Formale Reihen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen

Diplomarbeit, Universität Bayreuth

Yvonne Sädtler

25. Mai 2010

Betreuer: Professor Dr. Wolf von Wahl
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik

Erklärung der Selbstständigkeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Zitate deutlich kenntlich gemacht zu haben.
Diese Diplomarbeit wurde nicht bereits in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Bayreuth, den 25. Mai 2010 Yvonne Sädtler

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Wie es der Titel bereits verlauten lässt wollen wir uns in den folgenden sechs Kapiteln eingehend mit gewöhnlichen Differentialgleichungen und formalen Reihen beschäftigen. Hierbei werden die Reihen nach einer allgemeinen Einführung auf zwei wichtige Sonderfälle beschränkt.
Viele Naturgesetze können nur in Form von Differentialgleichungen dargestellt werden, also durch Gleichungen, die unabhängige Variablen, Funktionen und Ableitungen von Funktionen $y(x)$ einer unabhängigen Variablen x beinhalten. Deshalb ist die Theorie der Differentialgleichungen von großer Bedeutung für Naturwissenschaft und Technik, insbesondere für die Physik. [15] Auch wir werden uns in Kapitel Zwei diesem Bereich der Mathematik zuwenden und, nachdem wir einen historischen Überblick erlangt haben, den gewöhnlichen Differentialgleichungen zuwenden.
Bevor die Differentialgleichungen in der vorliegenden Arbeit allerdings Verwendung finden können, müssen wir in Kapitel Drei in einen Bereich der Mathematik einsteigen, der seit fast 2500 Jahren erforscht wird und bei Zenon von Elea seinen Anfang nahm - die unendlichen Reihen. [17] H.-J. Schell schreibt dazu sehr treffend: „Die Theorie der unendlichen Reihen ist ein wesentlicher Bestandteil der Analysis, welche sich mit der Konvergenzuntersuchung von Reihen, der Ermittlung ihrer Summen und den Rechenoperationen befasst. Viele Untersuchungen werden durch die Heranziehung unendlicher Reihen wesentlich vereinfacht oder überhaupt erst ermöglicht.“ [1] [10] Im zweiten Teil des Kapitels werden wir als

1 Schell, H.-J.: Unendliche Reihen, S. 7

eine ihrer Sonderformen die Potenzreihen untersuchen, deren Geschichte im 17. Jahrhundert durch die Arbeit von Mercator, Vincentio und Newton begann und durch die Ergebnisse großer Mathematiker wie Euler, Bernoulli und Cauchy zu dem vervollständigt wurde, was wir heute über Potenzreihen wissen. [17]
Das Kapitel *Anwendungen* beginnt mit einem einfachen Beispiel, der Multiplikation von Einfachpotenzreihen. Für deren Produkt werden wir das Konvergenzverhalten bestimmen und uns dann im zweiten umfangreicheren Beispiel ganz den formalen Potenzreihen widmen. Nach der Definition ihres Rings werden wir die Substitution von $W(x)$ in die formale Potenzreihe $f(x,W)$ durchführen, um in dem darauf folgenden Kapitel den Fixpunkt W von $W = f(x,W)$ in eine formale Potenzreihe entwickeln und schließlich ihre Konvergenz untersuchen zu können.
Dies geschieht mithilfe der differenzierten Gleichung $(1 - \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)) \cdot W_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,W)$. Diese Methode bietet den Vorteil, den Existenzsatz von Cauchy für den Konvergenzbeweis der W-Reihe einsetzen zu können. Insofern ist diese Variante der Majorantenmethode neu und von der von Carl Ludwig Siegel [4] verwendeten verschieden. Der Existenzsatz von Cauchy, insbesondere dessen Beweis nach Siegel, ist auch Grundlage des folgenden Kapitels und wird deshalb in seiner vollen Länge zitiert.
Der Fixpunkt W von $W = f(x, W)$ ist eine Majorante der formalen Potenzreihe $\hat{W}$, die ihrerseits durch $f(x, \hat{W})$ majorisiert wird: $\quad \hat{W} \prec f(x, \hat{W}(x)) \qquad (*)$
Im Buch „Vorlesungen über Himmelsmechanik“ von C. L. Siegel wird die Frage der Konvergenz der Reihenentwicklungen der Himmelsmechanik häufig auf „Ungleichungen“ des Typs (*) reduziert und die Konvergenz von $\hat{W}$ bzw. W direkt mit der Majorantenmethode angegangen. Die entsprechenden Beispiele sind im sechsten Kapitel angegeben. Allerdings werden wir von den zahlreichen Beispielen, die Siegel in seinem Werk aufführt, nur jenes zur Theorie von Ljapunov herausgreifen und mit unserer Methode bearbeiten.
Als zweiten wichtigen Vertreter der unendlichen Reihen werden wir im letzten Kapitel die formalen Fourierreihen als Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen betrachten. Hierbei werden wir am Beispiel der Abelschen und der linearen Differentialgleichung neben dem Konvergenzbeweis zeigen, dass die Lösungen 2π-periodisch und komplexwertig sind. Zur Gewinnung der Fourierkoeffizienten durch Rekursion lösen wir die Differentialgleichungen im Bereich der Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{inx}$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, e^{inx}$.

KAPITEL 2

Gewöhnliche Differentialgleichungen

In den vergangenen drei Jahrhunderten haben sich einige der bedeutendsten Mathematiker der Welt mit dem Studium der Differentialgleichungen beschäftigt. Und trotzdem ist dieses Thema auch heute noch „ein dynamisches Feld der Forschung mit vielen interessanten und offenen Fragen“. [1] [2]
Diese Entwicklung wollen wir nun etwas genauer betrachten und schließlich einen kleinen Einstieg in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen geben.

2.1 Die Geschichte der Differentialgleichungen

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist eines der grundlegenden Werkzeuge der mathematischen Wissenschaften, denn die Anforderung vieler wichtiger Problemstellungen aus der Technik und den Naturwissenschaften ist die Bestimmung von Funktionen, in denen eine oder mehrere Ableitungen der unbekannten Funktionen auftreten. Bekannte Beispiele sind vor allem das Newtonsche Gesetz oder der zeitliche Zerfall einer radioaktiven Substanz.
Die ersten Mathematiker, die sich mit der Differential- und Integralrechnung befassten, waren I. Newton und G. W. Leibniz im siebzehnten Jahrhundert. Obwohl Newton verhältnismäßig wenig in diesem Gebiet forschte, stellten seine Entwicklung der Differentialrechnung und die von ihm aufgedeckten grundlegende Prinzipien der Mechanik eine Basis für die Anwendung von Differentialgleichungen

1 Boyce, W. E. / DiPrima R. C.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 1

im 18. Jahrhundert dar. Für die von ihm klassifizierten Differentialgleichungen erster Ordnung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ entwickelte er eine Lösungsmethode unter Verwendung von unendlichen Reihen, jedoch unter der Bedingung, $f(x, y)$ sei als Polynom von x und y darstellbar.

Etwas später, aber unabhängig von Newton, fand auch Leibniz fundamentale Ergebnisse der Differentialrechnung und veröffentlichte diese in guter mathematischer Darstellungsweise. Die heutige Darstellungsweise für die Ableitung $dy\,/\,dx$ beispielsweise geht auf ihn zurück. Außerdem entwickelte Leibniz die Methode der Separation der Variablen und ein Verfahren zum Lösen von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Durch Korrespondenz mit anderen Mathematikern, insbesondere mit den Gebrüdern Bernoulli, konnten viele Problemstellungen auf dem Gebiet der Differentialgleichungen gelöst werden. Vor allem in der Entwicklung von Lösungsmethoden von Differentialgleichungen und im Erweitern der Anwendungsmöglichkeiten lieferten Jakob und Johann Bernoulli viele Ergebnisse.

Einige Jahre später beschäftigte sich einer der profiliertesten Mathematiker aller Zeiten, L. Euler, ebenfalls mit diesem Thema, formulierte Problemstellungen der Mechanik in mathematischer Sprache und entwickelte Methoden, wie die Verwendung von Potenzreihen oder numerischer Verfahren, um diese zu lösen.

In den letzten Jahren schließlich konnten durch den Einsatz leistungsstarker Computer unerwartete Phänomene entdeckt und wichtige Erkenntnisse gewonnen werden. Doch trotz dieses gewaltigen Fortschritts bleiben bis heute viele wichtige Problemstellungen ungelöst. [2]

2.2 Einführung in die Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Funktionen, die nur von einer einzigen unabhängigen Variablen abhängen, also nur gewöhnliche Ableitungen in der Differentialgleichung aufweisen. [2]

Definition 1: Sei $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ fest und $F : D \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Beziehung

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0 \; , \tag{2.1}$$

die neben der unabhängigen Variablen x und der gesuchten Funktion $y(x)$ Ableitungen von $y(x)$ bis zur Ordnung n beinhaltet, gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung n. Ist $y(x)$ eine auf einem Intervall I n-mal differenzierbare Funktion, $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \subset D$ für alle $x \in I$ und wird (2.1) durch $y(x)$ erfüllt, so heißt $y(x)$ Lösung von (2.1) in I.

Nach dem Buch „Höhere Mathematik für Ingenieure“ von Burg, Haf und Wille besteht die Aufgabe der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Bestimmung sämtlicher Lösungen $y(x)$ von (2.1) und der Untersuchung ihrer Eigenschaften. Jedoch gibt es keine geschlossene Lösungstheorie für Differentialgleichungen, nur eine große Zahl an Methoden und Techniken für gewisse Klassen von Differentialgleichungen.

Der nun folgende Satz liefert Klarheit über Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung einer Differentialgleichung und außerdem eine Abschätzung für die Größe des Lösungsintervalls:

Satz von Picard-Lindelöf: *Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei in*

$$D := \{(x, y) \mid |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b; \; a{,}b \in \mathbb{R} \text{ fest}\}$$

stetig und in diesem Rechteck stetig partiell differenzierbar nach y. Gilt außerdem

$$M := \max_{(x,y)\in D} |f(x, y)| \quad \textit{und} \quad h := \min\left(a, \frac{b}{M}\right) \; ,$$

so gibt es in $U_h(x_0) := \{x \mid |x - x_0| < h\}$, der Umgebung des Punktes x_0, genau eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \; , \quad y(x_0) = y_0 \; . \tag{2.2}$$

Beweis: I. Existenznachweis
Wir formulieren das Anfangswertproblem (2.2) als „Integralgleichung“

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \,, \tag{2.3}$$

denn auf $U_h(x_0)$ sind beide Probleme äquivalent: Ist $y(x)$ Lösung von (2.2), so ergibt sich unter Beachtung des zweiten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(0) = \int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \,.$$

Sei nun umgekehrt (2.3) gegeben. Durch Differentiation mit Hilfe des Hauptsatzes folgt dann

$$y'(x) = 0 + \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = f(x, y(x))$$

und

$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(t, y(t))\, dt = y_0 \,.$$

Gehen wir also zum Beweis des Satzes von der Integralgleichung (2.3) aus. Mittels sukzessiver Approximation konstruieren wir eine Lösung, indem wir von der Anfangsnäherung $y_0(x) := y_0$ für $x \in U_h(x_0)$, der konstanten Funktion durch (x_0, y_0), ausgehen.
Damit können wir unter Beachtung der Integralgleichung eine weitere Näherung bestimmen:

$$y_1(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \,, \quad x \in U_h(x_0) \,.$$

Erneutes Anwenden dieser Methode ergibt

$$y_2(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt \,, \quad x \in U_h(x_0) \,,$$

bzw. nach n-maliger Wiederholung

$$y_n(x) := y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt\ , \quad n \in \mathbb{N}\ , \quad x \in U_h(x_0)\ .$$

Hieraus erhält man eine Folge von Näherungslösungen: $\{y_n(x)\}$.

(a) Durch vollständige Induktion werden wir nun zunächst die Zweckmäßigkeit des obigen Konstruktionsverfahrens zeigen. Hierbei ist wichtig, dass die Folge $\{y_n(x)\}$ nicht über den Definitionsbereich der Funktion f hinausführen darf, denn sonst wären die Ausdrücke $\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$ nicht erklärt.
Induktionsanfang ($n = 0$): Aus $y_0(x) = y_0$ folgt $|y_0(x) - y_0| = 0 \leq b$ für $x \in U_h(x_0)$.
Induktionsvoraussetzung: Für festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $|y_n(x) - y_0| \leq b$ auf $U_h(x_0)$.
Induktionsschritt: Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt für $x \in U_h(x_0)$, dass

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt - y_0 \right| \leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\, dt \right| .$$

Daraus folgt aus der Definition von h und wegen der Beschränktheit von f durch M im Rechteck D

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq M \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| = M\ |x - x_0| < M\, h < M\, \frac{b}{M} = b$$

für $x \in U_h(x_0)$. Also ist die Folge $\{y_n(x)\}$ wohldefiniert.

(b) Als nächstes haben wir zu zeigen, dass die Folge $\{y_n(x)\}$ auf $U_h(x_0)$ gegen eine Lösung von (2.3) bzw. (2.2) konvergiert. Dazu kann

$y_n(x)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$y_n(x) = y_0 + (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + ...$$
$$... + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) = y_0 + \sum_{j=1}^{n} (y_j(x) - y_{j-1}(x))$$

Die Summe auf der rechten Seite lässt sich besonders günstig abschätzen, denn es gilt für $x \in U_h(x_0)$

$$|y_j(x) - y_{j-1}(x)| = \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{j-1}(t))\, dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{j-2}(t))\, dt \right|$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))]\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))|\, dt \right| . \tag{2.4}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung in zwei Veränderlichen existiert für den Integranden des letzten Integrals eine Konstante $L > 0$ mit

$$|f(t, y_{j-1}(t)) - f(t, y_{j-2}(t))| \leq L\ |y_{j-1}(t) - y_{j-2}(t)| \tag{2.5}$$

$$\text{wobei} \quad L = \max_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| .$$

Aus (2.4) erhalten wir also für $x \in U_h(x_0)$

$$|y_j(x) - y_{j-1}(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^{x} |y_{j-1}(t) - y_{j-2}(t)|\, dt \right| .$$

Nach Definition von M gilt andererseits für $x \in U_h(x_0)$

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_0(x)| &= |y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \leq M\ |x - x_0|\ , \end{aligned}$$

für $y_2(x) - y_1(x)$

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq L \cdot M \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| = L\, M\, \frac{|x - x_0|^2}{2} < L\, M\, \frac{h^2}{2}$$

und so fort. Wir können die Abschätzung für $|y_j - y_{j-1}|$ also iterieren. Mittels vollständiger Induktion kann man schließlich für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in U_h(x_0)$ zeigen, dass

$$|y_j(x) - y_{j-1}(x)| < M\, L^{j-1}\, \frac{h^j}{j!}\ .$$

Damit ergibt sich für die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}(y_j(x) - y_{j-1}(x))$ auf $U_h(x_0)$ die konvergente Majorante

$$\frac{M}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(L\, h)^j}{j!}\ .$$

D. h., die Folge $\{y_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig[1] auf $U_h(x_0)$ gegen

$$y(x) := y_0 + \sum_{j=1}^{\infty}(y_j(x) - y_{j-1}(x))\ .$$

Da die Stetigkeit aller Funktionen y_n auf $U_h(x_0)$ gegeben ist, wissen wir, dass y als Grenzwert der gleichmäßig konvergenten Folge $\{y_n(x)\}$ auch dort stetig ist. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $\{y_n(x)\}$ gegen $y(x)$ ergibt sich aus (2.5), also mit

$$|f(t, y_j(t)) - f(t, y_{j-1}(t))| \leq L\ |y_j(t) - y_{j-1}(t)|\ ,$$

1 siehe Kapitel 3.3, Seite 20

die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f(t, y_n(t))\}$ gegen $f(t, y(t))$. Daraus folgt, dass in der Beziehung

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt$$

Grenzübergang $n \to \infty$ und Integration vertauscht werden können:

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_{n-1}(t))\, dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Und hiermit ist nun gezeigt, dass die Näherungslösungen $y_n(x)$ gleichmäßig gegen eine Lösung des Anfangswertproblems (2.2) konvergieren.

