

Diplomarbeit im Fach Mathematik
Universität Bayreuth

PERIODISCHE LÖSUNGEN VON $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$
MIT ANFANGSGLIEDERN HÖHERER
ORDNUNG IN $A(x, y)$ UND $B(x, y)$.

vorgelegt von

ALEXANDER PRELL

am Lehrstuhl Mathematik VI
Prof. Dr. Wolf von Wahl
Universität Bayreuth

Bayreuth, 06. Februar 2003

Danksagung

Für die mir entgegengebrachte Unterstützung bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Wolf von Wahl.

Ferner möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mir beim Korrekturlesen sowie bei technischen Problemen behilflich waren.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Problemstellung und Polarkoordinaten	3
2.1	Problemstellung und Ausgangslage	3
2.2	Berechnung von f und g	6
2.2.1	Allgemeines	6
2.2.2	Berechnung von f und g mit Polarkoordinaten	7
3	Der Eulersche Multiplikator	11
3.1	Berechnungen mit dem Eulerschen Multiplikator	11
3.2	Beispiele zur Gleichung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$	20
3.2.1	Der Fall $n = 1$	20
3.2.2	Der Fall $n = 2$	23
3.2.3	Der Fall $n = 3$	27
3.2.4	Eine Verallgemeinerung für $n \geq 4$	27
4	Das MAPLE-Programm - Teil I	29
4.1	Programmteil I	29
4.1.1	Variante 1	30
4.1.2	Variante 2	30
4.1.3	Variante 3	30
4.2	Beispiele - Variante 1	30
4.3	Beispiele - Variante 2	35
4.4	Beispiele - Variante 3	37
5	Symmetrie der periodischen Lösungen	39
5.1	Das ungestörte Problem $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$, $n \geq 1$ und seine Symmetrien	39
5.2	Ein gestörtes Problem und seine Symmetrien	41
5.3	Beispiele zum MAPLE-Programm - Teil II	44
5.3.1	Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^3+P(x,y)}{y^3+Q(x,y)}$	44
5.3.2	Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^5+P(x,y)}{y^5+Q(x,y)}$	46
5.3.3	Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$	47

6	Zusammenfassung und Ausblick	53
A	Das MAPLE-Programm	57
A.1	README-Datei	58
A.2	MAPLE-Programmcode	62
B	Datenträger	79
	Eidesstattliche Erklärung	83

Abbildungsverzeichnis

4.1	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3}{y^3}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	31
4.2	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^4}{y^3 + \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{2}y^4}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	32
4.3	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^3y + \frac{5}{7}x^4 + \frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^5}{y^3 + \frac{5}{7}xy^3 + y^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{3}{4}y^5}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	33
4.4	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^5}{y^3 + x^2y^3}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	34
4.5	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - x^7}$ mit Startpunkt (0.3/0.2) und maximalem t -Wert 1000	35
4.6	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - 2xy^6}$ mit Startpunkt (0.3/0.2) und maximalem t -Wert 1000	36
5.1	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x}{y}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 100	41
5.2	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5}{y^5}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	42
5.3	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^7}{y^7}$ mit Startpunkt (0.4/0) und maximalem t -Wert 1000	43
5.4	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^4 + x^2y^2 + y^4}{y^3 + x^3y + xy^3}$ mit Startpunkt (0.4/0.1) und maximalem t -Wert 1000	44
5.5	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + xy^3 + x^3y}{y^3 + y^4 + x^2y^2 + x^4}$ mit Startpunkt (0.4/0.1) und maximalem t -Wert 1000	45
5.6	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^4 + x^2y^2 + y^4}{y^3 + x^3y + xy^3}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000	46
5.7	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + xy^3 + x^3y}{y^3 + y^4 + x^2y^2 + x^4}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000	47
5.8	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^2y^2 + y^4}{y^3 + yx^3 + y^3x}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000	48
5.9	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + xy^3 + x^3y}{y^3 + x^2y^2 + x^4}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000	48
5.10	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^4}{y^3 + y^3x^2 + y^5}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000	49

5.11	2D- und 3D- Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+x^3y^3+x^5y}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 4000	49
5.12	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+yx^5+x^3y^3+y^5x}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000	50
5.13	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+xy^5+x^3y^3+x^5y}{y^5+x^6+y^2x^4+x^2y^4+y^6}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000	50
5.14	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+x^3y^3+x^5y}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000	51
5.15	2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^3y^3+xy^5}{y^5+x^4y^2+x^2y^4+x^6}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000	51

Tabellenverzeichnis

3.1	Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 1$	23
3.2	Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 2$	27
3.3	Darstellung der allgemeinen Differentialgleichungen für den Fall $n = 2$; Existenz einer 2π -periodische Lösung ist gewährleistet . . .	27
3.4	Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 3$	28
3.5	Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den allgemeinen Fall	28

Kapitel 1

Einleitung

Das große Fernziel der Studien ist, alle parametrisierten Scharen von Problemen

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)}$$

mit höheren Anfangsgliedern in A und B anzugeben, bei denen der Wirbelfall vorliegt. $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ bezeichnen dabei Polynome in x und y mit niedrigster Potenz $\geq 2n$ für $n \geq 1$.

Der Fall $n = 1$ ist bereits in anderen Arbeiten am Lehrstuhl ausführlich diskutiert worden und spielt deshalb in dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle. Dieser Fall wird nur bei der Darstellung einiger Beispiele berücksichtigt. Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt in der Betrachtung höherer Anfangsglieder mit $n \geq 2$.

Zu Beginn der Arbeit werden für das Anfangsproblem $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$ Bedingungen aufgestellt, die die Existenz von 2π -periodischen Lösungen garantieren. Beim ungestörten Problem, d. h. $P(x, y) \equiv Q(x, y) \equiv 0$, verlaufen die Niveaulinien nahe des kritischen Punktes $(0/0)$ geschlossen. Wird das Anfangsproblem durch Terme $P(x, y)$ und/oder $Q(x, y)$ höherer Ordnung, d. h. $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ sind nicht identisch Null, gestört, kann anhand von Beispielen gezeigt werden, dass bei Erfüllung der formulierten Bedingungen der Wirbelfall erhalten bleibt und die Lösungskurve in der xy -Ebene geschlossen bzw. in Polarkoordinaten 2π -periodisch verläuft.

Die oben erwähnten Bedingungen zur Gewährleistung 2π -periodischer Lösungen wurden in der Literatur bis dato nur oberflächlich oder lückenhaft dargestellt. Für die Zukunft besteht die Hoffnung, auf Grundlage dieser Arbeit, weitere - sogar vielleicht alle - parametrisierten Scharen von Differentialgleichungen explizit angeben zu können, die in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen besitzen.

Als Grundlage dient das **Poincarésche Zentrumsproblem**. Die Arbeit von [Moritzen] beschäftigt sich mit dem Fall $n = 1$. Hierfür gibt es unendlich viele

Bedingungen, die garantieren, dass alle Integralkurven in der Nähe des Nullpunkts geschlossen sind und so Jordankurven darstellen.

Ein Beispiel hierfür ist die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$, deren Lösungskurve einen Kreis darstellt. Dies werden wir später im Kapitel 3 aufgreifen.

Gegen Ende von Kapitel 3 werden wir bei der Betrachtung einzelner Beispiele feststellen, dass wir Differentialgleichungen, für die in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen garantiert werden, zwar exakt angeben können, diese jedoch durch Kürzen auf das ungestörte Problem zurückgeführt werden.

Bekräftigt wird diese These durch graphische Darstellungen, die wir in Kapitel 4 anführen. Diese Abbildungen sind u. a. ein Resultat des angeführten MAPLE-Programms - Teil I, das viele Berechnungen vereinfacht. Mit einer Vermutung, die wir in Kapitel 5 zeigen, beenden wir Kapitel 4.

In Kapitel 5 werden die symmetrischen Eigenschaften ausgewählter Differentialgleichungen behandelt. Zunächst beweisen wir aber die Vermutung, dass sich die Differentialgleichungen mit den in Kapitel 3 angegebenen Bedingungen tatsächlich auf das ungestörte Problem vereinfachen lassen.

Da die symmetrischen Eigenschaften des ungestörten Problems aus anderen Arbeiten (z. B. [Ruckdaeschel]) bekannt sind, liegt der zweite Schwerpunkt von Kapitel 5 im Auffinden symmetrischer Eigenschaften zweier bestimmter Arten von Differentialgleichungen, deren Lösungskurven in Polarkoordinaten periodisch sind.

Im angeführten MAPLE-Programm - Teil II besteht neben dem Auffinden von in Polarkoordinaten 2π -periodischen Lösungen die Möglichkeit, symmetrische Eigenschaften durch einzelne Plots darzustellen.

Eine ausführliche Beschreibung des MAPLE-Programms zur Umsetzung der Ergebnisse aus den Kapiteln 2 und 3 (MAPLE-Programm - Teil I) und aus Kapitel 5 (MAPLE-Programm - Teil II) befindet sich im Anhang A.

Die in der Arbeit verwendeten Beispiele sind im MAPLE-Programm - Teil III „fest“ programmiert. Die einzelnen Plots können durch manuelle Eingaben verändert werden.

Von anderen geleistete Vorarbeiten, vor allem die Abschlußarbeiten am Lehrstuhl Mathematik VI der Universität Bayreuth und der Aufsatz von [Frommer], werden an den entsprechenden Stellen bedacht.

Kapitel 2

Problemstellung und Polarkoordinaten

Zunächst beschreiben wir die Ausgangslage und zeigen, unter welchen Bedingungen eine gewöhnliche Differentialgleichung 2π -periodische Lösungen besitzt. In einem zweiten Schritt führen wir Polarkoordinaten ein, die wir für darauf folgende Berechnungen benötigen.

2.1 Problemstellung und Ausgangslage

In der Einleitung bereits angedeutet, können wir das Problem der Arbeit wie folgt beschreiben:

Es gilt, Bedingungen zu finden, die 2π -periodische Lösungen für gewöhnliche Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ mit höheren Anfangsgliedern in A und B garantieren.

So erhalten wir weitere parametrisierte Scharen von Problemen, bei denen der Wirbelfall eintritt.

Diese allgemeine Darstellung des Problems wird nun präzisiert. So gilt es zunächst, die Ausgangslage genau darzustellen.

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)} \tag{2.1}$$

mit

$$\begin{aligned} A(x,y) &:= x^{2n-1} + P(x,y), \\ B(x,y) &:= y^{2n-1} + Q(x,y). \end{aligned}$$

P und Q erklären wir in der

Bemerkung 2.1.1. Die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stellen in einer Umgebung U_ϵ , $\epsilon > 0$, um den Nullpunkt $(0/0)$ konvergente Potenzreihen in x und y dar:

$$\begin{aligned} P(x, y) &:= p_{2n}(x, y) + p_{2n+1}(x, y) + p_{2n+2}(x, y) + \cdots + p_i(x, y) + \cdots \\ Q(x, y) &:= q_{2n}(x, y) + q_{2n+1}(x, y) + q_{2n+2}(x, y) + \cdots + q_i(x, y) + \cdots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die einzelnen p_i und q_i mit $i \geq 2n, i \in \mathbb{N}$, sind homogene Polynome i -ten Grades in x und y .

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im Folgenden bei P und Q auf Polynome mit

$$\begin{aligned} \text{grad } P(x, y) &\geq 2n, \\ \text{grad } Q(x, y) &\geq 2n. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.2. Sei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und 2π -periodisch. Dann gilt:

$$\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi = 0$$

Beweis. Sei zunächst $\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi$ 2π -periodisch. Dann gilt:

$$\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi \stackrel{2\pi\text{-periodisch}}{=} \int_0^{\varphi+2\pi} a(\psi) \, d\psi = \int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi + \int_0^{2\pi} a(\psi) \, d\psi$$

Somit ist $\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi = 0$.

Umgekehrt sei nun $\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi = 0$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi+2\pi} a(\psi) \, d\psi &= \underbrace{\int_0^{2\pi} a(\psi) \, d\psi}_{=0} + \int_{2\pi}^{\varphi+2\pi} a(\psi) \, d\psi \\ &= \int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi + \int_\varphi^{\varphi+2\pi} a(\psi) \, d\psi = \int_0^{\varphi+2\pi} a(\psi) \, d\psi \end{aligned}$$

Somit ist $\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi$ 2π -periodisch.

Satz 2.1.1 (Periodische Lösungen). Sei $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_{2\pi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und 2π -periodisch. $y' + a(\varphi)y = f_{2\pi}$ hat dann und nur dann eine 2π -periodische Lösung, wenn gilt:

$$\int_0^{2\pi} f_{2\pi} \cdot \omega \, d\psi = 0$$

für alle 2π -periodischen ω mit $\omega' - a(\varphi)\omega = 0$.

Beweis. Gegeben sei eine 2π -periodische Lösung von $y' + a(\varphi)y = f_{2\pi}$. Weiter sei ω 2π -periodisch mit $\omega' - a(\varphi)\omega = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f_{2\pi} \cdot \omega \, d\varphi &= \int_0^{2\pi} [y' + a(\varphi)y] \omega \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} [y'\omega + a(\varphi)y\omega + y\omega' - y\omega'] \, d\varphi \\
 &\stackrel{y'\omega + y\omega' = (y\omega)'}{=} \underbrace{\int_0^{2\pi} [y\omega]' \, d\varphi}_{=0, \text{ da } y, \omega \text{ } 2\pi\text{-periodisch}} + \underbrace{\int_0^{2\pi} y [-\omega' + a(\varphi)\omega] \, d\varphi}_{=0 \text{ nach Annahme}}
 \end{aligned}$$

Umgekehrt sei $\int_0^{2\pi} f_{2\pi}(\varphi)\omega \, d\varphi = 0$ für alle 2π -periodischen ω mit $\omega' - a(\varphi)\omega = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{2\pi} [y' + a(\varphi)y] \omega \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (y\omega)' \, d\varphi + \underbrace{\int_0^{2\pi} y [-\omega' + a(\varphi)\omega] \, d\varphi}_{=0 \text{ nach Annahme}} \\
 &= y(2\pi)\omega(2\pi) - y(0)\omega(0) \\
 &\stackrel{\omega \text{ } 2\pi\text{-periodisch} \Rightarrow \omega(2\pi) = \omega(0)}{=} [y(2\pi) - y(0)] \omega(0)
 \end{aligned}$$

Wir betrachten folgende Fallunterscheidung:

1. Fall : $\exists \omega$ mit $\omega(0) \neq 0$. Dann gilt: Jede Lösung y von $y' + a(\varphi)y = f_{2\pi}$ ist 2π -periodisch.

2. Fall : Sei $\omega \equiv 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 y' + a(\varphi)y &= f_{2\pi} \\
 \Leftrightarrow e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y' + a(\varphi) e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y &= e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \\
 a(\varphi) &\stackrel{(\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi)'}{\Leftrightarrow} \left(e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y \right)' = e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \\
 \Leftrightarrow e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y - \underbrace{e^{\int_0^0 a(\psi) \, d\psi}}_{=1} y(0) &= \int_0^{2\pi} e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \, d\varphi \\
 \Leftrightarrow e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y - y(0) &= \int_0^{2\pi} e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \, d\varphi
 \end{aligned}$$

2a. Fall : Sei $\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi = 0$.

Dann haben alle Lösungen von $y' + a(\varphi)y = 0$ die Periode 2π und wir sind im Fall 1. In diesem Fall sind **alle** Lösungen 2π -periodisch.

2b. Fall : Sei $\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi \neq 0$. Dann ist die Nulllösung die einzige 2π -periodische Lösung von $y' + a(\varphi)y = 0$ und

$$\begin{aligned} y(2\pi) &= y(0) \\ \Leftrightarrow y(0) &= \frac{1}{e^{\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi} - 1} \int_0^{2\pi} e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \, d\varphi, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} y - y(0) &= \int_0^\varphi e^{\int_0^\psi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \, d\varphi, \\ y(2\pi) &= \left[\int_0^{2\pi} e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi} f_{2\pi} \, d\varphi + y(0) \right] e^{-\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi} \end{aligned}$$

In diesem Fall gibt es **eine** eindeutig bestimmte 2π -periodische Lösung. Wir befinden uns aber immer im Fall 1, d. h. $\int_0^{2\pi} a(\varphi) \, d\varphi = 0$. Also ist in unserem Fall entweder **jede** Lösung oder gar **keine** Lösung periodisch.

□

Zusammenfassend hat $y' + a(\varphi)y = f_{2\pi}$ mit $f_{2\pi}$ 2π -periodisch dann und nur dann eine 2π -periodische Lösung, wenn gilt: $f_{2\pi} \perp e^{\int_0^\varphi a(\psi) \, d\psi}$ in $L^2_{\mathbb{R}}((0, 2\pi))$.

2.2 Berechnung von f und g

2.2.1 Allgemeines

Unter Beachtung der Ergebnisse bei [Knies] (Kapitel 4) kann (2.1) mit Einführung von Polarkoordinaten ($x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$), wie folgt geschrieben werden:

$$r' = \frac{f(\varphi, r)}{g(\varphi, r)} = \frac{r \cdot [-A(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \sin\varphi + B(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \cos\varphi]}{-A(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \cos\varphi - B(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \sin\varphi} \quad (2.3)$$

mit

$$\begin{aligned} f &:= f(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 1} f_\lambda(\varphi) r^\lambda \\ &= \frac{r}{r^{2n-1}} [-A(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \sin\varphi + B(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \cos\varphi] \end{aligned} \quad (2.4)$$

und

$$\begin{aligned} g &:= g(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 0} g_\lambda(\varphi) r^\lambda \\ &= \frac{1}{r^{2n-1}} [-A(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \cos\varphi - B(r \cos\varphi, r \sin\varphi) \sin\varphi] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dies ist möglich, da jeweils Polynome gefordert waren, die mit x^{2n-1} bzw. y^{2n-1} beginnen.

Die Umformung (2.3) ist zunächst richtig in den Punkten (x, y) mit $B(x, y) \neq 0$ und $g(\varphi, r) \neq 0$. Dabei ist $\varphi \in \mathbb{R}$, $|r|$ hinreichend klein. Dass auch die Umordnung der Reihen möglich ist, zeigen die Ausführungen in der Arbeit von [Knies].

Hinweis 2.2.1. *Mit Hilfe der Ergebnisse in der Arbeit von [Knies] ist die Existenz der Lösung von (2.3) für $|\varphi| \leq 2\pi$ oder für $|\varphi| \leq 4\pi$ gesichert.*

2.2.2 Berechnung von f und g mit Polarkoordinaten

Die Umwandlung in Polarkoordinaten ist deshalb erforderlich, weil die Variante mit einer Vergleichsdifferentialgleichung, deren Lösungen Kurvenscharen sind, nicht zum Ziel führt.

Um allgemeine Differentialgleichungen betrachten zu können, ist die Einführung von Polarkoordinaten daher sehr nützlich.

Mit der Einführung von Polarkoordinaten (d. h. man setzt $x = r \cdot \cos \varphi$ und $y = r \cdot \sin \varphi$) transformieren wir $A(x, y)$ und $B(x, y)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 A(x, y) &= x^{2n-1} + P(x, y) \\
 &= x^{2n-1} + \sum_{\lambda \geq 2n} p_\lambda(x, y) \\
 &\stackrel{\nu+\mu=\lambda}{=} x^{2n-1} + \sum_{\nu+\mu \geq 2n} p_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \\
 &\stackrel{\substack{x=r \cdot \cos \varphi \\ y=r \cdot \sin \varphi}}{=} r^{2n-1} \cos^{2n-1} \varphi + \sum_{\nu+\mu \geq 2n} p_{\nu\mu} r^\nu \cos^\nu \varphi r^\mu \sin^\mu \varphi \\
 &= r^{2n-1} \cos^{2n-1} \varphi + \sum_{\nu+\mu \geq 2n} p_{\nu\mu} r^{2n-1} r^{\nu+\mu-2n+1} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \\
 &= r^{2n-1} \left[\cos^{2n-1} \varphi + \sum_{\nu+\mu \geq 2n} p_{\nu\mu} r^{\nu+\mu-2n+1} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \right] \\
 &= r^{2n-1} \left[\cos^{2n-1} \varphi + \sum_{\lambda \geq 2n} r^{\lambda-2n+1} \sum_{\nu+\mu=\lambda} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \right] \\
 &\stackrel{\substack{\mu+\nu-(2n-1)=\tilde{\lambda} \\ \Leftrightarrow \mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-1}}{=} r^{2n-1} \left[\cos^{2n-1} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \right] \\
 &= A(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned}
B(x, y) &= y^{2n-1} + Q(x, y) \\
&= y^{2n-1} + \sum_{\lambda \geq 2n} q_\lambda(x, y) \\
&\stackrel{\nu+\mu=\lambda}{=} y^{2n-1} + \sum_{\nu+\mu \geq 2n} q_{\nu\mu} x^\nu y^\mu \\
&= r^{2n-1} \left[\sin^{2n-1} \varphi + \sum_{\lambda \geq 2n} r^{\lambda-2n+1} \sum_{\nu+\mu=\lambda} q_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \right] \\
&= r^{2n-1} \left[\sin^{2n-1} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} q_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \right] \\
&= B(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.2.1. $p_{\nu\mu}$, $q_{\nu\mu}$ sind die Koeffizienten von $p_{\nu+\mu \geq 2n}$ und $q_{\nu+\mu \geq 2n}$. Die Summe von ν und μ gibt den Grad des Polynoms an (vgl. auch (2.2)).

Satz 2.2.1. f und g seien wie in (2.4) und (2.5) gegeben.

i) Für $f(\varphi, r)$ gilt:

$$f(\varphi, r) = \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}} \tag{2.8}$$

mit

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi \\
f_{\tilde{\lambda}} &= \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \sin \varphi + q_{\nu\mu} \cos \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi, \quad \tilde{\lambda} \geq 1
\end{aligned}$$

ii) Für $g(\varphi, r)$ gilt:

$$g(\varphi, r) = \sum_{\tilde{\lambda} \geq 0} g_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}} \tag{2.9}$$

mit

$$\begin{aligned}
g_0 &= -\cos^{2n} \varphi - \sin^{2n} \varphi \\
g_{\tilde{\lambda}} &= \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (-p_{\nu\mu} \cos \varphi - q_{\nu\mu} \sin \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi, \quad \tilde{\lambda} \geq 1
\end{aligned}$$

Beweis. i) Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(\varphi, r) &= \frac{r}{r^{2n-1}} [-A(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi + B(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi] \\
&= - \left(r \cdot \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi) \sin \varphi \right) + \\
&\quad + \left(r \cdot \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (q_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi) \cos \varphi \right) \\
&= r \cdot (-\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi) + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\tilde{\lambda} \geq 2} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \sin \varphi + q_{\nu\mu} \cos \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi}_{=: \sum_{\tilde{\lambda} \geq 2} f_{\tilde{\lambda}} r^{\tilde{\lambda}}} \\
&= r \cdot (-\cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin^{2n-1} \varphi) + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 2} f_{\tilde{\lambda}} r^{\tilde{\lambda}} \\
&= \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}
\end{aligned}$$

Beweis. ii) Es folgt analog:

$$\begin{aligned}
g(\varphi, r) &= \frac{1}{r^{2n-1}} [-A(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cos \varphi - B(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sin \varphi] \\
&= - \left(\cos^{2n} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi) \cos \varphi \right) - \\
&\quad - \left(\sin^{2n} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (q_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi) \sin \varphi \right) \\
&= -\cos^{2n} \varphi - \sin^{2n} \varphi + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} r^{\tilde{\lambda}} \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (-p_{\nu\mu} \cos \varphi - q_{\nu\mu} \sin \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi}_{=: \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} g_{\tilde{\lambda}} r^{\tilde{\lambda}}} \\
&= -\cos^{2n} \varphi - \sin^{2n} \varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} g_{\tilde{\lambda}} r^{\tilde{\lambda}} \\
&= \sum_{\tilde{\lambda} \geq 0} g_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}
\end{aligned}$$

□

So lassen sich die einzelnen Funktionen $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)$ und $g_{\tilde{\lambda}}(\varphi)$ für $\tilde{\lambda} = 0, 1, 2, \dots$ wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} f_0(\varphi) &:= 0 \\ f_1(\varphi) &= -\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi + \sin^{2n-1}\varphi \cos\varphi \\ f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) &= \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \sin\varphi + q_{\nu\mu} \cos\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi, \quad \tilde{\lambda} \geq 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

und

$$\begin{aligned} g_0(\varphi) &:= -\cos^{2n}\varphi - \sin^{2n}\varphi \\ g_{\tilde{\lambda}}(\varphi) &= \sum_{\nu+\mu=\tilde{\lambda}+2n-1} (-p_{\nu\mu} \cos\varphi - q_{\nu\mu} \sin\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi, \quad \tilde{\lambda} \geq 1 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Diese Funktionen $f_{\tilde{\lambda}}$ und $g_{\tilde{\lambda}}$ werden im nächsten Kapitel zur Berechnung der rekursiven Gleichung für den Eulerschen Multiplikator benötigt.

