

Die Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$.
Strudel um eine Stelle der Unbestimmtheit
bei verschwindender Linearisierung.
Grenzzykel beim Poincaréschen Zentrumsproblem.

Jürgen Opel

Die Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$. Strudel um
eine Stelle der Unbestimmtheit bei
verschwindender Linearisierung. Grenzzykel beim
Poincaréschen Zentrumsproblem.

Diplomarbeit
vorgelegt von
Jürgen Opel
am Lehrstuhl Mathematik VI
der Universität Bayreuth

Bayreuth, den 20.11.2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Differentialgleichungen, Strudel und Wirbel	5
2.1	Definitionen allgemeiner Art	5
2.2	Wirbelbedingungen für Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{x^3+q_{\geq 4}(x,y)}$	8
2.3	Vergleichsdifferentialgleichung und Verfahren nach Dehn	10
3	Grenzzykel beim Poincaréschen Problem	16
3.1	Eigenschaften und Definition	16
3.2	Kriterium für die Existenz	18
3.3	Eine praktische Methode der Suche	20
3.4	Beispiele und Fallstudien	23
3.4.1	Frommers Beispiel für abstoßende Grenzzykel	24
3.4.2	Eigene Beispiele für abstoßende Grenzzykel	32
3.4.3	Eigene Beispiele für anziehende Grenzzykel	34
3.5	Betrachtung des Nullstellengebildes von $\psi(r_0, \epsilon)$	36
4	Differentialgleichungen mit Anfangspotenzen höherer Ordnung	41
4.1	Definition	41
4.2	Exemplarische Herleitung der Wirbelbedingungen und Umsetzung dieser in Maple für h=2	42
4.2.1	Ein Kriterium für kein Wirbeltyp	42
4.2.2	Kein Wirbel - Strudel oder Unbestimmtheit	45
4.2.3	Die Berechnung rekursiver Formeln	47
4.2.4	Umsetzung in Maple - das Programm	52
4.2.5	Eigene Beispiele	56

4.3	Überlegungen für $h \geq 3$	69
4.3.1	Die Berechnung rekursiver Formeln für $h=3$	69
4.3.2	Ausblick für $h>3$	70
A	Symbolverzeichnis	i
B	Lineare Gleichungssysteme	ii
B.1	Gleichungssysteme für $h=2$; $n = 7, \dots, 14$	ii
B.2	Gleichungssysteme für $h=3$; $n = 11, \dots, 18$	iv
C	Mapleprogramm - Screenshots und Quellcode	vi
D	Rekursive Gleichungen für $h=3$	xxiv
E	Datenträger	xxxvi

Kapitel 1

Einleitung

Differentialgleichungen sind eine gute Möglichkeit den Zusammenhang zwischen der Mathematik und anderen Naturwissenschaften, aber auch der Ingenieurtechnik und den Wirtschaftswissenschaften, aufzuzeigen.

Die Entwicklung der Mathematik ist eng verbunden mit der der Differentialgleichungen. Schon im 17. Jahrhundert begann das Studium der Differentialgleichungen mit den von Isaac Newton 1665 entdeckten fundamentalen Gesetzen der Mechanik. Weitere bekannte Mathematiker, wie z.B. Gottfried Wilhelm Leibniz, Jakob und Johann Bernoulli, Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange, wußten die Wichtigkeit von Differentialgleichungen für die Darstellung und Untersuchung von physikalischen, biologischen, wirtschaftlichen und sozialen Problemstellungen zu würdigen und waren auf diesem Gebiet der Mathematik tätig.

Es wandelte sich mit der Zeit allerdings der Fokus des Interesses. Während im 17. Jahrhundert noch versucht wurde verschiedene Probleme in Differentialgleichungsform zu schreiben, wurden im 18. Jahrhundert, speziell gegen Ende, viele elementare Lösungsmethoden von Differentialgleichungen entdeckt. Im 19. Jahrhundert galt das Interesse dann hauptsächlich der theoretischen Frage nach Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung, außerdem rückten die, bis dahin weitgehend unerforschten, partiellen Differentialgleichungen immer mehr ins Rampenlicht, nachdem man deren bedeutende Rolle für die Physik und Mathematik erkannt hatte. Eine wesentliche Neuerung des 20. Jahrhunderts stellte der vermehrte Einsatz von Rechenmaschinen, sprich Computern, für das Lösen von Differentialgleichungen dar. Dies führte zu einer häufigeren Untersuchung von Differentialgleichungen, die mit analytischen Methoden nicht lösbar waren. Mit numerischen, geometrischen und topologischen Methoden versucht man jetzt, in der jüngeren Entwicklung, diese abzuarbeiten und stößt dabei auf unerwartete Phänomene, die mit Begriffen wie Attraktor, Chaos, Fraktal oder auch Grenzzykel einhergehen. Auf diese Art und Weise bietet dieses alte Thema der Mathematik, über das schon viel bekannt ist, immer noch eine Quelle von faszinierenden und wichtigen ungelösten Problemen.

In der hier vorliegenden Arbeit soll auf eine spezielle Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung eingegangen werden. Es handelt sich hierbei um die, von Poincaré bereits 1885¹ veröffentlichten und später von Dehn umformulierten, Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$.

Dabei soll sich im Kapitel 3 für $A(x, y) = x + \sum_{h=2}^n p_h(x, y)$ bzw. $B(x, y) = y + \sum_{h=2}^n q_h(x, y)$ mit einem dieser, oben angesprochenen, faszinierenden Phänomene, hier dem Grenzykel, beschäftigt werden. Es wird sich zeigen, daß die Untersuchung von Grenzyklen mit rein analytischen Methoden³ nicht möglich ist, wohl aber mit Hilfe von graphischen Darstellungen. Diese ermöglichen es unter Einsatz numerischer Verfahren, genauer gesagt dem Bisektionsverfahren, Grenzykel beliebig genau, nach dem Intervallschachtelungsprinzip sogar exakt, zu lokalisieren.

Kapitel 4 beinhaltet dann die Betrachtung eines Problems, welches in der Mathematik in der Form noch nicht untersucht worden ist. Es soll sich weiterhin mit Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ befassen werden, wobei jetzt der lineare Anteil von $A(x, y)$ bzw. $B(x, y)$ gleich Null ist. Für diese Differentialgleichungen werden die gleichen Überlegungen wie für die von Frommer betrachteten getroffen. Zu diesem Zweck wird der zu Frommers bzw. Moritzens Strudelgröße adäquate Begriff der Wirbelgröße eingeführt. Mittels dieser werden dann bei Erfüllung bestimmter Bedingungen Aussagen bzw. Vermutungen über das Aussehen der Lösung der betrachteten Differentialgleichung getroffen. Die logische Reihenfolge ist dabei die folgende:

1. Die Bemerkungen von Frommer in seiner Arbeit [9] erweisen sich in diesem Zusammenhang als nicht befriedigend. Es soll im Gegensatz zu Frommer mit einer Vergleichsdifferentialgleichung gearbeitet werden.
2. Bei dieser Vorgehensweise entsteht in jedem Berechnungsschritt die zur Strudelgröße adäquate Wirbelgröße. Sollte diese gleich Null sein wird das Verfahren fortgesetzt, ansonsten wird abgebrochen.
3. Sollten alle berechneten Wirbelgrößen gleich Null sein, so wird der Wirbelfall vermutet.
4. Bricht das Verfahren ab, so ist der aktuelle Grad der Berechnung zu bestimmen. Sollte dieser ungerade sein, wird von Unbestimmtheit ausgegangen. Bei Abbruch in einem geraden Berechnungsgrad liegt zunächst auch Unbestimmtheit nahe, in Spezialfällen hat man hier aber einen Strudel.

Dem technischen Stand der heutigen Zeit Rechnung tragend, soll eine rekursive Berechnungsmöglichkeit für Wirbelgrößen bzw. eine graphische Methode zur Loka-

¹Évres [20]

² $A(x,y)$, $B(x,y)$ Polynome in x, y

³im speziellen mit impliziten Funktionen

lisierung von Grenzykeln entwickelt werden. Natürlich darf die reale Umsetzung in einer solchen Arbeit nicht fehlen, so daß die in den Kapiteln 3 und 4 erschlossenen Erkenntnisse auch in Maple umgesetzt wurden. Der Quellcode dazu befindet sich im Anhang C.

Die bereits von anderen, wie z.B. Frommer, Poincaré, Dehn, von Wahl, Moritzen, Höhn, ..., geleisteten Vorarbeiten wurden an den entsprechenden Stellen bedacht.

Kapitel 2

Differentialgleichungen, Strudel und Wirbel

Bevor auf die, der Poincaréschen Wirbelbedingung ähnlichen, nichtlinearen Wirbelbedingungen eingegangen werden soll, seien hierfür noch einige notwendige Notationen und Definitionen allgemeiner Art kurz angedeutet.

2.1 Definitionen allgemeiner Art

Definition 2.1 (Differentialgleichung). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung .

Definition 2.2 (Lösung einer Differentialgleichung). Unter einer Lösung einer Differentialgleichung vom Typ (2.1) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

- Der Graph φ ist in G enthalten, d.h.

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset G$$

- Es gilt

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$$

Damit die zweite Bedingung überhaupt formuliert werden kann muß die erste gestellt werden.

Bemerkung 2.3 (Zur Eindeutigkeit). Für die Eindeutigkeit einer Lösung wird die Lipschitzbedingung benötigt. Dieser Begriff und auch der Beweis der Eindeutigkeit kann auf den Seiten 96ff in [3], Bd.II, nachgelesen werden. Im weiteren sei der Einfachheit halber stets ausreichende Glattheit vorausgesetzt, was im Falle der hier betrachteten Differentialgleichungen keine spektakuläre Forderung ist.

Definition 2.4 (r_0 , Startradius). Der Einfachheit halber werden später als Startpunkte, für die grafische Darstellung der Näherung einer expliziten Lösung, Punkte auf der x -Achse mit den Koordinaten $(x_{\text{koord}}, 0)$ gewählt. r_0 bezeichne nun die x -Koordinate des Startpunktes.

Startradius sei ein Synonym für r_0 .

Definition 2.5 (Stelle der Unbestimmtheit, Unbestimmtheitsstelle). Als Stelle der Unbestimmtheit wird bei Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A}{B}$ die Stelle an der $A = B = 0$ ist bezeichnet. Beim äquivalenten autonomen System $\dot{x} = B$, $\dot{y} = -A$ wird diese Gleichgewichtspunkt oder kritischer Punkt genannt. Aufgrund der Betrachtung einer stark eingeschränkten Gruppe von Differentialgleichungen soll in der Folge auch von Unbestimmtheitsstelle oder Ursprung oder Null gesprochen werden.

Für die Definition der, in der praktischen Methode der Suche eines Grenzykel verwendeten, Intervallschachtelung werden hier noch einige vorbereitende Bezeichnungen eingeführt.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann heißt

$$\begin{aligned} [a, b] &:= x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b && \text{abgeschlossenes Intervall,} \\ (a, b) &:= x \in \mathbb{R} : a < x < b && \text{offenes Intervall,} \\ [a, b) &:= x \in \mathbb{R} : a \leq x < b && \text{(nach rechts) halboffenes Intervall,} \\ (a, b] &:= x \in \mathbb{R} : a < x \leq b && \text{(nach links) halboffenes Intervall.} \end{aligned}$$

a, b heißen hierbei Randpunkte des Intervalls I . $|I| = b - a$ sei seine Länge. Außerdem werden abgeschlossene Intervalle auch kompakte Intervalle genannt.

Definition 2.6 (Intervallschachtelung). Eine Intervallschachtelung ist eine Folge $I_1, I_2, I_3, \dots$ kompakter Intervalle, kurz (I_n) , mit den Eigenschaften:

1. $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit einer Länge $|I_n| < \epsilon$.

An dieser Stelle sei, für die in den folgenden Abschnitten benötigten Definitionen wie z.B. Pfaffsche Form, Richtungsfeld und autonomes System, auf den Abschnitt 2.2 „Autonome Systeme und Pfaffsche Formen“ der Arbeit „Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle“ von Moritzen [10], sowie auf Grauert Fischer [5] Kapitel 5 und 7, verwiesen.

Es werden die dort getroffenen Definitionen und Erläuterungen in der Folge als gegeben vorausgesetzt. Soll in einer zweideutigen Situation auf eine, mit dem Poincaréschen Zentrumsproblem im Zusammenhang stehende, Definition oder Funktion zurückgegriffen werden, so wird diese mit dem Index Poincaré versehen.

Desweiteren sei mit dem folgenden Beispiel auf einen Unterschied zwischen dem hier behandelten Fall und dem von Moritzen Analysierten hingewiesen.

Beispiel 2.1. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Sei weiterhin eine Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} \quad \text{in } G \tag{2.2}$$

gegeben. Lösungen von (2.2) sind

$$y = \pm \sqrt[4]{c - x^4}, \quad |x| < \sqrt[4]{c}. \tag{2.3}$$

In der Lösung fehlen die beiden Punkte $(-\sqrt[4]{c}, 0)$ und $(+\sqrt[4]{c}, 0)$. Durch eine Betrachtung von $x'(y) = \frac{dx}{dy}$, dem umgekehrten Fall zu $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, können die fehlenden Punkte herbeigeschafft werden. Pfaffsche Formen legitimieren diese Vorgehensweise. Die so, aus Gleichung 2.3, entstandene Lösung kann auch als Niveaulinienfunktion geschrieben werden. Es gilt

$$F(x, y) = c \quad \Longleftrightarrow \quad F(x, y) = x^4 + y^4.$$

2.2 Wirbelbedingungen für Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{x^3+p_{\geq 4}(x,y)}{x^3+q_{\geq 4}(x,y)}$

Im Gegensatz zum Poincaréschen Problem, bei dem von den in x und y reell analytischen Funktionen

$$\begin{aligned} A_{\text{Poincaré}}(x, y) &:= x + p(x, y), & p(x, y) &:= \sum_{h=2}^{\infty} p_h(x, y), \\ B_{\text{Poincaré}}(x, y) &:= y + q(x, y), & q(x, y) &:= \sum_{h=2}^{\infty} q_h(x, y), \end{aligned}$$

ausgehend die Pfaffsche Form

$$\omega := A_{\text{Poincaré}}(x, y)dx + B_{\text{Poincaré}}(x, y)dy = 0$$

in der Nähe des kritischen Punktes Null betrachtet wird, sollen hier die reell analytischen Funktionen in x und y

$$\begin{aligned} A(x, y) &:= x^3 + p_{\geq 4}(x, y), & p_{\geq 4}(x, y) &:= \sum_{h=4}^{\infty} p_h(x, y), \\ B(x, y) &:= y^3 + q_{\geq 4}(x, y), & q_{\geq 4}(x, y) &:= \sum_{h=4}^{\infty} q_h(x, y), \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei p_h und q_h homogene Polynome vom Grad h sind, untersucht werden. $A(x, y)$ und $B(x, y)$ sind konvergente Potenzreihen in einer offenen Umgebung G von Null. Bei Eindeutigkeit soll A bzw. B als Kurzbezeichnung von $A(x, y)$ bzw. $B(x, y)$ dienen. Als kubischer Anteil werden die homogenen Teilpolynome dritten Grades von $A(x, y)$ und $B(x, y)$ bezeichnet. Von $A(x, y)$ ist der kubische Anteil also x^3 von $B(x, y)$ y^3 . Diese Anteile sind für das folgende Problem charakteristisch.