II. Eindeutigkeitsnachweis
Seien $y(x)$ und $\tilde{y}(x)$ zwei beliebige Lösungen des Anfangswertproblems (2.2) bzw. der Integralgleichung (2.3). Dann gilt wieder für $x \in U_h(x_0)$:

$$\begin{aligned} |y(x) - \tilde{y}(x)| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))]\, dt \right| \\ &\leq \left| \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))|\, dt \right| \leq L \left| \int\limits_{x_0}^{x} |y(t) - \tilde{y}(t)|\, dt \right| \end{aligned}$$

Für beliebiges $h_0 < h$ setzen wir nun $A := \max_{|x-x_0|\leq h_0} |y(x) - \tilde{y}(x)|$, sodass

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq L\, A\, |x - x_0| \quad \text{für } \; x \in U_{h_0}(x_0)\ .$$

Durch erneutes Anwenden folgt damit für die obige Ungleichung

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq L{\cdot}L\, A \left| \int\limits_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| = A\, L^2\, \frac{|x - x_0|^2}{2}\ , \quad x \in U_{h_0}(x_0)$$

usw.
Also gewinnt man für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion

die Abschätzung

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq A\,L^n \,\frac{|x - x_0|^n}{n!} < A\,\frac{(Lh)^n}{n!}\ .$$

Offensichtlich ist die linke Seite dieser Ungleichung unabhängig von n.
Auf der rechten Seite findet sich das n-te Glied einer Exponentialreihe, welches für $n \to \infty$ gegen Null strebt[1]. D. h., wir erhalten $\tilde{y}(x) = y(x)$ auf $U_{h_0}(x_0)$ bzw. auf $U_h(x_0)$ wegen $h_0 < h$ beliebig.
Und damit ist schließlich die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.
q.e.d.

Bemerkung: Die Ungleichung $|f(x, y) - f(x, y')| \leq L\ |y - y'|$ wird Lipschitzbedingung genannt und folgt aus der Voraussetzung, dass f auf D stetige partielle Ableitungen bezüglich y besitzt. [3]

Da die Differentialgleichungen ein sehr weitläufiges Feld aufspannen, wollen wir uns hier auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken, die in expliziter Form als $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ und in impliziter Form als $F(x, y, y') = 0$ dargestellt werden. Diese enthalten nur erste und keine höheren Ableitungen. Die Funktion $y = y(x)$ ist Lösung dieser Gleichung in einem Intervall J, wenn $y(x)$ in J differenzierbar ist und $F(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ für alle $x \in J$. [15]

Enthalten Systeme von Differentialgleichungen nicht explizit die unabhängige Variable t, so werden diese als autonom bezeichnet. Andererseits stellen eines oder mehrere Elemente der Koeffizientenmatrix von nichtautonomen Systemen eine Funktion von t dar.
Bei Anwendungen handelt es sich häufig um autonome Systeme. Deren Konfiguration, einschließlich physikalischer Parameter und externer Kräfte oder Effekte, sind physikalisch gesehen Systeme, die von der Zeit unabhängig sind. Das System reagiert also bezüglich gegebener Anfangsbedingungen unabhängig von der Zeit, zu der die Bedingungen gestellt werden.

1 Für die Konvergenz einer unendlichen Reihe ist dies eine notwendige Bedingung.

Wie ein nichtautonomes in ein autonomes System umgewandelt werden kann, wird am Ende von Kapitel 5.2 behandelt.

Im letzten Kapitel werden wir Differentialgleichungen mit periodischen Lösungen untersuchen. Diese Lösungen spielen oftmals bei physikalischen Problemstellungen eine wichtige Rolle, da sie sich wiederholende Phänomene beschreiben. [2]

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird 2π-periodisch genannt, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

ist, d. h. f ist periodisch mit der Periode 2π. [7]

Bevor nun aber die gewöhnlichen Differentialgleichungen in diesem Dokument angewendet werden können, muss erst ein anderer wichtiger Bereich der Mathematik genauer untersucht werden: die unendlichen Reihen.

KAPITEL 3

Mehrfachreihen und Mehrfachprodukte

Dieses Kapitel hat das Ziel, in das Gebiet der Reihen und Potenzreihen einzuführen, da diese die Grundlage für den Rest der Arbeit bilden.
Entnommen sind die nötigen Definitionen und Sätze fast ausschließlich aus den Fachbüchern „Analysis 1“ und „Analysis 2“ von W. Walter. Diese Werke stellen aufgrund der ausführlichen historischen Berücksichtigung, der durchgehend guten Lesbarkeit und des häufigen Anwendungsbezugs eine der gängigsten Fachbuchreihen in diesem Gebiet dar. [17]

3.1 Eigenschaften unendlicher Reihen

Als ersten wichtigen Punkt wollen wir die Umordnung von Reihen betrachten.
Es heißt, eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ergebe die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, falls die Folge (b_n) durch Umordnung von (a_n) entstanden ist. D. h., eine Bijektion $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $b_n = a_{\Phi(n)}$ existiert.

Umordnungssatz: *Eine absolut konvergente Reihe darf umgeordnet werden. Ist also $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und (b_n) aus (a_n) durch Umordnung entstanden, so gilt die Gleichung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und die zweite Reihe ist ebenfalls absolut konvergent.

Beweis: Bezeichnet man die Teilsummen von $\sum a_n$ mit s_n und die der $\sum b_n$ mit t_n, so existiert zu einem $\varepsilon > 0$ ein Index N derart, dass für beliebiges p gilt:

$$|a_{N+1}| + ... + |a_{N+p}| < \varepsilon$$

Es ist also $\sum_{n>N} |a_n| < \varepsilon$.
Nun sei $b_n = a_{\Phi(n)}$. Man wähle ein $M > N$ so groß, dass unter den Zahlen $\Phi(0), \Phi(1), ..., \Phi(M)$ alle Zahlen von 0, 1, 2, ..., N vorkommen. Dann betrachte man die Differenz $(s_n - t_n)$: Für $n > M$ heben sich alle Glieder a_i mit $i \leq N$ weg, weil diese in beiden Teilsummen s_n und t_n enthalten sind; d. h. $(s_n - t_n)$ ist Summe von der Form $\sum_{n>N} \pm a_i$, wobei + für Glieder aus s_n gilt, – für solche aus t_n. Folglich ist

$$|s_n - t_n| \leq \sum_{n>N} |a_i| < \varepsilon \quad \text{für } n > M \ .$$

Damit erhält man das Ergebnis, dass $(s_n - t_n)$ eine Nullfolge und $\lim s_n = \lim t_n$ bzw. $\sum a_n = \sum b_n$ ist.
Walter schließt den Beweis mit der Anmerkung, dass sich diese Schlussweise nun auch auf die Reihe $\sum |a_n|$ anwenden lässt. Dadurch kann man die absolute Konvergenz der umgeordneten Reihe erkennen. q.e.d.

Wollen wir die Bijektion nicht mehr nur auf $\mathbb{N}$ beschränken, sondern die natürlichen Zahlen auf eine abzählbare Indexmenge M abbilden, definieren wir

$$\sum_{\alpha \in E} a_\alpha := \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} \quad \text{mit} \quad \phi : \mathbb{N} \to M \ \text{ bijektiv} \ .$$

Und darauf gründet sich der folgende Satz:

Großer Umordnungssatz: *Ist M eine abzählbare Menge, $\sum_{\alpha \in M} a_\alpha$ absolut konvergent und $I_1, I_2, I_3, ...$ eine beliebige Zerlegung von M in paarweise disjunkte Teilmengen I_i, so gilt für die Reihe*

$$\sum_{\alpha \in M} a_\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in I_i} a_\alpha \ .$$

Die Absolutkonvergenz ist hierfür entscheidende Voraussetzung. Folgende Formulierungen sind dann äquivalent:
(a) Es existiert eine Bijektion $\Phi : \mathbb{N} \to M$ *mit* $\sum_0^\infty \left|a_{\Phi(n)}\right| < \infty$ *.*
(b) Für jede endliche Indexmenge $E \subset M$ *existiert eine Konstante* K*, sodass* $\sum_{\alpha \in E} |a_\alpha| \leq K < \infty$ *.*
(c) Bei beliebiger Realisierung der Summen gilt $\sum_{i=1}^\infty \sum_{\alpha \in I_i} |a_\alpha| < \infty$ *.*

Beweis: (a) stellt die Definition der Absolutkonvergenz dar
$(a) \Rightarrow (b)$ denn es gilt $\sum_{\alpha \in I} |a_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in M} |a_\alpha|$ für $I \subset M$
$(b) \Rightarrow (a)$ klar
$(a) \Rightarrow (c)$ Anwendung des Satzes auf die Reihe mit den Gliedern $|a_\alpha|$
$(c) \Rightarrow (b)$ $K = \sum_{i=1}^\infty \sum_{\alpha \in I_i} |a_\alpha| \geq \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha \in I_i} |a_\alpha|$
$\geq \sum_{i=1}^p \sum_{\alpha \in E_i} |a_\alpha| \equiv \sum_{\alpha \in E} |a_\alpha|$
womit die Äquivalenz bewiesen ist. q.e.d.

Diese Umordnung von Reihen wird jetzt angewendet im

Doppelreihensatz: *Reihen mit der Indexmenge* $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *nennt man Doppelreihen. Für diese gilt:*

$$\sum_{i,j=0}^\infty a_{ij} = \sum_{i=0}^\infty \left(\sum_{j=0}^\infty a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^\infty \left(\sum_{i=0}^\infty a_{ij} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{i+j=k} a_{ij} \right) \equiv \sum_{k=0}^\infty \sum_{i=0}^k a_{i,k-i}$$

Doppelreihen erhält man durch die Multiplikation von Reihen. Denn multipliziert man erst jeden Summand der ersten Summe mit jedem Summand der zweiten Summe und addiert alle diese Produkte, so erhält man das Produkt zweier endlicher Summen.

$$(a_0 + ... + a_m)(b_0 + ... + b_n) = \sum_{i=0}^m a_i \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_i b_j$$

Die Übertragung auf unendliche Doppelreihen nennt man „Satz von Cauchy“:

Satz 1: *Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ unendliche Reihen. Sind diese absolut konvergent, kann ihr Produkt durch gliedweise Multiplikation berechnet werden*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_i b_j \ .$$

Auch die entstehende Doppelreihe ist absolut konvergent.

Beweis: Die Reihe $\sum |a_i|$ sei definiert als A und $\sum |b_i|$ als B. Dann zeigt $\sum_i \left(\sum_j |a_i b_j|\right) = \sum_i |a_i| B = AB < \infty$ die absolute Konvergenz der Doppelreihe. Ist $a := \sum a_n$ und $b := \sum b_n$, ergibt sich aus dem Doppelreihensatz

$$\sum_{i,j} a_i b_j = \sum_i \left(\sum_j a_i b_j\right) = \sum_i (a_i b) = ab \ . \qquad \text{q.e.d.}$$

Für die Umordnung der Doppelreihe $\sum a_i b_j$ in eine einfache Reihe nach Diagonalanordnung gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n$$

mit $d_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$.
Diese spezielle Summation, welche vor allem bei der Multiplikation von Potenzreihen verwendet wird, nennt man „Cauchy-Produkt“. [17]

3.2 Mehrfachreihen und -produkte

Die hier aufgeführten Eigenschaften gelten allerdings nicht nur für Doppelreihen; sie können auch auf Mehrfachreihen übertragen werden.

Dazu werden wir nun N absolut konvergente Reihen miteinander multiplizieren und für deren Produkt eine Formel herleiten.

Hilfssatz: *Seien die unendlichen Reihen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}, \ldots, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(N)}$ *absolut konvergent. Dann gilt folgende Gleichung*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} \cdot \ldots \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(N)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_N=n} a_{p_1}^{(1)} a_{p_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{p_N}^{(N)} \quad ;$$

das Mehrfachprodukt der Reihen kann also durch eine Verallgemeinerung des Cauchy-Produkts berechnet werden.
Außerdem ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n^{(1)}\right| \cdot \ldots \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n^{(N)}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_N=n} \left|a_{p_1}^{(1)} a_{p_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{p_N}^{(N)}\right|$$

konvergent, d. h. die entstehende Mehrfachreihe ist absolut konvergent.

Beweis: Den vorigen Satz können wir durch vollständige Induktion beweisen.
Induktionsanfang: Für $N = 2$ gilt der Satz von Cauchy (siehe oben).
Induktionsschritt: Sei die Behauptung nun für $N - 1 \geq 2$ bewiesen und es gelte

$$A_n^{(N-1)} = \sum_{p_1+\ldots+p_{N-1}=n} a_{p_1}^{(1)} a_{p_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{p_{N-1}}^{(N-1)} \quad .$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(N-1)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(N)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} A_{n-p}^{(N-1)} a_p^{(N)} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_N=0}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_{N-1}=n-p_N} a_{p_1} \cdot \ldots \cdot a_{p_{N-1}} a_{p_N} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_N=n} a_{p_1} \cdot \ldots \cdot a_{p_N} . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung. q.e.d.

[13]

Man kann also definieren:

Mehrfache unendliche Reihen, also Reihen in mehreren Veränderlichen, werden mit einem der drei Symbole

$$\sum_{p\,\in\,\mathbb{N}_0^n} a_p = \sum_{p\,\geq\,0} a_p = \sum_{|p|=0}^{\infty} a_p = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{|p|=k} a_p\right) \qquad \text{mit} \quad |p| = p_1 + p_2 + ... + p_n$$

bezeichnet, sie erstrecken sich über alle Multiindizes $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Die vierte Summe stellt hierbei eine spezielle Art der Summierung dar, für $n = 2$ beispielsweise die Summation nach Diagonalen - wie bereits kennengelernt.
Und genau wie dort muss auch für $n > 2$ die Absolutkonvergenz vorausgesetzt werden um die Unabhängigkeit der Reihensumme von der Art der Summierung sicherzustellen: [16]

$$\beta_k = \sum_{|p|=k} |a_p| \;, \quad \sum \beta_k < \infty \;.$$

Die Glieder der bisher behandelten Reihen konnten allein durch Zahlen dargestellt werden. Im Folgenden stehen nun aber die Potenzreihen im Mittelpunkt, die als einer der wichtigsten Vertreter unendlicher Reihen gelten. Deren Glieder sind Funktionen unabhängiger Variablen und werden im Folgenden ausführlich behandelt. [10]

3.3 Einfach- und Mehrfachpotenzreihen

Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ bzw. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ mit x_0 als Entwicklungspunkt nennt man Potenzreihen, die Zahlen a_n ihre Koeffizienten. Diese Reihen verfügen über eine sehr einfache Konvergenztheorie, da ihr Konvergenzverhalten im Wesentlichen durch eine einzige nichtnegative Zahl r definiert wird, welche Konvergenzradius der Reihe genannt wird und auch unendlich sein kann.

Satz 2: *Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ hat einen Konvergenzradius r mit $0 \leq r \leq \infty$, für welchen gilt:*

- *Ist $|x| < r$, so ist die Reihe absolut konvergent,*
- *ist $|x| > r$, dann ist sie divergent.*

Stellt s eine positive Zahl $< r$ dar, konvergiert die Reihe im Bereich $|x| \leq s < r$ sogar gleichmäßig. Da der Konvergenzradius nur von $|a_n|$ abhängig ist, kann er nach der Formel von Cauchy-Hadamard

$$r = \frac{1}{L} \quad \textit{mit} \;\; L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

berechnet werden.