Bemerkung 2.2.2. Zusammenfassend lässt sich die Gleichung (2.3) nun durch

$$r' = \frac{f(\varphi, r)}{g(\varphi, r)} = \frac{r \left(-\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \sin^{2n-1}\varphi \right) + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 2} f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}}{-\cos^{2n}\varphi - \sin^{2n}\varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} g_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}}$$

darstellen.

Für spätere Erkenntnisse diene die

Bemerkung 2.2.3. Gegeben sei $\tilde{\lambda} \geq 1$. Dann ist in $\xi = \cos\varphi$ und $\eta = \sin\varphi$:

$$\begin{aligned} \text{grad}(f_{\tilde{\lambda}} g_0) &= \tilde{\lambda} + 2n - 2 + 2n = \tilde{\lambda} + 4n - 2 \\ \text{grad}(g_{\tilde{\lambda}-1} f_1) &= \tilde{\lambda} + (2n - 1) - 1 + (2n - 1) - 1 = \tilde{\lambda} + 4n - 2 \end{aligned}$$

Kapitel 3

Der Eulersche Multiplikator

Für die Definition eines Eulerschen Multiplikators verweisen wir auf [Grauert], Seite 167. Im Folgenden suchen wir einen Eulerschen Multiplikator besonderer Gestalt zum Vektorfeld (f, g) aus Satz 2.2.1.

3.1 Berechnungen mit dem Eulerschen Multiplikator

Bezeichnung 3.1.1. Sei $f(\varphi, r)$ eine beliebige, partiell differenzierbare reelle Funktion. Zur Vereinfachung werden im Folgenden die partiellen Ableitungen durch Indizes dargestellt. So gilt folgende Bezeichnung:

$$f_\varphi := \frac{\partial f(\varphi, r)}{\partial \varphi} ; f_r := \frac{\partial f(\varphi, r)}{\partial r}$$

Bezeichnet \underline{x} einen Vektor, so gilt der

Satz 3.1.1. Sei $n \geq 1$ gegeben. Zu

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)}$$

mit $P = \mathcal{O}(|\underline{x}|^{2n})$ und $Q = \mathcal{O}(|\underline{x}|^{2n})$ in der Umgebung des kritischen Punktes $(0/0)$ existiert in Polarkoordinaten φ, r genau dann ein **Eulerscher Multiplikator**

$$\mu(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 0} M_\lambda(\varphi) r^\lambda \quad (3.1)$$

mit $\mu(\varphi, r) \neq 0$, $|\varphi| \leq 2\pi$, $r \in [0, \varepsilon)$, wenn mit

$$r' = \frac{f(\varphi, r)}{g(\varphi, r)} = \frac{\sum_{\lambda \geq 1} f_\lambda(\varphi) r^\lambda}{\sum_{\lambda \geq 0} g_\lambda(\varphi) r^\lambda} \quad (3.2)$$

gilt:

a) Für alle $\lambda \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} M'_\lambda(\varphi) &+ \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} M_\lambda(\varphi) = \\ &- \frac{1}{g_0(\varphi)} \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \{(\lambda+1)f_{\lambda+1-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

b) Für $\lambda = 0$ und $M_0(\varphi) \neq 0$ gilt:

$$M'_0(\varphi) + \frac{f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} M_0(\varphi) = 0 \quad (3.4)$$

c) $\sum_{\lambda \geq 0} M_\lambda(\varphi)r^\lambda$ ist absolut konvergent in $|\varphi| \leq 2\pi$, $r \in [0, \varepsilon)$.

Bemerkung 3.1.1. κ beschreibt dabei einen Summationsindex. Dies gilt nicht nur in diesem Fall, sondern für die gesamte Arbeit.

Bemerkung 3.1.2. Insbesondere sind die M_λ für $\lambda \geq 0$ durch (3.3) und (3.4) wohldefiniert. M_0 ist immer 2π -periodisch. So erhalten wir $\mu(\varphi, r)$ immer als wohldefinierte formale Potenzreihe.

Bemerkung 3.1.3. Die absolute Konvergenz in c) ist entscheidend, um später die Cauchy-Formel anwenden zu können.

Bemerkung 3.1.4. Die Aussage c) des Satzes 3.1.1 wird in dieser Arbeit nicht gezeigt. Die Konvergenz ist aber gesichert (vgl. Notizen von Wahl)

Beweis. des Satzes 3.1.1, Aussage b):

Nach [Kamke], Seite 28 lautet die Differentialgleichung für $\mu(\varphi, r)$ wie folgt:

$$f(\varphi, r)\mu_r + g(\varphi, r)\mu_\varphi = -\mu[f_r + g_\varphi] \quad (3.5)$$

Bevor wir im Beweis weiter gehen, zunächst die

Bemerkung 3.1.5. Seien stetige, partiell differenzierbare Funktionen $f(\varphi, r)$, $g(\varphi, r)$ und $\mu(\varphi, r)$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f(\varphi, r) &= \sum_{\lambda \geq 1} f_\lambda(\varphi)r^\lambda \\ g(\varphi, r) &= \sum_{\lambda \geq 0} g_\lambda(\varphi)r^\lambda \\ \mu(\varphi, r) &= \sum_{\kappa \geq 0} M_\kappa(\varphi)r^\kappa \end{aligned}$$

So gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f_r &= \frac{\partial f}{\partial r} = \sum_{\lambda \geq 1} \lambda f_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} = \sum_{\lambda \geq 0} (\lambda + 1) f_{\lambda+1}(\varphi) r^\lambda \\
g_r &= \frac{\partial g}{\partial r} = \sum_{\lambda \geq 0} \lambda g_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} = \sum_{\lambda \geq 1} \lambda g_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} = \sum_{\lambda \geq 0} (\lambda + 1) g_{\lambda+1}(\varphi) r^\lambda \\
\mu_r &= \frac{\partial \mu}{\partial r} = \sum_{\lambda \geq 0} \lambda M_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} = \sum_{\lambda \geq 1} \lambda M_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} = \sum_{\lambda \geq 0} (\lambda + 1) M_{\lambda+1}(\varphi) r^\lambda \\
f_\varphi &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \sum_{\lambda \geq 1} f'_\lambda(\varphi) r^\lambda \quad , \quad g_\varphi = \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \sum_{\lambda \geq 0} g'_\lambda(\varphi) r^\lambda \\
\mu_\varphi &= \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \sum_{\lambda \geq 0} M'_\lambda(\varphi) r^\lambda
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der partiellen Ableitungen aus Bemerkung 3.1.5 ergibt sich die linke Seite der Gleichung (3.5) für $\lambda \geq 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\lambda \geq 0} f_\lambda(\varphi) r^\lambda \cdot \sum_{\kappa \geq 0} (\kappa + 1) M_{\kappa+1}(\varphi) r^\kappa + \sum_{\lambda \geq 0} g_\lambda(\varphi) r^\lambda \cdot \sum_{\kappa \geq 0} M'_\kappa(\varphi) r^\kappa \\
& \stackrel{\text{Cauchy-Formel}}{=} \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa \geq 0} [f_{\lambda-\kappa}(\varphi) r^{\lambda-\kappa} \cdot (\kappa + 1) M_{\kappa+1}(\varphi) r^\kappa + g_{\lambda-\kappa}(\varphi) r^{\lambda-\kappa} \cdot M'_\kappa(\varphi) r^\kappa] \\
& = \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa} \left[\underbrace{f_{\lambda-\kappa}(\varphi)}_{=0 \text{ für } \kappa=\lambda} (\kappa + 1) M_{\kappa+1}(\varphi) r^{\lambda-\kappa+\kappa} + g_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi) r^{\lambda-\kappa+\kappa} \right] \\
& = \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa} [(\kappa + 1) f_{\lambda-\kappa}(\varphi) M_{\kappa+1}(\varphi) + g_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi)] r^\lambda \quad (3.6) \\
& = f(\varphi, r) \mu_r + g(\varphi, r) \mu_\varphi
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.1.6. Es ist $f_{\lambda-\kappa}(\varphi) = 0$ für $\lambda = \kappa$, denn es ist $f_0 = 0$ (vgl. (2.10)).

Für die rechte Seite der Gleichung gilt:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\kappa \geq 0} M_\kappa(\varphi) r^\kappa \left[\sum_{\lambda \geq 0} (\lambda + 1) f_{\lambda+1}(\varphi) r^\lambda + \sum_{\lambda \geq 0} g'_\lambda(\varphi) r^\lambda \right] \\
& = - \sum_{\lambda \geq \kappa} M_\kappa(\varphi) r^\kappa \cdot \sum_{\lambda \geq 0} (\lambda + 1) f_{\lambda+1}(\varphi) r^\lambda - \sum_{\lambda \geq \kappa} M_\kappa(\varphi) r^\kappa \cdot \sum_{\lambda \geq 0} g'_{\lambda-\kappa}(\varphi) r^\lambda \\
& \stackrel{\text{Cauchy-Formel}}{=} - \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa \geq 0} [(\lambda - \kappa + 1) f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) r^{\lambda-\kappa} \cdot M_\kappa(\varphi) r^\kappa + g'_{\lambda-\kappa}(\varphi) r^{\lambda-\kappa} \cdot M_\kappa(\varphi) r^\kappa]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa} M_{\kappa}(\varphi) [(\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)r^{\lambda-\kappa+\kappa} + g'_{\lambda-\kappa}(\varphi)r^{\lambda-\kappa+\kappa}] \\
&= - \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\lambda \geq \kappa} M_{\kappa}(\varphi) [(\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) + g'_{\lambda-\kappa}(\varphi)] r^{\lambda} \\
&= -\mu[f_r + g_{\varphi}]
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Satz 3.1.2 (Cauchy-Produkt-Formel). *Seien die Reihen $\sum_{n \geq 0} a_n$ und $\sum_{n \geq 0} b_n$ absolut konvergent. Dann gilt:*

$$\sum_{n \geq 0} a_n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_{n-k} b_k \right)$$

Fassen wir die Gleichungen (3.6) und (3.7) zusammen, so erhalten wir mit Kürzen von r^{λ} :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda \geq \kappa} [(\kappa + 1)f_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa+1}(\varphi) + g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M'_{\kappa}(\varphi)] + \\
&\quad + \sum_{\lambda \geq \kappa} \{M_{\kappa}(\varphi) [(\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) + g'_{\lambda-\kappa}(\varphi)]\} = \\
&= \sum_{\lambda \geq \kappa} [(\kappa + 1)f_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa+1}(\varphi) + (\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)] + \\
&\quad + \sum_{\lambda \geq \kappa} \underbrace{[g_{\lambda-\kappa}M'_{\kappa}(\varphi) + g'_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]}_{\substack{\text{Produkt-} \\ \text{regel} \\ [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]'}} = \\
&= \underbrace{\sum_{\lambda \geq \kappa} (\kappa + 1)f_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa+1}(\varphi)}_{\substack{\kappa' = \kappa+1 \\ \sum_{\lambda \geq \kappa' \geq 1} \kappa' f_{\lambda-\kappa'+1}(\varphi)M_{\kappa'}(\varphi)}} + \sum_{\lambda \geq \kappa} (\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) + \\
&\quad + \sum_{\lambda \geq \kappa} [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]' = \\
&\stackrel{f_0=0}{=} \sum_{\lambda \geq \kappa' \geq 1} \kappa' f_{\lambda-\kappa'+1}(\varphi)M_{\kappa'}(\varphi) + \\
&\quad + (\lambda + 1)f_{\lambda+1}(\varphi)M_0(\varphi) + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} (\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) + \\
&\quad + [g_{\lambda}(\varphi)M_0(\varphi)]' + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]' =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\lambda + 1)f_{\lambda+1}(\varphi)M_0(\varphi) + \\
&\quad + \underbrace{\sum_{\lambda \geq \kappa' \geq 1} \kappa' f_{\lambda-\kappa'+1}(\varphi)M_{\kappa'}(\varphi) + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} (\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)}_{\substack{= \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \kappa f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) + (\lambda - \kappa + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) \\ = \sum_{\lambda \geq \kappa+1} (\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)}} \\
&\quad + [g_{\lambda}(\varphi)M_0(\varphi)]' + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]' = \\
&= (\lambda + 1)f_{\lambda+1}(\varphi)M_0(\varphi) + \\
&\quad + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} (\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) + \\
&\quad + [g_{\lambda}(\varphi)M_0(\varphi)]' + \sum_{\lambda \geq \kappa+1} [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]' = \\
&= \sum_{\lambda \geq \kappa \geq 0} \{(\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_{\kappa}(\varphi)]'\} = 0 \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Betrachtet wird zunächst der Fall $\lambda = 0$. Aus der Bedingung $\lambda \geq \kappa \geq 0$ folgt sofort $\kappa = 0$.

Wir erhalten deshalb:

$$\begin{aligned}
&1 \cdot f_1(\varphi)M_0(\varphi) + [g_0(\varphi)M_0(\varphi)]' = 0 \\
&\Leftrightarrow f_1(\varphi)M_0(\varphi) + g_0(\varphi)M_0'(\varphi) + g_0'(\varphi)M_0(\varphi) = 0 \\
&\Leftrightarrow g_0(\varphi)M_0'(\varphi) + (f_1(\varphi) + g_0'(\varphi))M_0(\varphi) = 0 \\
&\Leftrightarrow M_0'(\varphi) + \frac{f_1(\varphi) + g_0'(\varphi)}{g_0(\varphi)}M_0(\varphi) = 0 \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Damit ist Aussage b) des Satzes 3.1.1 bewiesen. Lediglich die dazugehörige Bemerkung 3.1.2 ist noch zu beweisen.

Zu zeigen ist: $M_0(\varphi)$ ist immer 2π -periodisch.

Dazu sind nach Satz 2.2.1 $f_1(\varphi)$ und $g_0(\varphi)$ wie folgt gegeben ($\varphi \in 2\pi$):

$$\begin{aligned}
f_1(\varphi) &= -\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi + \sin^{2n-1}\varphi \cos\varphi \\
g_0(\varphi) &= -\cos^{2n}\varphi - \sin^{2n}\varphi
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{-\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi + \sin^{2n-1}\varphi \cos\varphi}{-\cos^{2n}\varphi - \sin^{2n}\varphi} d\varphi = 0$$

Dies kann wie folgt begründet werden: $f_1(\varphi)$ und $g_0(\varphi)$ sind Kompositionen aus sin- und cos-Funktionen, und daher 2π -periodisch. Daher ist auch $\frac{f_1(\varphi)}{g_0(\varphi)}$ 2π -periodisch. So ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\varphi$$

gegeben. $\frac{f_1(\varphi)}{g_0(\varphi)}$ ist gemäß den Definitionen von $f_1(\varphi)$ und $g_0(\varphi)$ ungerade. So ist $\int_{-\pi}^0 \dots = \int_0^\pi$.

Weiter gilt mit der selben Begründung:

$$\int_0^{2\pi} \frac{g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{-2n \cos^{2n-1} \varphi \sin \varphi + 2n \sin^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{-\cos^{2n} \varphi - \sin^{2n} \varphi} d\varphi = 0$$

Die Differentialgleichung in Aussage b) besitzt deshalb, unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Satz 2.1.1, nur 2π -periodische Lösungen

$$M_0(\varphi) = \underbrace{M_0(0)}_{=c} \cdot \exp \left\{ - \int_0^\varphi \frac{f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi \right\} \quad (3.10)$$

□

Beweis. (Satz 3.1.1, Aussage a)

Bekannt sei Gleichung (3.8). Für $\lambda = 0$ ergibt sich, wie oben gezeigt, Aussage b) des Satzes (3.1.1). Sei nun $\lambda \geq 1$. So gilt:

$$\begin{aligned} & (\lambda + 1)f_1(\varphi)M_\lambda(\varphi) + [g_0(\varphi)M_\lambda(\varphi)]' + \\ & \quad \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \{(\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda + 1)f_1(\varphi)M_\lambda(\varphi) + g_0(\varphi)M'_\lambda(\varphi) + g'_0(\varphi)M_\lambda(\varphi) = \\ & \quad - \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \{(\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\} \\ \Leftrightarrow & M'_\lambda(\varphi) + \frac{(\lambda + 1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} M_\lambda(\varphi) = \\ & \quad - \frac{1}{g_0(\varphi)} \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \{(\lambda + 1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Somit ist Aussage a) des Satzes 3.1.1 gezeigt.

□

Satz 3.1.3. *Ist*

$$\begin{aligned} & \sum_{\tilde{\lambda} \geq \kappa+1} \int_0^{2\pi} \left[(\tilde{\lambda} + 1)f_{\tilde{\lambda}+1-\kappa}(\varphi)g_0(\varphi) - g_{\tilde{\lambda}-\kappa}(\varphi)(\tilde{\lambda} + 1)f_1(\varphi) \right] M_\kappa(\varphi) \cdot \\ & \quad \cdot \exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\tilde{\lambda} + 1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi \right\} \cdot \frac{1}{g_0^2(\varphi)} d\varphi = 0 \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{N}$, $1 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda$, so ist $M_\lambda(\varphi)$ 2π -periodisch.

Insbesondere ist ein $M_\lambda(\varphi)$ für $\lambda \geq 1$ 2π -periodisch, wenn gilt:

$$f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi) \quad , \quad \lambda + 1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1 \quad (3.12)$$

Beweis. Die Gleichung (3.3) aus Satz 3.1.1 hat genau dann eine 2π -periodische Lösung $M_\lambda(\varphi)$, wenn gilt:

i) Es ist

$$\sum_{\lambda \geq \kappa+1} \int_0^{2\pi} \frac{1}{g_0(\varphi)} \{(\lambda+1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\} \cdot \underbrace{\exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi \right\}}_{\substack{\text{ist Lösung von} \\ y' - \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} y = 0}} d\varphi = 0 \quad (3.13)$$

ii) und

$$\sum_{\lambda \geq \kappa+1} \frac{1}{g_0(\varphi)} \{(\lambda+1)f_{\lambda-\kappa+1}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\}$$

ist 2π -periodisch.

$M_0(\varphi)$ ist 2π -periodisch. Dies ergibt sich aus Satz 3.1.1. Also ist $M_1(\varphi)$ auch 2π -periodisch, wenn (3.13) für $\lambda = 1$ gilt. Dann ist $M_2(\varphi)$ auch 2π -periodisch, wenn (3.13) für $\lambda = 2$ gilt.

Weiter ist $\int_0^\varphi \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi$ auch 2π -periodisch.

So erhalten wir: $M_0(\varphi), \dots, M_{\lambda-1}(\varphi)$ sind nach Voraussetzung 2π -periodisch.

Betrachtet werde nun:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{g_0(\varphi)} [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]' \cdot \exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi \right\} d\varphi = \\ = & \int_0^{2\pi} \underbrace{[g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'}_{\tilde{f}} \cdot \underbrace{\frac{1}{g_0(\varphi)} \exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} d\psi \right\}}_{\tilde{g}} d\varphi = \\ \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} & \underbrace{g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi) \cdot \frac{1}{g_0(\varphi)} \exp \{ \dots \}}_{=0, \text{ da } 2\pi\text{-periodisch}} \bigg|_0^{2\pi} - \\ & - \int_0^{2\pi} g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi) \left[\frac{1}{g_0(\varphi)} \exp \{ \dots \} \right]' d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi} g_{\lambda-\kappa}(\varphi) M_\kappa(\varphi) \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{\left[\frac{g_0(\varphi)}{g_0^2(\varphi)} \cdot \exp\{\dots\} + \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g_0'(\varphi)}{g_0^2(\varphi)} \cdot \exp\{\dots\} \right]}_{= \exp\{\dots\} \left[-\frac{g_0'(\varphi)}{g_0^2(\varphi)} + \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g_0'(\varphi)}{g_0^2(\varphi)} \right] = \exp\{\dots\} \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi)}{g_0^2(\varphi)}}_{= \frac{1}{g_0^2(\varphi)} \exp\{\dots\} (\lambda+1)f_1(\varphi)} d\varphi = \\
&= - \int_0^{2\pi} g_{\lambda-\kappa}(\varphi) M_\kappa(\varphi) \cdot \frac{1}{g_0^2(\varphi)} \cdot \exp\{\dots\} \cdot (\lambda+1)f_1(\varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

Einsetzen liefert die Behauptung.

□

Zu diskutieren bleibt die Bedingung

$$f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$$

für $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$. Diese wird zunächst allgemein betrachtet. Im folgenden Abschnitt 3.2 werden wir mehrere Beispiele berechnen.

Für $\lambda \tilde{=} 1$ ist die Bedingung schnell gezeigt: $f_1(\varphi)g_0(\varphi) = g_0(\varphi)f_1(\varphi)$. Daraus folgt: $M_1(\varphi)$ ist 2π -periodisch.

Beispiel 3.1.1. *Sei $n = 1$ gewählt. Dann folgt sofort:*

$$\begin{aligned}
f_1(\varphi) &= \sin\varphi \cos\varphi - \cos\varphi \sin\varphi = 0 \\
g_0 &\equiv -1
\end{aligned}$$

Bei Gültigkeit der Gleichung (3.12) mit $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} = 1 &: \text{ trivial.} \\
\tilde{\lambda} \geq 2 &: f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Aus $f_1(\varphi) = 0$, folgt $r' = 0$. Wir erhalten somit Kreise als Lösungen.