Insbesondere gibt es keine Integralkurve in G , die mit einer bestimmten Richtung in den Nullpunkt mündet. Die folgende Klassifizierung der Lösungen von $\omega = 0$ in Wirbel, Strudel und Unbestimmtheit beruht genau auf dieser Eigenschaft.

Definition 2.7 (Opelsches Problem). *Seien $A(x, y)$, $B(x, y)$ konstruiert wie in den Gleichungen 2.4 und $G \subset \mathbb{R}^2$.*

Die Pfaffsche Form

$$\omega := A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

über G sei regulär in $G \setminus \{0\}$. Das Opelsche Problem¹ besteht in der Charakterisierung der Lösungen von $\omega = 0$ in der Nähe des kritischen Punktes Null. Nach der in Moritzen [10] vorgestellten Theorie sind diese Lösungen durch die Differentialgleichungen

$$y' := \frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}, \quad B(x, y) \neq 0 \quad (2.5)$$

bzw.

$$x' := \frac{dx}{dy} = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}, \quad A(x, y) \neq 0 \quad (2.6)$$

festgelegt.

Die kubischen Anteile des Opelschen Problems sind für diese Klasse von Differentialgleichungen das Strukturmerkmal.

In Kapitel 4 Abschnitt 4.3.2 dieser Arbeit soll ein Ausblick auf die Analyse von Differentialgleichungen mit einer Verallgemeinerung dieses Strukturmerkmals auf die Form

$$y' = -\frac{x^{2h-1} + p_{\geq 2h}(x, y)}{y^{2h-1} + q_{\geq 2h}(x, y)}, \quad h \geq 3$$

gegeben werden, um so die Verwendbarkeit, des vorher in Kapitel 4 Abschnitt 4.2 erörterten rekursiven Verfahrens, auf diese Problemklasse zu zeigen.

Die Begriffe Strudel, Wirbel, Wirbelbedingung und Unbestimmtheit wurden bisher ohne jegliche mathematische Grundlage verwandt. Diesem Umstand soll nun Rechnung getragen werden. Es sollen hier mit Hilfe des Opelschen Problems die, für die später folgende Charakterisierung der Lösungen von $\omega = 0$, wichtigen Begriffe Wirbel, Strudel, Unbestimmtheit bzw. Wirbel-, Strudel- und Unbestimmtheitsfall definiert werden.

Definition 2.8 (Wirbel, Wirbelfall). *Sei das Opelsche Problem aus Definition 2.7 betrachtet. Sind in einer gelochten Umgebung $G \setminus \{0\}$ des kritischen Punktes Null alle in dieser Umgebung liegenden Integralkurven geschlossen, so sei von Wirbel gesprochen oder: es läge der Wirbelfall in 0 vor.*

¹Namensgebung in Anlehnung an das Poincarésche Problem

Definition 2.9 (Strudel, Strudelfall). *Sei das Opelsche Problem aus Definition 2.7 betrachtet. Sind in einer gelochten Umgebung $G \setminus \{0\}$ des kritischen Punktes Null nicht alle in dieser Umgebung liegenden Integralkurven geschlossen, liegt also nicht der Wirbelfall in 0 vor und erfüllt der, nach dem Vergleichsverfahren von Dehn (siehe Abschnitt 2.3), berechnete Zähler bestimmte Bedingungen (siehe auch Abschnitt 4.2.2), so sei von einem Strudelfall bzw. es handle sich um einen Strudel gesprochen.*

Für das Poincarésche Problem wird in Teichert [15] aufgezeigt, daß im Strudelfall die Integralkurven in hinreichender Nähe der Null Spiralen um den Nullpunkt bilden.

Definition 2.10 (Unbestimmtheit, Unbestimmtheitsfall). *Sei das Opelsche Problem aus Definition 2.7 betrachtet. Sind in einer gelochten Umgebung $G \setminus \{0\}$ des kritischen Punktes Null nicht alle in dieser Umgebung liegenden Integralkurven geschlossen, liegt also nicht der Wirbelfall in 0 vor und sei mindestens eine der in Definition 2.9 angesprochenen Bedingungen verletzt, so sei von Unbestimmtheit bzw. es liegt der Unbestimmtheitsfall vor gesprochen.*

Frommer sagt in seiner Arbeit [9], daß im Wirbelfall die Lösungskurven nicht immer als Niveaulinien $F_{\text{Poincaré}}(x, y) = c$ (c konstant)² geschrieben werden können.

Auf die Bedingungen, die, wie wir vermuten, den Wirbelfall nach sich ziehen und die wir Wirbelbedingungen für Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{y^3+q_{\geq 4}(x,y)}$ nennen wollen kann man durch den Vergleich zweier, zu Differentialgleichungen gehörender, Tangentenfelder³, von denen wenigstens eines geschlossene Integralkurven hat, schließen. Hierbei handelt es sich bei der einen Differentialgleichung um eine sogenannte Vergleichsdifferentialgleichung, welche auch die Form $y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{y^3+q_{\geq 4}(x,y)}$ hat.

Die Existenz von einer um 0 analytischen Stammfunktion $F(x,y)$ ist für diesen Vergleich keine notwendige Voraussetzung.

Der nächste Abschnitt dieses Kapitels wird die Verfahrensweise dieses Vergleiches aufzeigen.

2.3 Vergleichsdifferentialgleichung und Verfahren nach Dehn

Für die Bestimmung der Bedingungen für einen Wirbel bzw. einen Strudel beim Poincaréschen Problem schlug Dehn im Jahr 1929 den Vergleich zweier Differenti-

² $F_{\text{Poincaré}}(x, y) = x^2 + y^2 + \sum_{h=3}^n F_h(x, y)$

³Synonym zu Richtungsfeld, Definition siehe Moritzen [10]

algebraischen vor. In diesem Verfahren soll die Differenz zwischen der zu betrachtenden Differentialgleichung und einer konstruierten Vergleichsdifferentialgleichung, mit ausschließlich geschlossenen Integralkurven in einer gelochten Umgebung um den Ursprung, als Kriterium für das Vorliegen eines Wirbels oder Strudels dienen. Dies soll nun auf das Opelsche Problem übertragen werden. Es wird sich dabei zeigen, daß das Nicht-Erfülltsein einer Wirbelbedingung in diesem Fall nicht automatisch den Strudelfall nach sich zieht, sondern erst einmal nur die Vermutung kein Wirbel nahelegt.

Bemerkung 2.11. *Diese Vermutung soll auch als Opelsche Vermutung bezeichnet werden.*

Möchte man nähere Aussagen über das Aussehen der Integralkurven von $y' = -\frac{x^3+p_{\geq 4}(x,y)}{y^3+q_{\geq 4}(x,y)}$ machen, so sind noch einige zusätzliche Untersuchungen zu machen (siehe auch Abschnitt 4.2.2).

Aufgrund der in Gleichung 2.4 beschriebenen Gestalt von $A(x,y)$ und $B(x,y)$ sei

$$F(x, y) := x^4 + y^4 + \sum_{h=5}^n F_h(x, y) \quad (2.7)$$

für $n \geq 5$ betrachtet, wobei F_h homogene Polynome in x und y vom Grad h sind. Leitet man $F(x,y)$ nach x bzw. y ab, so ergibt sich

$$F_x(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 4x^3 + \sum_{h=5}^n F_{xh}(x, y),$$

$$F_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 4y^3 + \sum_{h=5}^n F_{yh}(x, y).$$

In eindeutigen Situationen kann die Kurzschreibweise

$$F_x := F_x(x, y), \quad F_y := F_y(x, y)$$

verwand werden.

Das oben angesprochene Verfahren basiert nun auf der Konstruktion einer Vergleichsdifferentialgleichung

$$y'_1 := f(x, y),$$

mit der bereits angesprochenen Wirbeleigenschaft.

Es soll nun von der geometrisch einleuchtend wirkenden Annahme, daß bei keinerlei Übereinstimmung der Feldrichtungen der Ausgangsdifferentialgleichung und der Vergleichsdifferentialgleichung, in $G \setminus \{0\}$, nicht der gleiche Charakter vorliegen kann, ausgegangen werden. Unter Berücksichtigung der Voraussetzung, daß die Vergleichsdifferentialgleichung vom Wirbeltyp sein soll, würde also für die zu betrachtende Differentialgleichung die Aussage kein Wirbel zutreffen. Die hier aufgestellte Vergleichsdifferentialgleichung kann diese an sie gestellte Bedingung aber nicht erfüllen, so daß also nur die Vermutung kein Wirbel naheliegt.

Für die Vergleichsdifferentialgleichung sei nun die logisch erscheinende Pfaffsche Form

$$\omega_1 = F_x dx + F_y dy = 0$$

gewählt. Diese beschreibt die Niveaulinien von $F(x,y)$. Für $y'_1 = f(x,y)$ folgt mit Moritzen [10]

$$y'_1 = f(x,y) := \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad F_y \neq 0 \quad (2.8)$$

bzw.

$$x'_1 = \frac{1}{f(x,y)} = \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad F_x \neq 0, \quad (2.9)$$

wobei die Lösungen von y'_1 und x'_1 sicher geschlossene Kurven in $G \setminus \{0\}$ bilden. Damit kann der im Verfahren angestrebte Vergleich, mit Hilfe der Differenz, von Gleichung 2.5 und Gleichung 2.8 gemacht werden.

$$\begin{aligned} y' - y'_1 &= -\frac{A(x,y)}{B(x,y)} - \left(-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \right) \\ &= \frac{-A(x,y)F_y(x,y) + B(x,y)F_x(x,y)}{B(x,y)F_y(x,y)}, \quad (B(x,y)F_y(x,y)) \neq 0 \\ &=: \frac{Z(x,y)}{N(x,y)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analog hierzu der Vergleich von Gleichung 2.6 und Gleichung 2.9

$$\begin{aligned} x' - x_1' &= -\frac{B(x, y)}{A(x, y)} - \left(-\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \right) \\ &= \frac{-B(x, y)F_x(x, y) + A(x, y)F_y(x, y)}{A(x, y)F_x(x, y)}, \quad (A(x, y)F_x(x, y)) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Geht man auf die in Moritzen [10] beschriebene Schreibweise der autonomen Systeme ein, so erhält man für die Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_y \\ -F_x \end{pmatrix}$.

Aufgrund der ausschließlichen Relevanz des Zählers aus den Gleichungen 2.10 und 2.11 kann als äquivalente Gleichung auch die Determinante der darstellenden Matrix herangezogen werden. Diese stimmt, bis auf das bei einer Untersuchung auf Null nicht ausschlaggebende Vorzeichen, mit dem Zähler der Gleichung 2.10, der Grundlage für die Entscheidung über das Aussehen der Differentialgleichung sein soll, überein.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{x}_1 \\ \dot{y} & \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & F_y \\ -A & -F_x \end{pmatrix} \implies \det \begin{pmatrix} B & F_y \\ -A & -F_x \end{pmatrix} = -BF_x + AF_y$$

Sollte diese Determinante Null sein, so bedeutet dies geometrisch nichts anderes, als daß die darstellenden Vektoren der Matrix linear abhängig sind und somit die Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung in $G \setminus \{0\}$ das gleiche Richtungsfeld festlegen. Aufgrund der Voraussetzung, daß die Vergleichsdifferentialgleichung vom Wirbeltyp ist, muß die zu betrachtende Differentialgleichung auch vom Wirbeltyp sein. Ist die Determinante stets ungleich Null liegt die Vermutung, daß kein Wirbeltyp für die Ausgangsdifferentialgleichung vorliegt, nahe. Sollen nähere Aussagen über das Aussehen getätigt werden, so muß $Z(x, y)$ genauer untersucht werden. Darauf soll allerdings erst in Kapitel 4 Abschnitt 4.2.2 eingegangen werden.

An dieser Stelle sei der, zum Begriff Strudelgröße im Poincaréschen Zentrumsproblem, adäquate Begriff der Wirbelgröße eingeführt.

Dieser entstand aus der Tatsache heraus, daß die Weiterverwendung des Begriffes Strudelgröße für diesen Fall irreführend gewesen wäre. Es kann unter diesen Voraussetzungen, aufgrund des Nicht-Vorliegens des Wirbelfalles, nicht, wie bei Poincaré, direkt auf den Strudelfall geschlossen werden, sondern es ist zu diesem Zeitpunkt der Betrachtungen nur die Vermutung kein Wirbel berechtigt.

Der Begriff Unwirbel- oder Antiwirbelgröße, der am exaktesten die Aussage des berechneten Wertes wiedergeben würde, ist, vom sprachlichen Aufbau, als für die Mathematik unüblich zu betrachten.

Daher wurde der Begriff

Definition 2.12 (Wirbelgröße). Als Wirbelgröße soll der, im später vorgestellten Algorithmus, nach jedem A-Schritt berechnete Wert, mittels dessen man gegebenenfalls eine Aussage über das Aussehen der Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung machen kann, bezeichnet werden. Hierbei läßt eine Wirbelgröße ungleich Null die Vermutung: Kein Wirbel zu. Ein Wirbel kann vermutet werden, wenn alle Wirbelgrößen gleich Null sind. Sollen im ersten Fall noch nähere Angaben zum Aussehen gemacht werden, so sind eingehendere Untersuchungen der zuletzt berechneten Wirbelgrößen nötig.

gewählt.

Bevor im Kapitel 3 noch einmal ein Aspekt des Poincaréschen Zentrumproblems untersucht wird, soll zum Abschluß dieses Kapitels, wie auch bei Moritzen, der analoge Satz zur Invarianz von $Z(x,y)$ aufgestellt werden.

Satz 2.13. Sei $Z(x, y)$ wie in (2.10) mit $Z(x, y) = -A(x, y)F_y(x, y) + B(x, y)F_x(x, y)$ und $Z(x, y) \neq 0$ in der gelochten Umgebung der Null $G \setminus \{0\}$. Dann sind die Tangentialvektoren an die Integralkurven im Phasenraum durch $(x, y) \in G \setminus \{0\}$ linear unabhängig und umgekehrt.

Beweis: Folgt unmittelbar aus dem vorherigen Abschnitt.

Für den im nächsten Kapitel betrachteten Spezialfall des Poincaréschen Problems (siehe hierzu Abschnitt 2.3 von Moritzen [10]) sollen die Begriffe und Notationen der Arbeit von Moritzen [10], vor allem der der Strudelgröße, als gegeben vorausgesetzt werden. Hierfür sei an dieser Stelle der von Moritzen aufgestellte Hauptsatz vorgestellt.

Satz 2.14 (Hauptsatz). Sei $\epsilon > 0$ und hinreichend klein. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ und n gerade, existieren homogene Polynome $F_3(x, y), \dots, F_n(x, y)$ vom Grad $3, \dots, n$, derart daß mit

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + F_3(x, y) + \dots + F_n(x, y)$$

der Ausdruck $(-AF_y + BF_x)$ eine in $|x| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$ konvergente Potenzreihe

$$-AF_y + BF_x = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} D_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}) + (\text{Terme höherer Ordnung} \geq (n+1))$$

ist. Insbesondere gilt dann die Darstellung als Taylorpolynom mit Restglied

$$\begin{aligned} -AF_y + BF_x &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} D_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}) + \sum_{k+l=n+1} \frac{n+1}{k!l!} \times \\ &\times \left(\int_0^1 \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} (0, 0) (-AF_y + BF_x)(t_x, t_y) (1-t)^n dt \right) x^k y^l. \end{aligned}$$

Bei Übergang von n zu $n + 2$ bleiben $F_3, \dots, F_n$ ungeändert. Nur F_{n+1} und F_{n+2} werden neu bestimmt. D_j heißt die j -te Strudelgröße der Differentialgleichung $y' = -\frac{A}{B}$. Das Vorzeichen von D_j ist eindeutig bestimmt.