Bevor wir diesen Satz beweisen können, muss allerdings erst der wichtige Begriff der gleichmäßigen Konvergenz erörtert werden:

Man nennt eine Reihe $\sum_0^\infty f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D, wenn die Folge der Teilsummen $s_n(x) = f_0(x) + ... + f_n(x)$ gleichmäßig auf D konvergiert. Für die Reihensumme $F(x) = \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$ existiert dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N(\varepsilon)$, sodass für $n \geq N$ und $x \in D$ stets gilt:
$|F(x) - s_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon$
D. h., die Reste $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^\infty f_k(x)$ streben gleichmäßig gegen Null.

Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist nach Walter das

Cauchy-Kriterium für Reihen: *Die Reihe $\sum f_k(x)$ konvergiert genau dann auf D gleichmäßig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, sodass für $n > m \geq N$ und $x \in D$ Folgendes gilt:*

$$|s_n - s_m| = |f_{m+1}(x) + ... + f_n(x)| < \varepsilon$$

und

Das Weierstraßsche Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz:
Für eine Reihe $\sum a_k$ sei $|f_k(x)| \leq a_k$ mit $x \in D$ und $k \in \mathbb{N}$. Ist nun $\sum a_k$ konvergent, so ist die Reihe $\sum f_k(x)$ auf D absolut und gleichmäßig konvergent.
Die Reihe $\sum a_k$ wird dann als konvergente Majorante für die zu untersuchende Reihe bezeichnet.

Beweis: Bezeichnet r_n den n-ten Rest der Reihe $\sum f_k$ und ρ_n den n-ten Rest von $\sum a_k$ haben wir

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{n+1}^{\infty} a_k = \rho_n$$

und die Reihenreste konvergieren wegen $\rho_n \to 0$ gleichmäßig gegen Null. q.e.d.

Nun aber zurück zu Satz 2:

Beweis: Unter Verwendung der Regel $\limsup \lambda\, b_n = \lambda \cdot \limsup b_n$ mit $\lambda > 0$ und des Wurzelkriteriums[1] erhalten wir:
$\sum a_n\, x^n$ ist absolut konvergent, falls

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n\, x^n|} = |x| \ \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x|\, L$$

kleiner ist als 1, bzw. divergent im Falle größer 1.
Damit ist die Cauchy-Hadamardsche Formel bereits bewiesen und ebenso die Aussagen über absolute Konvergenz und Divergenz. Mithilfe der Abschätzung $|a_n\, x^n| \leq |a_n|\, s^n$ und des Majorantenkriteriums ergibt sich noch die gleichmäßige Konvergenz für $|x| \leq s < r$, denn – wie gerade gezeigt – ist $\sum |a_n|\, s^n < \infty$. q.e.d.

[17]

Laut dem zweiten Band „Analysis“ von Wolfgang Walter [16] lassen sich Mehrfachpotenzreihen bzw. Potenzreihen in mehreren Veränderlichen ohne Berücksichtigung der Summationsreihenfolge folgendermaßen darstellen:

$$\sum_{|p|=0}^{\infty} a_p\, x^p \quad \text{mit} \ \ x = (x_1, ..., x_n)\ , \ x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdot ... \cdot x_n^{p_n} \tag{3.1}$$

Auf die Reihenfolge der Summation kommt es nicht an, da bei Konvergenz in irgendeiner Reihenfolge für ein x_0 mit $x_{0i} \neq 0$ sofort die absolute Konvergenz

1 Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent falls für $0 < q < 1$ gilt: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n; Divergenz liegt vor, wenn für unendlich viele n $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ ist. [17]

in dieser Reihenfolge für alle x mit $|x_i| < |x_{0i}|$ und damit in jeder Reihenfolge folgt.

Für $n = 2$ und $x, y \in \mathbb{R}$ erhält man beispielsweise Reihen der Form $\sum a_{ij}\, x^i\, y^j$, wobei über alle $i, j \in \mathbb{N}$ summiert wird.

Satz 3: *Für $\alpha_k := \max\{|a_p| : |p| = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, sei $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, t^k$ eine eindimensionale Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Die mehrdimensionale Potenzreihe (3.1) konvergiert dann für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit der Maximumnorm $|x|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} < r$, für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x|_\infty \leq t$ sogar gleichmäßig falls $t < r$. Im Würfel $|x|_\infty < r$ ist die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion also stetig.*

Beweis: Für $j = 1, ..., n$ gibt es $(k+1)^n$ Multiindizes $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 \leq p_j \leq k$. Also existieren höchstens ebenso viele für $|p| = k$. Aus $|x|_\infty \leq t$ und $|p| = k$ folgt $|x^p| \leq t^k$ und damit

$$\sum_{|p|=k} |a_p\, x^p| \leq \alpha_k (k+1)^n\, t^k =: \gamma_k\, t^k \quad \text{mit } |x|_\infty \leq t\,.$$

Die Potenzreihe $\sum \gamma_k\, t^k$ besitzt ebenfalls den Konvergenzradius r. Wegen $\sum \gamma_k\, t^k < \infty$ liegt also für $|x|_\infty \leq t < r$ gleichmäßige und absolute Konvergenz vor. Mithilfe des Weierstraßschen Majorantenkriteriums folgt schließlich die Behauptung. q.e.d.

[16]

KAPITEL 4

Anwendungen für Mehrfachreihen und -potenzreihen

Nach dieser eingehenden Behandlung von Mehrfachreihen und -potenzreihen werden wir nun deren Anwendung auf implizit gegebene Funktionen[1] betrachten.

4.1 Produkte von Einfachpotenzreihen

Als erste Anwendung untersuchen wir die Multiplikation von Einfachpotenzreihen. Dazu seien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Potenzreihen mit den positiven Konvergenzradien r_a und r_b. Da für beide Reihen absolute Konvergenz vorliegt, dürfen diese gliedweise multipliziert werden. Deren Cauchy-Produkt ergibt für $|x| < \min\{r_a, r_b\}$ die Potenzreihe

$$f(x)\, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \ ,$$

mit $p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_n b_0$. Der Konvergenzradius der neuen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ ist $r > \min\{r_a, r_b\}$. [17]

1 Implizite Funktionen sind von der Form $f(x,y) = 0$, d. h. x und y und ebenso die Differentiale dx und dy sind gleichberechtigt. Die explizite Darstellung wäre etwa $y = g(x)$, falls f_y nicht verschwindet. [16]

Bildet man das Produkt von mehr als zwei Einfachpotenzreihen, erhält man die Mehrfachpotenzreihe

$$a_\nu x^\nu = \sum_{|\nu| \geq 0} a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n} = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_n \geq 0} a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\nu_n}$$

mit $x = (x_1, ..., x_n)$ und der Summationskonvention.

Der Einfachheit halber sei $a_\nu \neq 0$ und gestatte die Zerlegung
$a_\nu = a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n} = a_{\nu_1} \cdot \dots \cdot a_{\nu_n}$ mit

$$r_i = \frac{1}{\limsup_{\nu_i \to \infty} \sqrt[\nu_i]{|a_{\nu_i}|}} > 0 \, .$$

Dann gilt für $|x_i| < r = \min_{1 \leq i \leq n} \, r_i$:

$$a_\nu x^\nu = \sum_{\nu_1 = 0}^{\infty} a_{\nu_1} x_1^{\nu_1} \cdot \dots \cdot \sum_{\nu_n = 0}^{\infty} a_{\nu_n} x_n^{\nu_n}$$

ist kga (kompakt gleichmäßig absolut) konvergent. [13]

Eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ heißt kompakt gleichmäßig absolut konvergent in einer Menge X, wenn $\sum |a_\nu x^\nu|$ in jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig konvergent ist. [9]
Zur Definition der gleichmäßigen Konvergenz siehe voriges Kapitel.

4.2 Betrachtung von W = f(x,W) durch formale Potenzreihen

Formale Potenzreihen zählen zu den klassischen Begriffen der Mathematik, denn „es gibt eine große Anzahl von Gebieten, in denen sie als Hilfsmittel gebraucht werden“, beschreibt Hans Becker in seinem Buch „Formale Potenzreihen und

formale Sprachen“. [1] [1]
Und auch wir werden uns in diesem Kapitel genauer mit ihnen beschäftigen.

Zuallererst müssen wir jedoch den Ring der formalen Potenzreihen $R[[x_1, ..., x_n]]$ definieren.

4.2.1 Der Ring der formalen Potenzreihen

Definition 3: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement und

$$\sum_{|i|\geq 0} a_i x^i = \sum_{|i|\geq 0} a_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}$$

eine formale Mehrfachpotenzreihe mit $a_i \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ für $x = (x_1, ..., x_n)$, über deren Konvergenzverhalten nichts vorausgesetzt wird.
Wir erklären sie als die Folge $\left(\sum_{|\lambda|\leq l} a_\lambda x^\lambda\right)_l$.

Für $p = \sum_{|i|\geq 0} a_i\, x^i$ und $q = \sum_{|i|\geq 0} b_i\, x^i$ gelte:

- Die Gleichheit sei definiert durch $p = q \;\Leftrightarrow\; a_i = b_i \quad \forall i$
- Die Addition $p + q$ sei intuitiv gegeben durch $(a_i + b_i)\, x^i$
- Für die Multiplikation von p und q sei

$$p \cdot q := \sum_{\mu} \left(\sum_{j,\, j\leq\mu} a_{\mu-j}\, b_j \right) x^\mu,$$

$$\lambda \cdot p := \sum_{|i|\geq 0} \lambda \cdot a_i\, x^i$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$

1 Becker, Hans: Formale Potenzreihen und formale Sprachen, S. 1

- Für die partielle Differentiation von p nach x_j sei

$$\frac{\partial}{\partial x_j} p := \sum_{\substack{|i|\geq 0 \\ i_j \geq 1}} a_i \, i_j \, x_1^{i_1} \cdot ... \cdot x_{j-1}^{i_{j-1}} \cdot x_j^{i_j - 1} \cdot x_{j+1}^{i_{j+1}} \cdot ... \cdot x_n^{i_n}$$

- Und für $1 \leq j \leq q$ gelte

$$\zeta_j(x) = \zeta_j(x_1, ..., x_n) = \sum_{|i|\geq 1} c_i^{(j)} x^i$$

Dann setzen wir mit den Multiindizes $\mu = (\mu_1, ..., \mu_q)$

$$p \circ \zeta(x) = \sum_{\mu} a_\mu \, \zeta_1^{\mu_1}(x) \cdot ... \cdot \zeta_q^{\mu_q}(x)$$

und fassen $p \circ \zeta(x)$ als die nach x^i geordnete formale Potenzreihe auf. Dies wird später in diesem Kapitel noch genauer behandelt.

Da keine Aussagen über das Konvergenzverhalten von $\zeta_j(x)$ getroffen wurden, darf dort erst ab $|i| \geq 1$ summiert werden. [8]

Die Menge $R[[x]]$ aller formalen Potenzreihen mit dem Nullpunkt als Entwicklungspunkt ist mit der Cauchyschen Multiplikation also eine kommutative R-Algebra mit Einselement.
Für eine tiefere Beschreibung der Ringstruktur sei auf §4 des Buches „Funktionentheorie 1“ von R. Remmert verwiesen. [9]

Doch warum haben diese Reihen das Adjektiv „formal“ als Kennzeichnung? Grund hierfür ist, dass sie nicht zu konvergieren brauchen, wir aber trotzdem mit ihnen rechnen können. [1]

Man nennt eine formale Potenzreihe f dann konvergent, wenn $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$ in einem Polyzylinder um 0 konvergiert. Dazu betrachten wir folgende

Definition 4: Sei $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $r_k > 0$, $x_0 \in \mathbb{C}^n$. Dann definiert

$$P_r(x_0) := \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \left| x_k - x_k^{(0)} \right| < r_k, \; 1 \leq k \leq n \right\}$$

einen Polyzylinder um x_0 mit r als (Poly-) Radius. [5]

Im Falle der Konvergenz kommt es nach dem großen Umordnungssatz auf die Summationsreihenfolge nicht an, da im Polyzylinder absolute Konvergenz vorliegt, siehe Satz 2.
Dies rechtfertigt auch die Definition der formalen Potenzreihe.

4.2.2 Die Substitution von Potenzreihen

Im Folgenden wird die Substitution der Potenzreihe $\widetilde{W}$ in die Potenzreihe $f(x, \widetilde{W})$ vollzogen, dafür betrachten wir jedoch zunächst einmal ganz allgemein das Einsetzen von Potenzreihen.

Seien $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ und $g(y) = \sum_0^\infty b_k y^k$ Reihen mit den Konvergenzradien $r > 0$ und $R > 0$ und es gelte $|a_0| < R$. Die Funktion $F(x) = \sum_0^\infty |a_n| \, x^n$ ist in $(-r, r)$ stetig, deshalb existiert ein $\rho > 0$ mit

$$F(\rho) = \sum_0^\infty |a_n| \, \rho^n < R \, .$$

Die Funktion $h(x) = g(f(x))$ ist damit für mindestens $|x| \leq \rho$ definiert

$$h(x) = \sum_{k=0}^\infty b_k \left(\sum_{n=0}^\infty a_n x^n \right)^k \, .$$

$h(x)$ kann man nun als einfache Potenzreihe schreiben, denn nach dem Multiplikationssatz für Reihen gilt für $|x| < r$

$$(f(x))^k = \left(\sum_0^\infty a_n x^n \right)^k = \sum_{n=0}^\infty c_n^k x^n$$

mit $c_0^0 = 1,\ c_n^0 = 0$ für $n > 0,\ c_n^1 = a_n,\ c_n^2 = \sum_{i+j=n} a_i a_j$, usw.
Entsprechend gilt für $F(x)$

$$(F(x))^k = \sum_{n=0}^\infty \gamma_n^k \, x^n \quad \text{mit } |x| < r \, .$$

Die γ_n^k können aus den $|a_i|$ genauso berechnet werden wie die c_n^k aus den a_i, deshalb ist für $k, n \geq 0$

$$\left|c_n^k\right| \leq \gamma_n^k \,.$$

Um $h(x)$ formal umordnen zu können müssen wir prüfen ob der Doppelreihensatz anwendbar ist.

$$\sum_k |b_k| \sum_n \left|c_n^k\, x^n\right| \leq \sum_k |b_k| \sum_n \gamma_n^k\, \rho^n = \sum |b_k| F(\rho)^k < \infty$$

Da $F(\rho) < R$ ergibt sich also die absolute Konvergenz für $h(x)$ und wir haben

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^k\, x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\, c_n^k \right) x^n =: \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, x^n \,.$$

Satz 4: *Sei $g(y) = \sum_0^\infty b_k\, y^k$ eine Reihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und $f(x) = \sum a_n\, x^n$. Existiert für $f(x)$ ein positives ρ mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, \rho^n < R \,,$$

so besitzt die Funktion $h = g \circ f$ eine Potenzreihenentwicklung die mindestens für $|x| \leq \rho$ gültig ist:

$$h(x) = g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\, x^n$$ [17]

4.2.3 Anwendung auf die Reihe W

Bei der Substitution formaler Potenzreihen wird das Konvergenzverhalten vorerst außer Acht gelassen. Dieses wird erst Thema des nächsten Kapitels sein.
Wie wir gerade gesehen haben ist für die einzusetzende Reihe $f(x)$ jedoch vorausgesetzt, dass das nullte Glied betragsmäßig kleiner ist als der Konvergenzradius der Reihe $g(x)$. Deshalb können nur Reihen verwendet werden, deren nulltes Glied gleich Null ist - wenn über die Konvergenz von g nichts bekannt ist.

