp. 167-178
- [F] L. M. Perko. *Limit cycles of quadratic systems in the plane*, *Rocky Mountain J. of Math.*, Vol. 14, Number 3, Summer 1984

- [G] Yeh Yen-chien. *A qualitative study of the integral curves of the differential equation $dy/dx = \dots, I$, Uniqueness of limit cycles II*, Chinese Math., 1-18 (1963), pp. 62-70
- [H] N. N. Bautin. *On the number of limit cycles which appear with a variation of coefficients from equilibrium position of focus or center type*, Math. Sb., 30 (1952), 181-196; Am. Math. Soc. Transl., No. 100 (1954), pp. 3-19
- [I] Chin Yuan-Shun et al. *Concrete examples of the existence of three limit cycles for the system $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$* , Acta Math. Sinica, 9 (1959), pp. 213-226
- [J] Yeh Yen-chien. *Periodic solutions and limit cycles of certain nonlinear differential systems*, Sci. Record N.S., 1 (1957), pp. 391-394
- [K] Tung Chin-chu. *Positions of limit cycles of the system $dx/dt = \sum a_{ik}xy^k$, $dy/dt = \sum b_{ik}xy^k$, $0 \leq i + k \leq 2$* , Sci. Sinica, 8 (1959), pp. 151-171
- [L] L. M. Perko and Shu Shih-lung. *Existence, uniqueness, and non-existence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane*, J. Diff. Eq. 53 (1984), pp. 1-26
- [M] Shi Songling. *A concrete example of the existence for limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica, 23 (1980), pp. 153-158
- [N] I. Petrovskii and E. Landis. *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 10 (1958), pp. 177-221
- [O] I. Petrovskii and E. Landis. *Corrections to the articles On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree und On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials*, Mat. Sb., 48 (90) (1959) pp. 253-255
- [P] E. Landis and I. Petrovskii. *Letter to the editor*, Mat. Sb. 73 (1967), p. 160
- [Q] Yuanshun Chin. *On surfaces defined by ordinary differential equations*, Lecture Notes in Math., vol. 1151, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985, pp. 115-131
- [R] Ju. S. Il'yashenko. *Perturbations of the polynomial Hamiltonian equations in the real and complex domains*, Sympos. Methods of the Qualitative Theory and the Theory of Bifurcations, Gorky, 1988, pp. 63-67
- [S] Shi Songling. *A counterexample to Chins proposed solution to Hilberts 16th problem*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), pp. 597-599
- [T] Dana Schlomiuk. *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Transactions of the American mathematical society, Volume 338, Number 2, August 1993
- [U] L. S. Pontrjagin. *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen.*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 6, Heft 1-2, 1934, pp. 25-28

- [V] J. Guckenheimer, R. Rand, D. Schlomiuk. *Degenerate homoclinic cycles in perturbations of quadratic hamiltonian systems*, Nonlinearity 2, 1989, pp. 405-418
- [W] J. R. Roth. *Periodic Small-Amplitude Solutions to Volterra's Problem of Two Conflicting Populations and Their Application to the Plasma Continuity Equations*, J. of Math. Physics, Vol. 10, Number 8, August 1969, pp. 1412-1414
- [X] J. R. Roth. *New Mechanism for Low-Frequency Oscillations in Partially Ionized Gases*, Phys. Fluids 10, pp. 2712-2714
- [Y] J. R. Roth. *Experimental Observation of Low-Frequency Oscillations Described by the Plasma Continuity Equations*, Phys. Fluids 12, pp. 260-262
- [Z] C. Escher. *Bifurcation and coexistence of several limit cycles in models of open two-variable quadratic mass-action systems*, Chemical Physics 63, 1981, pp. 337-348
- [AA] S. Chandrasekhar. *An introduction to the Study of Stellar Structure*, Chapter 4, Chicago Univ. Press, 1939
- [AB] <http://www.utm.edu/research/iep/p/poincare.htm>
- [AC] <http://www.mathe.tu-freiberg.de/hebisch/cafe/hilbert.html>
- [AD] <http://www.stadtarchiv.goettingen.de/personen/siegel.htm>

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, noch nicht andersweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Bayreuth, den 8. Juli 2003

(Birgit Siebe)