Sei nun $n \geq 2$ gewählt. Es ergibt sich eine allgemeine Betrachtung des obigen Beispiels. Ausgangslage ist wieder Gleichung (3.12):

$$f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi), \quad \lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1, \quad \varphi \in [0, 2\pi] \tag{3.15}$$

Für $\tilde{\lambda} = 1$ ist Gleichung (3.14) bekanntlich erfüllt (vgl. Beispiel 3.1.1). Betrachtet werde nun der Fall $\tilde{\lambda} \geq 2$:

Die linke Seite berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu+1} \varphi + q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1} \varphi \sin^\mu \varphi) (-\cos^{2n} \varphi - \sin^{2n} \varphi) = \\
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n} \varphi \sin^{\mu+1} \varphi + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu+1+2n} \varphi - \\
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1+2n} \varphi \sin^\mu \varphi - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{\mu+2n} \varphi = \\
&= f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) g_0(\varphi)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhält man für die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2} \varphi \sin^{\mu+2n-1} \varphi + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n} \varphi \sin^{\mu+1} \varphi - \\
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{\mu+2n} \varphi + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n-1} \varphi \sin^{\mu+2} \varphi = \\
&= g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi) f_1(\varphi)
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) g_0(\varphi) - g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi) f_1(\varphi) = \\
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n} \varphi \sin^{\mu+1} \varphi + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu+1+2n} \varphi - \\
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1+2n} \varphi \sin^\mu \varphi - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{\mu+2n} \varphi + \\
& + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2} \varphi \sin^{\mu+2n-1} \varphi - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n} \varphi \sin^{\mu+1} \varphi + \\
& + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1} \varphi \sin^{\mu+2n} \varphi - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n-1} \varphi \sin^{\mu+2} \varphi = \\
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu+1+2n} \varphi + \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^{\nu+2} \varphi \sin^{\mu+2n-1} \varphi - \\
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+1+2n} \varphi \sin^\mu \varphi - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu+2n-1} \varphi \sin^{\mu+2} \varphi = \\
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu-1+2n} \varphi \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} - \\
& - \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} q_{\nu\mu} \cos^{\nu-1+2n} \varphi \sin^\mu \varphi \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} (p_{\nu\mu} \cos^\nu \varphi \sin^{\mu-1+2n} \varphi - q_{\nu\mu} \cos^{\nu-1+2n} \varphi \sin^\mu \varphi) = \\
&= \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \sin^{2n-1} \varphi + q_{\nu\mu} \cos^{2n-1} \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi = 0 \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Gehen wir zurück zu unserem allgemeinen Beispiel 3.1.1 mit $n = 1$, so lässt sich die zweite Gleichung bei (3.14) wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} \geq 2 \quad : \quad f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) &= g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi) \\
\Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}} (-p_{\nu\mu} \sin \varphi + q_{\nu\mu} \cos \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi &= 0
\end{aligned}$$

Diese Erkenntnis dient als Grundlage für die nun folgenden Beispiele.

Erwähnt sei zudem, dass nun auch die Aussage aus Bemerkung 2.2.3 gesichert ist. Ist für ein homogenes Polynom die Gleichheit $\sum_{\substack{\rho+\kappa=\tilde{\lambda}+4n-2 \\ (\rho,\kappa) \text{ paarweise versch.}}} c_{\rho\kappa} \zeta^\rho \eta^\kappa = 0$ für

alle $(\zeta, \eta) \in S^1$ gegeben, so wird impliziert, dass $c_{\rho\kappa} = 0 \quad \forall \rho, \kappa$ gilt.

Bemerkung 3.1.7. *Zur Vereinfachung sprechen wir im Folgenden nur von 2π -periodischen Lösungen. Behalten wir die exakte Formulierung bei, so müssten wir von einer in Polarkoordinaten 2π -periodischen bzw. von der in der xy -Ebene geschlossenen Lösungskurve sprechen.*

3.2 Beispiele zur Gleichung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$

Gegeben ist die Ausgangsgleichung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$ mit $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ (siehe auch Gleichung (3.12)).

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall $n = 1$. Auf diesen aufbauend werden die Fälle $n \geq 1$ abgeleitet. Am Ende folgt eine Zusammenfassung, um eine Verallgemeinerung zu erhalten.

3.2.1 Der Fall $n = 1$

Wir betrachten folgende Situationen:

a) **Fall $\tilde{\lambda} = 1$.**

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 1 + 2 - 2 = 1$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 1. So folgt sofort aus der Definition von $P(x, y)$ und $Q(x, y)$, dass

(vgl. (2.2))

$$P(x, y) \equiv 0 \quad \text{und} \quad Q(x, y) \equiv 0$$

gilt. Die Differentialgleichung lautet deshalb wie folgt:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad (3.17)$$

Wir wissen bereits aus [Ruckdaeschel], dass die Gleichung (3.17) 2π -periodische Lösungen hat.

b) **Fall $\tilde{\lambda} = 2$.**

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 2 + 2 - 2 = 2$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 2.

Aus Gleichung (3.12) ergibt sich mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} f_2(\varphi)g_0(\varphi) &= g_1(\varphi)f_1(\varphi) \Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=2} (p_{\nu\mu} \sin\varphi - q_{\nu\mu} \cos\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow (p_{20} \sin\varphi - q_{20} \cos\varphi) \cos^2\varphi &+ (p_{11} \sin\varphi - q_{11} \cos\varphi) \cos\varphi \sin\varphi + \\ &+ (p_{02} \sin\varphi - q_{02} \cos\varphi) \sin^2\varphi = 0 \\ \Leftrightarrow (p_{20} - q_{11}) \cos^2\varphi \sin\varphi &+ (p_{11} - q_{02}) \cos\varphi \sin^2\varphi + p_{02} \sin^3\varphi - q_{20} \cos^3\varphi = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls gilt:

$$\mathbf{1. \text{ Fall: }} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{20} = 0 \quad (\text{auch für } \varphi = \pi \text{ und } \varphi = 2\pi)$$

$$\mathbf{2. \text{ Fall: }} \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad p_{02} = 0 \quad (\text{auch für } \varphi = \frac{3\pi}{2})$$

$$\mathbf{3. \text{ Fall: }} \varphi \neq 0 \text{ und } \varphi \neq \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p_{20} = q_{11} = a & , \quad a \in \mathbb{R} \\ p_{11} = q_{02} = b & , \quad b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f_3(\varphi) &= f_4(\varphi) = f_5(\varphi) = \dots = 0 \\ g_2(\varphi) &= g_3(\varphi) = g_4(\varphi) = \dots = 0 \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die höchste Potenz sowohl im Zähler, als auch im Nenner nicht über 2 hinausgeht.

Die allgemeine Form der DGL mit 2π -periodischen Lösungen lautet dann:

$$y' = -\frac{x + p_{20}x^2 + p_{11}xy}{y + q_{11}xy + q_{02}y^2} = -\frac{x + ax^2 + bxy}{y + axy + by^2} = -\frac{x(1 + ax + by)}{\underbrace{y(1 + ax + by)}} = -\frac{x}{y}$$

stellt einen Kreis dar

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

c) **Fall $\tilde{\lambda} = 3$.**

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 3 + 2 - 2 = 3$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 3.

Aus Gleichung (3.12) folgt mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} f_3(\varphi)g_0(\varphi) &= g_2(\varphi)f_1(\varphi) \Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=3} (p_{\nu\mu} \sin\varphi - q_{\nu\mu} \cos\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow & (p_{30} \sin\varphi - q_{30} \cos\varphi) \cos^3\varphi + (p_{21} \sin\varphi - q_{21} \cos\varphi) \cos^2\varphi \sin\varphi + \\ & + (p_{12} \sin\varphi - q_{12} \cos\varphi) \cos\varphi \sin^2\varphi + (p_{02} \sin\varphi - q_{02} \cos\varphi) \sin^3\varphi = 0 \\ \Leftrightarrow & (p_{30} - q_{21}) \cos^3\varphi \sin\varphi + (p_{21} - q_{12}) \cos^2\varphi \sin^2\varphi + (p_{12} - q_{03}) \cos\varphi \sin^3\varphi + \\ & + p_{03} \sin^4\varphi - q_{30} \cos^4\varphi = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls gilt:

1. Fall: $\varphi = 0 \Rightarrow q_{30} = 0$ (auch für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$)

2. Fall: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_{03} = 0$ (auch für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$)

3. Fall: $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} p_{30} = q_{21} \\ p_{21} = q_{12} \\ p_{12} = q_{03} \end{cases}$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f_4(\varphi) &= f_5(\varphi) = f_6(\varphi) = \dots = 0 \\ g_3(\varphi) &= g_4(\varphi) = g_5(\varphi) = \dots = 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Form lautet dann:

$$y' = -\frac{x + p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{12}xy^2}{y + q_{21}x^2y + q_{12}xy^2 + q_{03}y^3} = -\frac{x(p_{30}x^2 + p_{21}xy + p_{12}y^2)}{\underbrace{y(q_{21}x^2 + q_{12}xy + q_{03}y^2)}_{\text{stellt einen Kreis dar}}} = -\frac{x}{y}$$

d) **Zusammenfassung des Falles $n = 1$**

Mit Hilfe der Fälle $\tilde{\lambda} = 1, 2$ und 3 lässt sich leicht eine Verallgemeinerung für die Relationen des Falles $n = 1$ ableiten. Dies ist in der Tabelle 3.1 dargestellt.

Zusammenfassend bleibt zu bemerken, dass es im Fall $n = 1$ nur Kreise als Lösung gibt (vgl. auch Beispiel 3.1.1).

$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 1$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 2$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 3$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 4$...
0	$p_{20} = q_{11}$ $p_{11} = q_{02}$	$p_{30} = q_{21}$ $p_{21} = q_{12}$ $p_{12} = q_{03}$	$p_{40} = q_{31}$ $p_{31} = q_{23}$ $p_{22} = q_{13}$ $p_{13} = q_{04}$...

Tabelle 3.1: Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 1$

Interessanter und für diese Arbeit entscheidend sind die Fälle $n > 1$. Im Gegensatz zum Fall $n = 1$, wo für periodische Lösungen alle Faktoren vorhanden sein müssen, werden bei den Fällen $n > 1$ bestimmte Faktoren nicht benötigt. Genauer zeigt sich bei Betrachtung der weiteren Fälle.

3.2.2 Der Fall $n = 2$

Gegeben ist wieder die Ausgangsgleichung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$ mit $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ (siehe auch Gleichung (3.12)).

Analog zum Fall $n = 1$ werden einzelne Situationen betrachtet.

a) Fall $\tilde{\lambda} = 1$.

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 1 + 4 - 2 = 3$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 3. Nach Definition von $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ folgt sofort (vgl. (2.2)):

$$P(x, y) \equiv 0 \quad \text{und} \quad Q(x, y) \equiv 0$$

Die Differentialgleichung lautet dann:

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \tag{3.18}$$

Dies zeigt, dass Gleichung (3.18) 2π -periodische Lösungen hat.

b) Fall $\tilde{\lambda} = 2$.

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 4.

Aus Gleichung (3.12) folgt mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
 f_2(\varphi)g_0(\varphi) &= g_1(\varphi)f_1(\varphi) \Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=4} (p_{\nu\mu} \sin^3\varphi - q_{\nu\mu} \cos^3\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{40} \sin^3\varphi - q_{40} \cos^3\varphi) \cos^4\varphi + (p_{31} \sin^3\varphi - q_{31} \cos^3\varphi) \cos^3\varphi \sin\varphi + \\
 & + (p_{22} \sin^3\varphi - q_{22} \cos^3\varphi) \cos^2\varphi \sin^2\varphi + (p_{13} \sin^3\varphi - q_{13} \cos^3\varphi) \cos\varphi \sin^3\varphi + \\
 & + (p_{04} \sin^3\varphi - q_{04} \cos^3\varphi) \sin^4\varphi = 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{40} - q_{13}) \cos^4\varphi \sin^3\varphi + (p_{31} - q_{04}) \cos^3\varphi \sin^4\varphi + p_{04} \sin^7\varphi - q_{40} \cos^7\varphi + \\
 & + p_{13} \cos\varphi \sin^6\varphi - q_{31} \cos^6\varphi \sin\varphi + p_{22} \cos^2\varphi \sin^5\varphi - q_{22} \cos^5\varphi \sin^2\varphi = 0
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls gilt:

1. Fall: $\varphi = 0 \Rightarrow q_{40} = 0$ (auch für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$)

2. Fall: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_{04} = 0$ (auch für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$)

3. Fall: $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} p_{13} = p_{22} = q_{22} = q_{13} = 0 \\ p_{40} = q_{13} = a, \quad a \in \mathbb{R} \\ p_{31} = q_{04} = b, \quad b \in \mathbb{R} \end{cases}$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 f_3(\varphi) &= f_4(\varphi) = f_5(\varphi) = \dots = 0 \\
 g_2(\varphi) &= g_3(\varphi) = g_4(\varphi) = \dots = 0
 \end{aligned}$$

Also ist $f_\lambda g_0 = g_{\lambda-1} f_1$ für $\lambda < \tilde{\lambda}$ erfüllt. Die allgemeine Form der Differentialgleichung mit 2π -periodischen Lösungen lautet daher:

$$y' = -\frac{x^3 + p_{40}x^4 + p_{31}x^3y}{y^3 + q_{13}xy^3 + q_{04}y^4} = -\frac{x^3 + ax^4 + bx^3y}{y^3 + axy^3 + by^4} = -\frac{x^3(1 + ax + by)}{y^3(1 + ax + by)} = -\frac{x^3}{y^3}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Fall $\tilde{\lambda} = 3$.

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 3 + 4 - 2 = 5$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 5.

Aus Gleichung (3.12) folgt mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
 f_3(\varphi)g_0(\varphi) &= g_2(\varphi)f_1(\varphi) \Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=5} (p_{\nu\mu} \sin^3\varphi - q_{\nu\mu} \cos^3\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{50} \sin^3\varphi - q_{50} \cos^3\varphi) \cos^5\varphi + (p_{41} \sin^3\varphi - q_{41} \cos^3\varphi) \cos^4\varphi \sin\varphi + \\
 & + (p_{32} \sin^3\varphi - q_{32} \cos^3\varphi) \cos^3\varphi \sin^2\varphi + (p_{23} \sin^3\varphi - q_{23} \cos^3\varphi) \cos^2\varphi \sin^3\varphi + \\
 & + (p_{14} \sin^3\varphi - q_{14} \cos^3\varphi) \cos\varphi \sin^4\varphi + (p_{05} \sin^3\varphi - q_{05} \cos^3\varphi) \sin^5\varphi = 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{50} - q_{23}) \cos^5\varphi \sin^3\varphi + (p_{32} - q_{05}) \cos^3\varphi \sin^5\varphi + (p_{41} - q_{14}) \cos^4\varphi \sin^4\varphi + \\
 & + p_{05} \sin^8\varphi - q_{50} \cos^8\varphi + p_{14} \cos\varphi \sin^7\varphi - q_{41} \cos^7\varphi \sin\varphi + \\
 & + p_{23} \cos^2\varphi \sin^6\varphi - q_{32} \cos^6\varphi \sin^2\varphi + p_{22} \cos^2\varphi \sin^5\varphi - q_{22} \cos^5\varphi \sin^2\varphi = 0
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls gilt:

1. Fall: $\varphi = 0 \Rightarrow q_{50} = 0$ (auch für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$)

2. Fall: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_{05} = 0$ (auch für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$)

3. Fall: $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} p_{23} = p_{14} = q_{32} = q_{41} = 0 \\ p_{50} = q_{23} \\ p_{41} = q_{14} \\ p_{32} = q_{05} \end{cases}$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 f_4(\varphi) &= f_5(\varphi) = f_6(\varphi) = \dots = 0 \\
 g_3(\varphi) &= g_4(\varphi) = g_5(\varphi) = \dots = 0
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Darstellung der Differentialgleichung mit 2π -periodischen Lösungen lautet daher:

$$y' = -\frac{x^3 + p_{50}x^5 + p_{41}x^4y + p_{32}x^3y^2}{y^3 + q_{23}x^2y^3 + q_{14}xy^4 + q_{05}y^5} = -\frac{x^3(p_{50}x^2 + p_{41}xy + p_{32}y^2)}{y^3(q_{23}x^2 + q_{14}xy + q_{05}y^2)} = -\frac{x^3}{y^3}$$

d) Fall $\tilde{\lambda} = 4$.

Es gilt:

$$\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 = 3 + 4 - 2 = 6$$

Die maximale Potenz des Zählers und des Nenners in Gleichung (2.1) ist somit 6.

Aus Gleichung (3.12) folgt mit $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
 f_4(\varphi)g_0(\varphi) &= g_3(\varphi)f_1(\varphi) \Leftrightarrow \sum_{\mu+\nu=6} (p_{\nu\mu} \sin^3 \varphi - q_{\nu\mu} \cos^3 \varphi) \cos^\nu \varphi \sin^\mu \varphi \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{60} \sin^3 \varphi - q_{60} \cos^3 \varphi) \cos^6 \varphi + (p_{51} \sin^3 \varphi - q_{51} \cos^3 \varphi) \cos^5 \varphi \sin \varphi + \\
 & + (p_{42} \sin^3 \varphi - q_{42} \cos^3 \varphi) \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + (p_{33} \sin^3 \varphi - q_{33} \cos^3 \varphi) \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi + \\
 & + (p_{24} \sin^3 \varphi - q_{24} \cos^3 \varphi) \cos^2 \varphi \sin^4 \varphi + (p_{15} \sin^3 \varphi - q_{15} \cos^3 \varphi) \cos \varphi \sin^5 \varphi + \\
 & + (p_{06} \sin^3 \varphi - q_{06} \cos^3 \varphi) \sin^6 \varphi = 0 \\
 \Leftrightarrow & (p_{60} - q_{33}) \cos^6 \varphi \sin^3 \varphi + (p_{51} - q_{24}) \cos^5 \varphi \sin^4 \varphi + (p_{42} - q_{15}) \cos^4 \varphi \sin^5 \varphi + \\
 & + (p_{33} - q_{06}) \cos^3 \varphi \sin^6 \varphi + p_{06} \sin^9 \varphi - q_{60} \cos^9 \varphi + \\
 & + p_{24} \cos^2 \varphi \sin^7 \varphi - q_{42} \cos^7 \varphi \sin^2 \varphi + p_{15} \cos \varphi \sin^8 \varphi - q_{51} \cos^8 \varphi \sin \varphi = 0
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls gilt:

1. Fall: $\varphi = 0 \Rightarrow q_{60} = 0$ (auch für $\varphi = \pi$ und $\varphi = 2\pi$)

2. Fall: $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow p_{06} = 0$ (auch für $\varphi = \frac{3\pi}{2}$)

3. Fall: $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} p_{24} = p_{15} = q_{42} = q_{51} = 0 \\ p_{60} = q_{33} \\ p_{51} = q_{24} \\ p_{42} = q_{15} \\ p_{33} = q_{06} \end{cases}$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
 f_5(\varphi) &= f_6(\varphi) = f_7(\varphi) = \dots = 0 \\
 g_4(\varphi) &= g_5(\varphi) = g_6(\varphi) = \dots = 0
 \end{aligned}$$

Auch hier können wir die Differentialgleichung mit 2π -periodischen Lösungen darstellen als

$$\begin{aligned}
 y' &= -\frac{x^3 + p_{60}x^6 + p_{51}x^5y + p_{42}x^4y^2 + p_{33}x^3y^3}{y^3 + q_{33}x^3y^3 + q_{24}x^2y^4 + q_{15}xy^5 + q_{06}y^6} \\
 &= -\frac{x^3 (p_{60}x^3 + p_{51}x^2y + p_{42}xy^2 + p_{33}y^3)}{y^3 (q_{33}x^3 + q_{24}x^2y + q_{15}xy^2 + q_{06}y^3)} = -\frac{x^3}{y^3}
 \end{aligned}$$

e) Zusammenfassung des Falles $n = 2$

Gegenüber dem Fall $n = 1$ zeigt sich, dass einzelne Faktoren identisch Null sein müssen, um 2π -periodische Lösungen erhalten zu können.

$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 3$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 3$	$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 4$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 4$	$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 5$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 5$	$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 6$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 6$...
0	$p_{40} = q_{13}$ $p_{31} = q_{04}$	$p_{50} = q_{23}$ $p_{41} = q_{14}$ $p_{32} = q_{05}$	$p_{60} = q_{33}$ $p_{51} = q_{24}$ $p_{42} = q_{15}$ $p_{33} = q_{06}$	

Tabelle 3.2: Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 2$

Fassen wir den Fall $n = 2$ in einem Tableau zusammen, so erhalten wir die Angaben aus der Tabelle 3.2.

Werden wir die auftretenden p_{ij} und q_{ij} durch allgemeine Variablen (analog zum Fall $\tilde{\lambda} = 1$) ersetzen, so lassen sich die daraus resultierenden Differentialgleichungen, die 2π -periodische Lösungen garantieren, wie in Tabelle 3.3 angegeben, schreiben.

Grad	Differentialgleichung	Parameter Anzahl
$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0$	$y' = -\frac{x^3}{y^3}$	— 0
$\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 4$ $\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 4$	$y' = -\frac{x^3+ax^3y+bx^4}{y^3+bx^3y^3+ay^4}$	$a, b \in \mathbb{R}$ 2
$4 \leq \text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leq 5$ $4 \leq \text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leq 5$	$y' = -\frac{x^3+ax^3y+bx^4+cx^3y^2+dx^4y+ex^5}{y^3+bx^3y^3+ay^4+ex^2y^3+dx^4y^4+cy^5}$	$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 5
$4 \leq \text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leq 6$ $4 \leq \text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \leq 6$	$y' = -\frac{x^3+ax^3y+bx^4+cx^3y^2+dx^4y+ex^5+fx^3y^3+gx^4y^2+hx^5y+ix^6}{y^3+bx^3y^3+ay^4+ex^2y^3+dx^4y^4+cy^5+ix^3y^3+hx^2y^4+gx^5y^5+fy^6}$	$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$ 9
\vdots	\vdots	\vdots

Tabelle 3.3: Darstellung der allgemeinen Differentialgleichungen für den Fall $n = 2$; Existenz einer 2π -periodische Lösung ist gewährleistet

Bemerkung 3.2.1. $\tilde{\lambda} \geq s$ mit $s \in \mathbb{N}$ gibt die Anzahl der zwischen den Koeffizienten $p_{\nu\mu}$ und $q_{\nu\mu}$ bestehenden Relationen an.

3.2.3 Der Fall $n = 3$

Um die Ausführungen kürzer zu halten, sei für den Fall $n = 3$ nur die zusammenfassende Tabelle 3.4 angegeben.