Am Ende dieses Abschnitts und vor allem im nächsten Kapitel wird vermehrt das Symbol „$\prec$“ auftauchen. Dieses kennzeichnet die Majorantenmethode und kann auch als „$<_M$“ dargestellt werden.
Am Beispiel zweier formal gebildeter Potenzreihen

$$f = \sum_l a_{l_1 \dots l_m} x_1^{l_1} \cdot \dots \cdot x_m^{l_m} \ , \quad g = \sum_l b_{l_1 \dots l_m} x_1^{l_1} \cdot \dots \cdot x_m^{l_m}$$

bedeutet $f \prec g$, dass g für

$$|a_{l_1 \dots l_m}| \leq b_{l_1 \dots l_m} \ , \quad l \in (\mathbb{N}_0)^m$$

Majorante zu f ist, sodass also insbesondere die Koeffizienten von g sämtlich reell und nichtnegativ sind. [8]

Im Folgenden beschränken wir uns auf eine Variable.

Dazu sei $\widetilde{W}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_l \; x^l$ die Potenzreihe, die in

$$f(x, \widetilde{W}) = \sum_{\substack{i,j=0, \\ i+j \geq 1}} f_{ij} \, x^i \, \widetilde{W}^j \tag{4.1}$$

eingesetzt werden soll.

Wir berechnen zunächst

$$\left(\widetilde{W}(x)\right)^j = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_l \, x^l\right)^j = \sum_{l=j}^{\infty} \left(\sum_{\substack{p_1, \dots, p_j \geq 1, \\ p_1 + \dots + p_j = l}} \tilde{\gamma}_{p_1} \cdot \dots \cdot \tilde{\gamma}_{p_j} \right) x^l \ ;$$

wobei die Summe in der Klammer der rechten Seite endlich ist wegen $p_n \geq 1$.

Setzt man jetzt $\left(\widetilde{W}(x)\right)^j$ in (4.1) ein, ist

$$\begin{aligned} f(x,\widetilde{W}(x)) &= \sum_{\substack{i,j=0,\\ i+j\geq 1}} f_{ij}\, x^i \sum_{l=j}^{\infty} \left(\sum_{\substack{p_1,\dots,p_j\geq 1,\\ p_1+\dots+p_j=l}} \tilde{\gamma}_{p_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{\gamma}_{p_j} \right) x^l \\ &= \sum_{i=0,j=1}^{\infty} f_{ij}\, x^i \sum_{l=j}^{\infty} \left(\sum_{\substack{p_1,\dots,p_j\geq 1,\\ p_1+\dots+p_j=l}} \tilde{\gamma}_{p_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{\gamma}_{p_j} \right) x^l + \sum_{i=1}^{\infty} f_{i0}\, x^i \quad . \end{aligned}$$

Der rechte Summand ergibt sich hierbei durch $j = 0$.

Nun wird nach den Potenzen von x sortiert:

$$f(x,\widetilde{W}(x)) = \sum_{i=0,l=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{l} f_{ij} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_j\geq 1,\\ p_1+\dots+p_j=l}} \tilde{\gamma}_{p_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{\gamma}_{p_j} \right)}_{\text{endliche Summe, da } 1\leq j\leq l} x^{i+l} + \sum_{i=1}^{\infty} f_{i0}\, x^i$$

[13]

Zur Verdeutlichung der Forderung $\tilde{\gamma}_0 = 0$ bei der Substitution in (4.1) betrachten wir kurz den Fall $l = 1$ mit $\tilde{\gamma}_0$ nicht notwendig gleich Null:
Genau ein p_n hat dann den Wert 1, alle anderen p_n sind Null. Da immer genau ein $p_n = 1$ ist, ergibt sich für den Koeffizienten von x

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_{0j} \sum_{n=1}^{j} \tilde{\gamma}_{p_n=1} \tilde{\gamma}_0^{j-1} \quad .$$

Daraus folgt nun aber, dass es sich bei dem Koeffizienten von x um eine unendliche Reihe handelt, deren Konvergenzverhalten nicht bekannt ist.
Andernfalls, also für $\tilde{\gamma}_0 = 0$, erhält man für $j = l = 1$ den Term $f_{01}\tilde{\gamma}_1$ und es ergibt sich $\sum_{\substack{p_1,\dots,p_j\geq 1,\\ p_1+\dots+p_j=l}} \tilde{\gamma}_{p_1}\cdot\ldots\cdot\tilde{\gamma}_{p_j} = 0$ für $j > l$, da es sich dann um eine leere Summe handelt. [8]

Wir bezeichnen nun obige Reihe folgendermaßen:

$$f(x, \widetilde{W}(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\tilde{\gamma}_p, 1 \leq p \leq k)\, x^k + P_0$$

Für $k \geq 1$ ist P_k damit definiert als

$$P_k\,(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_k) = \sum_{\substack{i,l,i+l=k \\ i\geq 0, l\geq 1}} \sum_{j=1}^{l} f_{ij} \sum_{\substack{p_1,...,p_j\geq 1, \\ p_1+...+p_j=l}} \tilde{\gamma}_{p_1} \cdot ... \cdot \tilde{\gamma}_{p_j} + f_{k0} \tag{4.2}$$

mit $P_0 = f_{00} = 0$.

Es muss jetzt nur noch gezeigt werden, dass das Polynom P_k für $f_{01} = 0$ lediglich von den $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1}$ abhängt:

$$P_k(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1}) := P_k(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1}, \tilde{\gamma}_k) \quad \text{für} \;\; f_{01} = 0.$$

Zur rekursiven Bestimmung von W werden wir $W = f(x, W)$ mit f wie in (4.1) verwenden, doch dazu müssen wir eine zusätzliche Voraussetzung an f stellen.

Satz 5: *Sei (4.1) eine formale Potenzreihe. Ist $f_{01} = 0$, so existiert genau eine formale Potenzreihe $W = W(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \gamma_l\, x^l$, die $W = f(x, W)$ löst.*

Außerdem gelte

Satz 6: *Gegeben sei eine formale Potenzreihe $\widetilde{W} = \widetilde{W}(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_l\, x^l$ mit*

$$\widetilde{W}(x) \prec f(x, \widetilde{W}(x)) \;.$$

Sind zusätzlich $f_{ij} \geq 0$, $f_{01} = 0$, so ist $\widetilde{W} \prec W$, also $\gamma_l \geq |\tilde{\gamma}_l|$.

Es folgt der Beweis der vorigen beiden Sätze.

Beweis: Für $f_{01} = 0$ werden wir jetzt zeigen, dass P_k in (4.2) für $k \geq 2$ nur von den $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1}$ abhängt.
Ist ein $p_j = k$, so folgt sofort $j = 1, l = k, i = 0$ und damit – leere Summen sind gleich Null zu setzen –

$P_k = f_{01}\,\tilde{\gamma}_k + f_{k0} = f_{k0}$, wobei für die Rekursion vorausgesetzt wird, dass $\tilde{\gamma}_1$ bekannt ist.
Wegen $f_{01} = 0$ gilt insbesondere für $k = 1$: $\tilde{\gamma}_1 = P_1 = f_{10}$.
Damit folgt Satz 5, nämlich $\tilde{\gamma}_k = P_k(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1})$.

Da P_k in Satz 6 wegen (4.2) nur Koeffizienten ≥ 0 hat, können wir unsere Behauptung nun durch vollständige Induktion beweisen.
Induktionsanfang: $|\tilde{\gamma}_1| \leq P_1 = \gamma_1$
Induktionsschritt: Für ein $k \geq 2$ sei $|\tilde{\gamma}_1| \leq \gamma_1, ..., |\tilde{\gamma}_{k-1}| \leq \gamma_{k-1}$ als gegeben vorausgesetzt. Dann folgt mit $f_{ij} \geq 0$ aus (4.2)

$$\begin{aligned}\gamma_k &= P_k(\gamma_1, ..., \gamma_{k-1}) = P_k(|\tilde{\gamma}_1|\,, ..., |\tilde{\gamma}_{k-1}|)\\ &\geq |P_k(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{k-1})| = |\tilde{\gamma}_k|\ .\end{aligned}$$

q.e.d. [13]

KAPITEL 5

Die Konvergenz der formalen Reihe

In diesem Abschnitt wollen wir das Konvergenzverhalten der formalen Potenzreihe W aus dem vorigen Kapitel untersuchen. Wie wir gleich sehen werden, ist es dabei möglich und von Vorteil, W zu differenzieren.

5.1 Eine kurze Vorbemerkung

In seinem Buch „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen“ schreibt Konrad Knopp eine Potenzreihe sei im Inneren ihres Konvergenzkreises nicht nur stetig, sondern auch gliedweise und beliebig oft differenzierbar. [6]
Genau diese Eigenschaft werden wir uns für die Untersuchung der Konvergenz zunutze machen. Dazu betrachten wir folgenden

Satz 7: *Hat die Potenzreihe $\sum a_n(z-z_0)^n$ den Konvergenzradius R, so gilt dies auch für die durch gliedweise Differentiation entstandene Reihe $\sum n\, a_n(z-z_0)^{n-1}$.*

Beweis: Die differenzierte Reihe hat den Konvergenzradius

$$R' = \sup \left\{ t \geq 0 : \text{die Folge } \; n\,|a_n|\, t^{n-1} \; \text{ ist beschränkt} \right\} .$$

Mit $n\,|a_n|\, t^{n-1}$ ist die Folge $|a_n|\, t^n$ erst recht beschränkt, deshalb gilt $R' \leq R$.
Für $R \leq R'$ müssen wir lediglich noch zeigen, dass für jedes $r < R$ folgt, dass $r \leq R'$ ist. Dazu wählt man zu r ein s mit $r < s < R$,

sodass die Folge $|a_n|\, s^n$ beschränkt ist.
Dann haben wir:

$$n\,|a_n|\,r^{n-1} = (r^{-1}\,|a_n|\,s^n)\,n\,q^n \quad \text{mit} \;\; q := r\,s^{-1}$$

Wegen $0 < q < 1$ ist $n\,q^n$ eine Nullfolge und damit auch $n\,|a_n|\,r^{n-1}$.
Also erhalten wir $r \leq R'$ und es folgt $R' = R$. q.e.d.

[9]

5.2 Konvergenz der Potenzreihe W

Wie bereits angesprochen können wir die Konvergenz der Reihe W, die mit Termen erster Ordnung beginnt, ohne Einschränkung genauso an der differenzierten Reihe untersuchen. Für diese gilt

$$\frac{dW}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,W) + \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)\,\frac{dW}{dx}(x)\;,$$

denn nach Siegel können wir die Kettenregel für $W = f(x,W)$ anwenden: [11]

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x,W) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,W)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)\frac{dW}{dx}(x)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,W) + \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)\frac{dW}{dx}(x)\end{aligned}$$

Ist nun $\frac{\partial f}{\partial W}(x,W) \neq 1$ im Ring der formalen Potenzreihen, also speziell $\frac{\partial f}{\partial W}(0,0) = f_{01} \neq 1$, so folgt

$$\frac{dW}{dx}(x) - \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)\,\frac{dW}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,W)$$

$$\frac{dW}{dx}(x)\left(1 - \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,W)$$

$$\frac{dW}{dx}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,W)}{1 - \frac{\partial f}{\partial W}(x,W)} \quad \text{mit} \;\; W(0) = 0\;,$$

ebenfalls im Ring der formalen Potenzreihen wie gleich gezeigt wird.

Wird die Konvergenz also für $f_{01} \neq 1$ bewiesen, gilt sie erst recht für $f_{01} = 0$ nach Satz 5 und 6.

Berechnet man die ersten Summanden von $f(x, W)$

$$\begin{aligned} f(x, W) = &\sum_{\substack{i,j=0,\\ i+j\geq 1}} f_{ij} x^i W^j \\ &= f_{01} x^0 W^1 + f_{02} x^0 W^2 + ... + f_{10} x^1 W^0 + f_{20} x^2 W^0 + ... \\ &+ f_{11} x^1 W^1 + f_{22} x^2 W^2 + ... \,, \end{aligned}$$

ordnet diese nach x und W

$$f(x, W) = f_{10}\, x + f_{01}\, W + f_{20}\, x^2 + f_{11}\, xW + f_{02}\, W^2 + ... \tag{5.1}$$

und bildet daraus die partielle Ableitung von $f(x, W)$ nach W

$$\frac{\partial f}{\partial W}(x, W) = f_{01} + f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ... \,,$$

so erhält man für $f_{01} \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{\partial f}{\partial W}(x, W)} &= \frac{1}{1 - (f_{01} + f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ...)} \\ &= \frac{1}{(1 - f_{01}) \cdot \frac{1}{1 - f_{01}}(1 - f_{01} - f_{11}\, x - 2\, f_{02}\, W - ...)} \\ &= \frac{1}{(1 - f_{01})} \cdot \frac{1}{\frac{1 - f_{01} - f_{11}\, x - 2\, f_{02}\, W - ...}{1 - f_{01}}} \end{aligned}$$

und nach der Abspaltung der Terme mit x

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{\partial f}{\partial W}(x, W)} &= \frac{1}{1 - f_{01}} \cdot \frac{1}{\frac{1 - f_{01}}{1 - f_{01}} - \frac{f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ...}{1 - f_{01}}} \\ &= \frac{1}{1 - f_{01}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - f_{01}}(f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ...)} \,. \end{aligned}$$

Jetzt erkennt man, dass der rechte Faktor dieses Produkts einer geometrischen Reihe entspricht:

$$\frac{1}{1-\frac{\partial f}{\partial W}(x,W)} = \frac{1}{1-f_{01}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-f_{01}} \left(f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ... \right) \right)^n \tag{5.2}$$

Nach Satz 5 konvergiert sie, wenn (4.1) konvergiert und $|(f_{11}\, x + 2\, f_{02}\, W + ...)| < |1 - f_{01}|$ ist.

Die Rechnungen in (5.1) und (5.2) haben wir also für $f_{01} \neq 1$ ausgeführt.
Ist nun $f(x, \widetilde{W})$ in $|x| < r, \left|\widetilde{W}\right| < r$ konvergent und beschränkt, dann gilt für ein δ mit $0 < \delta < r$

$$\left| \frac{1}{1-\partial f/\partial \widetilde{W}} \right| \leq \frac{1}{2\,|1-f_{01}|} \;, \quad |x| < \delta, \left|\widetilde{W}\right| < \delta \;.$$

Und schließlich existiert nach dem Existenzsatz von Cauchy (siehe unten) ein $M(\delta) > 0$, sodass gilt

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{1-\partial f/\partial \widetilde{W}} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \left| \frac{1}{1-\partial f/\partial \widetilde{W}} \right| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \frac{1}{2\,|1-f_{01}|} \leq M(\delta) \;. \qquad [13]$$

Für die Verwendung des Existenzsatzes von Cauchy muss jedoch eine kleine Änderung vorgenommen werden.
Da $\frac{\partial f}{\partial x}(x,W)$ ein nicht-autonomes System darstellt, der folgende Satz jedoch die Variable t nicht enthält, muss

$$\dot{x}_k = f_k(t,x) \;, \quad k = 1, ..., m$$

ergänzt werden:

$$\frac{dx_0}{dx} = \dot{x}_0 = 1 = f_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_k = f_k(x_0, x) \;, \quad 0 \leq k \leq m \;.$$

Die rechten Seiten dieser $m+1$ Differentialgleichungen sind nun von t unabhängig.
Für $f_k(x)$ gilt dann: Ist $|f_k(x)| \leq M$, so ist $M \geq 1$. [8]

5.3 Der Existenzsatz von Cauchy

Für $k = 1, ..., m$ sei

$$\dot{x}_k = f_k \tag{5.3}$$

ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung, dessen m gegebene Funktionen $f_k = f_k(x)$ nur von $x_1, ..., x_m$ und nicht von t abhängen. Genügen die f_k in einer reellen Umgebung von $x = \xi$ einer Lipschitz-Bedingung, wissen wir, dass das System (5.3) zu den gegebenen Anfangswerten $x(\tau) = \xi$ genau eine Lösung $x(t)$ besitzt.
Der folgende Satz nun ist eine etwas ausführlichere Version des Satzes *Der Existenzsatz von Cauchy* bei Siegel [11], an den wir sogar noch stärkere Voraussetzungen an die f_k stellen können, sodass die Lösung analytisch ist.