Die darin verwendeten Begriffe und Notationen sind nicht mit den, in den letzten beiden Abschnitten Eingeführten, die ihre Verwendung erst in Kapitel 4 finden, zu verwechseln.

Kapitel 3

Grenzzzykel beim Poincaréschen Problem

3.1 Eigenschaften und Definition

Bevor man sich eingehender mit Grenzzykeln beschäftigen kann, muß man sich erst einmal klar darüber werden was ein Grenzzykel eigentlich ist und welche Eigenschaften dieser hat. Deshalb folgender Abschnitt:

Was ist ein Grenzzykel?

Man betrachte eine Differentialgleichung mit Strudelcharakter¹. Beginnt man in dem von dieser Differentialgleichung erzeugten Richtungsfeld bei zwei verschiedenen Startpunkten S_1 und S_2 , die sich z.B. nebeneinander auf der x-Achse befinden, zu laufen, so geht man natürlicherweise davon aus, daß man von beiden Startpunkten aus in die gleiche „Richtung“, d.h. entweder von der Stelle der Unbestimmtheit² weg oder zu dieser hin, strudelt. Es gibt aber Fälle, bei denen die beiden von S_1 und S_2 erzeugten Teillösungen³ aufeinander zulaufen bzw. sich voneinander entfernen. Dies bedeutet aber ja nichts anderes als, daß sich Eine, von diesen von S_1 und S_2 erzeugten Spiralen, dem Ursprung nähert und die Andere sich von demselbigen entfernt. Tritt dieses Phänomen auf, so gibt es um den Ursprung zwei Bereiche mit unterschiedlichem Strudelverhalten. Als Grenzzykel bezeichnet man nun genau die Grenze zwischen diesen beiden Bereichen, wobei der Grenzzykel weder das Verhalten des einen, noch das Verhalten des anderen Bereiches annimmt. Ein Grenzzykel ist eine geschlossene Kurve, d.h. sollte man in einem Richtungsfeld einmal auf einem

¹das Richtungsfeld erzeugt in einer begrenzten Umgebung um die Stelle der Unbestimmtheit nur Spiralen

²in unserem Fall soll der Einfachheit halber nur der Ursprung als die Stelle der Unbestimmtheit betrachtet werden

³soll hier den Weg bezeichnen, den man im Richtungsfeld der Differentialgleichung zurücklegt, wenn man an diesem Punkt startet

Grenzzzykel zu laufen beginnen, so verläßt man diesen nicht, sondern bewegt sich immer wieder auf der gleichen Bahn.

Abhängig vom Verhalten des innerhalb bzw. außerhalb des Grenzzzykels liegenden Bereiches, spricht man von einem anziehenden⁴

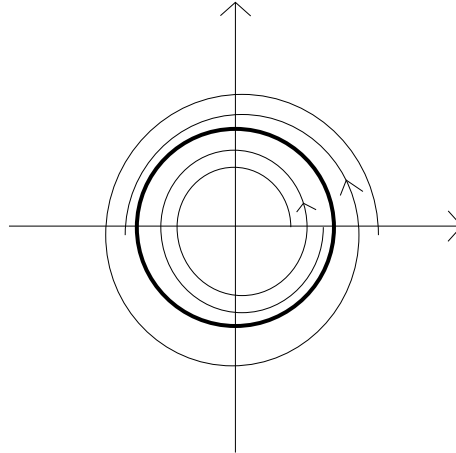


Abbildung 3.1: Anziehender Grenzzzykel

bzw. abstoßenden⁵

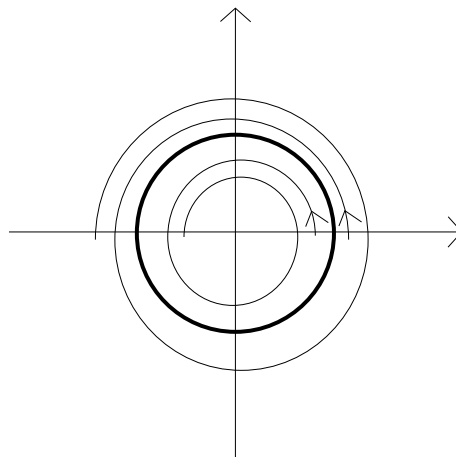


Abbildung 3.2: Abstoßender Grenzzzykel

Grenzzzykel. Durch die Pfeilspitzen soll in den beiden Grafiken die Laufrichtung auf der jeweiligen Teillösung gekennzeichnet sein. Der Grenzzzykel ist durch die fett gedruckte geschlossene Linie dargestellt.

⁴die beiden Teillösungen bewegen sich auf den Grenzzzykel zu

⁵die beiden Teillösungen bewegen sich vom Grenzzzykel weg

Mathematischer formuliert bedeutet dies folgendes:

Sei

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)} = \frac{Z(x, y)}{N(x, y)}$$

eine Differentialgleichung mit Strudelcharakter, d.h. $\exists i : i \in \mathbb{N}_0$ mit $D_i^6 \neq 0$. Unter Anwendung der Formel von Seite 404 bei [9], also mit Einführung von Polarkoordinaten, ergibt sich daraus eine Differentialgleichung der Form

$$r' = r \frac{Z \sin \varphi + N \cos \varphi}{Z \cos \varphi - N \sin \varphi},$$

wobei hier ' für die Ableitung nach φ steht und Z bzw. N ist Abkürzung für $Z(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ bzw. $N(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$.

Sei $\varrho(\varphi)_{\text{exakt}}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Nun führt man die stetige Funktion $\psi(r_0)_{\text{exakt}} = r_0 - \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$ ⁷ ein.

Ist die Funktion $\psi(r_0)_{\text{exakt}} > 0$, also $r_0 > \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$, so ist es offensichtlich, daß man zum Ursprung hin strudelt. Bei $\psi(r_0)_{\text{exakt}} < 0$ strudelt man von diesem weg.

Jede Nullstelle von $\psi(r_0)_{\text{exakt}}$ ist damit eine geschlossene Kurve und stellt einen Grenzzzykel dar. Dies führt zu

Definition 3.1 (Grenzzzykel). *Sei r' eine auf Polarkoordinaten transformierte Differentialgleichung mit Strudelcharakter und $\varrho(\varphi)_{\text{exakt}}$ eine dazugehörige Lösung. Dann werden die zu den Nullstellen der Funktion $\psi(r_0)_{\text{exakt}} = r_0 - \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$ gehörenden geschlossenen Kurven als Grenzzzykel bezeichnet.*

Bemerkung 3.2 (Grenzzzykelradius). *Der Grenzzzykelradius ist ein spezieller Startradius. Er stimmt mit der x-Koordinate des Schnittpunktes eines Grenzzykels mit der positiven x-Achse überein. Sollte man also mit einem Startpunkt S in einem Richtungsfeld das laufen beginnen, dessen r_0 einem Grenzzzykelradius entspricht, so bewegt man sich auf einer geschlossenen Kurve.*

3.2 Kriterium für die Existenz

Die Situation ist hier die folgende

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

⁶definiert wie in Satz 2.14

⁷da $\varrho(\varphi)_{\text{exakt}}$ als Lösung einer Differentialgleichung stetig ist, ist auch $\psi(r_0)_{\text{exakt}}$ stetig

mit einem Parameter $\epsilon \in \mathbb{R}$ und analytischer Abhängigkeit in $|x| < \epsilon_0$, $|y| < \epsilon_0$, $|\epsilon| < \epsilon_0$, d.h.

$$p(x, y, \epsilon) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} p_{\nu\mu}(\epsilon) x^\nu y^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2, \lambda \geq 0} p_{\nu\mu\lambda} x^\nu y^\mu \epsilon^\lambda$$

$$q(x, y, \epsilon) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} q_{\nu\mu}(\epsilon) x^\nu y^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2, \lambda \geq 0} q_{\nu\mu\lambda} x^\nu y^\mu \epsilon^\lambda$$

mit in $|x| < \epsilon_0$, $|y| < \epsilon_0$, $|\epsilon| < \epsilon_0$ kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Potenzreihen. Dann können wir die Strudelgrößen $D_n(\epsilon)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) berechnen, die in $|\epsilon| < \epsilon_0$ analytisch von ϵ abhängen. Sei $n_0 = n(\epsilon)$ der minimale Index mit $D_{n_0}(\epsilon) \neq 0$, wobei $n_0(\epsilon) = +\infty$ zugelassen ist.

Dann haben wir den

Satz 3.3 (Satz 1). *Es gebe ein endliches minimales $n_0(0)$ mit $D_{n_0(0)}(0) \neq 0$. Es gebe ein $\tilde{\epsilon} \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) - \{0\}$ und ein endliches minimales $n_0(\tilde{\epsilon})$, $n_0(\tilde{\epsilon}) < n_0(0)$ mit $D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) \neq 0$. Es sei*

$$D_{n_0(0)}(0) D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) < 0.$$

Dann existiert für die auf Polarkoordinaten transformierte Differentialgleichung $y' = \frac{(-x+p(x,y,\epsilon))}{(y+q(x,y,\epsilon))}$, nämlich

$$r' = r \frac{g_1(\varphi, \epsilon) + g_2(\varphi, \epsilon) + \dots}{1 + h_1(\varphi, \epsilon)r + h_2(\varphi, \epsilon)r^2 + \dots}$$

eine 2π - periodische Lösung, der Grenzzykel.

Beweis

Ohne Einschränkung sei

$$D_{n_0}(0) < 0, \text{ die Spirale dreht sich heraus,}$$

$$D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) > 0, \text{ die Spirale dreht sich herein.}$$

Für $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\epsilon_0, \kappa_1, \eta) = \{|\epsilon| < \epsilon_0, 0 < r_0 < \kappa_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi + \eta\}$ gilt die dort kompakt gleichmäßig absolutkonvergente Entwicklung

$$r(\varphi, r_0, \epsilon) = \sum_{\lambda, \mu \geq 0, \nu \geq 1} a_{\lambda\mu\nu} \epsilon^\lambda \varphi^\mu r_0^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(\varphi, \epsilon) r_0^\nu.$$

Es ist $r(0, r_0, \epsilon) = r_0$. Sei

$$\varrho(r_0, \epsilon) = r(2\pi, r_0, \epsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(2\pi, \epsilon) r_0^\nu.$$

$$\psi(r_0, \epsilon) = r_0 - \varrho(r_0, \epsilon),$$

so daß

$$\psi(r_0, 0) < 0, \psi(r_0, \tilde{\epsilon}) > 0, 0 < r_0 < \kappa_1,$$

ist. Insbesondere gibt es dann, aufgrund der Stetigkeit von $\psi(r_0, \epsilon)$ in r_0 einen Punkt $(r_0^*, \tilde{\epsilon})$ mit $\psi(r_0^*, \tilde{\epsilon}) = 0$ und $0 < |r_0^*| < \kappa_1$.

□

3.3 Eine praktische Methode der Suche

Im folgenden Abschnitt soll nun davon ausgegangen werden, daß die betrachtete Schar von Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

so konstruiert ist, daß für $\epsilon = 0$ ein endliches $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $D_{n_0(\epsilon)}(\epsilon) = D_{n_0(0)}(0) \neq 0$.

Es gebe ein $\tilde{\epsilon}$, $|\tilde{\epsilon}| \leq \epsilon_{\max}$ ⁸, so daß $D_{n_0(0)}(\tilde{\epsilon})$ ⁹ $D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) < 0$, wobei $n_0(\tilde{\epsilon}) < n_0(0)$ ist. Die bereits in Abschnitt 3.2 dargestellte Situation liegt also vor.

⁸siehe hierzu auch Abschnitt 3.5

⁹ $D_{n_0(0)}(0) = D_{n_0(0)}(\tilde{\epsilon})$

Desweiteren seien die Funktionen

$$r(\varphi, r_0, \epsilon) = \omega_1(\varphi)r_0 + \omega_2(\varphi)r_0^2 + \dots$$

eine Approximation der Lösung der Differentialgleichung, sowie

$$\psi(r_0) = r(0, r_0, \epsilon) - r(2\pi, r_0, \epsilon) = r_0 - r(2\pi, r_0, \epsilon) = C_1 r_0 + C_2 r_0^2 + \dots$$

eine Funktion, welche den Abstand zwischen einem Startpunkt S auf der x-Achse mit den Polarkoordinaten $(r_0, \varphi = 0)$ und einem Endpunkt E auf der x-Achse mit den Polarkoordinaten $(r_1, \varphi = 2\pi = 0)$ mißt, wie bei Frommer [9] auf Seite 404 definiert, bekannt.

Nach dem Kapitel 3 der Arbeit von Albrecht [12], der unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen die Gleichwertigkeit von $D_i = 0 \forall i$ und $C_i = 0 \forall i$ gezeigt hat, liegt die Vermutung einer Gleichwertigkeit auch ohne diese Voraussetzungen nahe.

Nach Satz 3.3 des letzten Abschnittes liegt für $\tilde{\epsilon}$, in einem Intervall $(0, \kappa)$, ein Vorzeichenwechsel der Funktion $\psi(r_0)$ vor.

Damit besitzt, aufgrund der Stetigkeit, $\psi(r_0)$ in diesem Intervall eine Nullstelle, d.h. die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \tilde{\epsilon})}{y + q(x, y, \tilde{\epsilon})}$$

einen Grenzzykel.

Für eine praktische Methode diesen Grenzzykel zu suchen, muß es also das Ziel sein, die im Intervall $(0, \kappa)$ liegende Nullstelle der Funktion $\psi(r_0)$ zu finden. Dies ist jedoch aus mehreren Gründen nicht so leicht möglich:

1. Das erste Problem, daß sich bei der praktischen Umsetzung des eben angedachten Verfahrens auftut ist die explizite Darstellung der Approximation einer Lösung. Frommer sagt auf Seite 403 in [9] lediglich aus, daß alle Näherungen, welche man durch die Methode der sukzessiven Approximation erhält, folgende analytische Form haben:

$$r = r_0\omega_1 + r_0^2\omega_2 + r_0^3\omega_3 + \dots$$

Dabei geht er aber nicht näher auf die Abhängigkeit der ω 's von der eigentlichen Differentialgleichung ein.