3.2.4 Eine Verallgemeinerung für $n \geq 4$

In den vorhergehenden Fällen fällt bereits auf, dass die Anzahl der Relationen unabhängig von $n \in \mathbb{N}$ stets $\tilde{\lambda} = s$ mit $s \in \mathbb{N}$ beträgt. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = k \geq 2n$

$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 5$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 6$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 7$	$\frac{\text{grad}(\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y}))}{\text{grad}(\mathbf{q}(\mathbf{x},\mathbf{y}))} = 8$	\dots
0	$p_{60} = q_{15}$ $p_{51} = q_{06}$	$p_{70} = q_{25}$ $p_{61} = q_{16}$ $p_{52} = q_{07}$	$p_{80} = q_{35}$ $p_{71} = q_{26}$ $p_{62} = q_{17}$ $p_{53} = q_{08}$	

Tabelle 3.4: Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den Fall $n = 3$

gegeben, dann können die obigen Relationen für alle n wie folgt verallgemeinert werden ($\lambda = \tilde{\lambda} + 2n - 2 \Leftrightarrow \tilde{\lambda} = \lambda - 2n + 2$):

$\lambda = 2n - 1$	$\lambda = 2n$	$\lambda = 2n + 1$	$\lambda = 2n + 2$	\dots	$\lambda = k$
0	$p_{\lambda,0} = q_{1,\lambda-1}$ $p_{\lambda-1,1} = q_{0,\lambda}$	$p_{\lambda,0} = q_{2,\lambda-2}$ $p_{\lambda-1,1} = q_{1,\lambda-1}$ $p_{\lambda-2,2} = q_{0,\lambda}$	$p_{\lambda,0} = q_{3,\lambda-3}$ $p_{\lambda-1,1} = q_{2,\lambda-2}$ $p_{\lambda-2,2} = q_{1,\lambda-1}$		$p_{\lambda,0} = q_{k-1,\lambda-k+1}$ $p_{\lambda-1,1} = q_{k-2,\lambda-k+2}$ $p_{\lambda-2,2} = q_{k-3,\lambda-k+3}$ \vdots $p_{\lambda-k+1,k-1} = q_{0,\lambda}$

Tabelle 3.5: Darstellung der Gleichungen zur Identifikation der Parameter für den allgemeinen Fall

Mit Hilfe der Ausgangsgleichung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$ für $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ können wir daher alle Differentialgleichungen exakt angeben, die 2π -periodische Lösungen garantieren.

Aus den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 konnten wir bereits erkennen, dass wir zwar alle Differentialgleichungen mit 2π -periodischen Lösungen angeben können, diese sich aber bei den betrachteten Fällen $n = 1$ und $n = 2$ auf die Darstellung $y' = -\frac{x}{y}$ bzw. $y' = -\frac{x^3}{y^3}$ kürzen lassen.

Ob dies auch für höhere Potenzen gilt, wollen wir nach der Betrachtung einiger Beispiele mit Hilfe des MAPLE-Programms untersuchen. Mit dem beigefügten MAPLE-Programm können wir auf einzelne Phasenportraits zurückgreifen, von denen wir uns weitere Erkenntnisse hinsichtlich dieser These erwarten.

Kapitel 4

Das MAPLE-Programm - Teil I

Das MAPLE-Programm ist in drei Teile gegliedert. Teil I stellt die Umsetzung des vorher beschriebenen Problems dar. Für den Anwender bestehen folgende Möglichkeiten innerhalb des ersten Teils:

Variante 1. Eingabe einer Differentialgleichung und Test auf periodische Lösungen

Variante 2. Eingabe eines beliebigen Polynoms und Generierung einer Differentialgleichung, die periodische Lösungen erlaubt

Variante 3. Angabe einer allgemeinen Darstellung einer Differentialgleichungen, die periodische Lösungen garantiert

Die aufgelisteten Punkte werden im Folgenden verkürzt als Variante 1, 2 und 3 bezeichnet.

Teil II wird in Kapitel 5 beschrieben. Der dritte Teil des Programms beinhaltet alle in der Arbeit angegebenen Beispiele. Diese können direkt abgerufen werden.

Die Umsetzung ist interaktiv. Der Anwender muss jedoch beachten, alle Eingaben mit einem *RETURN* zu bestätigen.

4.1 Programmteil I

Zunächst wählt der Anwender, welche Variante für ihn von Interesse ist. Obige Möglichkeiten stehen dabei zur Auswahl.

An dieser Stelle wird auf die Beschreibung des Programms nur sehr kurz eingegangen. Ausführliche Informationen sind der README-Datei (siehe Anhang A) oder dem Programm selbst zu entnehmen. Der beiliegende Datenträger wird in Anhang B beschrieben.

4.1.1 Variante 1

Diese Variante zeigt dem Anwender, ob eine eingegebene Differentialgleichung in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen besitzt. Gleichzeitig kann ein $2D$ - und $3D$ -Plot generiert werden.

Ist keine periodische Lösung möglich, so besteht die Option, das Polynom $B(x, y)$, unter der Voraussetzung $\text{grad}B(x, y) < \text{grad}A(x, y)$, vom Programm so ändern zu lassen, dass dennoch eine in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösung ermöglicht wird.

4.1.2 Variante 2

Bei Variante 2 wird der Anwender, im Gegensatz zu Variante 1, aufgefordert, nur ein Polynom einzugeben. Das Programm berechnet ein passendes Polynom, um in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen zu erhalten.

Das eingegebene Polynom wird mit $A(x, y)$ identifiziert. Das berechnete Polynom entspricht somit $B(x, y)$. Ein entsprechender Kommentar weist darauf hin, falls kein $B(x, y)$ berechnet werden kann.

4.1.3 Variante 3

In Variante 3 wird aufgezeigt, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, um in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen zu erhalten.

Nur die Anfangspotenz und die maximale Potenz der Polynome werden eingegeben. So berechnet das Programm neben der Anzahl der maximalen freien Parameter auch die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen und gibt diese aus.

4.2 Beispiele - Variante 1

a) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3}{y^3}$

Diese Differentialgleichung betrachten wir, um am Ende des Kapitels die 2π -periodischen Lösungskurven von $y' = -\frac{x^3}{y^3}$ und $y' = -\frac{x^3+P(x,y)}{y^3+Q(x,y)}$ vergleichen zu können.

Aus den Angaben berechnet das Programm folgende Teilergebnisse:

```
Maximale Potenz: 3
Maximale Parameteranzahl: 0
Maximale Anzahl der Bedingungen: 0
Koeffizienten von Poly_A:
Koeffizienten von Poly_B:
```

Der Algorithmus bestätigt, dass diese Differentialgleichung 2π -periodische Lösungen enthält. Verdeutlicht wird dies durch dazugehörige Grafiken in Abbildung 4.1.

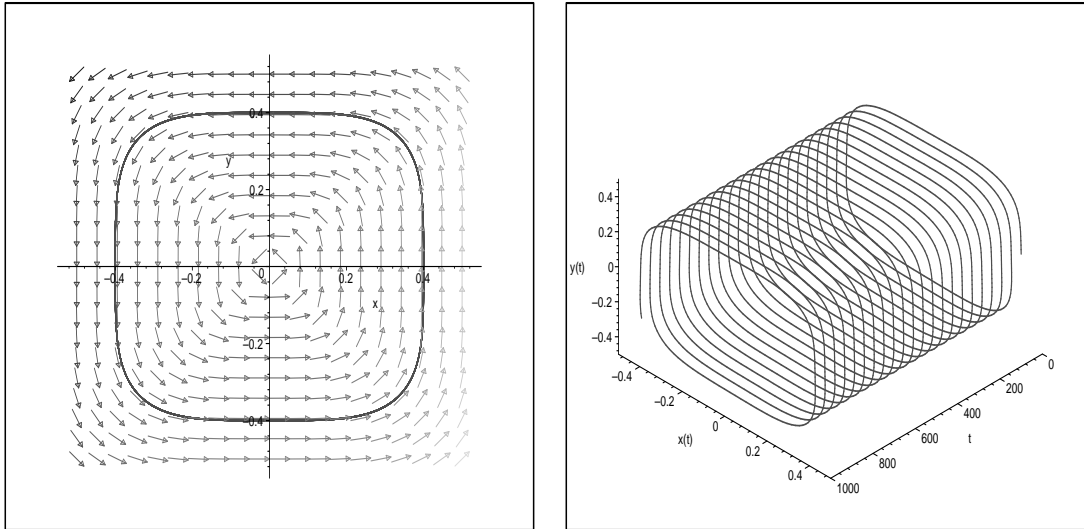


Abbildung 4.1: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3}{y^3}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

- b) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3 + \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^4}{y^3 + \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{2}y^4}$

Aus den Angaben $n = 2$ und der maximalen Potenz von 4 berechnet das Programm folgende Teilergebnisse:

Maximale Potenz: 4

Maximale Parameteranzahl: 2

Maximale Anzahl der Bedingungen: 2

Koeffizienten von Poly_A: $p_{31} = +1/2$, $p_{40} = +3/4$

Koeffizienten von Poly_B: $q_{13} = +3/4$, $q_{04} = +1/2$

Der Algorithmus bestätigt, dass diese Differentialgleichung 2π -periodische Lösungen enthält. Verdeutlicht wird dies durch dazugehörige Grafiken in Abbildung 4.2.

- c) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3 + 1x^3y + \frac{5}{7}x^4 + \frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^5}{y^3 + \frac{5}{7}xy^3 + 1y^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{3}{4}y^5}$

Aus den Angaben $n = 2$ und der maximalen Potenz von 5 berechnet das Programm folgende Teilergebnisse:

Maximale Potenz: 5

Maximale Parameteranzahl: 5

Maximale Anzahl der Bedingungen: 5

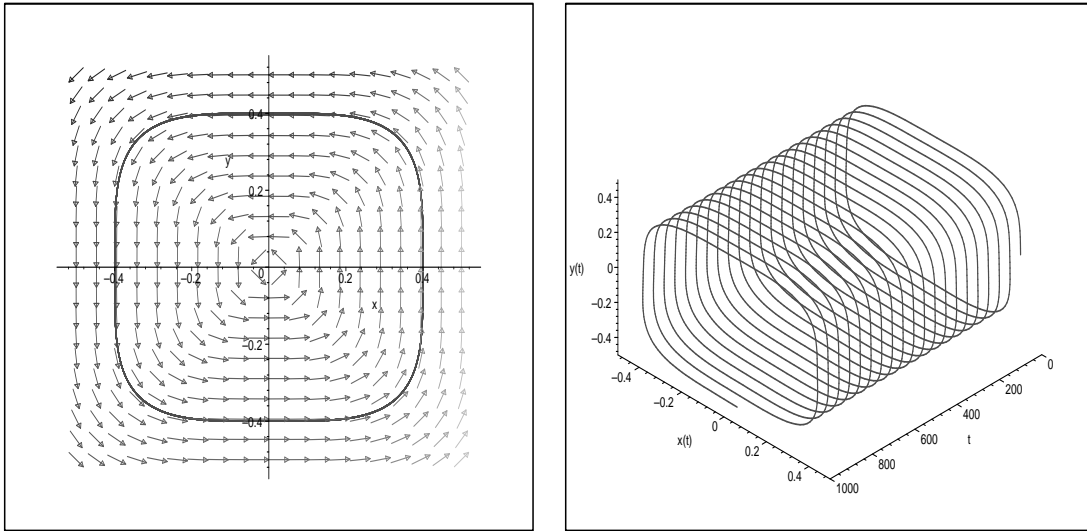


Abbildung 4.2: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + \frac{1}{2}x^3y + \frac{3}{4}x^4}{y^3 + \frac{3}{4}xy^3 + \frac{1}{2}y^4}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

Koeffizienten von Poly_A: $p_{31} = +1$, $p_{40} = +5/7$, $p_{32} = +3/4$, $p_{50} = +1/2$
 Koeffizienten von Poly_B: $q_{13} = +5/7$, $q_{04} = +1$, $q_{23} = +1/2$, $q_{05} = +3/4$

Der Algorithmus bestätigt, dass diese Differentialgleichung 2π -periodische Lösungen enthält. Verdeutlicht wird dies durch dazugehörige Grafiken in Abbildung 4.3.

- d) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3 + x^5}{y^3 + x^2y^3}$
 Aus den Angaben $n = 2$ und der maximalen Potenz von 5 berechnet das Programm folgende Teilergebnisse:

Maximale Potenz: 5
 Maximale Parameteranzahl: 5
 Maximale Anzahl der Bedingungen: 5
 Koeffizienten von Poly_A: $p_{50} = +1$
 Koeffizienten von Poly_B: $q_{23} = +1$

Auch hier bestätigt der Algorithmus, dass diese Differentialgleichung 2π -periodische Lösungen enthält. Verdeutlicht wird dies durch dazugehörige Grafiken in Abbildung 4.4.

- e) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - x^7}$
 Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung aus der Arbeit von [Opel]. Unser Algorithmus liefert folgende Angaben:

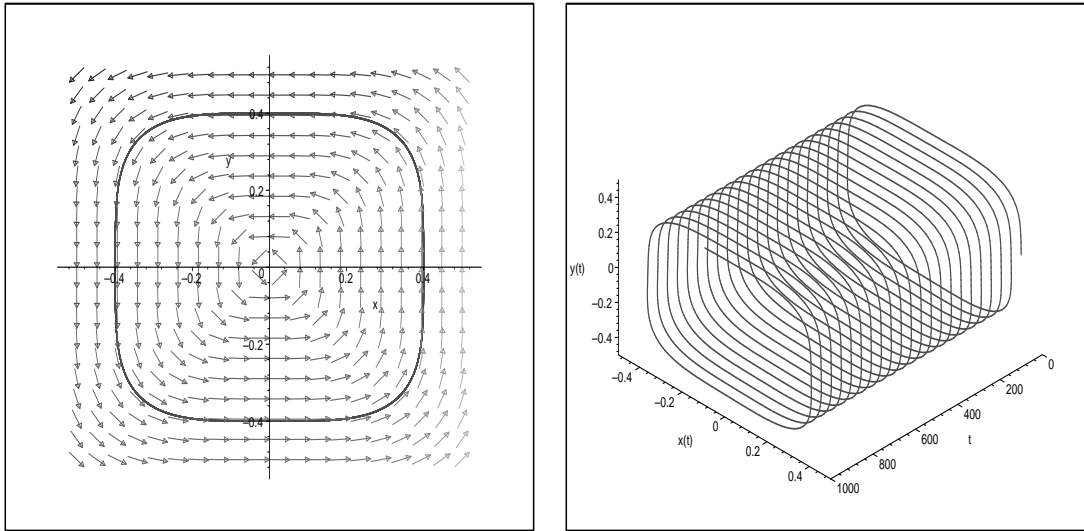


Abbildung 4.3: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 + x^3y + \frac{5}{7}x^4 + \frac{3}{4}x^3y^2 + \frac{1}{2}x^5}{y^3 + \frac{5}{7}xy^3 + y^4 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{3}{4}y^5}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

Maximale Potenz: 7

Maximale Parameteranzahl: 14

Maximale Anzahl der Bedingungen: 14

Koeffizienten von Poly_A: $p_{43} = -2$

Koeffizienten von Poly_B: $q_{70} = -1$

Mit diesen Angaben ergibt sich aus den

Bedingungen keine in Polarkoordinaten periodische Loesung.

Das Programm versucht, das Polynom B so zu veraendern, dass dennoch die Bedingungen erfuehlt sind.

Analog zu den Angaben in der Arbeit von [Opel] beschreibt diese Differentialgleichung keinen Wirbelfall, sondern den Strudelfall. Daher sind keine periodischen Loesungen moeglich. Dies wird auch durch die folgenden Abbildungen 4.5 verdeutlicht.

Mit kleineren Umformungen der Ausgangsdifferentialgleichung kann es periodische Loesungen geben. So lautet die weitere Ausgabe:

Wir benoetigen ein Polynom, so dass unsere Bedingungen NULL ergeben. Diese wollen wir nun angeben.

Koeffizienten von Poly_A: $p_{43} = -2$

Koeffizienten von Poly_B: $q_{16} = -2$

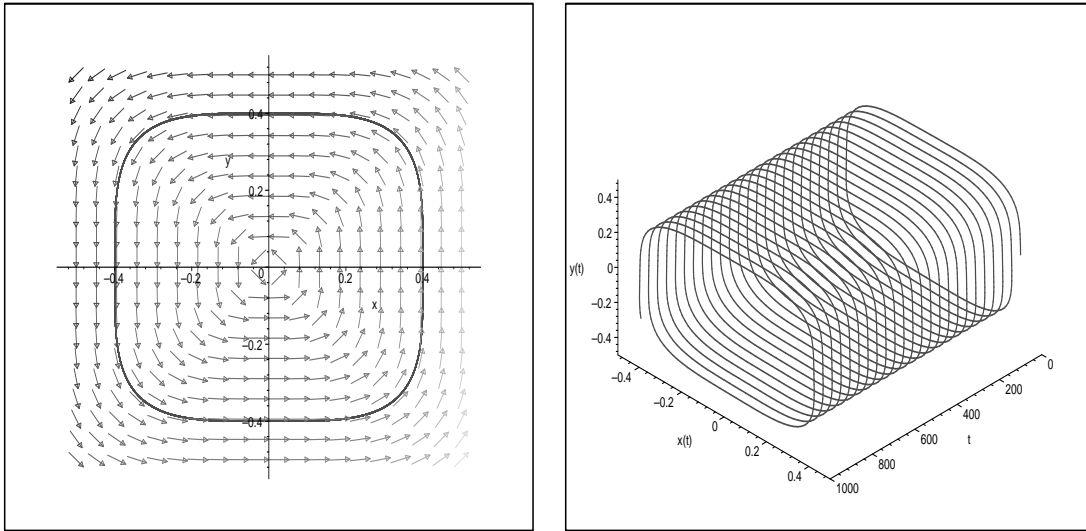


Abbildung 4.4: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+x^5}{y^3+x^2y^3}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

Daraus resultiert die neue Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - 2xy^6}$$

Diese garantiert 2π -periodische Lösungen, was durch die Abbildungen 4.6 verdeutlicht wird.

f) Differentialgleichung $y' = -\frac{x^3+y^7}{y^3+x^7}$

Diese Differentialgleichung ist ebenfalls der Arbeit von [Opel] entnommen. Unser Algorithmus liefert folgende Angaben:

```

Maximale Potenz: 7
Maximale Parameteranzahl: 14
Maximale Anzahl der Bedingungen: 14
Koeffizienten von Poly_A: p07 = +1
Koeffizienten von Poly_B: q70 = +1
Mit diesen Angaben ergibt sich aus den
Bedingungen keine in Polarkoordinaten periodische Loesung.
Das Programm versucht, das Polynom B so zu veraendern, dass
dennoch die Bedingungen erfuehlt sind.
```

Für dieses Beispiel liefert unser Algorithmus lediglich die zusätzliche Angabe

```

Leider ist diese Option fuer die eingegebenen Polynome
nicht moeglich.
```

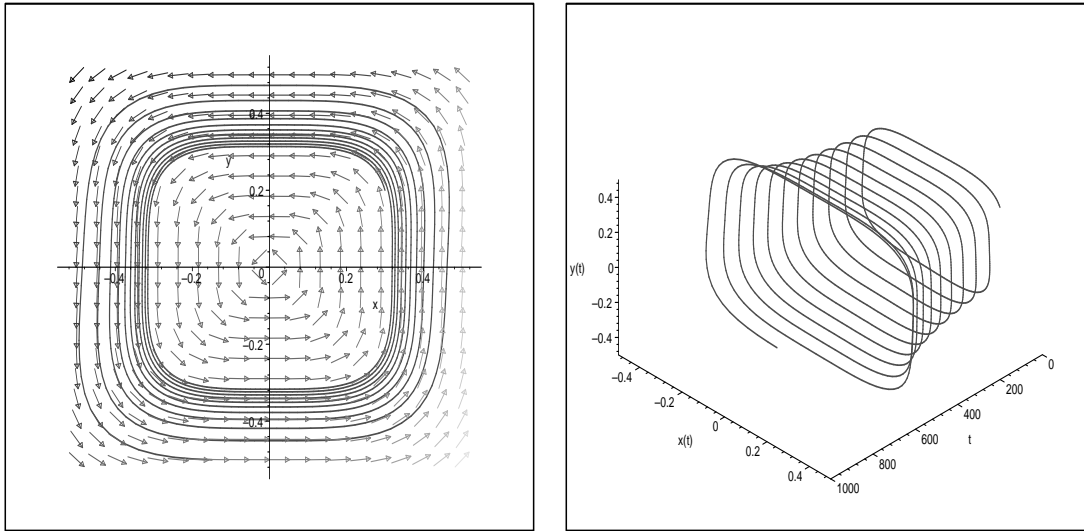


Abbildung 4.5: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - x^7}$ mit Startpunkt $(0.3/0.2)$ und maximalem t -Wert 1000

Dies liegt daran, dass beide Koeffizienten bei periodischen Lösungen nicht vorhanden sind. Eine denkbare Alternative wäre, beide Koeffizienten Null zu setzen. Daraus resultiert das ungestörte Problem. Diese Möglichkeit wird aber im Algorithmus ausgeschlossen, da das Polynom $A(x, y)$ festgehalten wird.

Bemerkung 4.2.1. Die einzelnen Beispiele aus diesen Abschnitt zeigen, dass auch die graphische Darstellung der 2π -periodischen Lösungskurve identisch ist. Dies und die Kenntnisse aus den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 legen nach genaueren Studium, die Vermutung nahe, dass wir mit der Bedingung (3.12) nicht über $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ hinauskommen, denn die weiteren Potenzterme kürzen sich heraus. Allgemeiner werden wir dies im Satz 5.1.1 sehen.

4.3 Beispiele - Variante 2

Im folgenden Abschnitt wollen wir Beispiele für die Variante 2 anführen. Wir beschränken uns auf ein Beispiel für den Fall $n = 2$ (siehe a)) und $n = 3$ (siehe b)).

Weiter wird ein Beispiel angeführt, bei dem sich kein passendes Polynom $B(x, y)$ findet.

- a) Für das Polynom $x^3 + 2x^3y - x^4$ mit den Angaben $n = 2$ und der maximalen Potenz 4 erhalten wir für das berechnete Polynom $B(x, y)$ folgende Angaben:

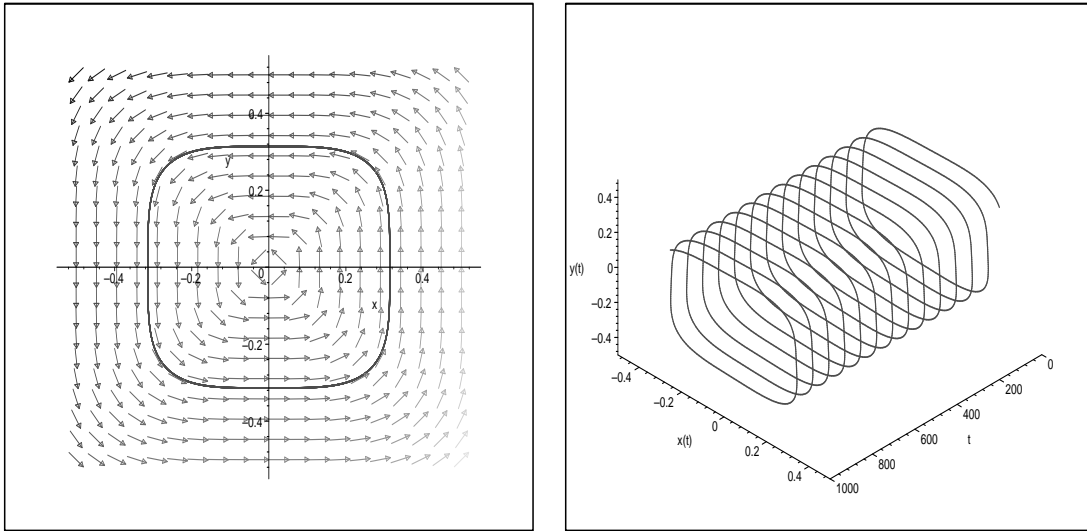


Abbildung 4.6: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3 - 2x^4y^3}{y^3 - 2xy^6}$ mit Startpunkt (0.3/0.2) und maximalem t -Wert 1000

Maximale Potenz: 4

Maximale Parameteranzahl: 2

Maximale Anzahl der Bedingungen: 2

Koeffizienten von Poly_B: $q_{13}^* = -1$, $q_{04}^* = +2$

So ergibt sich schließlich die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^3 + 2x^3y - x^4}{y^3 - xy^3 + 2y^4}$$

- b) Für das Polynom $x^5 - x^7 + \frac{1}{2}x^6y - \frac{5}{4}x^5y^2$ mit den Angaben $n = 3$ und der maximalen Potenz 7 erhalten wir für das berechnete Polynom $B(x, y)$ folgende Angaben:

Maximale Potenz: 7

Maximale Parameteranzahl: 5

Maximale Anzahl der Bedingungen: 5

Koeffizienten von Poly_B: $q_{25}^* = -1$, $q_{16}^* = +1/2$, $q_{07}^* = -5/4$

So ergibt sich für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^5 - x^7 + \frac{1}{2}x^6y - \frac{5}{4}x^5y^2}{y^5 - x^2y^5 + \frac{1}{2}xy^6 - \frac{5}{4}y^7}$$

- c) Für das Polynom $x^3 + x^7$ mit den Angaben $n = 2$ und der maximalen Potenz 7 erhalten wir für das berechnete Polynom $B(x, y)$ folgende Angaben:

Maximale Potenz: 7
 Maximale Parameteranzahl: 14
 Maximale Anzahl der Bedingungen: 14
 Koeffizienten von Poly_B: $q_{43}^* = +1$

So gilt für die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^3 + x^7}{y^3 + x^4 y^3}$$

- d) Für das Polynom $x^3 + y^7$ mit $n = 2$ und der maximalen Potenz 7 findet unser Programm keine Lösung.