Satz 8: *In einer komplexen Umgebung von $x = \xi$ seien die f_k regulär analytische Funktionen*[1] *der Variablen $x_1, ..., x_m$, etwa im Polyzylinder $|x_k - \xi_k| < r$, mit $k = 1, ..., m$. Man kann jede in $|x_k - \xi_k| < r$, $k = 1, ..., m$ reguläre Funktion, welche in diesem Polyzylinder konvergiert, dort in eine Potenzreihe um $(\xi_1, ..., \xi_m)$ entwickeln. Ist außerdem $|f_k(x)| \leq M$, so ist die durch die Anfangsbedingungen $x_k(\tau) = \xi_k$, $k = 1, ..., m$ festgelegte Lösung $x_k(t)$ von (5.3) in der komplexen Umgebung*

$$|t - \tau| < \frac{r}{(m+1)M}$$

von τ eine regulär-analytische Funktion von t, für die gilt

$$|x_k - \xi_k| < r, \quad k = 1, ..., m\ .$$

1 Man nennt eine Funktion im Punkt x_0 analytisch bzw. regulär, wenn sie sich in der Umgebung von x_0 durch eine Potenzreihe $\sum a_n(x - x_0)^n$ darstellen lässt. [6]

Beweis: Wir ersetzen $x_k,\ f_k,\ t$ durch die Größen $\xi_k + r x_k,\ M\, f_k,\ \tau + M^{-1}\, r\, t$; denn so bleibt das System (5.3) für $\xi_k,\ r,\ M,\ \tau$ mit den Werten $0, 1, 1, 0$ ungeändert. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_k = \xi_k + r\ \tilde{x}_k\ , &\quad \text{d. h.}\ \ \tilde{x}_k = \frac{1}{r}(x_k - \xi_k)\ ; \\ f_k = M\ \tilde{f}_k\ , &\quad \text{d. h.}\ \ \tilde{f}_k = M^{-1} f_k\ ; \\ t = \tau + M^{-1}\ r\ \tilde{t}\ , &\quad \text{d. h.}\ \ \tilde{t} = M\ r^{-1}(t - \tau)\ . \end{aligned}$$

Damit ist $\frac{dx_k}{dt} = f_k(x_i)$ gleichbedeutend mit $M^{-1} r\, \frac{d\tilde{x}_k}{dt} = M^{-1} f_k\,(x_i + r\tilde{x}_i)$, bzw. $\frac{d\tilde{x}_k}{dt} = \tilde{f}_k(\tilde{x}_i),\ k = 1, ..., m,\ \left|\tilde{f}_k\right| \leq 1$ für $|\tilde{x}_k| < 1$.
Da für die komplexen Ableitungen $\frac{d}{dt} = M^{-1}\, r\, \frac{d}{d\tilde{t}}$ ist, müssen wir den Satz lediglich für diese speziellen Werte beweisen.
Um (5.3) jetzt mit den Anfangsbedingungen $x_k(0) = 0$ lösen zu können, machen wir den Potenzreihenansatz

$$x_k = x_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{k,n} t^n, \quad k = 1, ..., m\ ,$$

mit unbestimmten Koeffizienten $\alpha_{k,n}$ und komplexem t. Nach dem Einsetzen in die Differentialgleichungen können die Koeffizienten verglichen werden um so die $\alpha_{k,n}$ zu erhalten.
f_k seien Funktionen der Form

$$f_k = \sum_{l \in (\mathbb{N}_0)^n} a_{k,l_1 \ldots l_m} x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m} \quad (k = 1, ..., m)\ ,$$

mit dem Symbol l unter dem Summenzeichen als Andeutung für die Summation über alle Systeme nichtnegativer ganzer $l_1, ..., l_m$.

Zur Abkürzung und besseren Übersichtlichkeit benutzen wir nun folgende Bezeichnung:
Sei

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k$$

eine formal gebildete Potenzreihe, deren Konvergenzverhalten nicht bekannt zu sein braucht.

Für diese sei

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\, t^k, \quad (\varphi)_n = c_n \quad (n = 0, 1, 2, ...)\ ,$$

sodass $(\varphi)_n = (\varphi_n)_n$, $(\varphi\psi)_n = (\varphi_n\psi_n)_n$ und $(\varphi \pm \psi)_n = (\varphi_n \pm \psi_n)_n$, wobei auch ψ eine formale Potenzreihe in t darstelle.

D. h., für $\dot{x}_k = f_k$ erhalten wir bei Koeffizientenvergleich unter Anwendung der Rechenregeln für $(\varphi)_n$

$$(n+1)\ \alpha_{k,n+1} = \sum_{l} a_{k,l_1...l_m}(x_1^{l_1} \cdot ... \cdot x_m^{l_m})_n \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

$$= \sum_{l} a_{k,l_1...l_m}(x_{1n}^{l_1} \cdot ... \cdot x_{mn}^{l_m})_n \tag{5.4}$$

mit $\quad x_{1n}^{l_1} \cdot ... \cdot x_{mn}^{l_m} = 1 \quad$ für $\quad l_1 = ... = l_m = 0.$

Durch vollständige Induktion über n werden wir jetzt zeigen, dass die $\alpha_{k,n}$ Polynome der $a_{r,l_1...l_m}$ $(r = 1, ..., m)$ mit nichtnegativen rationalen Koeffizienten sind.
Für $n = 0$ und damit $\xi = 0, \tau = 0$, gilt $\alpha_{k,0} = 0$, also $\alpha_{k,1} = \alpha_{k,0...0}$.
Die Behauptung gelte nun für alle $\alpha_{k,l}, 1 \leq l \leq n$. Wir wollen sie für $\alpha_{k,n+1}$ beweisen.

$$\alpha_{k,n+1} = \frac{1}{n+1}\ a_{k,0...0} + \\ + \sum_{\substack{(0,...,0) \neq (l_1,...,l_m) \in (\mathbb{N}_0)^m, \\ l_1 + ... + l_m \leq n}} \frac{1}{n+1}\ a_{k,l_1...l_m}(x_1^{l_1} \cdot ... \cdot x_m^{l_m})_n\ .$$

Dieses Ergebnis können wir nur erhalten, weil $\alpha_{k,0} = 0$ ist. Einsetzen von Reihen mit $\alpha_{k,0} \neq 0$ führt zu unlösbaren Rekursionsproblemen.
$(x_1^{l_1} \cdot ... \cdot x_m^{l_m})_n$ in der letzten Summe stellt ein Polynom in den $\alpha_{k,l}, l = 1, ..., n$ dar, mit nichtnegativen ganzzahligen Koeffizienten. Einsetzen der Induktionsvoraussetzung liefert schließlich die Behauptung.

Für den Konvergenzbeweis werden wir nach der Majorantenmethode vorgehen. Dazu seien

$$f = \sum_l a_{l_1 \dots l_m} x_1^{l_1} \cdot \dots \cdot x_m^{l_m} \quad \text{und} \quad g = \textstyle\sum_l b_{l_1 \dots l_m} x_1^{l_1} \cdot \dots \cdot x_m^{l_m}$$

zwei formal gebildete Potenzreihen, die nicht zu konvergieren brauchen. g heißt Majorante von f $(f \prec g)$, wenn ausnahmslos

$$|a_{l_1 \dots l_m}| \leq b_{l_1 \dots l_m}$$

ist, sodass also alle Koeffizienten von g reell und nichtnegativ sind. Sei $f_k \prec g_k$ $(k = 1, ..., m)$, dann müssen wir neben $\dot{x}_k = f_k$ $(k = 1, ..., m)$ auch das Majorantensystem

$$\dot{y}_k = g_k(y) \quad (k = 1, ..., m) \tag{5.5}$$

betrachten. Mit den Anfangswerten $y_k(0) = 0$ kann dieses System ebenfalls formal durch einen Potenzreihenansatz

$$y_k = y_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{k,n}\, t^n$$

gelöst werden. Auch hier sieht man sofort $\beta_{k,0} = 0$. Nun stellen wir die Behauptung auf, dass dann auch $y_k(t)$ Majorante von $x_k(t)$ sein muss, also

$$|\alpha_{k,\nu}| \leq \beta_{k,\nu} \quad k = 1, ..., m;\ \nu = 1, 2, \dots\,. \tag{5.6}$$

Die Koeffizienten $b_{k,l_1 \dots l_m}$ von g_k sind nichtnegativ, weshalb sich aus den entsprechenden Rekursionsformeln (5.4) ergibt:

$$(n+1)\, \beta_{k,n+1} = \sum_l b_{k,l_1 \dots l_m} (y_{1n}^{l_1} \cdot \dots \cdot y_{mn}^{l_m})_n \quad (n = 0, 1, ...)\ ;$$

die $\beta_{k,\nu}$ sind also sämtlich relle nichtnegative Zahlen.
(5.6) kann jetzt mithilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden.
Induktionsanfang: Da $\alpha_{k,0} = \beta_{k,0} = 0$ ist, ist die Behauptung wahr für $\nu = 0$.

Induktionsschritt: Sie sei nun bewiesen für die Indizes $\nu \leq n$, sodass $x_{kn} \prec y_{kn}$ ist. Für $\nu = n+1$ mit

$$\begin{aligned}(n+1)\left|\alpha_{k,n+1}\right| &\leq \sum_l \left|a_{k,l_1\ldots l_m}\right| \left|(x_{1n}^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_{mn}^{l_m})_n\right| \\ &\leq \sum_l b_{k,l_1\ldots l_m}(y_{1n}^{l_1} \cdot \ldots \cdot y_{mn}^{l_m})_n = (n+1)\beta_{k,n+1}\end{aligned}$$

folgt schließlich (5.6) und $x_k \prec y_k$ ist gezeigt.

Damit reicht es also, eine solche Majorante g_k von f_k zu finden, dass das neue System (5.5) integriert werden kann. Außerdem können dann die im Satz behaupteten Abschätzungen für seine Lösung bewiesen werden. Aus der Voraussetzung $|f_k| \leq 1$ im Polyzylinder $|z_1| < 1, \ldots, |z_m| < 1$ folgt mit $R \in (0{,}1)$ aus dem Cauchyschen Integralsatz

$$a_{k,l_1\ldots l_m} = \frac{1}{(2\pi i)^m} - \int\limits_{|\zeta_1|=R} \ldots \int\limits_{|\zeta_m|=R} \frac{f_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_m)d\zeta_1\ldots d\zeta_m}{\zeta_1^{l_1+1} \cdot \ldots \cdot \zeta_m^{l_m+1}}$$

die Ungleichung

$$|a_{k,l_1\ldots l_m}| \leq \frac{1}{R^{l_1+\ldots+l_m}}\ ;$$

bzw. mit $R \to 1$ sogar $|a_{k,l_1\ldots l_m}| \leq 1$ wie im Falle einer Variablen. Die spezielle, von k unabhängige Potenzreihe

$$g(x) = g_k(x) = \sum_l x_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{l_m} = \prod_{p=1}^{m} (1-x_p)^{-1}$$

ergibt deshalb eine Majorante von $f_k(x)$. Die Lösung des Systems

$$\begin{aligned}\dot{y}_k &= g(y)\ ,\quad y_k(0) = 0 \\ g(y) &= \prod_{p=1}^{m}(1-y_p)^{-1}\ ,\quad (k = 1,\ldots,m)\end{aligned}$$

erhalten wir, indem für y_k die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung eingesetzt wird:

$$\dot{y} = (1-y)^{-m} \ , \ \ y(0) = 0$$

Und für die direkte Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} &1-(1-y)^{m+1} = (m+1)t \ , \\ &y = 1-(1-(m+1)t)^{\frac{1}{m+1}} \ . \end{aligned}$$

Für die Potenzreihenentwicklung der Funktion $1-y$ gilt dann mit

$$\binom{\frac{1}{m+1}}{n} = \prod_{l=1}^{n} \frac{\frac{1}{m+1} - l + 1}{l}$$

und falls $\mathrm{Re}(1-(m+1)t) > 0$:

$$(1-(m+1)t)^{\frac{1}{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{m+1}}{n} (-1)^n \left((m+1)t\right)^n \ .$$

Die zugehörige Potenzreihe konvergiert für $|t| < (m+1)^{-1}$. In diesem Kreis haben wir also

$$|y| \leq 1-(1-(m+1)\,|t|)^{\frac{1}{m+1}} < 1$$

und damit erst recht $|x_k(t)| < 1$. Für die $x_k(t)$ erfüllen die rekursiv erhaltenen formalen Potenzreihen das System $\dot{x}_k = f_k$ $(k = 1, ..., m)$ formal. Da diese Potenzreihen außerdem für $|t| < (m+1)^{-1}$ konvergieren, sind die Lösungen des gegebenen Systems von Differentialgleichungen genau die durch diese Potenzreihen dort dargestellten Funktionen. [8]

KAPITEL 6

Die Majorantenmethode von Carl Ludwig Siegel

Carl Ludwig Siegel war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts und wurde für seine entscheidenden Beiträge zur Zahlentheorie, zur Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher und zur Himmelsmechanik bekannt. Im Bereich der Himmelsmechanik beschäftigte er sich zunächst mit dem Dreikörperproblem und dem Dreierstoß, untersuchte hierbei insbesondere periodische Lösungen und wie sich Differentialgleichungen in der Nähe von Gleichgewichtslösungen verhalten. Zu diesem und zum Problem der Stabilität der Lösung von Differentialgleichungen konnte Siegel u. a. mit Methoden aus der komplexen Funktionentheorie wichtige Resultate liefern. [4]

6.1 Beispiele nach C. L. Siegel

In dieser Sektion werden wir die Siegelsche Beweismethode zur Konvergenz von Potenzreihen betrachten: die Majorantenmethode.
In seinem Buch „Vorlesungen über Himmelsmechanik“ zeigt C. L. Siegel mehrere Beispiele dazu auf, die in den beiden Kapiteln *Periodische Lösungen* und *Das Stabilitätsproblem* zu finden sind. Diese werden hier allerdings – bis auf eines – nicht genauer untersucht, es wird lediglich angegeben wo diese zu finden sind.