2. Ein weiteres Problem ist die Tatsache, daß Maple, mit dem in dieser Arbeit ein für die Suche nach Grenzzykel brauchbarer Algorithmus realisiert werden soll, im Zusammenhang mit Differentialgleichungen nicht mit Polarkoordinaten umgehen kann, d.h. die Laufstrecke, welche sich bei unseren Überlegungen durch den Phasenwinkel 2π ausgezeichnet hat, muß jetzt durch einen Zeitpunkt t beschrieben werden. Allerdings ist das zu 2π adäquate t für jeden Startpunkt den man wählt verschieden, so daß sich der Rechenaufwand den man für die letztendliche Suche eines Grenzzykel hätte potenzieren würde - falls man überhaupt einmal die richtige Größenordnung für t kennt. Also ist es mit den in Maple angebotenen Approximationsverfahren¹⁰, nicht bzw. nur mit sehr großem Rechenaufwand möglich genau 2π zu laufen, um so eine exakte Aussage über den Funktionswert von $\psi(r_0)$ treffen zu können.
3. Eine letzte Hürde die noch überwunden werden muß, ist das Problem die Nullstelle der Funktion $\psi(r_0)$ ¹¹ im Intervall $(0, \kappa)$ zu finden. Diese Schwierigkeit kann man jedoch durch Intervallschachtelung bzw. Bisektionsverfahren in den Griff bekommen. Wie leicht ersichtlich ist handelt es sich bei $\psi(r_0)$ um eine stetige Funktion. So ist es also nur noch das Problem zwei Punkte $S_1 : r_0(S_1) \in (0, \kappa)$ und $S_2 : r_0(S_2) \in (0, \kappa)$ auf der x-Achse mit der Eigenschaft: $\psi(r_0(S_1))\psi(r_0(S_2)) < 0$ zu finden, da sich dann zwischen diesen beiden ja eine Nullstelle der Funktion $\psi(r_0)$ befinden muß. Hat man ein solches Punktepaar gefunden, so wird das Intervall $[r_0(S_1), r_0(S_2)]$ halbiert und man erhält einen neuen Punkt S_3 . Anschließend ermittelt man, ob $\psi(r_0(S_3)) > 0$ oder $\psi(r_0(S_3)) < 0$ ist. Abhängig von diesem Vorzeichen wird dann das neue Intervall $[r_0(S_i), r_0(S_3)]$ ($i = 1, 2$) gebildet, wobei weiterhin gelten muß $\psi(r_0(S_i))\psi(r_0(S_3)) < 0$. Mit diesem Verfahren ist es dann mit dem entsprechenden Zeit- und Rechenaufwand möglich die hier gesuchte Nullstelle der Funktion $\psi(r_0)$ beliebig weit einzugrenzen, ja nach dem Intervallschachtelungsprinzip sogar exakt zu bestimmen.

Aufgrund der eben genannten Schwierigkeiten ist das oben angedachte Verfahren in der Praxis nicht zu gebrauchen. Wie man aber auch erkennen kann stellen nicht alle Probleme unüberwindbare Hürden dar, und so kann man, in etwas modifizierter Form, aus der obigen Idee doch noch eine in der Praxis verwendbare Vorgehensweise gewinnen.

Man umgeht die unter 1. und 2. beschriebenen Probleme einfach, indem man nicht versucht genau einen Umlauf zu machen und dann die Approximation einer Lösung auswertet, sondern man läßt Maple die Differentialgleichung grafisch darstellen und läuft hinreichend oft um den Ursprung, so daß man anhand des Bildes eindeutig feststellen kann ob man auf den Ursprung zu oder von diesem weg strudelt.

¹⁰es handelt sich hierbei z.B. um rkf45 (Runge-Kutta-Verfahren)

¹¹das explizite Aussehen dieser Funktion ist aufgrund der fehlenden Approximation ja nicht bekannt

In dem modifizierten Verfahren sucht man jetzt also zwei Startpunkte S_1 und S_2 , die unterschiedliches Verhalten aufweisen, d.h. daß die von S_1 und S_2 erzeugten Kurven entweder aufeinander zulaufen oder sich voneinander entfernen, was der bisherigen Bedingung $\psi(r_0(S_1))\psi(r_0(S_2)) < 0$ entspricht. Hat man ein Punktepaar gefunden, welches dieser Bedingung genügt, so kann man mit der bereits oben beschriebenen Intervallschachtelung beginnen, um so die Nullstelle der Funktion $\psi(r_0)$ bzw. den positiven Schnittpunkt des Grenzzykels mit der x-Achse zu erhalten.

Auch bei diesem Verfahren hängt die Genauigkeit mit der man einen Grenzzykel bestimmen kann von der vorhandenen Rechenzeit und -kapazität ab. Bedenken sollte man hierbei, daß die Umlaufgeschwindigkeit des Strudel immer geringer wird je näher man an den Grenzzykel gelangt. Hier braucht man also eine viel größere t , um das Verhalten des Strudels eindeutig erkennen zu können.

3.4 Beispiele und Fallstudien

Dieser Abschnitt soll einige Beispiele für abstoßende und anziehende Grenzzykel präsentieren. Hierbei soll zuerst auf die von Frommer betrachtete Schar von Differentialgleichungen, welche ein Beispiel für abstoßende Grenzzykel ist, eingegangen werden.

Danach sind einige eigene Beispiele abgebildet, wobei auch hier zuerst die Beispiele für abstoßende und zum Abschluß dieses Abschnittes dann die Beispiele für anziehende Grenzzykel dargestellt sind.

Der Charakter eines Grenzzykels ist daran zu erkennen, ob sich die von den Startpunkten erzeugten Bahnen aufeinander zu- oder wegbewegen. In der Grafik selbst ist dies durch den „verwaschenen“ Bereich bzw. durch die deutliche Abschlußlinie¹² zu sehen. Dabei bewegt sich die Kurve immer in die Richtung der Abschlußlinie bzw. vom „verwaschenen“ Bereich weg.

Angemerkt sei an dieser Stelle noch, daß alle in diesem Abschnitt getroffenen Aussagen nur in einer begrenzten Umgebung der Unbestimmtheitsstelle zutreffend sind.

¹²die von Maple zuletzt gezeichnete Linie ist am deutlichsten zu erkennen

3.4.1 Frommers Beispiel für abstoßende Grenzzykel

Frommer geht in seiner Arbeit [9] bei der Betrachtung von Grenzzykeln nur auf die folgende Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x+x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$$

ein.

Diese Differentialgleichung besitzt keinen Grenzzykel. In den Abbildungen 3.3 und 3.4 kann man erkennen, daß das Verhalten um die Unbestimmtheitsstelle gleich ist. Die Differentialgleichung „strudelt“ nach außen, bis sie bei einem Radius von ca. 0,36 im „Chaos“ ihre Gleichmäßigkeit verliert (vgl. Abbildung 3.4).

Strudelgröße $D_1 = 0$

Strudelgröße $D_2 = -\frac{7}{15}$

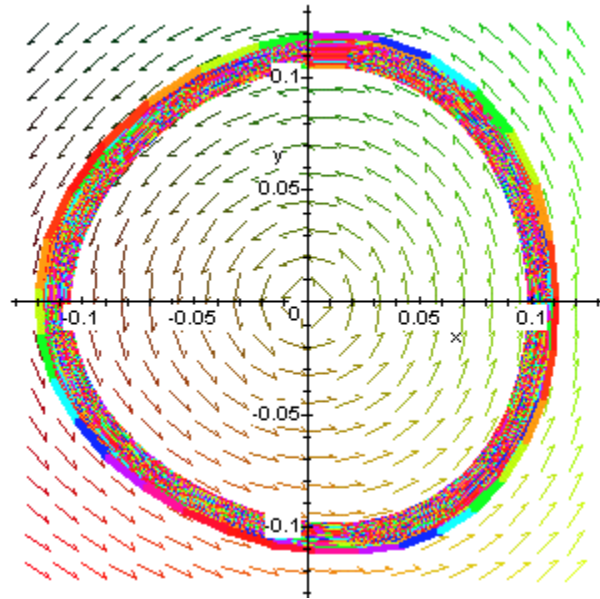


Abbildung 3.3: Startpunkt (0.1 / 0)

Durch Einführung eines ϵ erhält die Differentialgleichung die erweiterte Form

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}.$$

Hier ist Strudelgröße $D_1 = \frac{\epsilon}{3}$.

Für verschiedene positive ϵ treten in diesem Fall aufgrund des vorliegenden Vorzeichenwechsels von der ersten nichtverschwindenden Strudelgröße auf die nächste Nichtverschwindende Grenzzykel an verschiedenen Stellen auf. Diese werden im Folgenden betrachtet.

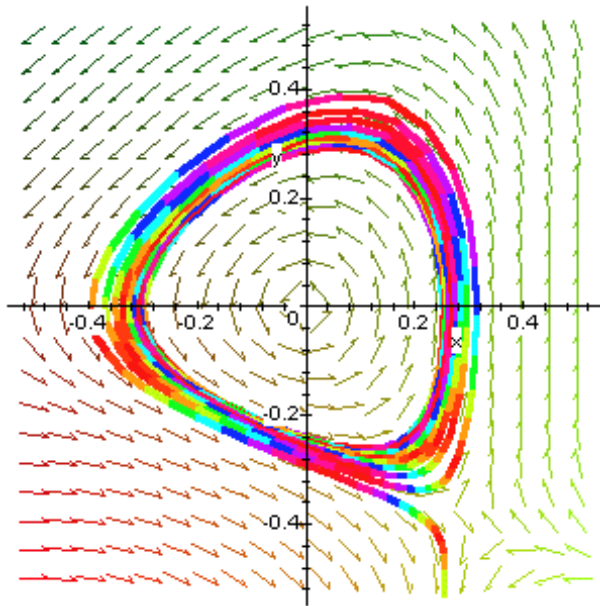


Abbildung 3.4: Startpunkt (0.25 / 0)

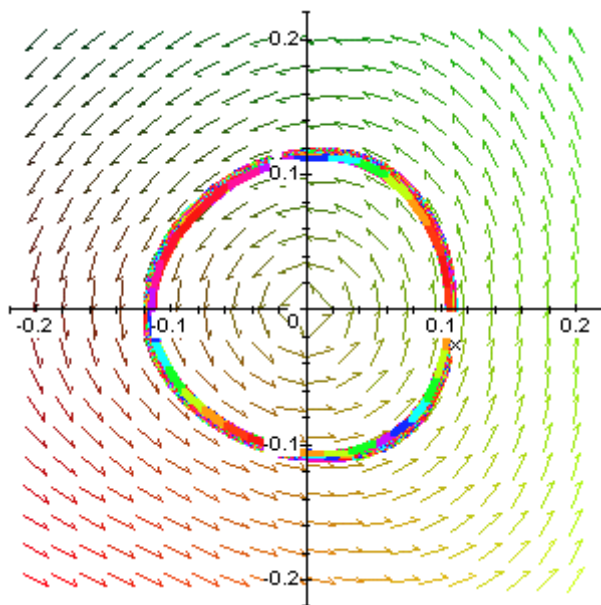


Abbildung 3.5: Startpunkt (0.11 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{50}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{150}.$$

In Abbildung 3.5 sieht man, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.11$ nähert. Dieses Verhalten liegt auch noch für $r_0 = 0.12$ vor, doch ist es in der Grafik auch mit stark erhöhtem Rechenaufwand kaum zu erkennen.

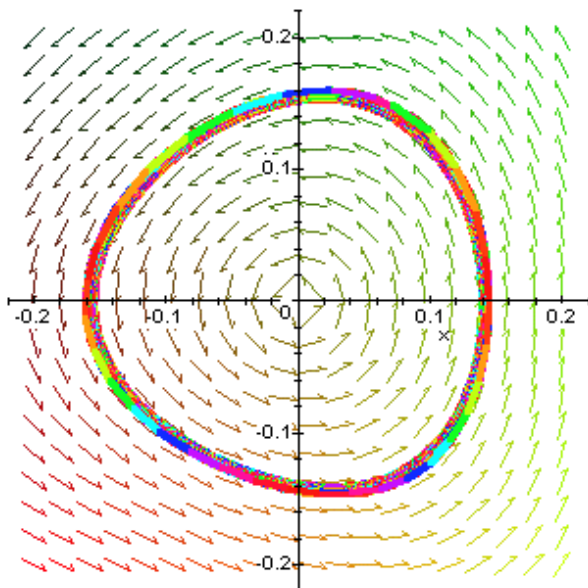


Abbildung 3.6: Startpunkt (0.14 / 0)

Dagegen läßt Abbildung 3.6 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.14$ entfernt.

Somit liegt der Grenzzykelradius bei $r_0 \approx 0.13$.

Für

$$\epsilon = \frac{1}{20}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{60}.$$

Gegenüber dem vorhergehenden Beispiel kann man in Abbildung 3.7 um einiges deutlicher erkennen, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.18$ nähert.

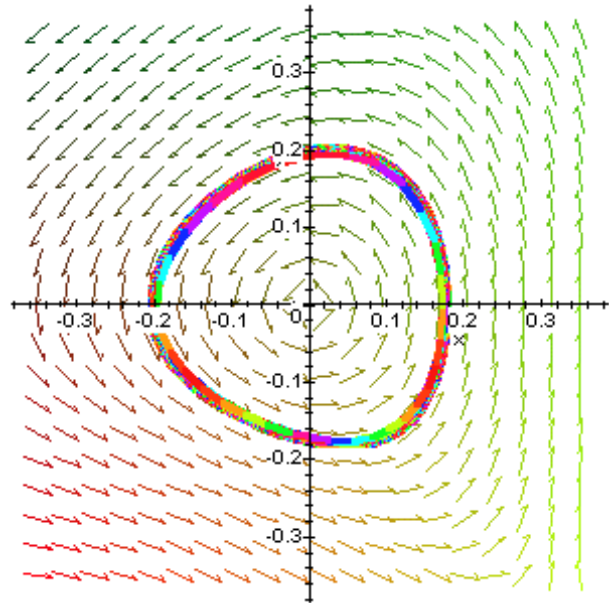


Abbildung 3.7: Startpunkt (0.18 / 0)

Wohingegen in Abbildung 3.8 der Strudel sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.20$ entfernt.

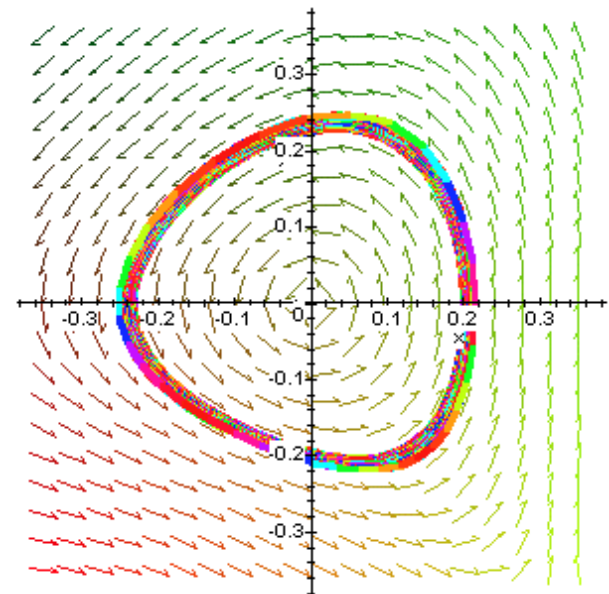


Abbildung 3.8: Startpunkt (0.20 / 0)

Der Grenzzykelradius liegt also bei $r_0 \approx 0.19$.

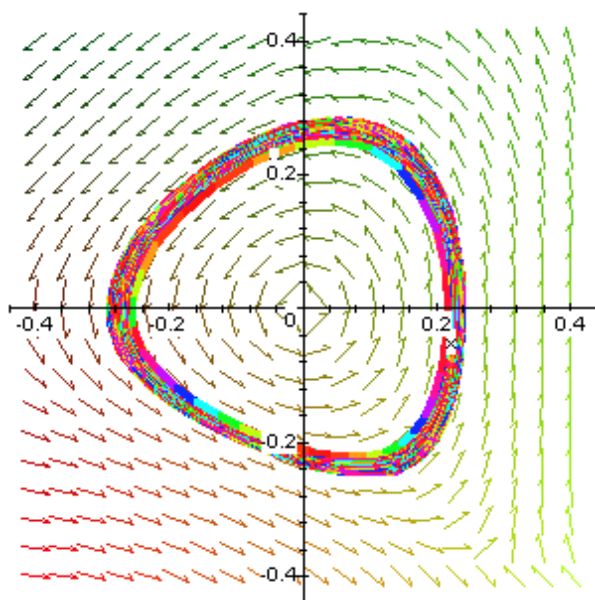


Abbildung 3.9: Startpunkt (0.24 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{10}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{30}.$$

Wieder kann man in Abbildung 3.9 deutlich erkennen, daß sich der Strudel dem Ursprung für Startradien $r_0 \leq 0.24$ nähert.