Das Polynom wird im Programm mit $A(x, y)$ identifiziert. Da die Potenz von y größer, als die Potenz von x ist, ignoriert das Programm die Angabe $+y^7$. Folglich wird y^3 für $B(x, y)$ berechnet und vom ungestörten Problem ausgegangen.

Bemerkung 4.3.1. *Eine genaue Definition des ungestörten Problems befindet sich in Kapitel 5 (vgl. Definition 5.1.1).*

4.4 Beispiele - Variante 3

Beispiele zur Variante 3 werden nur kurz angeführt. Die angegebenen Bedingungen müssen als Wert Null ergeben, um in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungen für die allgemeine Form der Differentialgleichung zu erhalten.

- a) Mit der Anfangspotenz 3 und maximaler Potenz 7 erhalten wir aus dem Programm

Maximale Potenz: 7
 Maximale Parameteranzahl: 14
 Maximale Anzahl der Bedingungen: 14
 Grad = 7
 Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:
 Bedingung 1: $p_{70} - q_{43}$
 Bedingung 2: $p_{61} - q_{34}$
 Bedingung 3: $p_{52} - q_{25}$
 Bedingung 4: $p_{43} - q_{16}$
 Bedingung 5: $p_{34} - q_{07}$
 :
 Grad = 4
 Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:
 Bedingung 1: $p_{40} - q_{13}$
 Bedingung 2: $p_{31} - q_{04}$

b) Mit der Anfangspotenz 9 und maximaler Potenz 19 erhalten wir die Ausgabe

```

Maximale Potenz: 19
Maximale Parameteranzahl: 65
Maximale Anzahl der Bedingungen: 65
Grad = 19
Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:
Bedingung 1:  $p_{19,0} - q_{10,9}$ 
Bedingung 2:  $p_{18,1} - q_{9,10}$ 
Bedingung 3:  $p_{17,2} - q_{8,11}$ 
Bedingung 4:  $p_{16,3} - q_{7,12}$ 
Bedingung 5:  $p_{15,4} - q_{6,13}$ 
Bedingung 6:  $p_{14,5} - q_{5,14}$ 
Bedingung 7:  $p_{13,6} - q_{4,15}$ 
Bedingung 8:  $p_{12,7} - q_{3,16}$ 
Bedingung 9:  $p_{11,8} - q_{2,17}$ 
Bedingung 10:  $p_{10,9} - q_{1,18}$ 
Bedingung 11:  $p_{9,10} - q_{0,19}$ 
:
Grad = 9
Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:
Bedingung 1:  $p_{10,0} - q_{1,9}$ 
Bedingung 2:  $p_{9,1} - q_{0,10}$ 

```

Andere Beispiele sind dem Leser selbst überlassen.

Kapitel 5

Symmetrie der periodischen Lösungen

In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf Symmetrieeigenschaften der einzelnen Lösungskurven. Wir unterscheiden dabei zwischen ungestörtem und gestörtem Problem.

Für das ungestörte Problems zeigen wir zunächst, dass unsere Vermutung 4.2.1 am Ende des Abschnitts 4.2 richtig ist. Weiter untersuchen wir die Symmetrieeigenschaften des gestörten Problems und betrachten dazu zwei Fälle in Hinsicht auf symmetrische Eigenschaften der Lösungskurve. Implementiert ist dies im MAPLE-Programm - Teil II.

5.1 Das ungestörte Problem $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$, $n \geq 1$ und seine Symmetrien

Wir betrachten die Differentialgleichung aus Definition 2.1:

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)}, n > 1$$

Definition 5.1.1. Sei eine Differentialgleichung wie oben gegeben. Dann sprechen wir von einem **ungestörten Problem**, wenn gilt:

$$P(x, y) \equiv Q(x, y) \equiv 0$$

Unsere in Kapitel 4 erwähnte Vermutung können wir mit Hilfe des folgenden Satzes zeigen:

Satz 5.1.1. Es gelte (3.12) für alle $\tilde{\lambda} \geq 1$. Dann sind die Vektorfelder

$$\begin{pmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^{2n-1} \\ y^{2n-1} \end{pmatrix}$$

linear abhängig, d. h. $y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ und $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ haben dasselbe Richtungsfeld.

Beweis. Es ist

$$[A(x, y) \cdot y^{2n-1}] - [B(x, y) \cdot x^{2n-1}] = [P(x, y) \cdot y^{2n-1}] - [Q(x, y) \cdot x^{2n-1}]$$

und nach Umschreiben auf Polarkoordinaten erkennen wir, dass

$$[P(x, y) \cdot y^{2n-1}] - [Q(x, y) \cdot x^{2n-1}]$$

dann und nur dann verschwindet, wenn

$$\sum_{\mu+\nu=l} (p_{\nu\mu} \sin^{2n-1}\varphi - q_{\nu\mu} \cos^{2n-1}\varphi) \cdot \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi = 0$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $l \geq 2n$ ist. Nach (3.16) ist dies äquivalent zu (3.12) und daher gezeigt.

□

Bemerkung 5.1.1. *Ausklammern von x bzw. x^3 im Zähler und y bzw. y^3 im Nenner in den Beispielen unter 3.2.1 und 3.2.2 bestätigt Satz 5.1.1.*

Mit Hilfe dieses Satzes ist Vermutung 4.2.1 gezeigt. Zusammengefasst ergibt sich die

Folgerung 5.1.1. *Mit Hilfe der Bedingung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\mu-1}(\varphi)f_1(\varphi)$ für $\lambda + 1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ erhalten wir bestimmte Darstellungen von Differentialgleichungen, die 2π -periodische Lösungen garantieren. Durch Ausklammern und Kürzen können wir alle daraus resultierenden gestörten Probleme $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$ auf die Darstellung des ungestörten Problems $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ zurückführen.*

So können wir festhalten, dass unsere Vermutung 4.2.1 richtig ist und sich alle Beispiele aus dem Abschnitt 4.2 auf das ungestörte Problem zurückführen lassen.

Offen bleibt noch, die Symmetrieeigenschaften der ungestörten Probleme $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$, $n > 1$ näher zu untersuchen.

Wie bereits erwähnt (vgl. Abschnitt 3.2.1), ist die 2π -periodische Lösung der Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$ ein Kreis. Verdeutlicht werde dies zudem durch die Abbildung 5.1.

Bei höheren Potenzen nähern sich die 2π -periodischen Lösungskurven langsam einem Rechteck an. Dies können wir erkennen, wenn wir die Abbildungen 5.1 und 4.1 vergleichen. Erhöhen wir die Anfangspotenz auf 5 bzw. auf 7, so vermuten wir, dass sich die 2π -periodische Lösungskurve einem Quadrat nähert. Zur Verdeutlichung dienen die Abbildungen 5.2 und 5.3.

Gleichzeitig erscheint uns die 2π -periodische Lösungskurve im Fall $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ sowohl zur x -Achse, als auch zur y -Achse symmetrisch, da es sich um die Niveaulinien von $x^{2n} + y^{2n}$ handelt.

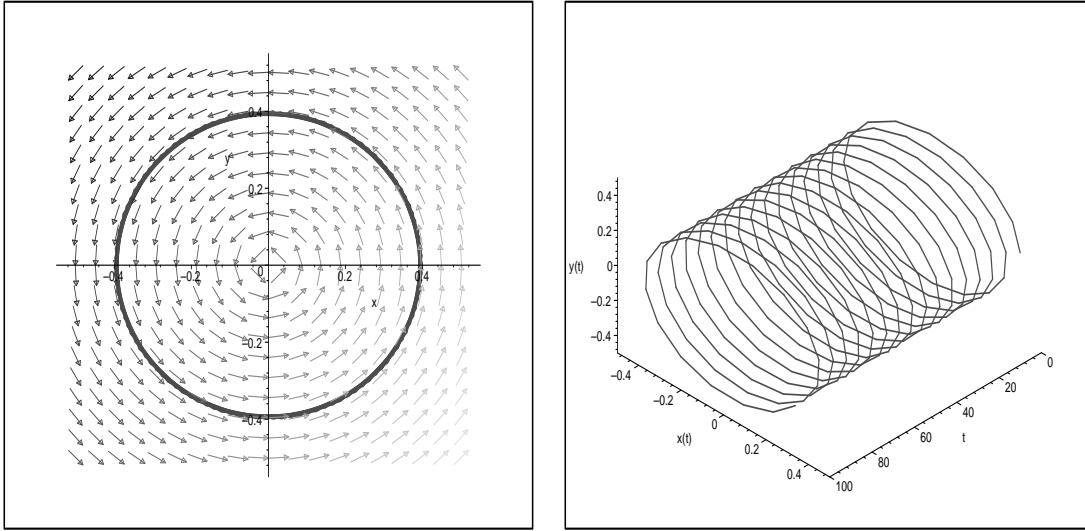


Abbildung 5.1: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x}{y}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 100

Schwieriger erweist es sich beim gestörten Problem. Im folgenden Abschnitt wollen wir symmetrische Eigenschaften des gestörten Problems anhand von zwei ausgewählten Fällen verdeutlichen.

5.2 Ein gestörtes Problem und seine Symmetrien

Das oben dargestellte ungestörte Problem ist nur ein Spezialfall des gestörten Problems. Unter Beachtung der Definition 5.1.1 ergibt sich die

Bemerkung 5.2.1. Wir sprechen von einem **gestörten Problem**, wenn

$$P(x, y) \neq 0 \quad \text{oder} \quad Q(x, y) \neq 0$$

gegeben ist.

Wir werden nun zeigen, dass die gestörten Probleme

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)}, n \geq 1$$

mit $P(x, y) \neq 0$ oder $Q(x, y) \neq 0$ in folgenden Fällen zu Wirbelfällen mit Symmetrien führen:

Fall 1 : $P(x, y)$ enthält nur gerade Potenzen und $Q(x, y)$ enthält nur ungerade Potenzen von y

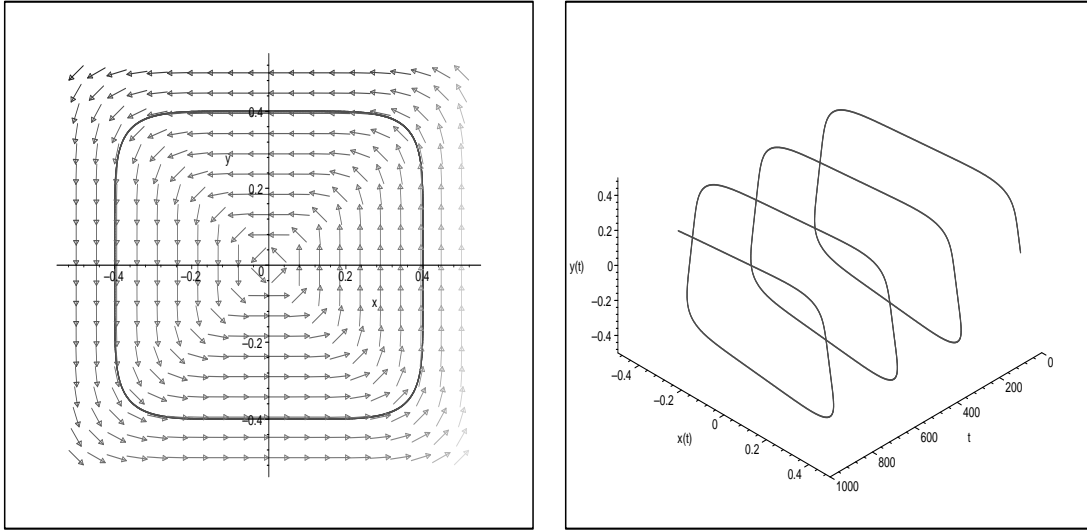


Abbildung 5.2: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5}{y^5}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

Fall 2 : $P(x, y)$ enthält nur ungerade Potenzen und $Q(x, y)$ enthält nur gerade Potenzen von x

Bemerkung 5.2.2. Gerade Potenzen stellen die natürlichen Zahlen $0, 2, 4, 6, \dots$ dar; ungerade Potenzen sind durch die natürlichen Zahlen $1, 3, 5, 7, \dots$ gegeben.

Satz 5.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. In der Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ seien $A(x, y)$ und $B(x, y)$ wie folgt gegeben:

$A(x, y) = x^{2n-1} + P(x, y)$ mit Polynom $P(x, y)$, das nur GERADE Potenzen von y enthält und mit Gliedern vom Grad $\geq 2n$ beginnt, und

$B(x, y) = x^{2n-1} + Q(x, y)$ mit Polynom $Q(x, y)$, das nur UNGERADE Potenzen von y enthält und mit Gliedern vom Grad $\geq 2n$ beginnt,

oder

$A(x, y) = x^{2n-1} + P(x, y)$ mit Polynom $P(x, y)$, das nur UNGERADE Potenzen von x enthält und mit Gliedern vom Grad $\geq 2n$ beginnt, und

$B(x, y) = x^{2n-1} + Q(x, y)$ mit Polynom $Q(x, y)$, das nur GERADE Potenzen von x enthält und mit Gliedern vom Grad $\geq 2n$ beginnt.

Dann tritt um den kritischen Punkt $(0/0)$ der Wirbelfall ein. Im ersten Fall sind die Lösungen symmetrisch zur x -Achse, im zweiten Fall symmetrisch zur y -Achse.

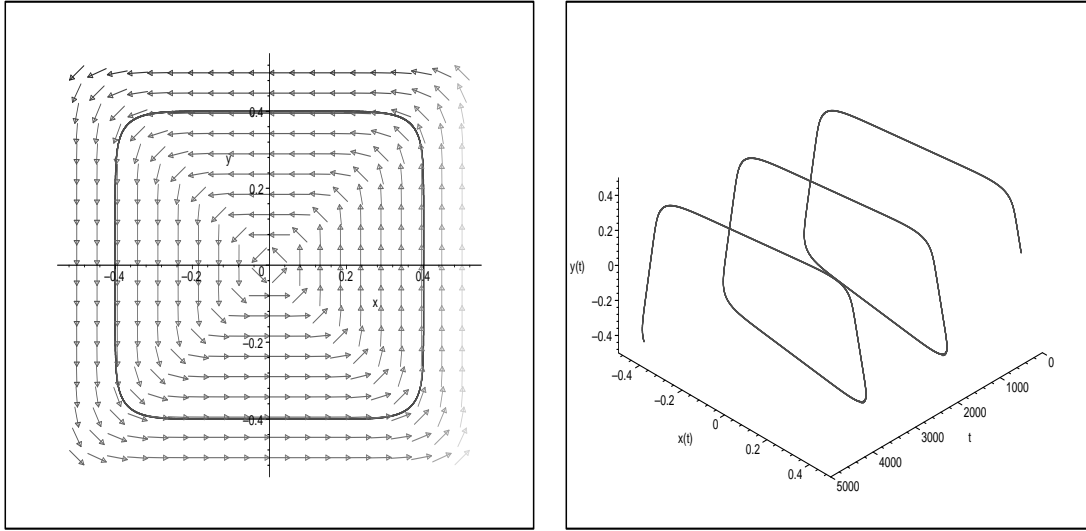


Abbildung 5.3: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^7}{y^7}$ mit Startpunkt $(0.4/0)$ und maximalem t -Wert 1000

Beweis. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ als ebenes autonomes System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h(x,y)B(x,y), \\ \dot{y} &= -h(x,y)A(x,y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit einem Multiplikator $h(x,y) \neq 0$ in einer Umgebung von $(0/0)$ oder besser als Lösungsgebilde der Gleichung

$$\alpha = A(x,y) dx + B(x,y) dy = 0 \quad (5.2)$$

für die 1- Form $\alpha = A dx + B dy$. Das charakteristische Polynom

$$G(x,y) = -x \cdot A(x,y) - y \cdot B(x,y)$$

beginnt mit $-x^{2n} - y^{2n}$ als niedrigste Potenzen. Es ist daher negativ definit in einer um den kritischen Punkt $(0/0)$ punktierten Umgebung U von $(0/0)$. Insbesondere geht durch jeden Punkt aus $U \setminus \{(0/0)\}$ genau eine Lösung von (5.2).

Darüber hinaus ist jeder von $(0/0)$ ausgehende Halbstrahl der (x,y) - Ebene transversales Segment, das die Lösungskurve schneidet. Beginnt man hinreichend nahe des Nullpunkts, so umläuft die Lösung in $U \setminus \{(0/0)\}$ den Nullpunkt (vgl. auch [Klein]).

Im ersten Fall ist mit $(x(t)/y(t))$ auch $(x(t)/-y(t))$ eine Lösungskurve von (5.2), etwa durch $(x_0/0)$ mit $x_0 \neq 0$. Sie fallen daher zusammen und bilden eine zur x -Achse spiegelsymmetrische geschlossene Kurve. Im zweiten Fall ist mit $(x(t)/y(t))$ auch $(-x(t)/y(t))$ eine Lösungskurve und der Beweis verläuft analog.



Die graphische Darstellung der symmetrischen Lösungskurven der beschriebenen Fälle folgt anhand von ausgewählten Beispielen im nächsten Abschnitt.

5.3 Beispiele zum MAPLE-Programm - Teil II

Um eine bessere Vergleichbarkeit der einzelnen graphischen Darstellungen zu erzielen, wollen wir den Startwert möglichst nicht verändern und analog zu den bereits vorhandenen Abbildungen wählen.

Unsere ausgewählten Beispiele beschränken sich, wie bereits im Abschnitt 4.2, auf $n = 2$ und $n = 3$. Potenzen des Störterms übersteigen nicht den Grad $2n$; alle Koeffizienten werden mit $+1$ angegeben.

Diese Vereinfachungen dienen lediglich dazu, um schneller Lösungen zu erhalten, da bereits bei $n = 3$ die Berechnungen für die Grafik sehr lange dauern. Der Leser hat darüber hinaus die Möglichkeit, mit dem beigefügten MAPLE-Programm - Teil II auch andere Formen des gestörten Problems (z. B. mit höheren Potenzen) zu betrachten.

5.3.1 Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^3+P(x,y)}{y^3+Q(x,y)}$

Wir wählen als Startwert $(0.4/0.1)$. Aus den Abbildungen 5.4 und 5.5 erkennen wir, dass dieser Startwert vom kritischen Punkt $(0/0)$ bereits zu weit entfernt ist, um den Wirbelfall zu erhalten.

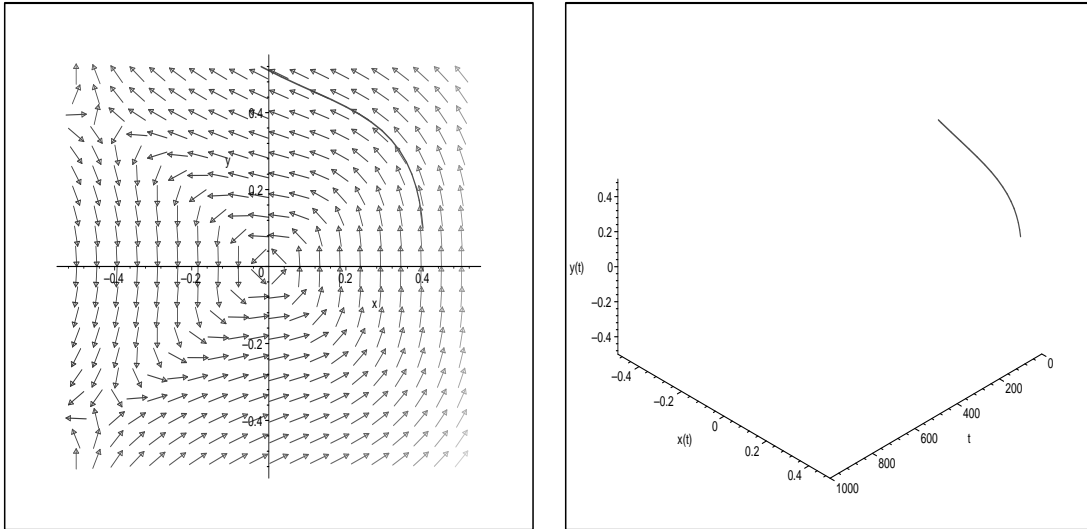


Abbildung 5.4: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+x^4+x^2y^2+y^4}{y^3+x^3y+xy^3}$ mit Startpunkt $(0.4/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

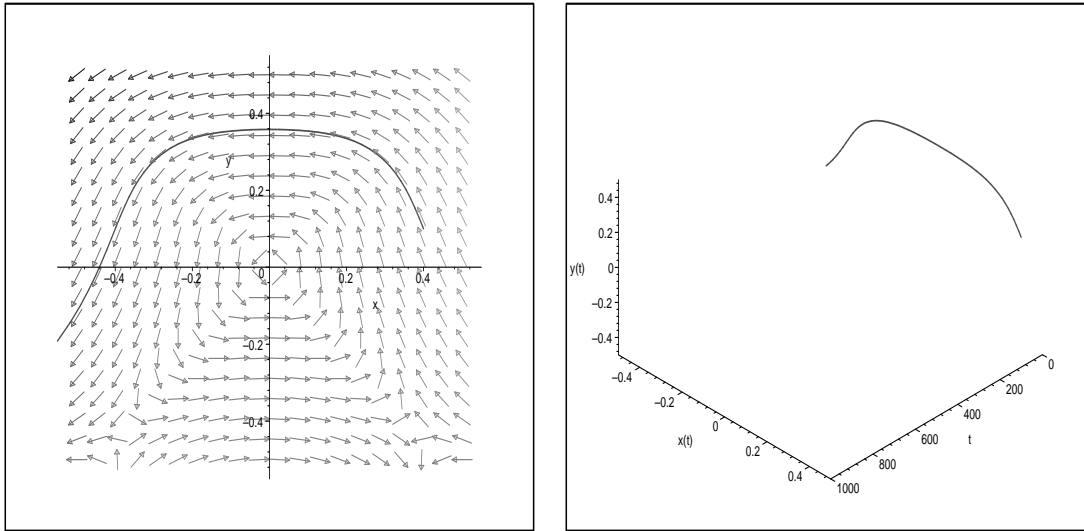


Abbildung 5.5: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+xy^3+x^3y}{y^3+y^4+x^2y^2+x^4}$ mit Startpunkt $(0.4/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

Auch wenn wir keinen Wirbelfall erhalten, können wir dennoch die Symmetrie zur x -Achse in der Abbildung 5.4 und zur y -Achse in der Abbildung 5.5 erkennen. Um dennoch einen Wirbelfall zu erhalten, müssen wir unseren Startwert näher an den kritischen Punkt $(0/0)$ legen. Wir wählen deshalb als neuen Startwert den Punkt $(0.2/0.1)$. In den zugehörigen Abbildungen 5.6 und 5.7 können wir die erwähnten Symmetrien zur x - und y -Achse deutlich erkennen.