Im Bereich der periodischen Lösungen führt Siegel nach einer Einführung auf Seite 90 – 92 in „Der Konvergenzbeweis“ die Beispiele „Das Hillsche Problem“ auf Seite 110 und „Der Birkhoffsche Fixpunktsatz“ auf Seite 153 f. an. [11]

In dem 15 Jahre später erschienenen Band von Siegel und Jürgen K. Moser „Lectures on Celestial Mechanics“, der auf englisch erschien und eine Erweiterung der Himmelsmechanik darstellt, findet man im Kapitel *Periodic Solutions* neben den bereits genannten ein weiteres Beispiel der Majorantenmethode: „Area-Preserving Analytic Transformations“ (“Inhaltstreue analytische Transformationen“) auf Seite 167 – 169. Die obigen Anwendungen finden sich im englischen Band unter „The Convergence Proof“ auf Seite 111 – 113, „Hill's Problem“ auf Seite 131 und unter „The Birkhoff Fixed-Point Theorem“ auf Seite 179. [12]

6.2 Die Siegelsche Majorantenmethode

„Der Satz von Ljapunov“ („The Theorem of Liapunov“) ist das einzige Beispiel zu dieser Methode, das Siegel im Kapitel *Das Stabilitätsproblem* (*Stability*) anführt, sowohl in der deutschen als auch in der englischen Version. Im Buch „Vorlesungen über Himmelsmechanik“ findet es sich auf Seite 181, in „Lectures on Celestial Mechanics“ auf Seite 205, und beschreibt die Theorie von Ljapunov. Den Abschnitt mit dem Beweis der Konvergenz werden wir jetzt etwas genauer betrachten. [11]

Satz 9: *Gegeben ist die formale Potenzreihe*

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n = a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + ...$$

mit $\psi(0) = 0$ *und* $c_3, c_4 > 0$[1]*, die folgende Gleichung erfüllt :*

$$x\, \psi_x = (1 + \psi_x) \frac{c_3 (x + \psi)^2}{1 - c_4 (x + \psi)} \tag{6.1}$$

Dann ist $a_1 = 0$ *und die Reihe für* ψ *konvergiert kga in einem Intervall* $|x| < \delta$*.*

1 siehe Seite 167 desselben Buches

Beweis: Als erstes wollen wir $a_1 = 0$ zeigen. Dazu bilden wir die Ableitung

$$\psi_x = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + ...$$

und setzen diese und die Reihe ψ in (6.1) ein

$$\begin{aligned} &a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + ... = \\ &= (1 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...) \cdot \frac{c_3[(a_1+1)x + a_2 x^2 + ...]^2}{1 - c_4[(a_1+1)x + a_2 x^2 + ...]} \;. \end{aligned}$$

Durch Umformen

$$\begin{aligned} &(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + ...) \cdot (1 - c_4[(a_1+1)x + a_2 x^2 + ...]) = \\ &= (1 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...) \cdot c_3[(a_1+1)^2 x^2 + 2(a_1+1)a_2 x^3 + ...] \end{aligned}$$

und Sortieren nach den Potenzen von x folgt schließlich

$$\begin{aligned} &a_1 x + [2a_2 - c_4 a_1(a_1+1)]x^2 + [3a_3 - 3c_4 a_1 a_2 - 2c_4 a_2]x^3 + ... \\ &= c_3(a_1+1)^3 x^2 + 4c_3(a_1+1)^2 a_2 x^3 + ... \;. \end{aligned}$$

Vergleicht man jetzt die Koeffizienten auf beiden Seiten der Gleichung, erhält man $a_1 = 0$ und mit

$$2a_2 x^2 + (3a_3 - 2c_4 a_2)x^3 + ... = c_3 x^2 + 4c_3 a_2 x^3 + ...$$

außerdem $a_2 = \frac{c_3}{2}$, welches wir später für einen Induktionsbeweis benötigen.
(6.1) beginnt also mit quadratischen Gliedern.

Nun können wir mit der Untersuchung des Konvergenzverhaltens beginnen.

Dazu müssen wir jedoch erst einige Umformungen durchführen:

$$\begin{aligned}
\psi_x \cdot x &= \frac{c_3(x+\psi)^2}{1-c_4(x+\psi)} + \psi_x \cdot \frac{c_3(x+\psi)^2}{1-c_4(x+\psi)} \ , \\
\psi_x \left(x - \frac{c_3(x+\psi)^2}{1-c_4(x+\psi)} \right) &= \frac{c_3(x+\psi)^2}{1-c_4(x+\psi)} \ , \\
\psi_x \left(x - \frac{c_3(x^2+2x\psi+\psi^2)}{1-c_4(x+\psi)} \right) &= \frac{c_3(x^2+2x\psi+\psi^2)}{1-c_4(x+\psi)} \ .
\end{aligned}$$

Teilen wir jetzt beide Seiten durch x und führen die Bezeichnung q ein

$$\psi_x \left(1 - \frac{c_3 x + 2c_3\psi + \frac{c_3}{x}\psi^2}{1-c_4(x+\psi)} \right) = \frac{c_3 x + 2c_3\psi + \frac{c_3}{x}\psi^2}{1-c_4(x+\psi)} =: q \ ,$$

erhalten wir bei Berücksichtigung der Definition der geometrischen Reihe folgende Gleichung:

$$\psi_x = \frac{q}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_3 x + 2c_3\psi + \frac{c_3}{x}\psi^2}{1-c_4(x+\psi)} \right)^{n+1} \tag{6.2}$$

Hier erfolgt ein kleiner Einschub um zu zeigen, dass ψ_x nur nicht-negative Koeffizienten besitzt. Dafür verwenden wir die im vorigen Kapitel bereits dargestellte Beweismethode des Satzes 8 und definieren für eine formale Potenzreihe $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, t^k$

$$\begin{aligned}
\{\varphi\}_n &= \varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_k\, t^k \ , \\
c_n &= (\varphi)_n = (\varphi_n)_n \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir in den folgenden Rechnungen zur besseren Übersichtlichkeit einige Male $\{\varphi\}_n$ statt φ_n benutzen. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\{\varphi + \Psi\}_n = \{\varphi\}_n + \{\Psi\}_n \ , \\
&(\varphi\Psi)_n = (\varphi_n \Psi_n)_n \ , \quad (\varphi \pm \Psi)_n = (\varphi)_n \pm (\Psi)_n
\end{aligned}$$

wenn auch Ψ eine formale Potenzreihe darstellt.

Durch vollständige Induktion wollen wir nun beweisen, dass mit $a = (a_2, ..., a_{n-1})$

$$a_n = P_n(a_2, ..., a_{n-1}) = \sum_{|\lambda| \leq N(n)} c_\lambda \, a^\lambda \quad \text{für} \;\; n \geq 3$$

Polynome der $a_2, ..., a_{n-1}$ mit nichtnegativen rationalen Koeffizienten sind; c_λ sind hierbei Polynome in den Koeffizienten der rechten Potenzreihe (6.2) in $x, \psi, \frac{\psi^2}{x}$ mit Koeffizienten größer oder gleich Null.

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann folgende Gleichung:

$$(m+1)\; a_{m+1} = \sum_{n=0}^{m} \left(c_3^{n+1} \left(\frac{x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}}{1 - c_4(x+\psi)} \right)^{n+1} \right)_m$$

Induktionsanfang: Für $m = 1$ ist die Behauptung wahr, da $2a_2 = c_3$ und $c_3 > 0$ ist.

Induktionsschritt: Die Behauptung sei für alle $a_l, 2 \leq l \leq m$ bewiesen. Zu zeigen ist jetzt, dass auch a_{m+1} die Bedingung erfüllt.

$$\begin{aligned}
&(m+1)\; a_{m+1} = \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left(\left[c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right]^{n+1} \cdot \left[\frac{1}{1 - c_4(x+\psi)} \right]^{n+1} \right)_m \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left(\left[c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right]^{n+1} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} c_4^k (x+\psi)^k \right]^{n+1} \right)_m
\end{aligned}$$

Mit den oben definierten Umformungen folgt daraus

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m} \left(\left\{ \left[c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right]^{n+1} \right\}_m \right)_m \cdot \left(\left\{ \left[\sum_{k=0}^{m} c_4^k (x+\psi)^k \right]^{n+1} \right\}_m \right)_m \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left(\left[\left\{ c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right\}_m \right]^{n+1} \cdot \left[\left\{ \sum_{k=0}^{m} c_4^k (x+\psi)^k \right\}_m \right]^{n+1} \right)_m
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \left(\left[\left\{ c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right\}_m \right]^{n+1} \cdot \left[\sum_{k=0}^{m} \left\{ c_4^k (x+\psi)^k \right\}_m \right]^{n+1} \right)_m$$
$$= \sum_{n=0}^{m} \left(\left[\left\{ c_3(x + 2\psi + \frac{\psi^2}{x}) \right\}_m \right]^{n+1} \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{m} \left\{ c_4^k (x+\psi)^k \right\}_m \right]^{n+1} \right)_m .$$

Wir erhalten also für die Koeffizienten von ψ Polynome in den $a_l,\ l \leq m$ und für die Koeffizienten von $\frac{\psi^2}{x}$ sogar Polynome in den $a_l,\ l < m$ mit nichtnegativen Koeffizienten

$$(m+1)\ a_{m+1} = P_m(a_2, ..., a_m) = \sum_{\lambda_1 + ... + \lambda_m \leq N(n)} p_m a_2^{\lambda_1} \cdot ... \cdot a_m^{\lambda_m}$$

mit $p_m \geq 0$ und $m \geq 3$. q.e.d.

Zurück zum Konvergenzbeweis. Mit der Substitution $\tilde{\Psi} := \frac{1}{x}\,\psi$ erhalten wir für (6.2)

$$\begin{aligned}
\psi_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c_3 x + 2c_3 x\tilde{\Psi} + c_3 x\tilde{\Psi}^2}{1 - c_4 x(1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (c_3 x)^{n+1} \left(\frac{1 + 2\tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^2}{1 - c_4 x(1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (c_3 x)^{n+1} \left(\frac{(1+\tilde{\Psi})^2}{1 - c_4 x(1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1}
\end{aligned}$$

und mit $\psi = x\,\tilde{\Psi}$ gilt:

$$\psi_x = x\,\tilde{\Psi}_x + \tilde{\Psi} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_3 x)^{n+1} \left(\frac{(1+\tilde{\Psi})^2}{1 - c_4 x(1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1}$$

Wie bereits bewiesen, besitzt ψ_x nur nichtnegative Koeffizienten, also auch $x\,\tilde{\Psi}_x$ und $\tilde{\Psi}$ und deshalb folgt

$$\tilde{\Psi} \prec \sum_{n=0}^{\infty} (c_3 x)^{n+1} \left(\frac{(1+\tilde{\Psi})^2}{1 - c_4 x(1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1} =: f(x, \tilde{\Psi}) .$$

Für die Funktion $f(x, \tilde{\Psi})$ kann man auch schreiben:

$$\begin{aligned} f(x, \tilde{\Psi}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_3 x (1+\tilde{\Psi})^2 \frac{1}{1 - c_4 x (1+\tilde{\Psi})} \right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_3 x (1+\tilde{\Psi})^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_4^k x^k (1+\tilde{\Psi})^k \right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_3 c_4^k x^{k+1} (1+\tilde{\Psi})^{k+2} \right)^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (c_3 x + 2 c_3 x \tilde{\Psi} + c_3 x \tilde{\Psi}^2 + c_3 c_4 x^2 + 3 c_3 c_4 x^2 \tilde{\Psi} + ...)^{n+1} \end{aligned}$$

Ist f aber eine formale Potenzreihe wie im vorigen Kapitel definiert

$$f(x, \tilde{\Psi}) = \sum_{\substack{i,j=0, \\ i+j \geq 1}} f_{ij} x^i \tilde{\Psi}^j = f_{10} x + f_{01} \tilde{\Psi} + f_{20} x^2 + f_{11} x \tilde{\Psi} + f_{02} \tilde{\Psi}^2 + \ldots ,$$

erkennen wir, da jeder einzelne Term von x abhängt und deshalb kein Term mit $\tilde{\Psi}$ allein existiert, dass $f_{01} = 0$ sein muss.

Im Polyzylinder $|x| < \frac{1}{4\,(c_4+c_3)}$, $\left|\tilde{\Psi}\right| < 1$ ist die Reihe also für f mit $f_{01} = 0$ kga konvergent.
$\Psi = f(x, \Psi)$ hat daher nach Satz 5 und Kapitel 5.2 genau eine Lösung $\Psi = \Psi(x)$, welche in einem Intervall $|x| < \delta$ kga konvergent ist und in $x = 0$ verschwindet. Sie ist eine Majorante für $\tilde{\Psi}$, daher ist $x\Psi$ eine Majorante von ψ. q.e.d. [13]

KAPITEL 7

Die Methode der formalen Fourier-Reihen am Beispiel einer Abelschen und einer linearen Differentialgleichung

Im Gegensatz zu den vorigen Kapiteln, in denen eingehend die formalen Potenzreihen behandelt wurden, wollen wir nun die formalen Fourierreihen betrachten. Diese trigonometrischen Reihen wurden nach dem französischen Mathematiker J. B. Fourier benannt, der sie zur Lösung von Randwertaufgaben der mathematischen Physik benutzte. Die folgenden Integrale für die Darstellung der Fourierkoeffizienten traten allerdings schon bei Leonhard Euler auf, der sich im 18. Jahrhundert mit dem Problem der Darstellung einer stetigen Funktion als Grenzwert einer trigonometrischen Reihe beschäftigte. [7]

7.1 Fourierreihen

Eine reelle trigonometrische Reihe oder Fourier-Reihe wird dargestellt in der Form $\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$, eine komplexe in der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{int} := \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} c_n\, e^{int} \,.$$

Stellt man die reelle Fourier-Reihe als komplexe dar, so sind die Koeffizienten durch die Gleichungen $c_0 = \frac{1}{2}\,a_0,\;\; c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - ib_n),\;\; c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + ib_n)$ mit $n = 1, 2, 3, ...$ gekoppelt. Damit gilt

$$a_n\, \cos(nt) + b_n\, \sin(nt) = c_n\, e^{int} + c_{-n}\, e^{-int} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

und wir sehen, dass die p-ten Teilsummen der beiden Reihen identisch sind:

$$s_p(t) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{n=1}^{p}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) = \sum_{n=-p}^{p} c_n\,e^{int}$$

Die in $\mathbb{R}$ definierten 2π-periodischen Funktionen f, die in $\mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar bzw. über $[-\pi,\pi]$ Riemann-integrierbar sind, bilden die Klasse C_π^k bzw. L_π. Für eine Funktion $f \in L_\pi$ heißen dann

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt && (n \geq 0)\ , \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin(nt)\,dt && (n \geq 1)\ , \\ c_n &= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt && (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Euler-Fouriersche Formeln, die a_n, b_n bzw. c_n Fourierkoeffizienten von f. Im komplexen Fall sind diese Koeffizienten aus $\mathbb{C}$.
Die mit diesen Koeffizienten gebildete trigonometrische Reihe wird die von f erzeugte (formale) Fourierreihe genannt.
Allerdings ist dabei zunächst nichts über die Konvergenz der Reihe bekannt, wie auch über den Zusammenhang zwischen f und der von f erzeugten Fourierreihe. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{int} = c$ sagt lediglich aus, dass die Fourierreihe an der Stelle t gegen c konvergiert. [16]

Für die Untersuchung der Konvergenz einer Fourierreihe reicht es, das Intervall $I = [-\pi,\pi]$ zu betrachten. Aufgrund der Periodizität ihrer Glieder konvergiert die in $x_0 \in I$ konvergente Fourierreihe ebenfalls an allen Stellen $x_0 + 2\pi k$ für $k = \pm 1, \pm 2, \dots$. Stellt nun die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ diese Funktion in I dar, so ist sie auch die periodische Fortsetzung von $f(x)$ für alle x.

Definition 5: Soll eine Funktion $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ in einem Intervall I der Länge 2π in eine Fourierreihe entwickelt werden, so wird diese außerhalb von I durch periodische Fortsetzung definiert und es gilt $f(-\pi) = f(\pi)$.

Eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz der Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ stellt folgender Satz dar: [10]

Satz 10: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, dann gilt:*
1. Für $[-\pi, \pi] = \cup_{\nu=1}^{N} [x_{\nu-1}, x_\nu]$ sei f in $]x_{\nu-1}, x_\nu[$ stetig und monoton. Existieren nun $f(-\pi + 0)$, $f(\pi - 0)$ und für ν, $1 \leq \nu \leq N - 1$ außerdem $f(x_\nu - 0)$ und $f(x_\nu + 0)$, so folgt die Konvergenz der Fourierreihe von $f(x)$ mit der Summe

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \left(f(x - 0) + f(x + 0) \right)$$

in allen x.
2. Sei f stetig, das Intervall $[-\pi, \pi]$ die Vereinigung einer endlichen Anzahl von Teilintervallen wie in (1) und f differenzierbar in $]x_{\nu-1}, x_\nu[$. Ist weiterhin f' in $]x_{\nu-1}, x_\nu[$ stetig und die Existenz von $f(-\pi + 0)$, $f(\pi - 0)$ und $f(x_\nu - 0)$, $f(x_\nu + 0)$ für ν, $1 \leq \nu \leq N - 1$ gegeben, so konvergiert die Summe s_n in $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen f. [14]

7.2 Die Abelsche Differentialgleichung

Wir wenden uns nun einer speziellen gewöhnlichen Differentialgleichung zu, der abelschen Differentialgleichung. Man unterscheidet hierbei die folgenden zwei Fälle:
Die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = f_0(x) + f_1(x)\, y(x) + f_2(x)\, y^2(x) + f_3(x)\, y^3(x)$$

mit Funktionen f_0, f_1, f_2, f_3 heißt abelsche Differentialgleichung erster Art.
Abelsche Differentialgleichungen zweiter Art werden mit weiteren Funktionen g_0, g_1 gebildet, so dass

$$(g_0(x) + g_1(x)\, y(x))\, y'(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k(x)\, y^k(x)\ .$$

Die abelsche Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht geschlossen integrierbar, nur zu einzelnen Spezialfällen konnte Abel Lösungen finden. [18]

Im Folgenden werden wir eine abelsche Differentialgleichung erster Art betrachten. Für diese sei $f_0(x) := a_0(x)$, $f_1(x) \equiv 0 \equiv f_2(x)$ und $f_3(x) = 1$, sodass wir $y' = a_0(x) + y^3, \; x \in [0, 2\pi]$ erhalten.
$a_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei eine 2π-periodische Funktion mit

$$a_0(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^0 \, e^{ilx} \quad \text{und} \quad a_l^0 = \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_0(x) \, e^{-ilx} \, dx \; .$$

Setzen wir für y

$$y(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx} \; , \tag{7.1}$$

so ergibt sich für die Differentialgleichung

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx} \right)' = \sum_{l=1}^{\infty} i \, l \, \tilde{a}_l \, e^{ilx} = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^0 \, e^{ilx} + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx} \right)^3 \; .$$

Den zweiten Summanden können wir bei geeigneten Konvergenzeigenschaften mithilfe des Satzes von Cauchy berechnen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx} \right)^3 &= \left(\sum_{l=2}^{\infty} \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2=l \\ \kappa_1,\kappa_2 \geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, e^{ilx} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx} \right) \\ &= \sum_{l=3}^{\infty} \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, \tilde{a}_{\kappa_3} \, e^{ilx} \; , \end{aligned}$$

sodass sich die Koeffizientengleichung

$$i \, l \, \tilde{a}_l = a_l^0 + \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, \tilde{a}_{\kappa_3} \; , \quad l \geq 3 \tag{7.2}$$

ergibt. Für $l = 1, 2$ sei

$$\tilde{a}_1 = -i \, a_1^0 \, , \quad \tilde{a}_2 = -\frac{i}{2} \, a_2^0$$

gegeben. Die $\tilde{a}_l$ sind durch (7.2) eindeutig bestimmt und so erhalten wir als Lösung von $y' = a_0 + y^3$ die formale Fourierreihe (7.1).

Bemerkung: $y(x)$ stellt eine abgeschnittene komplexe Fourierreihe dar. Nur der positive Teil der Fourierreihe $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_l \, e^{ilx}$ liefert die obige Rekursionsgleichung für die Koeffizienten.

Für die Bestimmung der Konvergenz benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1: *Es gilt*

$$\sum_{l=1}^{N} |l \, \tilde{a}_l| \leq \sum_{l=1}^{N} \left| a_l^0 \right| + \left(\sum_{l=1}^{N-2} |\tilde{a}_l| \right)^3 \; .$$

Beweis: Der Satz kann durch Verwendung von (7.2) bewiesen werden. Und da wir außerdem wissen, dass

$$\sum_{l=3}^{N} \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \geq 1}} |\tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, \tilde{a}_{\kappa_3}| \leq \sum_{\substack{1 \leq \kappa_1 \leq N-2, \\ 1 \leq \kappa_2 \leq N-2, \\ 1 \leq \kappa_3 \leq N-2}} |\tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, \tilde{a}_{\kappa_3}|$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{N} |l \, \tilde{a}_l| &= \sum_{l=1}^{2} |l \, \tilde{a}_l| + \sum_{l=3}^{N} \underbrace{|l \, \tilde{a}_l|}_{|i \, l \, \tilde{a}_l|} \\ &= |1 \underbrace{\tilde{a}_1}_{-i \, a_1^0}| + |2 \underbrace{\tilde{a}_2}_{-\frac{i}{2} \, a_2^0}| + \sum_{l=3}^{N} \left| a_l^0 + \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1} \, \tilde{a}_{\kappa_2} \, \tilde{a}_{\kappa_3} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left|a_1^0\right| + \left|a_2^0\right| + \sum_{l=3}^{N} \left|a_l^0\right| + \sum_{l=3}^{N} \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} |\tilde{a}_{\kappa_1}\, \tilde{a}_{\kappa_2}\, \tilde{a}_{\kappa_3}| \\
&= \sum_{l=1}^{N} \left|a_l^0\right| + \sum_{l=3}^{N} \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} |\tilde{a}_{\kappa_1}\, \tilde{a}_{\kappa_2}\, \tilde{a}_{\kappa_3}| \\
&\leq \sum_{l=1}^{N} \left|a_l^0\right| + \sum_{\substack{1\leq\kappa_1\leq N-2, \\ 1\leq\kappa_2\leq N-2, \\ 1\leq\kappa_3\leq N-2}} |\tilde{a}_{\kappa_1}\, \tilde{a}_{\kappa_2}\, \tilde{a}_{\kappa_3}| \\
&= \sum_{l=1}^{N} \left|a_l^0\right| + \left(\sum_{l=1}^{N-2} |\tilde{a}_l|\right)^3 .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Es liegt also nahe, die Differentialgleichung $y' = a_0 + y^3$ in der Klasse (7.1) mit $\sum_{l=1}^{\infty} |l\, \tilde{a}_l| < +\infty$ zu lösen.

Hilfssatz 2: *Sei $c(1), c(2), ...$ eine Folge nichtnegativer Zahlen und es gebe ein $\varepsilon \in \,]0,\infty[$ und ein $\rho \in [0,1]$ mit*

$$\left|a_l^0\right| \leq \rho\, l\, c(l)\, \varepsilon^l \quad \textit{und} \quad \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} c(\kappa_1)c(\kappa_2)c(\kappa_3) \leq (1-\rho)\, l\, c(l) \; .$$

Dann folgt die Beziehung

$$|l\, \tilde{a}_l| \leq l\, c(l)\, \varepsilon^l$$

für die $\tilde{a}_l$ aus Hilfssatz 1.

Beweis: Diesen Satz werden wir durch Induktion über l verifizieren. Induktionsanfang: Für $l = 1, 2$ ist wegen $\rho \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|\tilde{a}_1| &= \left|a_1^0\right| \leq \rho\, c(1)\, \varepsilon \leq c(1)\, \varepsilon, \\
|\tilde{a}_2| &= \frac{1}{2}\left|a_2^0\right| \leq \frac{1}{2} \cdot \rho\, 2\, c(2)\, \varepsilon^2 = \rho\, c(2)\, \varepsilon^2 \leq c(2)\, \varepsilon^2 \; .
\end{aligned}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung und (7.2) ergibt sich für $l \geq 3$

$$\begin{aligned}
|l\,\tilde{a}_l| = |i\,l\,\tilde{a}_l| &= \left| a_l^0 + \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1}\,\tilde{a}_{\kappa_2}\,\tilde{a}_{\kappa_3} \right| \\
&\leq \left| a_l^0 \right| + \left| \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} \tilde{a}_{\kappa_1}\,\tilde{a}_{\kappa_2}\,\tilde{a}_{\kappa_3} \right| \\
&\leq \rho\,l\,c(l)\,\varepsilon^l + \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} |\tilde{a}_{\kappa_1}|\;|\tilde{a}_{\kappa_2}|\;|\tilde{a}_{\kappa_3}| \\
&\leq \rho\,l\,c(l)\,\varepsilon^l + \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} c_{\kappa_1}\,c_{\kappa_2}\,c_{\kappa_3}\,\varepsilon^l \\
&\leq \rho\,l\,c(l)\,\varepsilon^l + (1-\rho)\,l\,c(l)\,\varepsilon^l \\
&= \rho\,l\,c(l)\,\varepsilon^l + l\,c(l)\,\varepsilon^l - \rho\,l\,c(l)\,\varepsilon^l = l\,c(l)\,\varepsilon^l\ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 11: *Für eine Folge $c(1), c(2), ...$ wie in Hilfssatz 2 sei $\sum_{l=1}^{\infty} l\,c(l)\,\varepsilon^l < \infty$. Dann besitzt die Differentialgleichung $y' = a_0(x) + y^3$ eine 2π-periodische stetig differenzierbare Lösung.*

Beweis: Nach dem vorigen Hilfssatz gilt $|l\,\tilde{a}_l| \leq l\,c(l)\,\varepsilon^l$. Daraus können wir schließen, dass die Reihe (7.1), also $y(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l\,e^{ilx}$, mitsamt der Reihe der gliedweise gebildeten Ableitungen absolut und vor allem gleichmäßig in $[0, 2\pi]$ konvergiert. q.e.d.

Die Richtigkeit des Satzes 11 lässt sich zeigen, indem hilfsweise eine komplexe gewöhnliche Differentialgleichung mit singulären Koeffizienten gelöst wird: $y' = 2\,A + 2\,\frac{y^3}{z}$

Diese weist eine Singularität[1] der Koeffizienten in $z = 0$ auf, weshalb wir zur Lösung einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz wählen. [3]

Hilfssatz 3: *Für eine in $|z| < \hat{\delta}$ konvergente Potenzreihe*

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\hat{a}}_n \, z^n \;, \quad z \in \mathbb{C}$$

sei $\hat{\hat{a}}_n \geq 0$*, also insbesondere reell. Ist außerdem* A *in* $|z| < \hat{\delta}$ *beschränkt,* $\hat{\hat{A}} = \sup_{|z|<\hat{\delta}} |A(z)|$ *und* $\hat{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\hat{\eta}}}{(2\,\hat{\hat{A}}+2\,\hat{\eta})^{3/2}}$ *mit* $\hat{\eta} > 0$*, so hat*

$$y' = 2\,A + 2\,\frac{y^3}{z} \;, \quad y(0) = 0 \tag{7.3}$$

genau eine holomorphe Lösung

$$y(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \, z^n$$

in $|z| < \min(\hat{\varepsilon}, \hat{\delta})$*. Die Koeffizienten sind nichtnegativ und insbesondere reell. Es gilt insbesondere*

$$n\,\hat{a}_n = 2\,\hat{\hat{a}}_{n-1} + 2 \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=n \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \in \mathbb{N}_0}} \hat{a}_{\kappa_1}\,\hat{a}_{\kappa_2}\,\hat{a}_{\kappa_3} \quad \text{für } n \geq 1 \;, \tag{7.4}$$

$$n\,\hat{a}_n = 2\,\hat{\hat{a}}_{n-1} + 2 \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=n \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \in \mathbb{N}}} \hat{a}_{\kappa_1}\,\hat{a}_{\kappa_2}\,\hat{a}_{\kappa_3} \quad \text{für } n \geq 3 \tag{7.5}$$

mit den Anfangswerten $\hat{a}_1 = 2\,\hat{\hat{a}}_0$ *und* $\hat{a}_2 = \hat{\hat{a}}_1$*.*

1 Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, die in jedem Punkt von D komplex differenzierbar sind, heißen holomorph. Ist f mit Ausnahme eines Punktes c holomorph in D, so bezeichnet man den Punkt c als isolierte Singularität von f. [9]

Beweis: Die Rekursionsformeln (7.4, 7.5) lassen sich aus $z\,y' = 2\,z\,A + 2\,y^3$ berechnen:

$$z \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n\, z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \hat{a}_n\, z^n = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\hat{a}}_n\, z^{n+1} + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n\, z^n \right)^3$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\hat{a}}_{n-1}\, z^n + 2 \sum_{n=3}^{\infty} (\sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3 = n \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3 \in \mathbb{N}}} \hat{a}_{\kappa_1}\, \hat{a}_{\kappa_2}\, \hat{a}_{\kappa_3})\, z^n \; . \tag{7.6}$$

Um die Frage der Konvergenz zu beantworten, führen wir $\mathcal{C} = \{w \,|\, w \; holomorph \; in \; |z| < \hat{\hat{\varepsilon}} = \min(\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}),\; w(0) = 0,\; \left|\frac{dw}{dz}\right| \leq 2\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})\}$ ein.

Außerdem sei

$$(\mathcal{J}w)(z) := \int_0^z 2\,A(\zeta)\, d\zeta + 2 \int_0^z \frac{w^3(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta \;, \quad w \in \mathcal{C} \; . \tag{7.7}$$

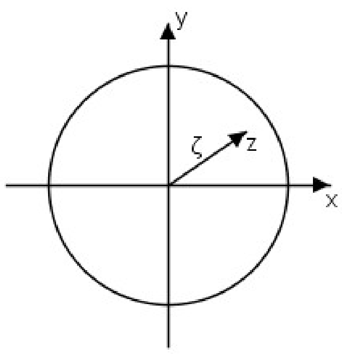

Abbildung 7.1: Graphische Darstellung von ζ

Wegen $\frac{w(z)}{z} = \frac{1}{z} \int_0^z w'(\zeta)\, d\zeta$, $\left|\frac{w(z)}{z}\right| \leq \sup_{|\zeta| < \hat{\hat{\varepsilon}}} |w'(\zeta)|$ gilt nun die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
|(\mathcal{J}w)'(z)| &\leq 2 \sup_{|z|<\hat{\delta}} |A(z)| + 2\,|w(z)|^2 \sup_{|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}} |w'(z)| \\
&\leq 2 \sup_{|z|<\hat{\delta}} |A(z)| + 2\,\underbrace{(|z| \sup_{|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}} |w'(z)|)^2 \sup_{|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}} |w'(z)|}_{(\sup_{|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}} |w'(z)|)^3 |z|^2} \\
&\leq 2\,\hat{\hat{A}} + 2\,(2\,\hat{\hat{A}} + 2\,\hat{\eta})^3\,\hat{\hat{\varepsilon}}^{\,2} \leq 2\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})\;.
\end{aligned}
$$

da $|z| < \hat{\hat{\varepsilon}}$ und $|w'(z)| \leq 2\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})$.
D. h. also, $\mathcal{J}$ bildet $\mathcal{C}$ in sich ab.