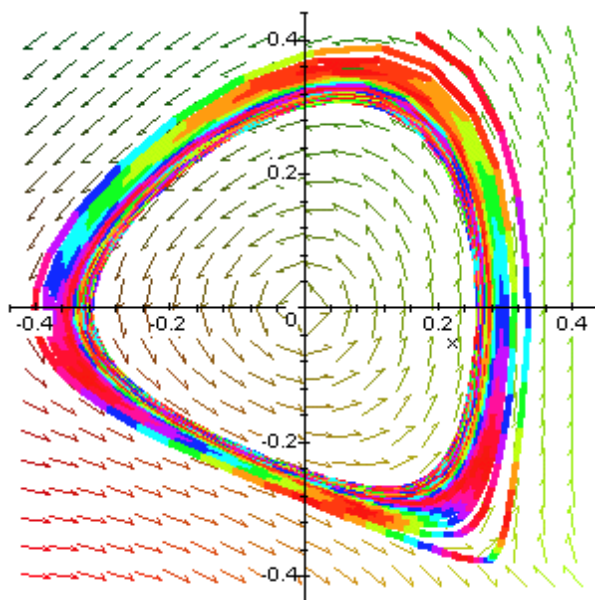


Abbildung 3.10: Startpunkt (0.26 / 0)

Und für Startradien $r_0 \geq 0.26$ das entgegengesetzte Verhalten aufweist (vgl. Abbildung 3.10).

Bei ungefähr $r_0 \approx 0.25$ befindet sich der Grenzzykleradius.

Für

$$\epsilon = \frac{1}{5}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{15}.$$

Sehr schön kann man in Abbildung 3.11 diesmal die Bewegung des Strudels in Richtung der Unbestimmtheitsstelle für Startstrahlen $r_0 \leq 0.3102$ erkennen.

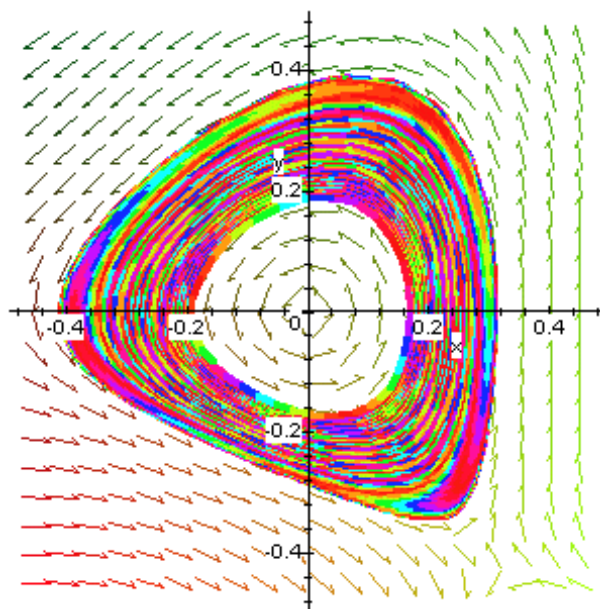


Abbildung 3.11: Startpunkt (0.3102 / 0)

Für Startstrahlen $r_0 \geq 0.3103$ in Abbildung 3.12 sieht man sogar das Ende des strudeligen Verhaltens. Nach mehreren Umläufen verliert der Graph die Gleichmäßigkeit und verschwindet im „Chaos“.

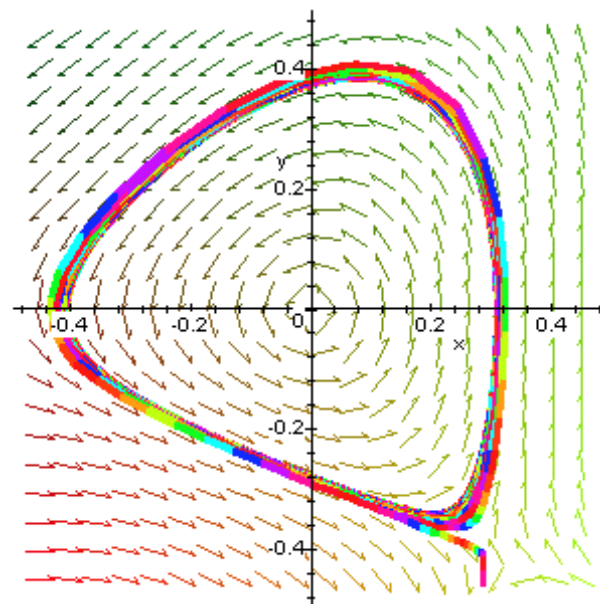


Abbildung 3.12: Startpunkt (0.3103 / 0)

Man kann den Grenzykelradius diesmal ziemlich genau angeben, er liegt bei $r_0 \approx 0.31025$.

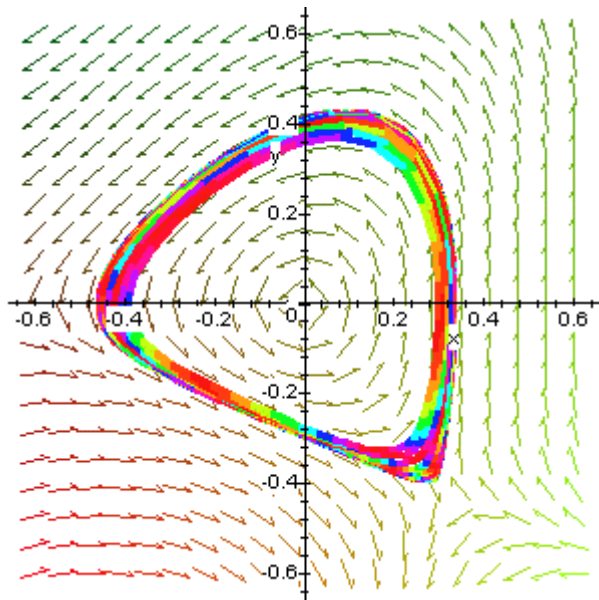


Abbildung 3.13: Startpunkt (0.3335397747 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{13}{48}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{15}.$$

In Abbildung 3.13, welche den Graph für Startradien $r_0 \leq 0.3335397747$ darstellt strudelt dieser klar zur Unbestimmtheitsstelle hin.

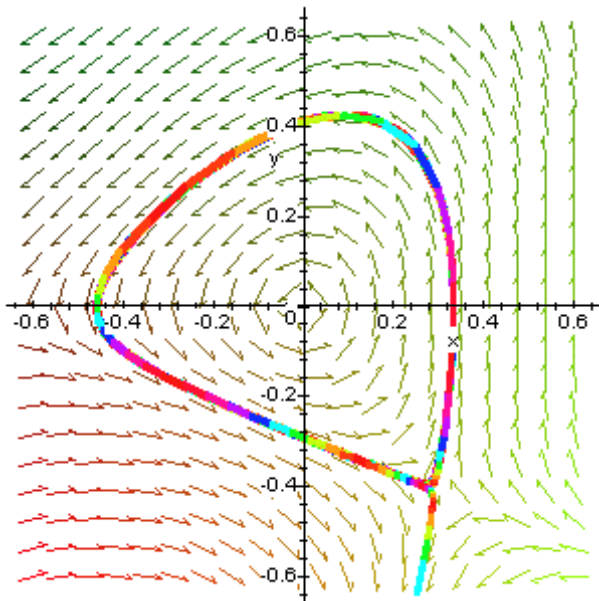


Abbildung 3.14: Startpunkt (0.3335397748 / 0)

In Abbildung 3.14 für Startradien $r_0 \geq 0.3335397748$ vollzieht der Graph gerade noch einen erkennbaren Umlauf, ehe er sein gleichmäßiges Verhalten verliert.

Der Grenzzykelradius liegt somit bei $r_0 \approx 0.33353977475$. Dies ist auch der letzte Entdeckbare, für größere ϵ konnte kein Grenzzykel mehr gefunden werden.

Für

$$\epsilon = \frac{9}{24}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{3}{24}.$$

Unverändert erkennt man in Abbildung 3.15 für Startradien $r_0 \leq 0.36006$ das dem Ursprung zustrebende Verhalten.

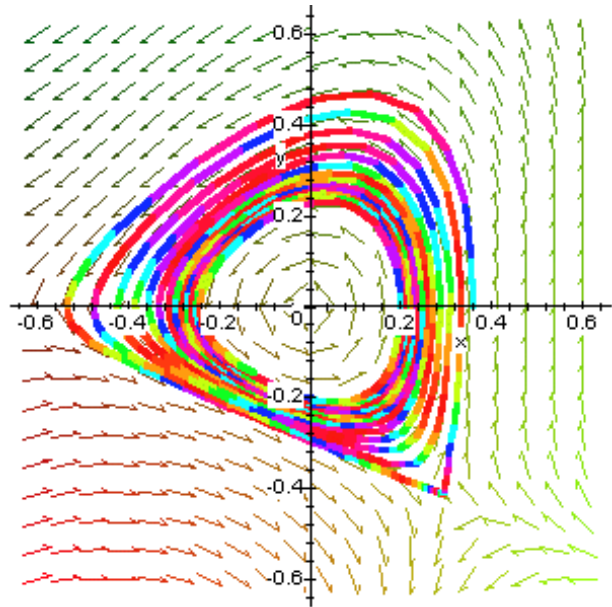


Abbildung 3.15: Startpunkt (0.36006 / 0)

Dagegen kann in Abbildung 3.16 für Startradien $r_0 \geq 0.36007$ leider keine Aussage mehr getroffen werden. Der Graph erreicht keinen ganzen Umlauf mehr, er verläßt schon zuvor die Strudelbahn.

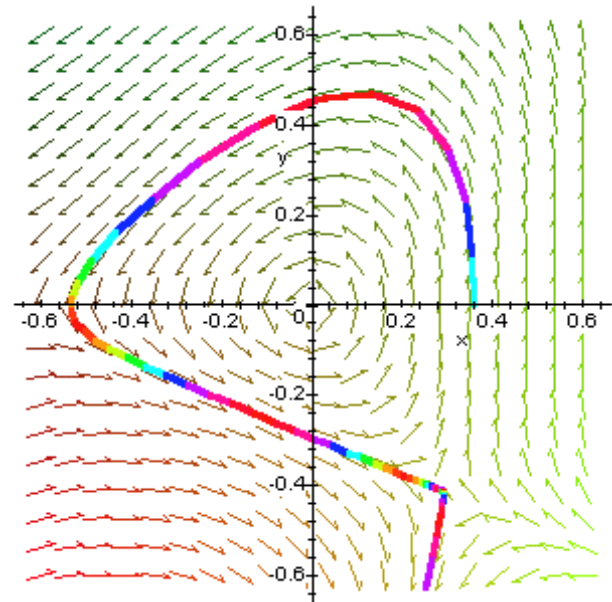


Abbildung 3.16: Startpunkt (0.36007 / 0)

Da das Verhalten für Startradien $r_0 \geq 0.36007$ nicht dem benötigten Strudeln entspricht, kann in diesem Beispiel und auch für $\epsilon \geq \frac{9}{24}$ keine Aussage bezüglich Grenzzykeln gemacht werden.

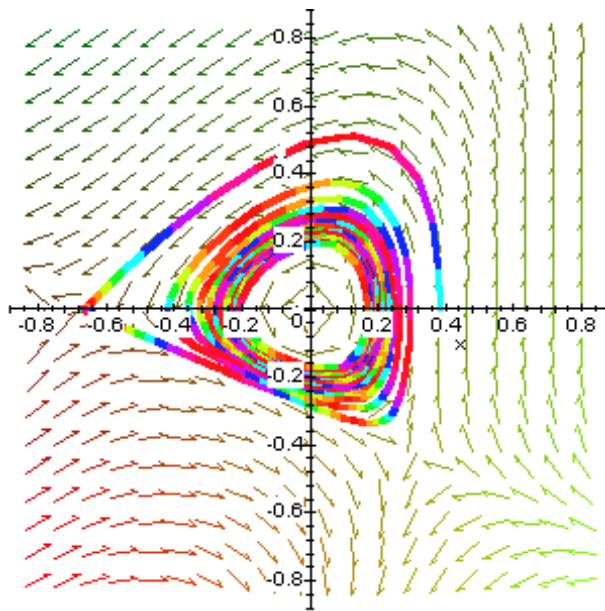


Abbildung 3.17: Startpunkt (0.3826 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{2}$$

erhält man als erste nicht verschwin-
dende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{6}.$$

In Abbildung 3.17 strudelt der Graph
für Startradien $r_0 \leq 0.3826$ wie
erwartet zur Unbestimmtheitsstelle
hin.

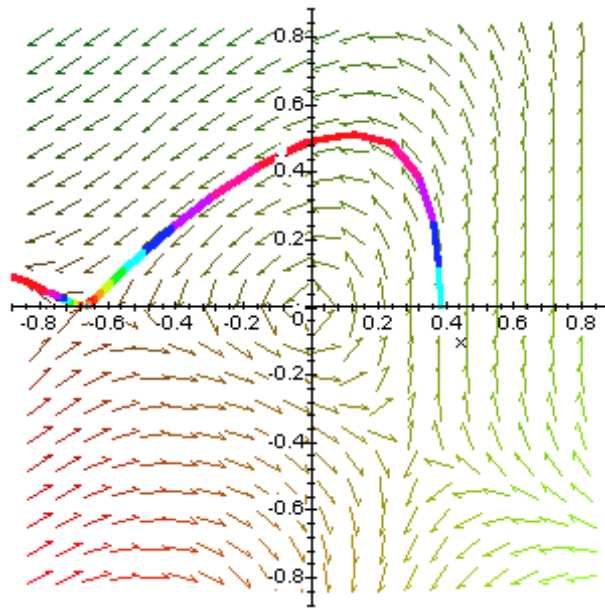


Abbildung 3.18: Startpunkt (0.3827 / 0)

Wie schon am Ende des vorhergehen-
den Beispiels festgestellt wurde, kann
man in Abbildung 3.18 für Startradi-
en $r_0 \geq 0.3827$ nichts über Grenzzy-
kel aussagen.

3.4.2 Eigene Beispiele für abstoßende Grenzzykel

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y+x^6y}{y+xy^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = -\frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_2 = -\frac{\epsilon}{5}.$$

Für $\epsilon = -\frac{1}{4}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße auf die nächste Nichtverschwindende, und es kann ein Grenzzykel existieren.

In Abbildung 3.19 sieht man, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.632$ nähert.

Dagegen läßt Abbildung 3.20 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.633$ entfernt.

Somit liegt der Grenzzykelradius bei $r_0 \approx 0.6325$.