Zu bemerken bleibt die interessante Gestalt der Lösungskurve. Auch das Nullsetzen einzelner Koeffizienten ändert die Gestalt der Lösungskurve nicht wesentlich. In unserem Beispiel wird im ersten Fall im Nenner der Summand x^4 , im zweiten Fall im Zähler der Summand y^4 gestrichen. Die Abbildungen 5.8 und 5.9 verdeutlichen die daraus resultierende Lösungskurve mit dem gleichen Startwert. Es zeigt sich, dass der „S-Form-Charakter“ der Lösungskurve etwas verloren geht, die Symmetrieeigenschaften aber erhalten bleiben.

Setzen wir mehrere Koeffizienten gleich Null, so erkennen wir, dass sich die Gestalt der Lösungskurve langsam einer „kreisähnlichen“ (oder vielleicht besser, einer elliptischen) Form annähert (vgl. auch Abbildung 5.10).

Von Interesse ist, wie sich die Kurve verhält, wenn wir folgende Optionen wählen:

- Als Startwert testen wir auch die Punkte $(-0.2/0.1)$ und $(-0.2/-0.1)$ oder
- zwischen Anfangspotenz und Grad des Störterms ist eine erhebliche Differenz.

Diese Änderungen beeinflussen das Symmetrieverhalten der Lösungskurve nicht. Es bleibt nur zu bemerken: Je größer die Differenz der gegebenen Potenzen ist,

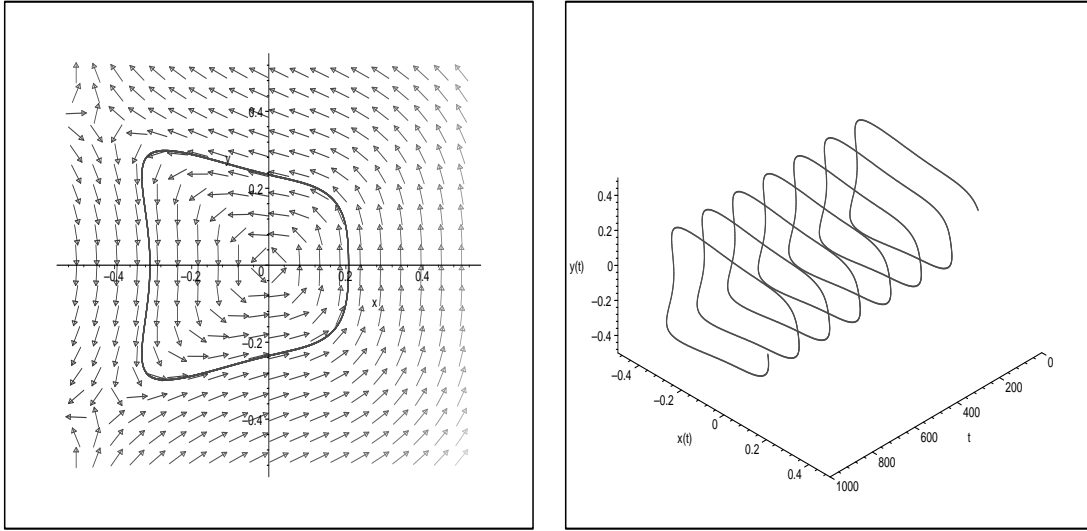


Abbildung 5.6: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+x^4+x^2y^2+y^4}{y^3+x^3y+xy^3}$ mit Startpunkt $(0.2/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

desto weiter kann der Startwert von $(0/0)$ verschieden gewählt werden, so dass eine periodische Lösungskurve resultiert.

Für den interessierten Leser besteht die Möglichkeit, mit dem MAPLE-Programm - Teil II diese Symmetrieeigenschaften selbst zu testen. Eine genaue Beschreibung für diesen Teil des Programms findet sich in der README-Datei. In der Arbeit wird hier nicht näher darauf eingegangen.

5.3.2 Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^5+P(x,y)}{y^5+Q(x,y)}$

Um Vergleichbarkeit der Lösungskurven zu erhalten, wollen wir zunächst als Startwert den Punkt $(0.2/0.1)$ angeben. Wie aber aus den Abbildungen 5.11 erkennbar ist, ist dieser Punkt bereits zu weit vom kritischen Punkt entfernt. Bei einer Veränderung von 0.05 in x -Richtung zum kritischen Punkt erhalten wir wieder den Wirbelfall.

Den maximalen t -Wert müssen wir auf 10000 erhöhen, um annähernd die Periodizität der Lösungskurve zu zeigen.

Bemerkung 5.3.1. *Eine Änderung des maximalen t -Werts hat keine Auswirkungen auf die graphische Darstellung der Lösungskurve. Bei gegebener Periodizität wird die Lösungskurve lediglich öfter „durchlaufen“. Die 3D-Plots verdeutlichen im Allgemeinen die Periodizität der Lösungskurve besser als die 2D-Plots. Doch können wir mit den 3D-Plots in den Abbildungen 5.14, 5.15, 5.12 und 5.13 nicht auf Periodizität schließen, da selbst bei einem t -Wert von 10000 die Periode „gerade einmal durchlaufen“ wird.*

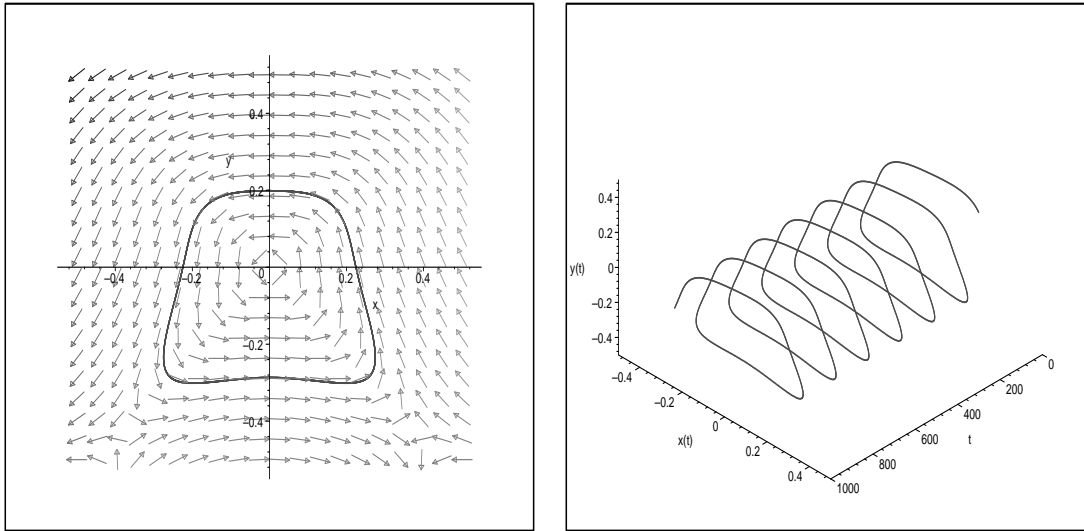


Abbildung 5.7: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+xy^3+x^3y}{y^3+y^4+x^2y^2+x^4}$ mit Startpunkt $(0.2/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

Eine Erhöhung des t -Werts ist aufgrund der bereits sehr langen Zeiten zur Berechnung der Lösungskurve sehr zeitintensiv und soll dem Leser selbst überlassen bleiben.

Analog zum Abschnitt 5.3.1 wollen wir auch für den Fall $n = 3$ Summanden aus den obigen Darstellungen Null setzen. So streichen wir im ersten Fall den Summanden x^6 aus dem Zähler, im zweiten Fall den Summanden y^6 aus dem Nenner. Daraus resultieren die Lösungskurven aus den Abbildungen 5.14 und 5.15.

5.3.3 Beispiele zum gestörten Problem $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$

Dieser Abschnitt bleibt dem Leser überlassen. Weitere Beispiele lassen sich mit dem beigefügten MAPLE-Programm (Teil II) nachvollziehen.

Es sei darauf hingewiesen, dass die Berechnung der Lösungskurve bereits für $n = 3$ sehr lange dauert. Insbesondere, wenn der t -Wert zusätzlich sehr groß gewählt wird, sind Rechenzeiten von mehreren Stunden zu erwarten.

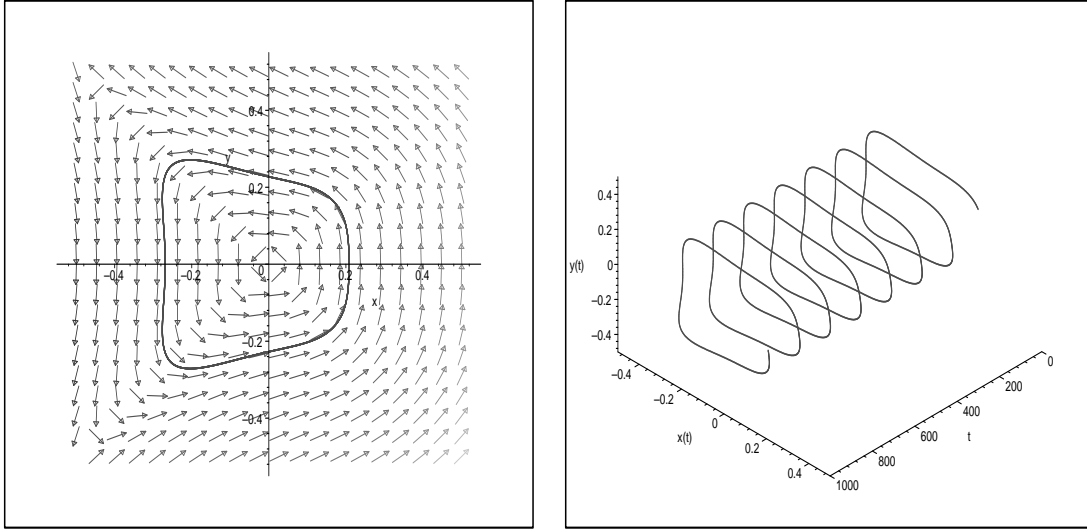


Abbildung 5.8: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+x^2y^2+y^4}{y^3+yx^3+y^3x}$ mit Startpunkt $(0.2/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

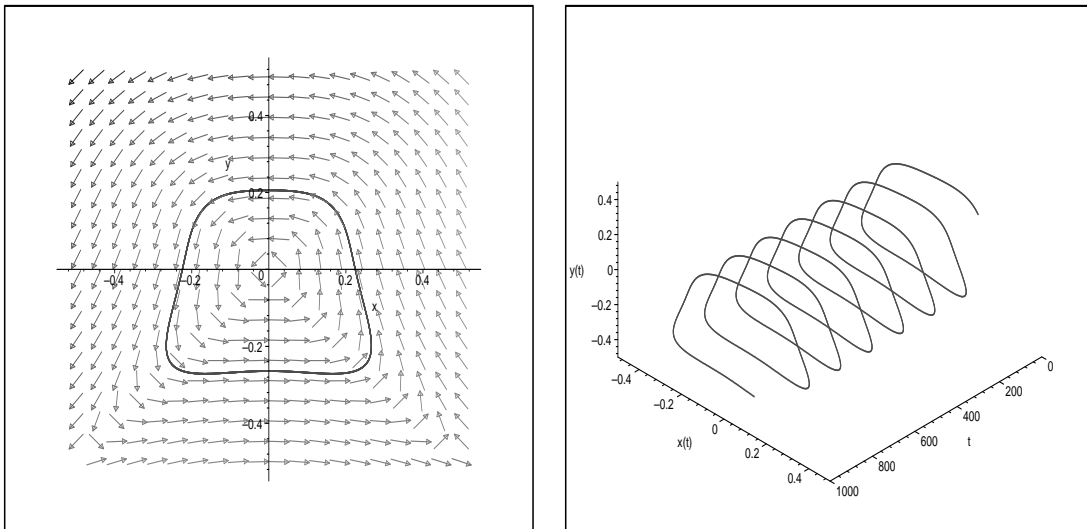


Abbildung 5.9: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+xy^3+x^3y}{y^3+x^2y^2+x^4}$ mit Startpunkt $(0.2/0.1)$ und maximalem t -Wert 1000

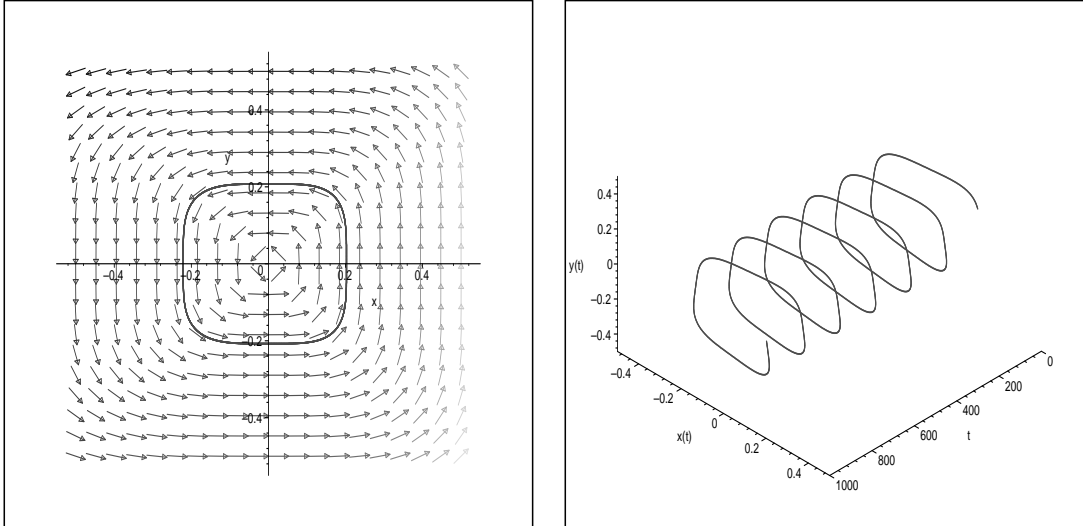


Abbildung 5.10: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^3+x^4}{y^3+y^3x^2+y^5}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 1000

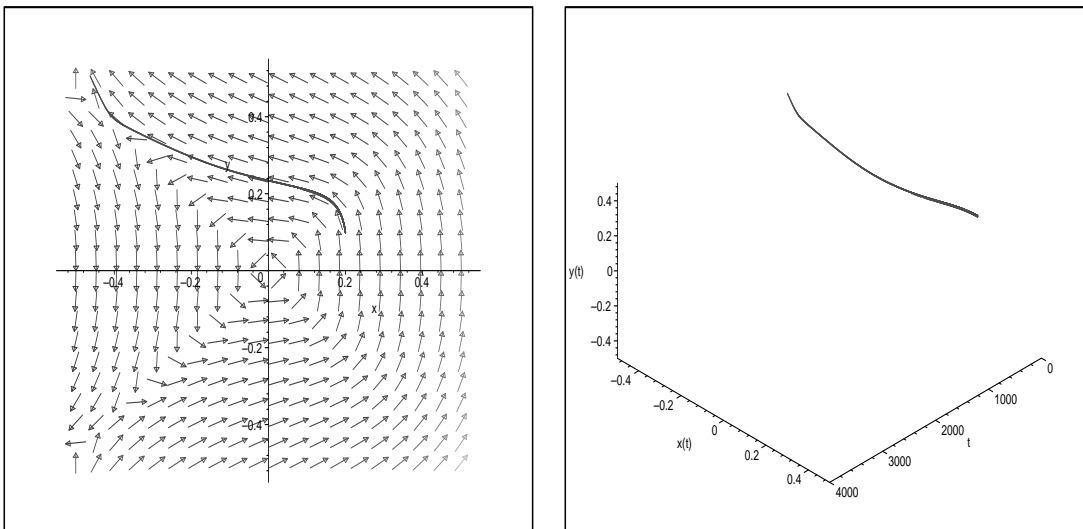


Abbildung 5.11: 2D- und 3D- Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+x^3y^3+x^5y}$ mit Startpunkt (0.2/0.1) und maximalem t -Wert 4000

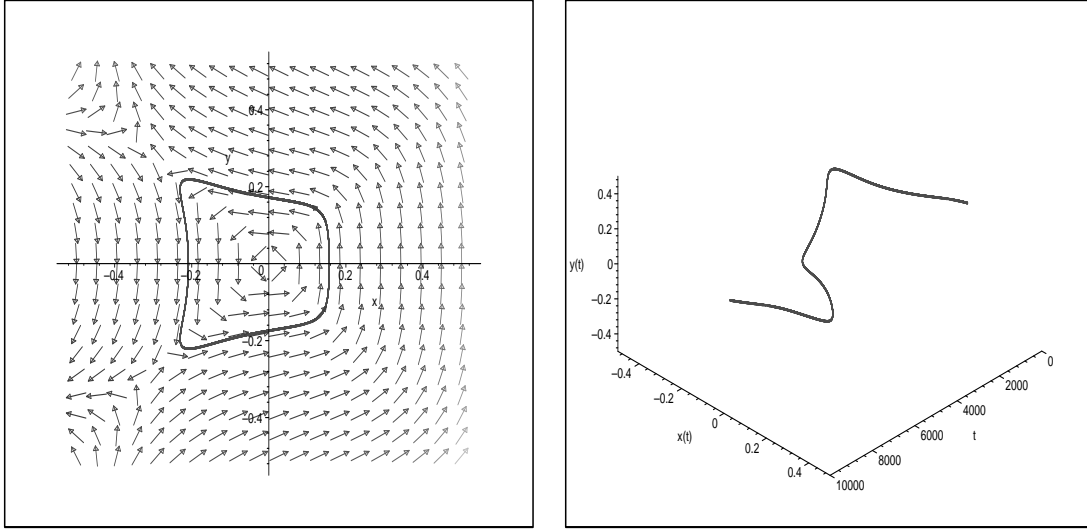


Abbildung 5.12: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+yx^5+x^3y^3+y^5x}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000

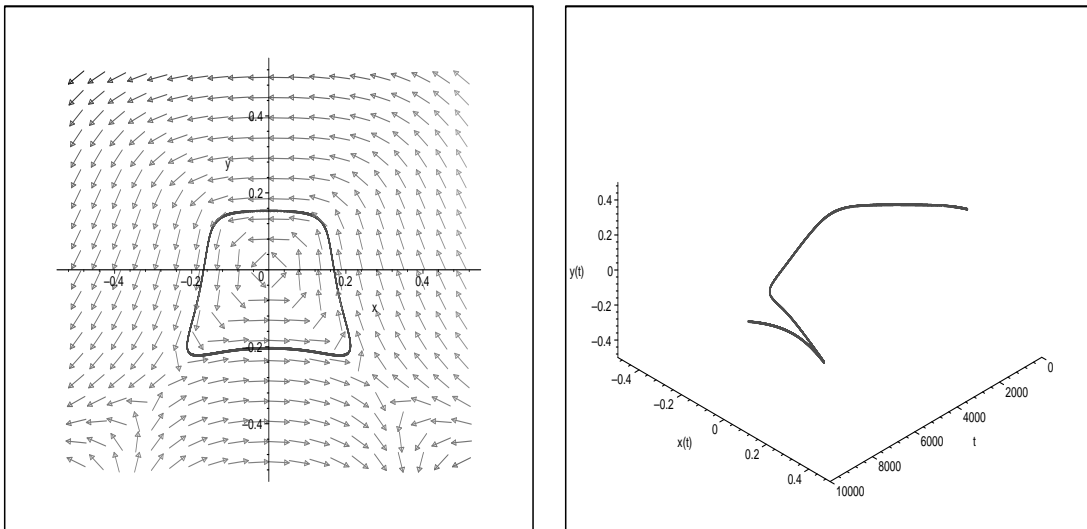


Abbildung 5.13: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+xy^5+x^3y^3+x^5y}{y^5+x^6+y^2x^4+x^2y^4+y^6}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000

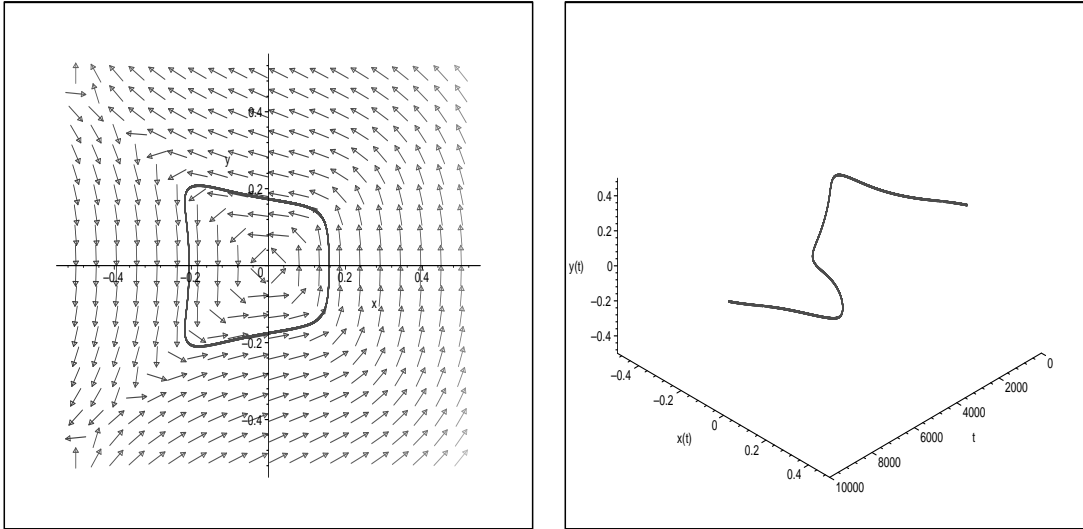


Abbildung 5.14: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^4y^2+x^2y^4+y^6}{y^5+x^3y^3+x^5y}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000

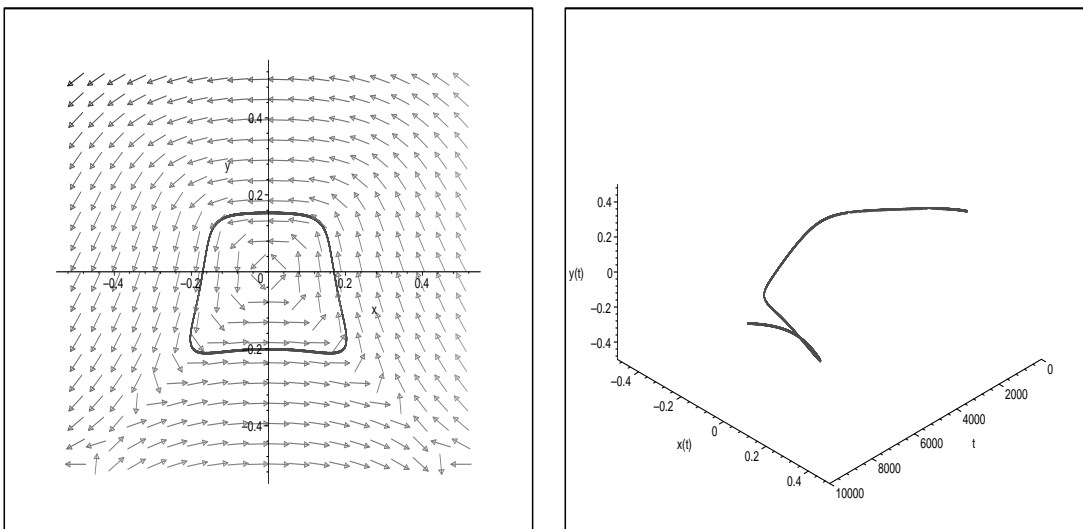


Abbildung 5.15: 2D- und 3D-Plot zu $y' = -\frac{x^5+x^3y^3+xy^5}{y^5+x^4y^2+x^2y^4+x^6}$ mit Startpunkt (0.15/0.1) und maximalem t -Wert 10000

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Weitere parametrisierte Scharen, die einen Wirbelfall darstellen, sind mit Hilfe dieser Arbeit gefunden worden. Konzentriert haben wir uns auf in der xy -Ebene geschlossene bzw. in Polarkoordinaten 2π -periodische Lösungskurven.