Sei jetzt $w_1 = 0$ und $w_{m+1} = \mathcal{J} w_m$ für $m \geq 2$, sodass

$$
\begin{aligned}
&|w_{m+2}(z) - w_{m+1}(z)| = |\mathcal{J} w_{m+1}(z) - \mathcal{J} w_m(z)| \\
&= \left| \int_0^z 2\,A(\zeta)\,d\zeta + 2 \int_0^z \frac{w_{m+1}^3(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta - \left(\int_0^z 2\,A(\zeta)\,d\zeta + 2 \int_0^z \frac{w_m^3(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \right) \right| \\
&= \left| 2 \int_0^z \frac{w_{m+1}^3(\zeta) - w_m^3(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \right|\;.
\end{aligned}
$$

Zerlegen wir den Zähler in seine zwei Faktoren und verwenden die Eigenschaft $|a \cdot b| \leq \frac{1}{2}\,|a|^2 + \frac{1}{2}\,|b|^2$, die sich aus $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ ergibt, so ist

$$
\begin{aligned}
&\left| 2 \int_0^z \frac{w_{m+1}^3(\zeta) - w_m^3(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta \right| \\
&= \left| 2 \int_0^z (w_{m+1}(\zeta) - w_m(\zeta))\,\frac{1}{\zeta}\,(w_{m+1}^2(\zeta) + w_{m+1}(\zeta) w_m(\zeta) + w_m^2(\zeta))\,d\zeta \right| \\
&\leq 3\;|z| \sup_{|\zeta|\leq|z|} |w_{m+1}(\zeta) - w_m(\zeta)|\,\frac{1}{|\zeta|}\,\left(|w_{m+1}(\zeta)|^2 + |w_m(\zeta)|^2 \right) \\
&\leq 3 \sup_{|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}} |w_{m+1}(z) - w_m(z)|\,\underbrace{\left(\left(|z|\,2\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta}) \right)^2 + \left(|z|\,2\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta}) \right)^2 \right)}_{2 \cdot 4\,|z|^2 (\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2}\;,
\end{aligned}
$$

womit wir

$$|w_{m+2}(z) - w_{m+1}(z)| \leq 24\ |z|^2\ (\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2 \cdot \sup_{|z|<\hat{\varepsilon}} |w_{m+1}(z) - w_m(z)|$$

und durch Einsetzen dieser Schranke in das Integral für $z = \zeta$

$$\begin{aligned}
&|w_{m+3}(z) - w_{m+2}(z)| \leq \\
&\leq 24\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2\,|z|^2 \cdot \frac{24\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2\,|z|^2}{4} \cdot \sup_{|z|<\hat{\varepsilon}} |w_{m+1}(z) - w_m(z)|
\end{aligned}$$

erhalten.
Insgesamt folgt nun

$$|w_{m+2}(z) - w_{m+1}(z)| \leq \frac{(24\,(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2\,|z|^2)^m}{m!} \cdot \sup_{|z|<\hat{\varepsilon}} \left| w_2(z) - \underbrace{w_1(z)}_{=0} \right|$$

wie bei Picard-Lindelöf.

Allgemeiner erhalten wir für $k, l \geq 2$ mit $k > l$ aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&|w_k(z) - w_l(z)| \leq \sum_{m=l}^{k-1} |w_{m+1}(z) - w_m(z)| \\
&\leq \sum_{m=l}^{k-1} \frac{(24(\hat{\hat{A}} + \hat{\eta})^2\,|z|^2)^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \sup_{|z|<\hat{\varepsilon}} |w_2(z)|\ .
\end{aligned}$$

Die Folge (w_m) konvergiert in $|z| < \hat{\hat{\varepsilon}}$ gleichmäßig gegen eine holomorphe Lösung w von (7.4); diese ist durch die Rekursionsbeziehungen (7.4, 7.5) eindeutig bestimmt. Aus den Rekursionen folgt auch: w ist in $|z| < \hat{\hat{\varepsilon}}$ reell für reelle Argumente, für alle n gilt $\hat{a}_n \geq 0$. q.e.d.

Bemerkung: Auch für

$$y' = A + \frac{y^m}{z}\ , \quad y(0) = 0\ , \quad m \geq 2$$

mit nichtnegativen Koeffizienten $\hat{a}_n$ der Potenzreihe um 0, die der Rekursion

$$n\,\hat{a}_n = \hat{\hat{a}}_{n-1} + \sum_{\substack{\kappa_1+\ldots+\kappa_m=n \\ \kappa_1,\ldots,\kappa_m\in\mathbb{N}_0}} \hat{a}_{\kappa_1}\cdot\ldots\cdot\hat{a}_{\kappa_m}\ , \quad n\geq 1 \tag{7.8}$$

genügen, liefert diese Methode die holomorphe Lösung in $|z|<\hat{\hat{\varepsilon}}$.
$y' = A+\frac{y^m}{z^l},\ y(0)=0$ für $1\leq l<m$ lässt sich ebenfalls auf diese Weise behandeln.

Doch kehren wir zurück zum Problem der 2π-periodischen komplexen Lösungen von $y'=a_0(x)+y^3$, welche von einer reellen Variablen x abhängen.
Hierzu gilt

Satz 12: *Die Potenzreihe $\sum_{l=1}^{\infty} a_l^0\, z^l$ habe den Konvergenzradius $r>1$. Dann ist $A(z)=\sum_{l=1}^{\infty}|a_l^0|\,z^l$ für $\hat{\delta}$ mit $r>\hat{\delta}>1$ beschränkt. Ist $\hat{\hat{A}}(\hat{\delta})=\sup_{|z|<\hat{\delta}}|A(z)|$ und*

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\hat{\eta}}}{(2\,\hat{\hat{A}}(\hat{\delta})+2\,\hat{\eta})^{3/2}} > 1 \tag{7.9}$$

für ein $\hat{\delta}>1$ und ein $\hat{\eta}>0$, so gibt es eine Folge $c(1),c(2),\ldots$ wie in Hilfssatz 2 für $\varepsilon=1,\rho=\frac{1}{2}$. Außerdem existiert für $y'=a_0(x)+y^3$ eine 2π-periodische stetig differenzierbare Lösung.

Beweis: Sei $\hat{\hat{a}}_{l-1}=|a_l^0|$ und $c(l)=\hat{a}_l$ mit $\hat{a}_l$ aus Hilfssatz 3.
Es ist $\hat{\hat{\varepsilon}}=\min(\hat{\varepsilon},\hat{\delta})>1$ und $\sum_{l=1}^{\infty} l\,c(l)<+\infty$, außerdem

$$\frac{1}{2}\,l\,\hat{a}_l = \frac{1}{2}\,l\,c(l) \geq \left|a_l^0\right| = \hat{\hat{a}}_{l-1}\ ,$$
$$\frac{1}{2}\,l\,c(l) \geq \sum_{\substack{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3=l \\ \kappa_1,\kappa_2,\kappa_3\geq 1}} c(\kappa_1)\,c(\kappa_2)\,c(\kappa_3)\ .$$

Mit Hilfssatz 2 ergibt sich schließlich die Behauptung. q.e.d.

Bemerkung: (7.9) stellt eine Kleinheitsbedingung an a_0 dar, denn für $\hat{\hat{A}}(\hat{\delta})$ gilt:

$$\hat{\hat{A}}(\hat{\delta}) = \sup_{|z|<\hat{\delta}} |A(z)| = \sup_{|z|<\hat{\delta}} \left| \sum_{l=1}^{\infty} |a_l^0| z^l \right| = \sup_{|z|<\hat{\delta}} \left| \sum_{l=1}^{\infty} |\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_0(x)\, e^{-ilx}\, dx| z^l \right|$$

Betrachten wir nun die Ungleichung

$$\hat{\eta}^{1/2} = \sqrt{\hat{\eta}} > (2\,\hat{\hat{A}}(\hat{\delta}) + 2\,\hat{\eta})^{3/2} \geq (2\,\hat{\hat{A}}(\hat{\delta}))^{3/2} + (2\,\hat{\eta})^{3/2} \;,$$

so ist diese nur erfüllt für $\hat{\eta} < \frac{1}{2^{3/2}}$ und kleine $\hat{\hat{A}}$, also kleine a_0.

7.3 Die lineare Differentialgleichung

Als zweites Beispiel werden wir die gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung untersuchen. Hierbei handelt es sich um Gleichungen der Form

$$y' + p(x)\, y = g(x) \;,$$

wobei $p(x)$ und $g(x)$ im Intervall $s \leq x \leq t$ stetige Funktionen sind. [2]
Ist $g(x) = 0$ für alle x, so heißt die Gleichung homogen; wenn $g(x)$ nicht identisch Null ist, heißt sie inhomogen.

Wir wollen nun die inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' + b\, y = f \tag{7.10}$$

mit 2π-periodischen komplexwertigen Funktionen b und f betrachten und diese durch formale Fourier-Reihen lösen. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind ebenfalls 2π-periodisch und komplexwertig und können durch folgenden Ansatz gefunden werden:

$$y = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\, e^{ilx} \quad \text{mit} \quad a_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y\, e^{-ilx}\, dx \tag{7.11}$$

Wir setzen $b = \sum_{l=0}^{\infty} b_l\, e^{ilx}$ mit $b_0 \in \mathbb{R}$, $B = \sum_{l=0}^{\infty} |b_l| < +\infty$ und $f = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\, e^{ilx}$ mit $\sum_{l=0}^{\infty} |f_l| < +\infty$.

Satz 13: *Die Gleichung (7.10) hat für $b_0 \neq 0$ genau eine Lösung der Form (7.11). Für $b_0, f_0 = 0$ hat (7.10) eine bis auf eine Konstante, also a_0, eindeutig bestimmte Lösung der Gestalt (7.11). Weiterhin gilt für y, dass $\sum_{l=0}^{\infty} |l\, a_l| < +\infty$ ist; $\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, e^{ilx}$ ist also stetig differenzierbar und 2π-periodisch.*

Beweis: Für die Differentialgleichung erhält man

$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l\, e^{ilx}\right)' + \sum_{l=0}^{\infty} b_l\, e^{ilx} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} a_l\, e^{ilx} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\, e^{ilx} \,,$$

bzw.

$$\sum_{l=0}^{\infty} i\, l\, a_l\, e^{ilx} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} b_{l-k}\, a_k\, e^{ilx} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\, e^{ilx}$$

und daraus die Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$i\, l\, a_l + \sum_{k=0}^{l} b_{l-k}\, a_k = f_l \,, \quad l \geq 0 \,.$$

Betrachten wir nun im ersten Schritt die Rekursion für $l = 0$. Wir erhalten $b_0\, a_0 = f_0$.
Daraus können wir a_0 bestimmen, wenn $b_0 \neq 0$ ist, d. h. $a_0 = \frac{f_0}{b_0}$. Sonst wird $a_0 = 1$ gesetzt.
Der zweite Schritt zeigt für $l = 1$, dass $i\, a_1 + b_1\, a_0 + b_0\, a_1 = f_1$. Diese Gleichung ist auflösbar wegen $b_0 \in \mathbb{R}$.
Im letzten Schritt sei l beliebig, also $i\, l\, a_l + b_0\, a_l + \sum_{k=0}^{l-1} b_{l-k}\, a_k = f_l$. Auch diese Gleichung kann wegen $b_0 \in \mathbb{R}$ aufgelöst werden, da $a_0, ..., a_{l-1}$ als schon bekannt vorausgesetzt werden können.

Für den Konvergenzbeweis benötigen wir wieder einmal den Satz von Cauchy, denn damit erhalten wir für

$$\sum_{l=0}^{\infty} i\, l\, a_l\, e^{ilx} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\, e^{ilx} - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{l} b_{l-k}\, a_k\, e^{ilx}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{L}|la_l| &\leq \sum_{l=0}^{L}|f_l| + \sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{l}|b_{l-k}a_k| \\ &= \sum_{l=0}^{L}|f_l| + \sum_{l=0}^{L}|b_l| \cdot \sum_{l=0}^{L}|a_l| \\ &= \sum_{l=0}^{L}|f_l| + B \cdot \sum_{l=0}^{L}|a_l| \ ,\end{aligned}$$

womit der letzte Satz dieser Arbeit bewiesen wäre.
q.e.d. [14]

Literaturverzeichnis

[1] H. Becker. *Formale Potenzreihen und Formale Sprachen.* Number 20. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn, 1972. Kap. 0, 1 {*Seite* 9}. (Zitiert auf Seiten 25 und 26)

[2] W. Boyce and R. DiPrima. *Gewöhnliche Differentialgleichungen: Einführung - Aufgaben - Lösungen.* Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin Oxford, 1995. Kap. 1.1 {*Seite* 1/2}, 1.2 {*Seite* $13-15$}, Kap. 9.2, 9.7, 2.1. (Zitiert auf Seiten 4, 5, 13 und 62)

[3] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band III Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen.* B. G. Teubner Stuttgart Leipzig Wiesbaden, 4 edition, 2002. Kap. 1.1, 1.2, 4.2. (Zitiert auf Seiten 12 und 57)

[4] S. Gottwald, H.-J. Ilgauds, and K.-H. Schlote. *Lexikon bedeutender Mathematiker.* Verlag Harri Deutsch Thun Frankfurt, 1990. (Zitiert auf Seiten 3 und 43)

[5] H. Grauert and K. Fritzsche. *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974. Kap. 3.1, 1.1 {*Seite* 4}. (Zitiert auf Seite 27)

[6] K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg New York, 5 edition, 1964. Kap. 3.12.54 {*Seite* 421}. (Zitiert auf Seiten 33 und 37)

[7] D. Lutz and J. Scheiba. *§12 Fourierreihen.* Deutsches Institut für Fernstudien an der Universität Tübingen, 1979. Einleitung, Kap. I {*Seite* 16/17}. (Zitiert auf Seiten 13 und 50)

[8] S. Quercino and M. Jahn. *Formale Potenzreihen, Formale Umordnung und Existenzsatz von Cauchy.* Universität Bayreuth, 2008/2009. Seminarbeitrag. (Zitiert auf Seiten 26, 29, 30, 36 und 42)

[9] R. Remmert. *Funktionentheorie 1.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1984. Kap. 3.1.3, 0.4.2, 4.4, 4.3.1, 10.1, 1.3. (Zitiert auf Seiten 24, 26, 34 und 57)

[10] H.-J. Schell. *Unendliche Reihen.* Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt/Main, 1978. Kap. 1, 2.6, 5.2.2. (Zitiert auf Seiten 2, 19 und 52)

[11] C. L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik.* Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg, 1956. Kap. 14 {*Seite* 83}, Kap. 4, 17, 22, 26. (Zitiert auf Seiten 34, 37, 43 und 44)

[12] C. L. Siegel and J. K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1971. Kap. 23. (Zitiert auf Seite 44)

[13] W. von Wahl. *Mehrfachprodukte von Reihen und Anwendungen.* Universität Bayreuth, 2007. Beweisskizze 8. (Zitiert auf Seiten 18, 24, 30, 32, 36 und 49)

[14] W. von Wahl. *Die Methode der formalen Fourier-Reihen am Beispiel einer Abelschen und einer linearen Differentialgleichung.* Universität Bayreuth, 2008. Beweisskizze 78. (Zitiert auf Seiten 52 und 64)

[15] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 1993. Einleitung. (Zitiert auf Seiten 2 und 12)

[16] W. Walter. *Analysis 2.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5 edition, 2002. Kap. 2.18, 1.8, 4.4, 9.7, 10.1. (Zitiert auf Seiten 19, 21, 22, 23 und 51)

[17] W. Walter. *Analysis 1.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 7 edition, 2004. Kap. 5 {*Seite* 78/79}, Kap. 7 {*Seite* 132 – 137}, Cover, Kap. 5.11 – 5.15, 7.6, 7.4, 7.5, 5.9, 7.8, 7.13, 3.5. (Zitiert auf Seiten 2, 3, 14, 17, 21, 23 und 28)

[18] G. Walz and D. Brandt. *Lexikon der Mathematik.* Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg, 2001. Band 1. (Zitiert auf Seite 53)

Danksagung

Ganz besonders danke ich Herrn Prof. Dr. Wolf von Wahl für seine Unterstützung während der Entstehung dieser Diplomarbeit. Wann immer ich Fragen hatte, nahm er sich die Zeit, diese zu klären. Auch fand ich erst durch seine Ermutigung den Ansporn, den Weg zum Diplom der Mathematik einzuschlagen.
Außerdem möchte ich noch meinem Bruder danken, der mir die Vorzüge und Feinheiten des Programms Latex zeigte und bei Problemen hiermit half.