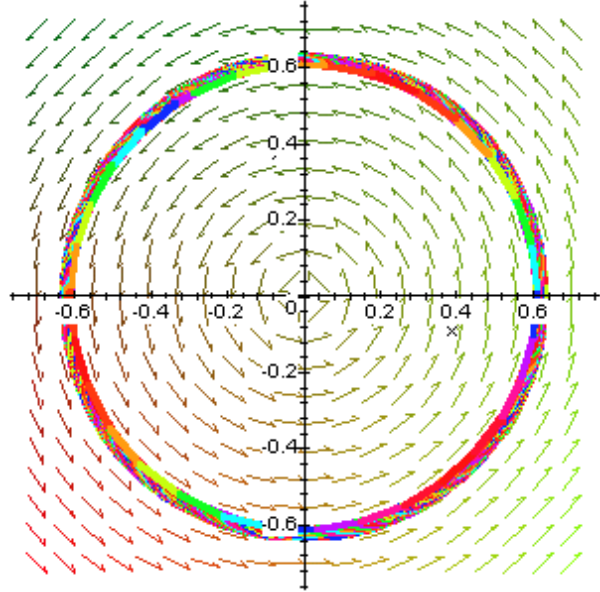


Abbildung 3.19: Startpunkt (0.632 / 0)

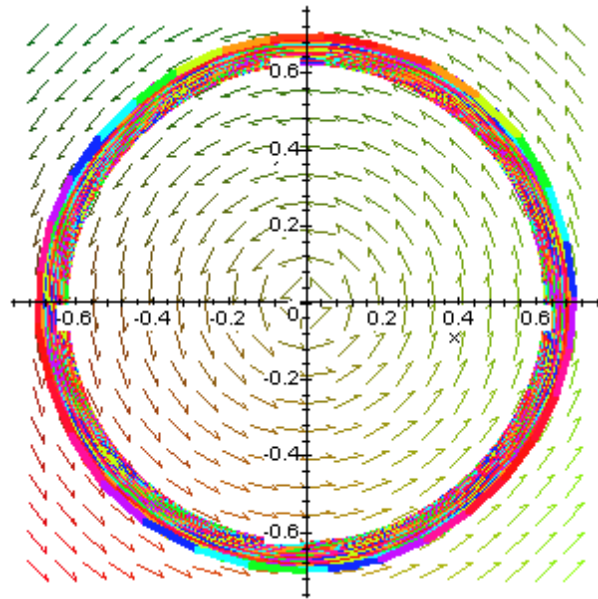


Abbildung 3.20: Startpunkt (0.633 / 0)

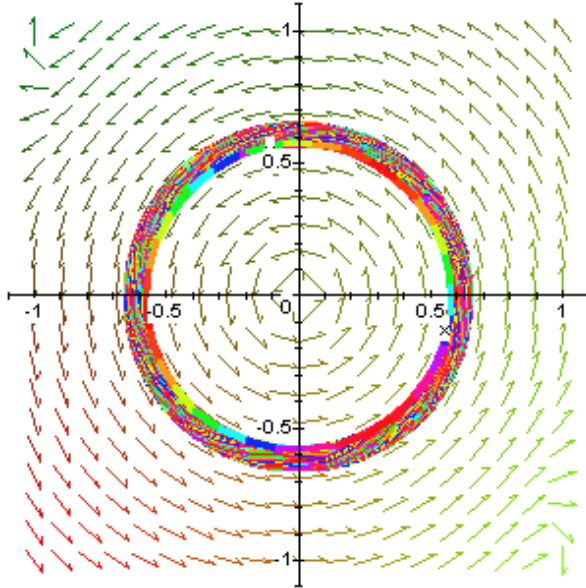


Abbildung 3.21: Startpunkt (0.65 / 0)

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y^3+x^8y}{y+x^3y^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ und $D_4 = -\frac{1}{9}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_3 = -\frac{3\epsilon}{35}.$$

Für $\epsilon = -\frac{1}{2}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel, und es existiert möglicherweise ein Grenzzykel.

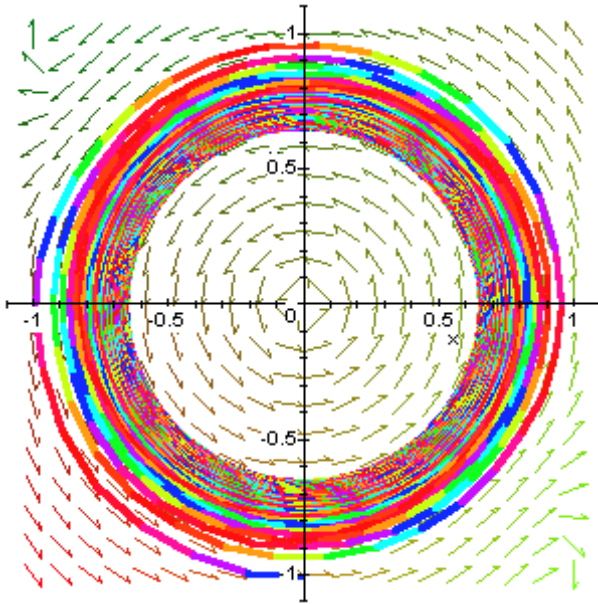


Abbildung 3.22: Startpunkt (0.66 / 0)

In Abbildung 3.21 sieht man, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.65$ nähert. Dagegen läßt Abbildung 3.22 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.66$ entfernt.

Somit liegt der Grenzzykelradius bei $r_0 \approx 0.655$.

3.4.3 Eigene Beispiele für anziehende Grenzzykkel

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y-x^6y}{y+xy^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = \frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_2 = -\frac{\epsilon}{5}.$$

Für $\epsilon = \frac{1}{4}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße, und es kann ein Grenzzykel existieren.

In den Abbildungen 3.23 und 3.24 kann man sehr schön erkennen, daß sich der Strudel von beiden Seiten einer geschlossenen Kurve nähert, dem Grenzzykel.

Der Grenzzykel hat also einen Startradius von $r_0 \approx 0.63$.

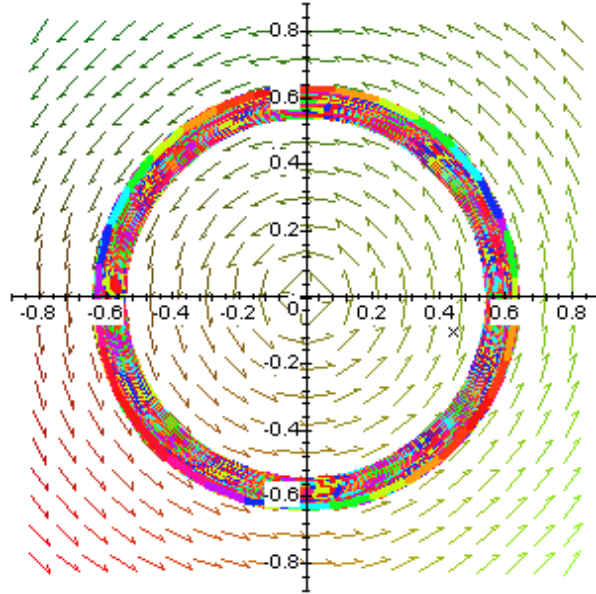


Abbildung 3.23: Startpunkt (0.55 / 0)

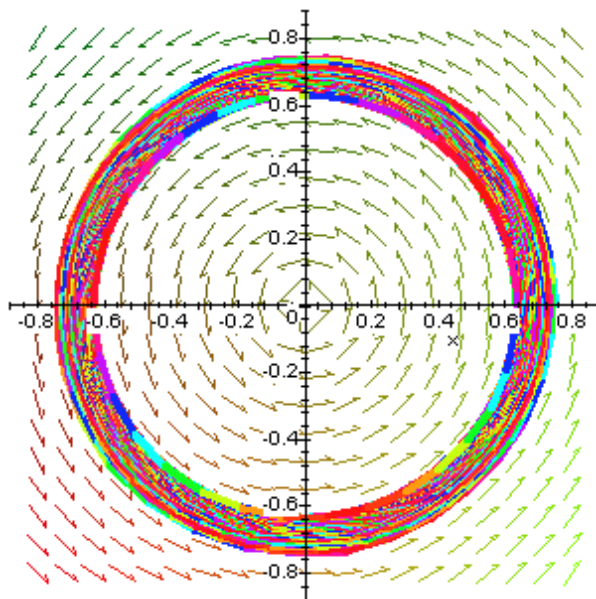


Abbildung 3.24: Startpunkt (0.75 / 0)

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2y-x^6y}{y+xy^2}$$

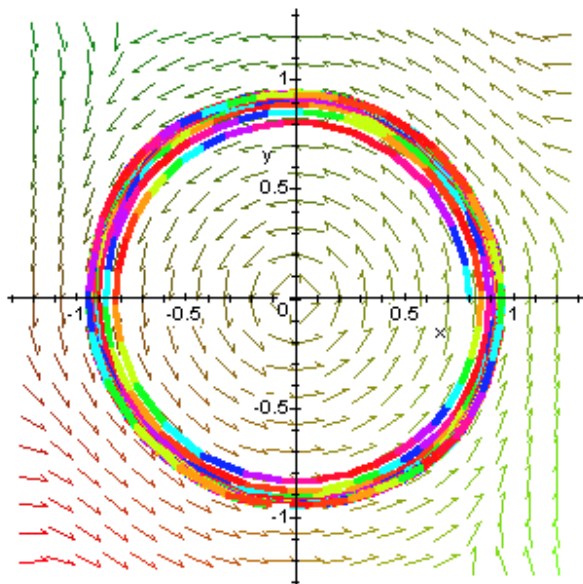


Abbildung 3.25: Startpunkt (0.8 / 0)

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = \frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = -\frac{\epsilon}{3}.$$

Für $\epsilon = \frac{1}{4}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße, und es kann ein Grenzzykel existieren.

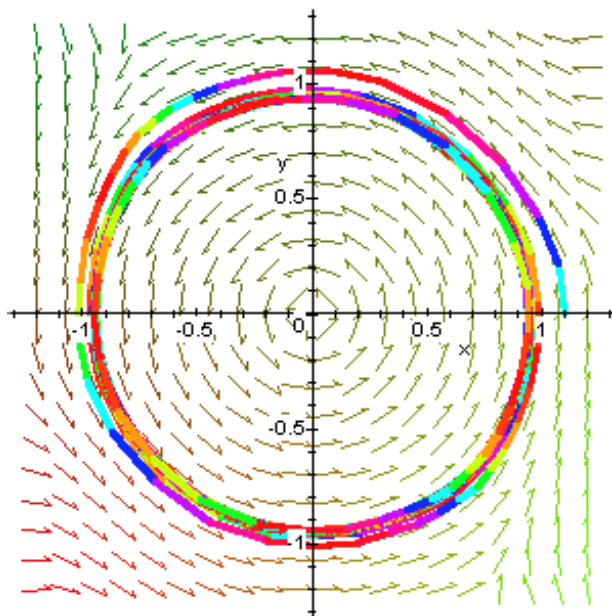


Abbildung 3.26: Startpunkt (1.1 / 0)

Wie zuvor kann man auch in den Abbildungen 3.25 und 3.26 gut sehen, daß sich der Strudel von beiden Seiten einer geschlossenen Kurve nähert, dem Grenzzykel.

Dieser schneidet die x-Achse bei ungefähr bei $x = 0.95$.

3.5 Betrachtung des Nullstellengebildes von $\psi(r_0, \epsilon)$

In diesem Abschnitt soll nun auf das Nullstellengebilde der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$ eingegangen werden, d.h. man beschränkt sich nicht, wie bei der praktischen Methode, auf das Aufsuchen eines Grenzzykels für ein bestimmtes ϵ , sondern man sucht zu einer Schar von Differentialgleichungen der Form

$$y' = \frac{(-x - p(x, y, \epsilon))}{(y + q(x, y, \epsilon))}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

die zugehörige Menge von Grenzzykeln. Man kann annehmen, daß jeder Grenzzykel genau durch ein Wertepaar (r_0, ϵ) charakterisiert ist, so daß mit Hilfe der Menge all dieser Tupel eine Aussage über das Aussehen des Nullstellengebildes der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$ gemacht werden kann.

Dazu wird die von Frommer in seiner Arbeit [9] verwendete Schar von Differentialgleichungen, welche die Form

$$y' = \frac{(-x + (1 + \epsilon)x^2 + 2xy - y^2)}{(y - 2xy + y^2)}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

hat, betrachtet.

Bestimmt man, wie im vorherigen Abschnitt bereits geschehen, mit dem in der Arbeit von Höhn [11] vorgestellten Maple-Programm, die eben angesprochenen Tupel (r_0, ϵ) , so erhält man folgende Wertepaare:

ϵ	r_0
0	$\nexists$ Grenzzykel, d.h. vermutlich 0
$\frac{1}{50}$	0.13
$\frac{1}{20}$	0.19
$\frac{1}{10}$	0.26
$\frac{1}{5}$	0.31
$\frac{13}{48} \approx 0.27$	0.33
$\frac{9}{24} = 0.375$	$\nexists$ Grenzzykel, d.h. vermutlich zu weit von Null entfernt ($r_0 \approx 0.36$, falls Grenzzykel existent wäre)

Diese lassen sich folgendermaßen grafisch veranschaulichen:

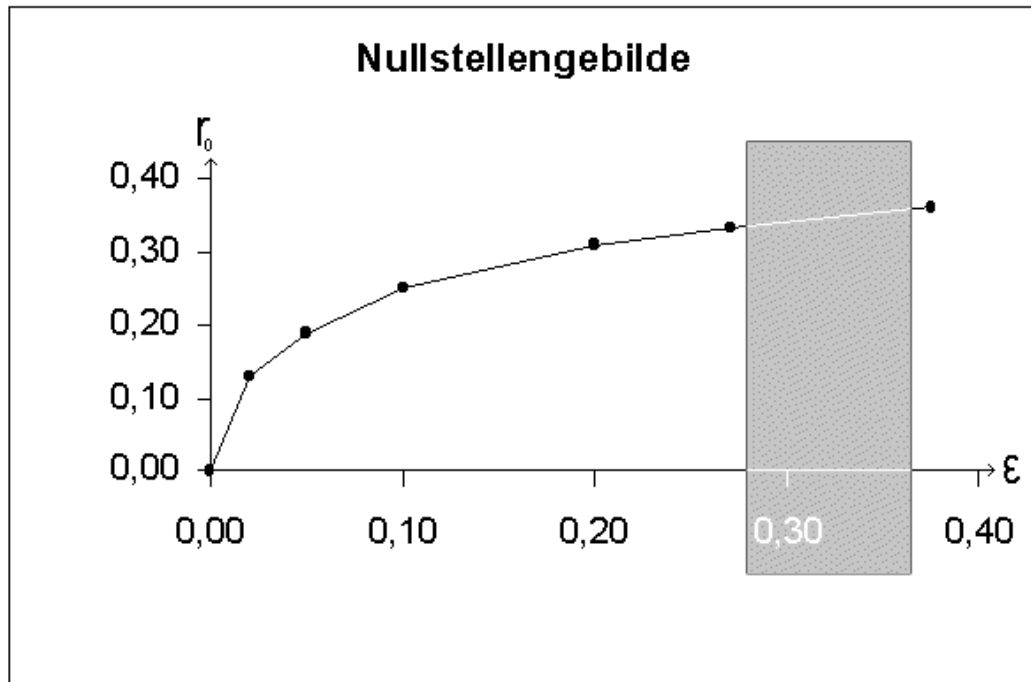


Abbildung 3.27:

Aus Abbildung 3.27 lassen sich zwei wichtige Aussagen ablesen:

1. Sei $\epsilon > 0$:

$$\exists \epsilon_{max} \in \mathbb{R} : \begin{cases} \forall \epsilon \leq \epsilon_{max} : \exists \text{ Grenzzykel} \\ \forall \epsilon > \epsilon_{max} : \nexists \text{ Grenzzykel} \end{cases}$$

Es hat sich bei der von Frommer betrachteten Schar von Differentialgleichungen gezeigt, daß bei einer Wahl von $\epsilon \geq \frac{9}{24}$, unter Berücksichtigung der Rechen- und Zeichengenauigkeit, kein Grenzzykel mehr gefunden werden kann. Bei einer Wahl von ϵ so, daß $0 < \epsilon \leq \frac{13}{48}$ gilt, existiert für das jeweilige ϵ ein Grenzzykel. Nun muß nur noch der in der Grafik grau gefärbte Bereich untersucht werden.