In diesem Kapitel fassen wir unsere Ergebnisse noch einmal kurz zusammen und geben einen kurzen Ausblick.

Die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + P(x, y)}{y^{2n-1} + Q(x, y)}, n > 1$$

beschreibt unsere Ausgangssituation. Durch Umformung mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$r' = \frac{f(\varphi, r)}{g(\varphi, r)} = \frac{r \left(-\cos^{2n-1}\varphi \sin\varphi + \cos\varphi \sin^{2n-1}\varphi \right) + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 2} f_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}}{-\cos^{2n}\varphi - \sin^{2n}\varphi + \sum_{\tilde{\lambda} \geq 1} g_{\tilde{\lambda}}(\varphi) r^{\tilde{\lambda}}}$$

Diese Umformung existiert für $|\varphi| \leq 2\pi$ oder für $|\varphi| \leq 4\pi$ (vgl. auch Hinweis (2.2.1)).

Ein Eulerscher Multiplikator

$$\mu(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 0} M_{\lambda}(\varphi) r^{\lambda} \quad (6.1)$$

mit $\mu(\varphi, r) \neq 0$, $|\varphi| \leq 2\pi$, $r \in [0, \varepsilon)$ existiert in der Umgebung des kritischen Punktes $(0/0)$ in Polarkoordinaten φ, r genau dann, wenn mit

$$r' = \frac{f(\varphi, r)}{g(\varphi, r)} = \frac{\sum_{\lambda \geq 1} f_{\lambda}(\varphi) r^{\lambda}}{\sum_{\lambda \geq 0} g_{\lambda}(\varphi) r^{\lambda}} \quad (6.2)$$

gilt (vgl. auch (3.3)):

$$M'_\lambda(\varphi) + \frac{(\lambda+1)f_1(\varphi) + g'_0(\varphi)}{g_0(\varphi)} M_\lambda(\varphi) = \\ - \frac{1}{g_0(\varphi)} \sum_{\lambda \geq \kappa+1} \{(\lambda+1)f_{\lambda+1-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [g_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\}$$

für alle $\lambda \geq 1$. Insbesondere ist ein $M_\lambda(\varphi)$ für $\lambda \geq 1$ 2π -periodisch, wenn

$$f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi) \quad , \quad \lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$$

gilt (vgl. auch (3.12)). Eine Umformung dieser Gleichung liefert die abstrakten Bedingungen, die wie folgt formuliert werden können:

$$\sum_{\mu+\nu=\tilde{\lambda}+2n-2} (-p_{\nu\mu} \sin^{2n-1}\varphi + q_{\nu\mu} \cos^{2n-1}\varphi) \cos^\nu\varphi \sin^\mu\varphi = 0$$

Anhand von einigen Beispielen für die Fälle $n = 1$ bis $n = 3$ sind diese Bedingungen ausführlich dokumentiert und dargestellt. Für den Fall $n \geq 4$ ist die Verallgemeinerung der aus obiger Gleichung resultierenden Bedingungen in der Tabelle 3.5 aufgeführt.

Die Umsetzung der obigen Bedingung erfolgt in einem MAPLE-Programm. Beispiele zu den möglichen Varianten des ersten Teil des Programms sind in Kapitel 4 dargestellt.

Bei den Beispielen für $n = 1, 2, 3$ in Kapitel 3 haben wir bereits festgestellt, dass unsere durch die Bedingungen resultierenden Differentialgleichungen nicht über das ungestörte Problem hinausgehen.

Bekräftigt wird diese These durch die Abbildungen in Kapitel 4, die für einzelne Beispiele angeführt werden.

Da unter der Voraussetzung (3.12) die Vektorfelder $\begin{pmatrix} A(x,y) \\ B(x,y) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x^{2n-1} \\ y^{2n-1} \end{pmatrix}$ linear abhängig sind, kann unsere Vermutung gezeigt werden. So erhalten wir zusammengefasst:

Mit Hilfe der Bedingung $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\mu-1}(\varphi)f_1(\varphi)$ für $\lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ erhalten wir Darstellungen von Differentialgleichungen, die 2π -periodische Lösungen garantieren. Durch Ausklammern und Kürzen können wir alle daraus resultierenden gestörten Probleme $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$ auf die Darstellung des ungestörten Problems $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ zurückführen.

Symmetrische Eigenschaften werden in Kapitel 5 untersucht. Für das ungestörte Problem $y' = -\frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}}$ wissen wir, dass die Lösungskurve symmetrisch zur x - und y -Achse verläuft. Zudem nähert sich die Kurve für immer höher werdende Potenzen einem Quadrat an.

Schwieriger erweist es sich beim gestörten Problem. Hier werden zwei Fälle näher untersucht:

Fall 1 : $P(x, y)$ enthält nur gerade Potenzen und $Q(x, y)$ enthält nur ungerade Potenzen von y

Fall 2 : $P(x, y)$ enthält nur ungerade Potenzen und $Q(x, y)$ enthält nur gerade Potenzen von x

Die Lösungskurven der Differentialgleichungen des ersten Falls sind zur x -Achse, die des zweiten Falles zur y -Achse symmetrisch.

Beispiele für $n = 2$ und $n = 3$ sind in der Arbeit angeführt. Weitere Beispiele können mit Hilfe des MAPLE-Programms - Teil II nachvollzogen werden.

Sehen wir uns die Beispiele näher an, stellen wir folgenden Sachverhalt fest: Je höher die Potenz der gestörten Probleme gewählt wird, desto „näher“ ist der Startwert zur Unbestimmtheitsstelle (0/0) zu wählen, um einen Wirbelfall (und somit 2π -periodische Lösungen) zu erhalten. Es stellt sich die Frage, ob dies immer so ist.

In der Literatur findet sich dazu kein Anhaltspunkt. Dieses Problem „Wahl des Startwerts“ ist ein weit verbreitetes Thema, das noch nicht gelöst wurde. Bisher ist es nicht möglich zu sagen, wie dieser gewählt werden muss, um für ein gegebenes Problem einen Wirbelfall zu erhalten.

Wir wissen aber bereits, dass unsere Erkenntnis aus Kapitel 5 (je höher die Potenz der Anfangsglieder von $A(x, y)$ und $B(x, y)$ gewählt wird, desto näher muss der Startwert am Ursprung liegen) nicht allgemein richtig sein kann. [Ruckdaeschel] stellt in seiner Arbeit das Beispiel $y' = -\frac{x+2c_0x^2+c_1xy+c_0y^2}{y+c_1x^2+c_0xy+2c_1y^2}$ mit $c_0, c_1 \in \mathbb{N}$ ausführlich vor.

Plots mit den Parametern $c_0, c_1 \in \mathbb{N}$ können im MAPLE-Programm - Teil III unter der Nummer 25 abgefragt werden.

Je höher die Koeffizienten c_0 und c_1 gewählt werden (das beeinflusst nicht den Grad der Polynome), desto näher muss der Startwert am Ursprung liegen, um periodische Lösungen, und damit den Wirbelfall zu erhalten. Dies steht im Widerspruch zu unserer Vermutung aus Kapitel 5.

Die Wahl des Startwerts, so dass daraus in der x, y -Ebene geschlossene Lösungen um den Nullpunkt resultieren, ist eine weitere interessante Frage, die vermutlich nicht einfach zu lösen ist.

Anhang A

Das MAPLE-Programm

Die Dateien

`README.txt` und `Programm_Allgemein.txt`

sind im Folgenden abgedruckt.

Auf einen Abdruck der Dateien

`Programm_Beispiele.txt` und `Programm_Gesamt.txt`

wird verzichtet. Beide Dateien finden sich jedoch auf dem in Anhang B befindlichen Datenträger.

Die Datei

`Programm_Allgemein.txt`

enthält Teil I und Teil II des Programms für beliebige Differentialgleichungen und Polynome. Die Datei

`Programm_Beispiele.txt`

nur Teil III mit den Beispielen der Arbeit.

`Programm_Gesamt.txt`

enthält alle drei Teile des Programms.

Möchte der Anwender nur Beispiele nachvollziehen, so muss nicht das gesamte Programm geladen werden, sondern es genügt, nur die Datei

`Programm_Beispiele.txt`

zu laden. Analoges gilt, fall der Anwender neue, noch nicht behandelte Differentialgleichungen überprüfen möchte. Hier muss nur die Datei

`Programm_Allgemein.txt`

geladen werden.

A.1 README-Datei

```
#####
# Programm zur Diplomarbeit von Alexander Prell                                     #
# Periodische Loesungen von  $y'=-A(x,y)/B(x,y)$  mit Anfangsgliedern #
# hoeherer Ordnung in  $A(x,y)$  und  $B(x,y)$                                #
# eingereicht am Lehrstuhl Mathematik VI                                           #
# Prof. Dr. Wolf von Wahl                                                           #
# Universitaet Bayreuth                                                             #
# 06. Februar 2003                                                                 #
#####
```

README - Datei

Inhalt:

- a) Start des Programms
- b) Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL I
- c) Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL II
- d) Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL III
- e) Kurzbeschreibung der einzelnen Abschnitte im Programm
- f) Kurzbeschreibung der verwendeten Variablen

```
#####
# Start des Programms                                                                #
#####
```

Nach Aufruf des MAPLE-Worksheets wird das Programm mit dem
Befehl

```
read Programm_Gesamt.txt
bzw. read Programm_Allgemein.txt
bzw. read Programm_Beispiele.txt
```

gestartet.

Das Programm besteht aus drei Teilen. Der erste Teil beinhaltet die praktische Umsetzung des dritten Kapitels. Dabei werden Differentialgleichungen auf periodische Loesungen untersucht. Der zweite Teil findet sich im fuenften Kapitel der Arbeit wieder. Hier wird die Symmetrie der periodischen Loesungen naeher untersucht.

Im dritten Teil sind alle Beispiele aus der Arbeit angefuehrt.

```
#####
# Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL I                            #
#####
```

Das Programm beinhaltet drei Moeglichkeiten/Varianten:

1. Eingabe beliebiger DGL-Systeme
2. Eingabe beliebiger Polynome
3. Eingabe von Variablen

Variante 1:

Der Anwender wird aufgefordert, Anfangspotenz und maximale Potenz der Polynome einzugeben. Daraufhin werden die maximale Anzahl an freien Parametern und die Anzahl der zu erfuellenden Bedingungen angegeben.

Nach Eingabe der Polynome $A(x,y)$ und $B(x,y)$ erfolgt die Berechnung, ob in Polarkoordinaten periodische Loesungen moeglich sind.

Sind diese nicht moeglich, enthaelt das Programm eine Option, die Polynome dementsprechend anzupassen, um in Polarkoordinaten periodische Loesungen zu gewaehrleisten.

Abschliessend wird der Anwender nach einer graphischen Ausgabe gefragt.

Variante 2:

Hier wird der Anwender analog zur Variante 1 aufgefordert, Anfangspotenz und maximale Potenz anzugeben.

Es wird jedoch nur ein Polynom gefordert. Dieses spiegelt bei der folgenden Berechnung das Polynom $A(x,y)$ wieder.

Das Programm berechnet ein passendes Polynom $B(x,y)$, so dass in Polarkoordinaten periodische Loesungen gegeben sind.

Variante 3:

Aus Anfangspotenz und maximaler Potenz werden die allgemeinen Bedingungen angegeben, die in Polarkoordinaten periodische Loesungen garantieren.

Diese Variante entspricht den theoretischen Ausfuehrungen in der Arbeit.

```
#####
#   Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL II   #
#####
```

Auch der zweite Teil ermoeglicht die Eingabe von zwei

Varianten:

1. A enthaelt fuer $P(x,y)$ nur gerade, B fuer $Q(x,y)$ nur ungerade Potenzen von y .
2. A enthaelt fuer $P(x,y)$ nur ungerade, B fuer $Q(x,y)$ nur gerade Potenzen von x .

Nach der Eingabe der einzelnen Polynome werden die daraus resultierenden Differentialgleichungen geplottet.

```
#####
#   Kurzbeschreibung des beiliegenden Programms - TEIL III           #
#####
```

In diesem Teil sind alle Beispiele der Arbeit fest programmiert und koennen somit direkt aufgerufen werden.

Die Differentialgleichungen lassen sich in den einzelnen Beispielen nicht modifizieren. Lediglich die Eingaben fuer das Koordinatensystem koennen variiert werden.

```
#####
#   Kurzbeschreibung der einzelnen Abschnitte im Programm           #
#####
```

Daten einlesen

Diese Prozeduren dienen zur Dateneingabe. Sie sind gegliedert in Prozeduren fuer allgemeine Daten und Prozeduren fuer Daten, die fuer die einzelnen Moeglichkeiten benoetigt werden.

Berechnung Anzahl Bedingungen

Prozedur berechnet die Anzahl der maximal erforderlichen Bedingungen um in Polarkoordinaten periodische Loesungen zu gewaehrleisten.

Berechnung der maximalen freien Parameter

Prozedur berechnet die maximale Anzahl an moeglichen Parameter. Diese spiegelt sich indirekt in der Anzahl der Bedingungen wieder.

Ueberpruefen der Eingaben auf Richtigkeit

Prozedur ueberprueft die Eingabe der Polynome auf Richtigkeit.

Plotten der Funktionen

Prozedur plottet die Differentialgleichungen als 2D- (Phasenportrait) oder 3D-Abbildung.

Benoetigte Koeffizienten fuer Bedingungen

Es werden die notwendigen Bedingungen exakt angegeben und gleichzeitig die Werte der einzelnen Bedingungen bestimmt.

Lediglich bei Teil I, Variante 3 bleiben die Bedingungen allgemein bestehen.

Neue Koeffizienten von Poly_B und Ausgabe von Poly_B (neu)
 Sind die exakten Werte aller Bedingungen nicht identisch Null (Teil I, Variante 1), wird hier ein neues Polynom $B(x,y)$ angegeben, dass die Bedingungen erfuehlt.
 Bei Teil I, Variante 2 (hier ist kein $B(x,y)$ vorhanden) wird diese Prozedur sofort gestartet.

Hauptprogramm

Beinhaltet das Menue, das durch das Programm fuehrt.

```
#####
#   Kurzbeschreibung der verwendeten Variablen                               #
#   (nur globale Variablen werden beschrieben)                             #
#####
grad_Start      Grad der Anfangspotenz
grad_max        maximaler Grad der Polynome
n               natuerliche Zahl
Poly_A          Polynom A(x,y)
Poly_B          Polynom B(x,y)
p[i,j]          Koeffizienten von A(x,y)
q[i,j]          Koeffizienten von B(x,y)
grad_A          maximaler Grad von A(x,y)
grad_B          maximaler Grad von B(x,y)
grad_diff       Differenz aus maximalem und Anfangsgrad
merker          Marke bei Falscheingaben
grad_Para[i]    Anzahl der Parameter fuer i-ten Grad
sum_Para        Summe aller Parameter
bedingungen[i]  Anzahl der Bedingungen fuer i-ten Grad
sum_bedingungen Summe aller Bedingungen
p_neu[i,j]      neue Koeffizienten fuer B(x,y)
```

Auf eine Beschreibung der lokalen Variablen wird verzichtet, da diese nur fuer die jeweilige Prozedur gueltig sind.

A.2 MAPLE-Programmcode

```
#####
# Programm zur Diplomarbeit von Alexander Prell                                     #
# Periodische Loesungen von  $y'=-A(x,y)/B(x,y)$  mit Anfangsgliedern #
# hoeherer Ordnung in  $A(x,y)$  und  $B(x,y)$                                #
# eingereicht am Lehrstuhl Mathematik VI                                           #
# Prof. Dr. Wolf von Wahl                                                           #
# Universitaet Bayreuth                                                            #
# 06. Februar 2003                                                                #
#                                                                                   #
# Programm_Allgemein.txt                                                           #
#####

restart;

#####
# Daten einlesen                                                                    #
#####

Einlesen_Allg:=proc()
    global grad_Start, grad_max, n;
    printf('\n Bitte zur Berechnung der Anfangspotenz  $n \geq 1$  \
    eingeben:');
    printf('\n (Die Anfangspotenz errechnet sich aus  $2n-1$ .)\n');
    n:=simplify(parse(readline(terminal)));
    grad_Start:=2*n-1;
    printf('So lautet der Grad der Anfangspotenz: %g', grad_Start);
    printf('\n Bitte maximalen Grad (groesser als Anfangspotenz!) \
    der Polynome eingeben:\n');
    grad_max:=simplify(parse(readline(terminal)));
end;

Einlesen_1:=proc()
    global Poly_A, Poly_B, p, q, grad_A, grad_B;
    local Hilfs_A, Hilfs_B, i, j, Eingabe;
    printf('\n Differentialgleichung der Form  $-A/B$  eingeben. ');
    printf('\n Polynom A lautet:\n');
    Poly_A:=simplify(parse(readline(terminal)));
    printf('\n Polynom B lautet:\n');
    Poly_B:=simplify(parse(readline(terminal)));
    grad_A:=degree(Poly_A);
    grad_B:=degree(Poly_B);
```

```

for i from 1 to grad_A do
    p[i,0]:=coeff(Poly_A, x^i);
    p[i,0]:=subs(y=0, p[i,0]);
    p[0,i]:=coeff(Poly_A, y^i);
    p[0,i]:=subs(x=0, p[0,i]);
end do;
for i from 1 to grad_B do
    q[i,0]:=coeff(Poly_B, x^i);
    q[i,0]:=subs(y=0, q[i,0]);
    q[0,i]:=coeff(Poly_B, y^i);
    q[0,i]:=subs(x=0, q[0,i]);
end do;

# Angabe aller p[i,j] und q[i,j] identisch NULL
printf('\n Folgende Koeffizienten des Polynoms A sind identisch \
      NULL:\n '):
for i from 1 to grad_A do
    Hilfs_A:=coeff(Poly_A, x^i):
    for j from 1 to grad_A do
        p[i,j]:=coeff(Hilfs_A, y^j):
        printf('+\\%s*x^\\%d*y^\\%d', convert(p[i,j],string),i,j):
    end do;
end do;
printf('\n Folgende Koeffizienten des Polynoms B sind identisch \
      NULL:\n '):
for i from 1 to grad_B do
    Hilfs_B:=coeff(Poly_B, x^i);
    for j from 1 to grad_B do
        q[i,j]:=coeff(Hilfs_B, y^j);
        printf('+\\%s*x^\\%d*y^\\%d', convert(q[i,j],string),i,j):
    end do;
end do;
printf('\n '):
q[0,0]:=0;
p[0,0]:=0;

# Angabe aller p[i,j] und q[i,j] ungleich NULL
printf('\n A= '):
    for j from 0 to grad_A do
        for i from 0 to grad_A do
            if p[i,j]<>0 then
                printf('+\\%s*x^\\%d*y^\\%d', convert(p[i,j], \
                    string),i,j);

```

```

        end if;
        end do;
    end do;
    printf('\n B= '):
    for j from 0 to grad_B do
        for i from 0 to grad_B do
            if q[i,j]<>0 then
                printf('+\\%s*x^\\%d*y^\\%d', convert(q[i,j], \
                    string),i,j);
            end if;
        end do;
    end do;
    printf('\n '):
end;

Einlesen_2:=proc()
    global grad_Start, Poly_A, grad_A, p, Hilfs_A;
    local i, j, Polynom, grad_Poly;
    printf('\n Eingabe eines Polynoms (wird als Polynom A \
        weiterverarbeitet).\n');
    printf('\n Das Polynom lautet:\n');
    Polynom:=simplify(parse(readline(terminal)));
    Poly_A:=Polynom;
    grad_A:=degree(Poly_A);
    for i from 1 to grad_A do
        p[i,0]:=coeff(Poly_A, x^i);
        p[i,0]:=subs(y=0, p[i,0]);
        p[0,i]:=coeff(Poly_A, y^i);
        p[0,i]:=subs(x=0, p[0,i]);
    end do;

    # Angabe aller p[i,j] identisch NULL
    printf('\n Folgende Koeffizienten des Polynoms sind identisch \
        NULL: '):
    for i from 1 to grad_A do
        Hilfs_A:=coeff(Poly_A, x^i):
        for j from 1 to grad_A do
            p[i,j]:=coeff(Hilfs_A, y^j):
            printf('+\\%s*x^\\%d*y^\\%d', convert(p[i,j],string),i,j):
        end do;
    end do;
    p[0,0]:=0;

```



```

# Angabe aller p[i,j] ungleich NULL
printf('\n Polynom= '):
for j from 0 to grad_A do
    for i from 0 to grad_A do
        if p[i,j]<>0 then
            printf('+ \%s*x^ \%d*y^ \%d', convert(p[i,j], \
                string),i,j);
            end if;
        end do;
    end do;
end;

#####
#   Berechnung der maximalen freien Parameteranzahl           #
#####

Anzahl_Parameter:=proc()
    global grad_diff, sum_Para, grad_Para, grad_max, grad_Start;
    local i,j;

    grad_diff:=grad_max-grad_Start:

    for j from 2 to grad_diff do
        grad_Para[j]:=1+j;
    end do;

    grad_Para[0]:=0;
    grad_Para[1]:=2;
    sum_Para:=sum(grad_Para[i], i=0..grad_diff);

    printf('\n Die maximale Anzahl an freien Parameter fuer in \
        Polarkoordinaten periodische Loesungen');
    printf('\n mit diesen Angaben liegt bei \%g\n',sum_Para);

end;

#####
#   Berechnung Anzahl Bedingungen                             #
#####

Anzahl_Bedingungen:=proc()
    global grad_Start, grad_max, bedingungen, grad_diff;
    if grad_Start < grad_max then

```

```

grad_diff:=grad_max-grad_Start:
bedingungen:=grad_diff+1;
printf('\n Nach den Eingaben ergibt sich eine Anzahl \
      von (bei der Berechnung)');
printf('\n zu beachtenden Bedingungen von %g\n', \
      bedingungen);
elif grad_Start = grad_max then
  printf('\n Hier wird das ungestoerte Problem betrachtet. \
        Dieses ist in Polarkoordinaten periodisch. ');
  grad_diff:=0;
  printf('\n Das Programm berechnet keine Werte. ');
  printf('\n Nach Eingabe der DGL wird sofort das zweite \
        Menue aufgerufen.\n');
elif grad_Start > grad_max then
  printf('\n FALSCHE Eingabe - Die maximale Potenz ist \
        kleiner als die Anfangspotenz. Nochmal!\n');
end if;
end;

#####
#   Ueberpruefen der Eingaben auf Richtigkeit                               #
#####

Ueberpruefen_1:=proc()
  # p[grad_Start,0] = q[0,grad_Start] = 1 und die richtige
  #   Anfangspotenz???
  global grad_Start, merker;
  if p[grad_Start,0]=1 and q[0,grad_Start]=1 then
    merker:=1;
  elif p[grad_Start,0]=0 or q[0,grad_Start]<=0 then
    printf('\n FALSCHE Eingabe - Die Anfangspotenz passt \
          nicht zum eingegebenen Wert von n. Nochmal!\n');
    merker:=11;
  else printf('\n FALSCHE Eingabe - Die Koeffizienten der \
        Anfangspotenz muessen den Wert 1 haben. Nochmal!\n');
    merker:=11;
  end if;
end;

Ueberpruefen_2:=proc()
  # p[grad_Start,0] = 1 und die richtige Anfangspotenz???
  global grad_Start, merker;
  if p[grad_Start,0]=1 then

```

```

        merker:=1:
    elif p[grad_Start,0]=0 then
        merker:=11:
        printf('\n FALSCHE Eingabe - Die Anfangspotenz passt \
            nicht zum eingegebenen Wert von n. Nochmal!\n');
    else printf('\n FALSCHE Eingabe - Der Koeffizienten der \
        Anfangspotenz muss den Wert 1 haben. Nochmal!\n');
        merker:=11:
    end if;
end;

```

```

#####
#   Plotten der Funktionen                                     #
#####

```

```

Plot_Fkt:=proc()
    global Poly_A, Poly_B;
    local achse_koord, max_t, x_start, y_start, Fkt_A, Fkt_B, \
        Dia_1, Dia_2;
    printf('\n Bitte Achsenlaenge des Koordinatensystems eingeben:');
    printf('\n (Es empfiehlt sich ein Wert zwischen 0.5 und 1.)\n');
    achse_koord:=simplify(parse(readline(terminal)));
    printf('\n Bitte den maximalen t- Wert eingeben:');
    printf('\n (Zunaechst einen kleineren Wert (<1000) waehlen. \
        Dadurch wird Graphik schneller berechnet.)\n');
    max_t:=simplify(parse(readline(terminal)));
    printf('\n Fuer den Startwert auf der X-Achse waehlen wir:');
    printf('\n (Muss innerhalb der Achsenlaenge liegen)\n');
    x_start:=simplify(parse(readline(terminal)));
    printf('\n Fuer den Startwert auf der Y-Achse waehlen wir:');
    printf('\n (Muss innerhalb der Achsenlaenge liegen)\n');
    y_start:=simplify(parse(readline(terminal)));
    Fkt_A:=unapply(Poly_A,x,y);
    Fkt_B:=unapply(Poly_B,x,y);
    print(Fkt_A);
    print(Fkt_B);
    with(DEtools):
    Dia_1:=DEplot([diff(x(t),t)=-Fkt_B(x,y),diff(y(t),t)=Fkt_A(x,y)], \
        [x(t),y(t)], t=0..max_t, \
        [[x(0)=x_start, y(0)=y_start]], \
        x=-achse_koord..achse_koord ,y=-achse_koord..achse_koord, \
        stepsize=0.4,linecolor= red,color=[-Fkt_B(x,y), \
        Fkt_A(x,y),0.1],arrows=MEDIUM):

```

```

Dia_2:=DEplot3d([diff(x(t),t)=-Fkt_B(x,y),diff(y(t),t)=Fkt_A(x,y)], \
    [x(t),y(t)], t=0..max_t, \
    [[x(0)=x_start, y(0)=y_start]], \
    x=-achse_koord..achse_koord, y=-achse_koord..achse_koord, \
    stepsize=0.4, linecolor= red, color=[-Fkt_B(x,y), \
    Fkt_A(x,y),0.1], arrows=MEDIUM, axes=framed):
print(Dia_1);
print(Dia_2);
end;

#####
#   Benoetigte Koeffizienten fuer Bedingungen                                     #
#####

Koeffizienten_1:=proc()
global grad_diff, grad_max, grad_Start, bedingungen, \
    sum_bedingungen, merker;
local x, i, j, k, grad_neu, PQ, pq, m, r, Wert_Koeffizienten, \
    Bedingung, sum_Koeff;
if grad_diff = 0 then
    sum_Koeff:=0;
    printf('\n');
    printf('\n Es handelt sich um das ungestoerte Problem. ');
    printf('\n Dies ist bereits in Polarkoordinaten periodisch, ');
    printf('\n so muessen keine zusaetzlichen Bedingungen \
        aufgestellt werden.\n');
    merker:=2;
end if;
if grad_diff >0 then
    for k from grad_max to grad_Start+1 by -1 do
        for x from 0 to grad_diff do
            for j from 0 to grad_diff do
                for m from 1 to grad_max do
                    if k=grad_max then
                        PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-1, \
                            k-bedingungen[j]+1+x];
                        pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-1, \
                            k-bedingungen[j]+1+x];
                    elif k=grad_max-m then
                        r:=m+1;
                        PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-r, \
                            k-bedingungen[j]+r+x];
                        pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-r, \

```

```

                                k-bedingungen[j]+r+x];
                                end if;
                                end do;
                                end do;
                                end do;
grad_neu:=k;
printf('\n');
printf('\n Grad= %g', grad_neu);
printf('\n Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:\n');
for i from 0 to sum_bedingungen-1 do
    if k-i>=grad_Start then
        Bedingung[i]:=PQ[k-i,0+i];
        printf('\n Bedingung[%d]=\%s', i, \
            convert(Bedingung[i],string));
        Wert_Koeffizienten[i]:=pq[k-i,0+i];
        printf('\n Wert_Koeffizienten[%d]=\%s', i, \
            convert(Wert_Koeffizienten[i],string));
    end if;
end do;
end do;
sum_Koeff:=sum(abs(Wert_Koeffizienten[l]), l=0..grad_diff);
if grad_diff > 1 then
    sum_Koeff:=1;
end if;
if sum_Koeff = 0 then
    printf('\n');
    printf('\n Diese Differentialgleichung liefert in \
        Polarkoordinaten periodische Loesungen. ');
    printf('\n Dies kann durch den folgenden Plot gezeigt werden.\n');
    merker:=2;
end if;
if sum_Koeff <> 0 then
    printf('\n ');
    printf('\n Mit diesen Angaben ergibt sich aus unseren \
        Bedingungen keine ');
    printf('\n in Polarkoordinaten periodische Loesung. ');
    printf('\n Das Programm versucht das Polynom B ');
    printf('\n so zu veraendern, dass dennoch die Bedingungen \
        erfuehlt sind.\n');
    if grad_A < grad_B then
        printf('\n Leider ist diese Option fuer die \
            eingegebenen Polynome nicht moeglich. ');
        printf('\n (Diese Option beschraenkt sich auf den Fall \

```

```

                                grad_A > grad_B )\n');
                                merker:=11;
                                end if;
                                end if;
                                end if;
                                end if;
                                end;
Koeffizienten_2:=proc()
    global grad_diff, grad_max, grad_Start, bedingungen, \
        sum_bedingungen, merker;
    local x, i, j, k, grad_neu, r, PQ, pq, m, Bedingung, \
        Wert_Koeffizienten, sum_Koeff;
    if grad_diff = 0 then
        sum_Koeff:=0;
        printf('\n');
        printf('\n Es handelt sich um das ungestoerte Problem. ');
        printf('\n Dies ist bereits in Polarkoordinaten periodisch, ');
        printf('\n so muessen keine zusaetzlichen Bedingungen \
            aufgestellt werden.\n');
        merker:=2;
    end if;
    if grad_diff >0 then
        for k from grad_max to grad_Start+1 by -1 do
            for x from 0 to grad_diff do
                for j from 0 to grad_diff do
                    for m from 1 to grad_max do
                        if k=grad_max then
                            PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-1, \
                                k-bedingungen[j]+1+x];
                            pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-1, \
                                k-bedingungen[j]+1+x];
                        elif k=grad_max-m then
                            r:=m+1;
                            PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-r, \
                                k-bedingungen[j]+r+x];
                            pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-r, \
                                k-bedingungen[j]+r+x];
                        end if;
                    end do;
                end do;
            end do;
        end do;
        grad_neu:=k;
        printf('\n');
        printf('\n Grad= %g', grad_neu);
    end if;
end proc;

```

```

    printf('\n Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:\n');
    for i from 0 to sum_bedingungen-1 do
    if k-i>=grad_Start then
        Bedingung[i]:=PQ[k-i,0+i];
        printf('\n Bedingung[%d]=\%s', i, \
            convert(Bedingung[i],string));
        Wert_Koeffizienten[i]:=pq[k-i,0+i];
        printf('\n Wert_Koeffizienten[%d]=\%s', i, \
            convert(Wert_Koeffizienten[i],string));
    end if;
    end do;
    end do;
end if;
end;
Koeffizienten_3:=proc()
    global grad_diff, grad_max, grad_Start, bedingungen, \
        sum_bedingungen, merker;
    local x, i, j, k, r, m, grad_neu, PQ, pq, sum_Koeff, \
        Bedingung, Wert_Koeffizienten;
    if grad_diff = 0 then
        sum_Koeff:=0;
        printf('\n');
        printf('\n Es handelt sich um das ungestoerte Problem. ');
        printf('\n Dies ist bereits in Polarkoordinaten periodisch, ');
        printf('\n so muessen keine zusaetzlichen Bedingungen \
            aufgestellt werden.\n');
        merker:=2;
    end if;
    if grad_diff >0 then
        for k from grad_max to grad_Start+1 by -1 do
        for x from 0 to grad_diff do
        for j from 0 to grad_diff do
        for m from 1 to grad_max do
            if k=grad_max then
                PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-1, \
                    k-bedingungen[j]+1+x];
                pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-1, \
                    k-bedingungen[j]+1+x];
            elif k=grad_max-m then
                r:=m+1;
                PQ[k-x,0+x]:=P[k-x,0+x]-Q[bedingungen[j]-x-r, \
                    k-bedingungen[j]+r+x];
                pq[k-x,0+x]:=p[k-x,0+x]-q[bedingungen[j]-x-r, \

```

```

                                k-bedingungen[j]+r+x);
                        end if;
                end do;
                end do;
                end do;
grad_neu:=k;
printf('\n');
printf('\n Grad= %g', grad_neu);
printf('\n Die Bedingungen dazu lauten wie folgt:\n');
        for i from 1 to sum_bedingungen-1 do
                if k-i+1>=grad_Start then
                        Bedingung[i]:=PQ[k-i+1,0+i-1];
                        printf('\n Bedingung[%d]=\%s', i, \
                                convert(Bedingung[i],string));
                        Wert_Koeffizienten[i]:=pq[k-i+1,0+i-1];
                        printf('\n Wert_Koeffizienten[%d]=\%s', i, \
                                convert(Wert_Koeffizienten[i],string));
                end if;
                end do;
                end do;
        end if;
end;

#####
#   Neue Koeffizienten von Poly_B und Ausgabe von Poly_B (neu)   #
#####

Berechnen_Koeff_B:=proc()
    global grad_diff, grad_max, bedingungen, Poly_B, grad_Start;
    local i,k,j;
    printf('\n Wir benoetigen nun ein Polynom, so dass unsere \
            Bedingungen NULL ergeben. ');
    printf('\n Dieses wollen wir nun angeben. ');
    if grad_diff >0 then
        for k from 0 to grad_diff do
            Q_neu[grad_max-k,0+k]:=P[grad_max-k,0+k];
            q_neu[grad_max-k,0+k]:=p[grad_max-k,0+k];
        end do;
    end if;
    for i from 0 to grad_diff do
        if grad_diff>0 then
            Q_Angabe_neu[i]:=Q_neu[grad_max-i,0+i];
            printf('\n Q_Angabe_neu[%d]=\%s', i, \

```



```

        convert(Q_Angabe_neu[i],string));
Wert_Koeffizient_neu[i]:=q_neu[grad_max-i,0+i];
printf('\n Wert_Koeffizient_neu[%d]=\%s\n', i, \
        convert(Wert_Koeffizient_neu[i],string));
    end if;
end do;
Poly_B:=y^grad_Start;
for i from 0 to grad_diff do
    Poly_B:=Poly_B+Wert_Koeffizient_neu[i]*x^(grad_diff-i)* \
        y^(grad_max-grad_diff+i);
end do;
for i from 1 to grad_max do
    p_neu[i,0]:=coeff(Poly_B, x^i);
    p_neu[i,0]:=subs(y=0, p_neu[i,0]);
    p_neu[0,i]:=coeff(Poly_B, y^i);
    p_neu[0,i]:=subs(x=0, p_neu[0,i]);
end do;
printf('\n Folgende Koeffizienten des Polynoms B sind identisch \
    NULL:');
for i from 1 to grad_max do
    Hilfs_B:=coeff(Poly_B, x^i);
    for j from 1 to grad_max do
        p_neu[i,j]:=coeff(Hilfs_B, y^j);
        printf('+ \%s*x^ \%d*y^ \%d', convert(p_neu[i,j], \
            string),i,j);
    end do;
end do;
printf('\n '):
p_neu[0,0]:=0;
printf('\n B= '):
    for j from 0 to grad_max do
        for i from 0 to grad_max do
            if p_neu[i,j]<>0 then
                printf('+ \%s*x^ \%d*y^ \%d', \
                    convert(p_neu[i,j],string),i,j);
            end if;
        end do;
    end do;
printf('\n '):
end;

```

```

#####
#   Hauptprogramm                                     #

```

```
#####
```

```
Digits:=100:
menu:=0:
while menu=0 do
    printf('\n Ueberpruefen von DGL:');
    printf('\n');
    printf('\n 1. auf in Polarkoordinanten periodische \
        Loesungen (Kapitel 4 der Arbeit).');
    printf('\n Es werden die Bedingungen aus Kapitel 3 \
        zu Grunde gelegt. Druecke 1.\n');
    printf('\n 2. auf Symmetrie der periodischen Loesungen (Kapitel 5 \
        der Arbeit).');
    printf('\n Es lassen sich Symmetrieachsen finden. \
        Druecke 2.\n');
    menu_wahl:=parse(readline(terminal));
    if menu_wahl=1 then
        menu:=1;
    elif menu_wahl=2 then
        menu:=8;
    end if;
    while menu=1 do
        printf('\n Es stehen folgende Moeglichkeiten zur Auswahl:');
        printf('\n 1. Eingabe einer Differentialgleichung');
        printf('\n und Test auf auf periodische Loesungen. \
            Druecke 1.\n');
        printf('\n 2. Eingabe eines beliebigen Polynoms');
        printf('\n und Generierung einer Differentialgleichung, \
            die periodische Loesungen erlaubt. Druecke 2.\n');
        printf('\n 3. Eingabe von Variablen. ');
        printf('\n Angabe einer allgemeinen Darstellung einer \
            Differentialgleichung, die periodische Loesungen\
            garantiert. Druecke 3.\n');
        menu_wahl:=parse(readline(terminal));
        if menu_wahl=1 then
            Einlesen_Allg():
            Anzahl_Parameter():
            Anzahl_Bedingungen():
            if grad_Start < grad_max then
                menu:=11:
            end if;
            Einlesen_1():
            if grad_Start = grad_max then
```

```

        menu:=4:
    end if;
    Ueberpruefen_1():
        if merker=11 then
            menu:=11:
        else menu:=1;
        end if;
    Koeffizienten_1():
        if merker=11 then
            menu:=11;
        elif merker=2 then
            menu:=4;
        else menu:=3;
        end if;
elif menu_wahl=2 then
    Einlesen_Allg():
    Anzahl_Parameter():
    Anzahl_Bedingungen():
        if grad_Start < grad_max then
            menu:=11:
        end if;
    Einlesen_2():
    Ueberpruefen_2():
        if merker=11 then
            menu:=11:
        else menu:=1;
        end if;
    Koeffizienten_2():
    Berechnen_Koeff_B():
        menu:=4;
elif menu_wahl=3 then
    Einlesen_Allg():
    Anzahl_Parameter():
    Anzahl_Bedingungen():
    Koeffizienten_3():
        menu:=11;
else printf('\nFALSCHE Eingabe - Nochmal! \n');
end if;
end do;
while menu=3 do
printf('\n Moechten Sie diese Option wahrnehmen?');
printf('\n Ja. Druecke 1. ');
printf('\n Nein - das Programm wird beendet. \n

```

```

        Druecke 2.\n');
menu_wahl:=parse(readline(terminal));
    if menu_wahl=1 then
        Poly_B:=0:
        Berechnen_Koeff_B():
            menu:=4;
    elif menu_wahl=2 then
        printf('\n Das Programm wird beendet. ');
        quit:
    else printf('\n FALSCHE Eingabe - Nochmal! \n');
    end if;
end do;
while menu=4 do
printf('\n Grafik ausgeben?: ');
    printf('\n Ja - Ausgabe der Grafik. Druecke 1. ');
    printf('\n Nein - Programm wird beendet. Druecke 2.\n');
menu_wahl:=parse(readline(terminal));
    if menu_wahl=1 then
        Plot_Fkt():
            menu:=11:
    elif menu_wahl=2 then
        printf('\n Das Programm wird beendet. ');
        quit:
    else printf('\n FALSCHE Eingabe - Nochmal! \n');
    end if;
end do;
while menu=8 do
printf('\n ');
printf('\n Es gibt zwei moegliche Varianten, Polynome einzugeben: ');
    printf('\n ');
    printf('\n A enthaelt fuer P(x,y) nur gerade, B fuer Q(x,y) \
        nur ungerade Potenzen von y. Druecke 1. ');
    printf('\n A enthaelt fuer P(x,y) nur ungerade Potenzen und B \
        fuer Q(x,y) enthaelt nur gerade Potenzen von x. \
            Druecke 2.\n');
menu_wahl:=parse(readline(terminal));
    if menu_wahl=1 then
        Einlesen_1():
        Plot_Fkt():
            menu:=11:
    elif menu_wahl=2 then
        Einlesen_1():
        Plot_Fkt():

```

```
        menu:=11:
        else printf('\n FALSCHE Eingabe - Nochmal! \n');
        end if;
    end do;
    while menu=11 do
    printf('\n ');
    printf('\n Jetzt sind wir fertig. ');
        printf('\n Nochmal. Druecke 1. ');
        printf('\n Nein - das Programm beenden. Druecke 2.\n');
    menu_wahl:=parse(readline(terminal));
        if menu_wahl=1 then
            restart;
            menu:=0;
        elif menu_wahl=2 then
            menu:=100;
        end if;
    end do;
    while menu=100 do
    printf('\n ');
    printf('\n Worksheet schliessen? ');
    printf('\n ');
        printf('\n Nein. Druecke 1. ');
        printf('\n Ja. Druecke 2.\n');
    menu_wahl:=parse(readline(terminal));
    if menu_wahl=1 then
        restart;
        menu:=1000;
    elif menu_wahl=2 then
        quit:
    end if;
    end do;
end do;
```


Anhang B

Datenträger

Der beiliegende Datenträger enthält folgende Dateien:

- a) README-Datei für das Maple-Programm
- b) MAPLE-Programm
- c) Diplomarbeit als PS- und PDF- Datei
- d) Alle in der Arbeit eingefügten Bilder

Literaturverzeichnis

- [Knies] Knies, D. (2002): Strudel und Wirbel bei ebenen autonomen Systemen mit verschwindendem Linearteil. Diplomarbeit an der Universität Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VI.
- [Opel] Opel, J. (2001): Die Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$. Strudel um eine Stelle der Unbestimmtheit bei verschwindender Linearisierung. Grenzzykel beim Poincaréschen Zentrumsproblem. Diplomarbeit an der Universität Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VI.
- [Hoehn] Höhn, A. (2001): Algebraische Berechnung von Strudelgrößen und graphisches Auffinden von Grenzzyklen um eine Stelle der Unbestimmtheit. Diplomarbeit an der Universität Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VI.
- [Grauert] Grauert, H. , Fischer, X. (1973): Differential- und Integralrechnung, Band II. Springer-Verlag, Heidelberg.
- [Moritzen] Moritzen, K. (2000): Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle. Diplomarbeit an der Universität Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VI.
- [Kamke] Kamke, E. (1942): Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen, Band I. Akademische Verlagsgesellschaft Becker & Erler, Leipzig.
- [vonWahl] von Wahl, W. (2002): Beweisansatz zum Auffinden von periodischen Lösungen. Persönliche Mitteilungen.
- [Klein] Klein, H. (2001): Der Verlauf der Integralkurven von $y' = \frac{P}{Q}$ in der Nähe der Null für homogene Polynome P, Q von ungeradem Grad. Diplomarbeit an der Universität Bayreuth, Lehrstuhl Mathematik VI.

- [Frommer] Frommer, M. (1934): Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. *Mathematische Annalen*, **Band. 109**, S. 395-424.
- [Ruckdaeschel] Ruckdaeschel, B. (2002): Konstruktive Methoden beim Poincarèschen Zentrumsproblem. Zulassungsarbeit an der Universität Bayreuth für das gymnasiale Lehramt, Lehrstuhl Mathematik VI.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth, 06. Februar 2003

.....
Alexander Prell

Index

- $M_\lambda(\varphi)$, 12, 53
- $P(x, y)$, 4, 41, 54
- $Q(x, y)$, 4, 41, 54
- $f(\varphi, r)$, 6, 53
- $g(\varphi, r)$, 6, 53
- $p_{\nu\mu}$, 8
- $q_{\nu\mu}$, 8
- autonomes System, 43
- Beispiele, 54
 - $f_{\tilde{\lambda}}(\varphi)g_0(\varphi) = g_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi)f_1(\varphi)$, 20
 - gestörtes Problem, 44, 46, 47
 - Programm
 - Teil I, 30, 35, 37
 - Teil II, 44
- Eulerscher Multiplikator, 10, 53
 - Definition, 11
- gewöhnliche Differentialgleichung, 3
- homogenes Polynom, 20
- kritischer Punkt, 42, 55
- Lösungen
 - 2π -periodisch, 1, 20, 53
- MAPLE-Programm, 2, 28, 54
 - Teil I, 29
 - Teil II, 39
 - Teil III, 29, 55
- parametrisierte Schar, 1, 3, 53
- Poincarèsches Zentrumsproblem, 1
- Polarkoordinaten, 6, 7, 53
- Problem
 - gestört, 39, 41, 54
 - ungestört, 39, 40, 54
- Satz
 - Cauchy-Produkt-Formel, 14
 - periodische Lösungen, 4
- Symmetrie, 54
 - periodische Lösungen, 39