Für das Frommerbeispiel befindet sich in diesem grau unterlegten Bereich, also im Intervall $[\frac{13}{48}, \frac{9}{24})$, das oben in der Aussage angesprochene ϵ_{max} .

2. Die Grafik zeigt außerdem, daß bei einer Annäherung von ϵ an 0, sich auch r_0 0 annähert, also der Grenzzzykel sich im Ursprung zusammenzieht, d.h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0.$$

Aufgrund des Rechen- und Zeitaufwands konnte leider nur noch das zu $\epsilon = \frac{1}{50}$ gehörige r_0 bestimmt werden, so daß die letzte Verbindung zwischen diesem Punkt und dem Ursprung und damit die Aussage $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0$ als Vermutung angesehen werden muß, die allerdings mit der von Frommer in [9] getroffenen Aussage übereinstimmt.

Für diese Vermutung spricht desweiteren die Kombination aus der Tatsache der Nichtexistenz eines Grenzzzykel für $\epsilon = 0$ (vgl. Abbildung 3.4) und dem in Abbildung 3.4 festzustellendem Faktum, daß der Strudelcharakter des für $\epsilon = 0$ entstehenden „reinen“ Strudels mit dem, vorher außerhalb des Grenzzzykels liegenden, Charakter¹³ übereinstimmt¹⁴.

In Bemerkung 3.4 soll später mit Hilfe der impliziten Funktionen ein Beweisversuch für die Vermutung unternommen werden.

Interessant wäre es an dieser Stelle, die eben für das Frommerbeispiel getroffenen beiden Aussagen über das Nullstellengebilde von $\psi(r_0, \epsilon)$ zu verallgemeinern, um so etwas über das Aussehen von $\psi(r_0, \epsilon)$ für eine beliebige Schar der Form

$$y' = \frac{(-x - p(x, y, \epsilon))}{(y + q(x, y, \epsilon))}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

treffen zu können.

Dies müßte aber noch einmal eingehender untersucht werden, wobei die Vermutung nahe liegt, daß für jede beliebige Schar von Differentialgleichungen ein ϵ_{max} existiert und auch Aussage $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0$ gilt, so daß sich am qualitativen Aussehen des Nullstellengebildes im Vergleich zu dem hier vorgestellten nicht viel ändern dürfte.

Abschließend sei in diesem Kapitel noch einmal auf die in Punkt 2 aufgestellte Vermutung $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0$ eingegangen. Es soll ein Versuch aufgezeigt werden, in dem angestrebt wird aus der dort angesprochenen Vermutung eine Aussage zu machen.

Bemerkung 3.4. *Um aus dieser Vermutung eine Aussage machen zu können muss mit impliziten Funktionen gearbeitet werden (siehe hierzu §8 [3] Band 2). Genauer gesagt ist es nötig zu zeigen, daß $\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon)|_{r_0=0, \epsilon=0} \neq 0$ ¹⁵ ist.*

¹³hiermit sei in diesem Fall die Durchlaufrichtung des Strudels gemeint - vom Ursprung weg oder zu diesem hin

¹⁴vergleiche hierzu z.B. Abbildung 3.12

¹⁵ $\psi(r_0, \epsilon)$ definiert wie im Beweis von Satz 3.3

Es soll jetzt der bei erfolgreicher Beweisführung resultierende Satz mit dem dazugehörigen Beweisansatz vorgestellt werden.

Satz 3.5 (Satz 2). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.3 aus Abschnitt 3.2 erfüllt. Zusätzlich nehmen wir ohne Einschränkung an, daß $\tilde{\epsilon} > 0$ ist. Dann existiert ein ϵ_1 , $\epsilon_0 > \epsilon_1 > 0$ und eine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\tilde{r}_0 : (0, \epsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}^{++} = \{\text{positive Zahlen}\}$$

derart, daß $0 < \tilde{r}_0(\epsilon) < \epsilon_0$ ist und es gilt für die auf Polarkoordinaten transformierte Gleichung $y' = \frac{(-x-p(x,y,\epsilon))}{(y+q(x,y,\epsilon))}$, nämlich

$$r' = r \frac{g_1(\varphi, \epsilon) + g_2(\varphi, \epsilon) + \dots}{1 + h_1(\varphi, \epsilon)r + h_2(\varphi, \epsilon)r^2 + \dots}$$

mit dem Anfangswert $r(\varphi = 0, \epsilon) = \tilde{r}_0(\epsilon)$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{r}_0(\epsilon) = 0.$$

Beweisansatz(siehe [7])

$$\begin{aligned} \psi(r_0, \epsilon) &= r_0 - \varrho(r_0, \epsilon) \\ &= r_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_{\nu}(2\pi, \epsilon) r_0^{\nu} \\ &= r_0 - (\omega_1(2\pi, \epsilon) r_0 + \omega_2(2\pi, \epsilon) r_0^2 + \dots). \end{aligned}$$

Leitet man dies nach r_0 ab, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon) &= 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \omega_{\nu}(2\pi, \epsilon) r_0^{\nu-1} \\ &= 1 - (\omega_1(2\pi, \epsilon) + 2\omega_2(2\pi, \epsilon) r_0^1 + \dots). \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist nach der Theorie der impliziten Funktionen zu zeigen, daß

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon)|_{r_0=0, \epsilon=0} \neq 0$$

ist. Mit der Tatsache, daß für $r_0 = 0 : \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \omega_{\nu}(2\pi, \epsilon) r_0^{\nu-1} = 0$ gilt, bedeutet dies aber nichts anderes als, daß

$$1 - \omega_1(2\pi, 0) \neq 0$$

d.h.

$$\omega_1(2\pi, 0) \neq 1$$

zu beweisen ist. $\omega_1(2\pi, 0)$ kann aber auch auf dem komplexen Polyzylinder $Q_{\mathbb{C}} = Q_{\mathbb{C}}(\epsilon_0, \kappa_1, \eta) = \{|\epsilon| < \epsilon_0, |r_0| < \kappa_1, |\varphi| \leq 2\pi + \eta\}$ mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel nur durch

$$|\omega_1(2\pi, 0)| \leq (\kappa_1 - \delta)^{-1} (M(2\pi + \eta)\kappa_1^2 + \kappa_1 - \delta)$$

bzw. für $\delta \rightarrow 0$

$$|\omega_1(2\pi, 0)| \leq M(2\pi + \eta)\kappa_1 + 1$$

mit einer Konstanten M abgeschätzt werden, womit das gewünschte Ziel aber nicht erreicht wird.

Kapitel 4

Differentialgleichungen mit Anfangspotenzen höherer Ordnung

In diesem Kapitel geht es im wesentlichen um eine Verallgemeinerung der Überlegungen von Frommer [9]. Es soll die Klasse der zu betrachtenden Differentialgleichungen vergrößert, d.h. es wird auf die bisher weitgehend unerforschten Differentialgleichungen mit Anfangspotenzen höherer Ordnung eingegangen. Hierfür sei auf die in den Abschnitten 2.2 und 2.3 gemachten Überlegungen und Definitionen zurückgegriffen. Diese werden in der Folge als gegeben angesehen. Zur Eingrenzung der eben angesprochenen Klasse von Differentialgleichungen wird folgender Abschnitt benötigt:

4.1 Definition

Unter einer Differentialgleichung mit Anfangspotenzen höherer Ordnung soll im Unterschied zu den bisherigen Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)},$$

welche also mit einem in x und y linearen Teil beginnen, eine Differentialgleichung der Form

$$y' = -\frac{x^{2h-1} + p_{\geq 2h}(x, y)}{y^{2h-1} + q_{\geq 2h}(x, y)}$$

verstanden werden.

Dabei sollen $p_{\geq h}(x, y)$ und $q_{\geq h}(x, y)$ Kurzbezeichnungen für die folgenden Summen

$$p_{\geq h}(x, y) = \sum_{m=h}^{\infty} p_m(x, y) = \sum_{m=h}^{\infty} \sum_{i+j=m} p_{i,j}^{(m)} x^i y^j$$

$$q_{\geq h}(x, y) = \sum_{m=h}^{\infty} q_m(x, y) = \sum_{m=h}^{\infty} \sum_{i+j=m} q_{i,j}^{(m)} x^i y^j$$

sein. Später stehen p_h und q_h für die Koeffizienten des h -ten homogenen Teilpolynoms von $p_{\geq h}(x, y)$ bzw. $q_{\geq h}(x, y)$.

4.2 Exemplarische Herleitung der Wirbelbedingungen und Umsetzung dieser in Maple für $h=2$

Es wurde in einem der vorangegangenen Kapiteln ja bereits der Begriff der Vergleichsdifferentialgleichung nach Dehn eingeführt. In diesem Abschnitt soll nun ein Rekursionsverfahren entwickelt werden, welches die Vergleichsdifferentialgleichung der Form 2.7 ermittelt. Anschließend wird dieses Rekursionsverfahren dann praktisch in einem Programm unter Maple (in Anlehnung an das Programm von Höhn [11]) umgesetzt. Dieses Verfahren soll im Gegensatz zu dem von Frommer in [9] vorgestellten algebraisch sein. Es muß auch in der Lage sein homogene Polynome n -ten, also beliebigen, Grades zu berechnen, um so eine Betrachtung aller Polynome der Form des Opelschen Problems, sprich mit dem Aussehen

$$y' = -\frac{x^3 + p_{\geq 4}(x, y)}{y^3 + q_{\geq 4}(x, y)} \quad (4.1)$$

zu ermöglichen.

Seien die Darstellungen für $y' = -\frac{x^3 + p_{\geq 4}(x, y)}{y^3 + q_{\geq 4}(x, y)}$ aus Gleichung 4.1 und $y'_1 = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$ aus Gleichung 2.3 wie vorher gegeben.

4.2.1 Ein Kriterium für kein Wirbeltyp

Ausgehend von

$$F(x, y) := x^4 + y^4 + \sum_{h=5}^{\infty} F_h(x, y)$$

ergibt sich für die Differenz aus Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung wie in Gleichung 2.10

$$\begin{aligned}
 y' - y'_1 &= -\frac{x^3 + p_{\geq 4}(x, y)}{y^3 + q_{\geq 4}(x, y)} - \left(-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \right) \\
 &=: \frac{-(x^3 + p_{\geq 4}(x, y))F_y(x, y) + (y^3 + q_{\geq 4}(x, y))F_x(x, y)}{(y^3 + q_{\geq 4}(x, y))F_y(x, y)} \\
 &=: \frac{Z(x, y)}{N(x, y)},
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei hier $Z(x, y)$ und $N(x, y)$ Abkürzungen für Zähler und Nenner sein sollen. Entscheidend ist jetzt die Betrachtung des Zählerterms $Z(x, y)$, der, soll die Vergleichsdifferentialgleichung den gleichen Charakter (das gleiche Richtungsfeld) wie die zu betrachtende Differentialgleichung haben, immer gleich Null sein muß.

Dieser Term läßt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 Z(x, y) &= -(x^3 + p_{\geq 4}(x, y))F_y(x, y) + (y^3 + q_{\geq 4}(x, y))F_x(x, y) \\
 &=: \sum_{h=7}^{\infty} \underbrace{\sum_{i+j=h} Q_{i,j}^{(h)} x^i y^j}_{=: Q^{(h)}(x, y)} \\
 &= \sum_{h=7}^{\infty} Q^{(h)}(x, y) \\
 &=: \sum_{h=7}^{\infty} Q^{(h)}.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die nun zu ermittelnden Koeffizienten sind die des Polynoms $F(x, y)$, diese können für das $(h-2)$ -te homogene Polynom $F_{h-2}(x, y)$ durch Betrachtung von $Q^{(h)}$ gewonnen werden.

Das h -te homogene Polynom $F_h(x, y)$ vom Grad h ($h \in \mathbb{N}_0$, $h \geq 0$) hat dabei folgendes Aussehen

$$F_h(x, y) = \sum_{i+j=h} A_{i,j}^{(h)} x^i y^j, \quad i, j = 0, \dots, h. \tag{4.4}$$

Die Rekursion erfolgt jetzt über den Laufparameter n . Für $n \leq 4$ folgt bereits aus Gleichung 2.7

$$\begin{aligned}
 F_0(x, y) &= F_1(x, y) = F_2(x, y) = F_3(x, y) = 0, \\
 F_4(x, y) &= x^4 + y^4.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aufgrund der Nichtlinearität der zu betrachtenden Differentialgleichung (hier $h = 2$, also der Form $y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{y^3+q_{\geq 4}(x,y)}$) muß die Rekursion mit $n = 7$, nicht wie bei Moritzen [10] mit $n = 3$, beginnen. Ein Rekursionsschritt soll aus zwei Teilschritten bestehen, welche denen von Frommer in seiner Arbeit [9] beschriebenen ähneln. Diese erhält man, wie oben schon angesprochen, durch Betrachten von

$$Q^{(n)} = -x^3 F_{y(n-2)} + y^3 F_{x(n-2)} + \sum_{k=4}^{n-3} (p_k F_{y(n-k+1)} + q_k F_{x(n-k+1)}).$$

1. C-Schritt

Im C-Schritt wird die hintere Summation, mit denen zu diesem Zeitpunkt bereits bekannten Koeffizienten von p , q , F_x und F_y durchgeführt, wodurch man jedem $C_{i,j}^{(n)}$ -Koeffizienten einen Wert zuweisen kann, so daß gilt

$$\sum_{i+j=n} C_{i,j}^{(n)} x^i y^j := \sum_{k=4}^{n-3} (p_k F_{y(n-k+1)} + q_k F_{x(n-k+1)}), \quad i, j = 0, \dots, n.$$

2. A-Schritt

Der A-Schritt hat durch Einführung der $C_{i,j}^{(n)}$ folgendes vereinfachtes Aussehen

$$Q^{(n)} = -x^3 F_{y(n-2)} + y^3 F_{x(n-2)} + \sum_{i+j=n} C_{i,j}^{(n)} x^i y^j. \quad (4.6)$$

Mit Hilfe der Gleichung 4.4 reduziert sich die eben aufgestellte Gleichung 4.6 auf die folgende Form

$$Q^{(n)} = \sum_{i+j=n, i'+j'=n-2} A_{i',j'}^{(n-2)} x^i y^j + \sum_{i+j=n} C_{i,j}^{(n)} x^i y^j.$$

Wird $Q^{(n)}$ auf Null gesetzt, so bedeutet dies für die neuen Koeffizienten von $F_{n-2}(x, y)$ nichts anderes, als daß sie sich ausschließlich aus den homogenen Teilpolynomen von $-(x^3 + p_{\geq 4}(x, y))$ und $y^3 + q_{\geq 4}(x, y)$ und den aus früheren Schritten bereits bekannten $(F_i)_{(i \leq n-3)}$ berechnen lassen. Abhängig vom aktuellen Grad der Rekursion n ergeben sich aus dem aufgestellten linearen Gleichungssystem für die $A_{i,j}^{(n-2)}$ zwei bzw. drei Wirbelbedingungen, welche, soll es sich um einen Wirbel handeln, alle erfüllt sein müssen. Die Ermittlung der Koeffizienten von $F_{n-2}(x, y)$ erfolgt also durch das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$Q^{(n)} = \sum_{i+j=n, i'+j'=n-2} A_{i',j'}^{(n-2)} x^i y^j + \sum_{i+j=n} C_{i,j}^{(n)} x^i y^j = 0. \quad (4.7)$$

Sind diese Teilschritte erfolgt, kann man von n auf $n+1$ übergehen, d.h. zur Berechnung des homogenen Teilpolynoms $F_{(n+1)-2}(x, y)$.

Abgebrochen wird die Rekursion, wenn im A-Schritt eine Wirbelbedingung verletzt bzw. eine, übernimmt man die Bezeichnung aus dem in Abschnitt 4.2.4 präsentierten Maple-Programm, `Wirbelgroesse_i[n]` ungleich Null auftritt. Sollte keine solche Wirbelgröße gefunden werden, so muß die Rekursion rein theoretisch unendlich oft durchgeführt werden.

Es gibt bisher leider noch keine Erkenntnisse darüber, ob bei endlichen Differentialgleichungen mit Anfangspotenzen höherer Ordnung auch die Berechnung von endlich vielen Wirbelgrößen genügt, daher soll in der Arbeit noch angenommen werden, daß zu einer eindeutigen Bestimmung des Charakters der zu betrachtenden Differentialgleichung unendlich viele Wirbelgrößen bestimmt werden müssen. In der Praxis begnügt man sich allerdings aufgrund des Rechen- und Zeitaufwandes mit der Überprüfung von einer endlichen Zahl von Wirbelbedingungen.

4.2.2 Kein Wirbel - Strudel oder Unbestimmtheit

Das Ziel der bisherigen Berechnungen war es eine formale Potenzreihe $F(x, y)$ sukzessive so zu bestimmen, daß

$$Z(x, y) = -(x^3 + p_{\geq 4}(x, y))F_y(x, y) + (y^3 + q_{\geq 4}(x, y))F_x(x, y)$$

$\forall x, y$ gleich Null ist. In diesem Abschnitt soll davon ausgegangen werden, daß dies nicht gelungen ist.

Damit liegt die Vermutung nahe, daß die betrachtete Differentialgleichung nicht vom gleichen Typ wie die Vergleichsdifferentialgleichung, also nicht vom Wirbeltyp, ist. Möchte man eine genauere Aussage über das Aussehen der Differentialgleichung, letztendlich ob sie vom Strudeltyp ist ja oder nein, machen, so muß man den Zähler $Z(x, y)$ nach Abbruch der Rekursion näher untersuchen.

An dieser Stelle sei bemerkt, daß bei einem Abbruch der Rekursion in einem ungeraden Grad die Vermutung über das Aussehen der Lösung der Differentialgleichung bereits feststeht, der Unbestimmtheitsfall liegt vor. Daher sei in der Folge davon ausgegangen, daß die Rekursion in einem geraden Grad (n gerade) abgebrochen wurde. Der Zähler hat dann im n -ten Schritt folgendes Aussehen

$$\begin{aligned}
Z(x, y) &= -(x^3 + p_{\geq 4}(x, y))F_y(x, y) + (y^3 + q_{\geq 4}(x, y))F_x(x, y) \\
&= \sum_{i+k=n; \, i, k \text{ gerade}} d_{i,k} x^i y^k + \sum_{i+k=n; \, \text{Rest}} d_{i,k} x^i y^k + \sum_{i+k \geq n+1}^{\infty} d_{i,k} x^i y^k,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

wobei $\forall i, k : i, k \geq 0$.

Bestimmt wird das Aussehen der Differentialgleichung jetzt durch die Koeffizienten des Zählers, welche der niedrigsten Potenz¹ zugeordnet sind, da sie, um den Ursprung herum, den größten Einfluß auf das Abweichen des Richtungsfeldes der Ausgangsdifferentialgleichung von dem der Vergleichsdifferentialgleichung haben. Es muß also die Menge der Vorfaktoren $d_{i,k}$, für die gilt $i+k=n$ betrachtet werden. Diese Menge von Koeffizienten läßt sich, wie eben in Gleichung 4.8 gesehen, in zwei Gruppen unterteilen, welche, soll Strudelcharakter vorliegen, bestimmte Bedingungen erfüllen müssen.

1. Die Vorfaktoren der ersten Summe in Gleichung 4.8² müssen alle, falls sie ungleich Null sind, das gleiche Vorzeichen haben oder eben Null sein. Ausnahme hierbei bilden $d_{n,0}$ und $d_{0,n}$, die müsse beide ungleich Null sein und damit auch das gleiche Vorzeichen haben.

$$\begin{aligned}
&\forall i, k, i', k' \text{ mit } i, k, i', k' > 0 \text{ und } i+k=n, \, i'+k'=n : d_{i,k} d_{i',k'} \geq 0 \\
&d_{0,n} d_{n,0} > 0
\end{aligned}$$

2. Die Koeffizienten der zweiten Summen in Gleichung 4.8³ müssen alle Null sein, d.h.

$$\forall i, k \text{ mit } i, k \geq 0 \text{ und } i+k=n : d_{i,k} = 0.$$

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so liegt, nach Knies und Reiter, jedenfalls analytisch bei der Differentialgleichung Strudelcharakter vor, ansonsten kann über das Aussehen der Lösung der Differentialgleichung keine Aussage gemacht werden. Hier soll Unbestimmtheit angenommen werden.

In Abschnitt 4.2.4 wird später zu sehen sein, daß bei der Realisierung dieses Abschnittes noch einige andere Überlegungen mit eine Rolle spielen. Zu dieser praktischen Anwendung aber später mehr.

¹hier die Potenz von x und y, also die Summe i+k

²Terme mit Index: i+k=n; i,k gerade

³Terme mit Index: i+k=n; Rest

4.2.3 Die Berechnung rekursiver Formeln

Das Aufstellen rekursiver Formeln zur Berechnung der $A_{i,j}^{(n)}$ und damit das Lösen, des im A-Schritt aufgestellten, linearen Gleichungssystems soll Inhalt dieses Abschnittes sein. Mit Hilfe dieser Formeln ist es dann auch möglich ein Programm zu erstellen. Will man dieses Ziel auf möglichst einfache Art und Weise erreichen, so kommt man nicht umhin sich näher mit der Struktur des, für das Opelsche Problem aufgestellte, linearen Gleichungssystems der Form

$$\begin{array}{rccccccc}
 -A_{n-3,1} & & & + & B_{n,0} & = & 0 \\
 -2A_{n-4,2} & & & + & B_{n-1,1} & = & 0 \\
 -3A_{n-5,3} & & & + & B_{n-2,2} & = & 0 \\
 -4A_{n-6,4} & + & (n-2)A_{n-2,0} & + & B_{n-3,3} & = & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -(n-2)A_{0,n-2} & + & 4A_{4,n-6} & + & B_{3,n-3} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,n-5} & + & B_{2,n-2} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,n-4} & + & B_{1,n-1} & = & 0 \\
 & & A_{1,n-3} & + & B_{0,n} & = & 0
 \end{array}$$

über mehrere Rekursionsschritte n hinweg, zu beschäftigen.

Dabei ist festzustellen, daß eine prinzipielle Fallunterscheidung nach $n \bmod 4$ zu machen ist, da sich, im Aufbau und nach Anzahl der daraus resultierenden Wirbelgrößen, nur jedes vierte aufgestellte Gleichungssystem wirklich gleicht (vgl. hierzu Anhang B). Bei Betrachtung der Struktur innerhalb eines Gleichungssystems stellt man schnell fest, daß, die für die Bestimmung von $A_{n-3,1}$, $A_{n-4,2}$, $A_{n-5,3}$ und $A_{1,n-3}$, $A_{2,n-4}$, $A_{3,n-5}$, wobei n wieder der aktuelle Grad der Rekursion ist, aufgestellten Gleichungen, einfach⁴ sind. Die anderen Gleichungen, deren Anzahl vom Rekursionsgrad abhängt, setzen sich alle aus genau zwei $A_{i,j}$, genauer aus $A_{i,j}$ und $A_{i+4,j-4}$, und einem $C_{i+3,j-1}$ zusammen.

Berücksichtigt man dies und beachtet den Zerfall eines jeden Gleichungssystems in vier Teilsysteme⁵, von denen abhängig vom Grad n der Rekursion zwei bzw. drei überbestimmt sind, so bietet es sich an das Gleichungssystem nicht „blind“ zu lösen. Eine Möglichkeit die Struktur des Gleichungssystems auszunutzen ist in den Teilsystemen immer mit einer einfachen Gleichung zu starten, um so möglichst leicht auf die anderen $A_{i,j}$ dieses Systems schließen zu können. Ausnahme bildet hier der einmal auftretende unterbestimmte Teil, in dem eine Unbekannte gesetzt werden kann. Um eine komplette Lösung für das lineare Gleichungssystem zu erhalten, müssen dann alle vier Teilsysteme abgearbeitet werden.

Bei der Entwicklung der rekursiven Formeln sind also, beschreitet man diesen Weg, vier Fälle, innerhalb derer noch einmal vier Fälle existieren, zu unterscheiden.

⁴soll hier bedeuten, daß $A_{i,j}$ direkt von einem $C_{i+3,j-1}$ abhängt

⁵soll die Menge von Gleichungen bezeichnen, in denen $A_{i,j}$ auftreten, die aufgrund ihres Index miteinander in Verbindung stehen

In dieser jetzt folgenden Fallunterscheidung soll aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die Startgleichung⁶, die rekursive Formel⁷ und die Bedingungen⁸, sowie gegebenenfalls die Berechnung von $A'_{i,j}$ ⁹ und die Wirbelgröße¹⁰, angegeben werden.

1. Ist $n \bmod 4 = 3$, dann zerfällt das lineare Gleichungssystem in vier Teile, wovon zwei eindeutig und zwei überbestimmt sind. Zuerst sollen hier die beiden eindeutigen Teile unter [1.1] und [1.2] behandelt werden, bevor unter [1.3] und [1.4] die beiden Wirbelbedingungen bzw. die Berechnung der Wirbelgrößen betrachtet wird.

1.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-3,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-3)-4x,1+4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)]$ $A_{(n-3)-4(x-1),1+4(x-1)} + C_{n-4x,4x})$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$

1.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{1,n-3} = -C_{0,n}$
rekursive Gleichung	$A_{1+4x,(n-3)-4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)]$ $A_{1+4(x-1),(n-3)-4(x-1)} - C_{4x,n-4x})$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$

1.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-4,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-4)-4x,2+4x} = \frac{1}{2+4x}([(n-4) - 4(x-1)]$ $A_{(n-4)-4(x-1),2+4(x-1)} + C_{(n-1)-4x,1+4x})$
Bedingungen	$(n-4) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-4)-4x,2+4x}$	$A'_{(n-4)-4x,2+4x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-4)-4x,2+4x} - A'_{(n-4)-4x,2+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

⁶hiermit wird die einfache Gleichung bezeichnet mit der im jeweiligen Teilsystem das erste $A_{i,j}$ berechnet bzw. im unterbestimmten Teilsystem gesetzt wird

⁷gibt die Formel an anhand derer die anderen $A_{i,j}$ dieses Teilsystems berechnet werden können, wobei hier x bei jedem Rekursionsschritt um eins erhöht wird

⁸hier sollen die an den Laufparameter x gestellten Bedingungen zusammengestellt werden

⁹ein $A_{i,j}$ eines jeden überbestimmten Teilsystems kann auf zwei verschiedene Art und Weisen berechnet werden, mit Bedingung an x

¹⁰Gleichung für die Berechnung der Wirbelgröße, mit Bedingung an x

1.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{2,n-4} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$
rekursive Gleichung	$A_{2+4x,(n-4)-4x} = \frac{1}{2+4x}([(n-4) - 4(x-1)])$ $A_{2+4(x-1),(n-4)-4(x-1)} - C_{1+4x,(n-1)-4x}$
Bedingungen	$(n-4) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$
Berechnung $A'_{2+4x,(n-4)-4x}$	$A'_{2+4x,(n-4)-4x} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$\text{Wirbelgröße}_2[n] = A_{2+4x,(n-4)-4x} - A'_{2+4x,(n-4)-4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2. Das lineare Gleichungssystem teilt sich für $n \bmod 4 = 1$ in vier Teile, wovon zwei eindeutig und zwei überbestimmt sind. Zuerst sollen hier die beiden eindeutigen Teile unter [2.1] und [2.2] betrachtet werden, bevor unter [2.3] und [2.4] die beiden Wirbelbedingungen bzw. die Berechnung der Wirbelgrößen genauer untersucht wird.

2.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-4x,3+4x} = \frac{1}{3+4x}([(n-5) - 4(x-1)])$ $A_{(n-5)-4(x-1),3+4(x-1)} + C_{(n-2)-4x,2+4x}$
Bedingungen	$(n-5) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$

2.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{3,n-5} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$
rekursive Gleichung	$A_{3+4x,(n-5)-4x} = \frac{1}{3+4x}([(n-5) - 4(x-1)])$ $A_{3+4(x-1),(n-5)-4(x-1)} - C_{2+4x,(n-2)-4x}$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$

2.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-3,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-3)-4x,1+4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)])$ $A_{(n-3)-4(x-1),1+4(x-1)} + C_{n-4x,4x}$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-3)-4x,1+4x}$	$A'_{(n-3)-4x,1+4x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$\text{Wirbelgröße}_1[n] = A_{(n-3)-4x,1+4x} - A'_{(n-3)-4x,1+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{1,n-3} = -C_{0,n}$
rekursive Gleichung	$A_{1+4x,(n-3)-4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)])$ $A_{1+4(x-1),(n-3)-4(x-1)} - C_{4x,n-4x}$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{1+4x,(n-3)-4x}$	$A'_{1+4x,(n-1)-4x} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$\text{Wirbelgröße}_2[n] = A_{1+4x,(n-3)-4x} - A'_{1+4x,(n-3)-4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3. $n \bmod 4 = 0$, in diesem Fall zerfällt das lineare Gleichungssystem in vier Teile, wovon zwei eindeutig und zwei überbestimmt sind. Zuerst sollen hier die beiden eindeutigen Teile unter [3.1] und [3.2] behandelt werden, bevor unter [3.3] und [3.4] die beiden Wirbelbedingungen bzw. die Berechnung der Wirbelgrößen betrachtet wird.

3.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-4,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-4)-4x,2+4x} = \frac{1}{2+4x}([(n-4) - 4(x-1)])$ $A_{(n-4)-4(x-1),2+4(x-1)} + C_{(n-1)-4x,1+4x}$
Bedingungen	$(n-4) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

3.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{2,n-4} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$
rekursive Gleichung	$A_{2+4x,(n-4)-4x} = \frac{1}{2+4x}([(n-4) - 4(x-1)])$ $A_{2+4(x-1),(n-4)-4(x-1)} - C_{1+4x,(n-1)-4x}$
Bedingungen	$(n-4) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

3.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-3,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-3)-4x,1+4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)])$ $A_{(n-3)-4(x-1),1+4(x-1)} + C_{n-4x,4x}$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-3)-4x,1+4x}$	$A'_{(n-3)-4x,1+4x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$\text{Wirbelgröße}_1[n] = A_{(n-3)-4x,1+4x} - A'_{(n-3)-4x,1+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-4x,3+4x} = \frac{1}{3+4x}([(n-5) - 4(x-1)]$ $A_{(n-5)-4(x-1),3+4(x-1)} + C_{(n-2)-4x,2+4x})$
Bedingungen	$(n-5) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-4x,3+4x}$	$A'_{(n-5)-4x,3+4x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-5)-4x,3+4x} - A'_{(n-5)-4x,3+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4. $n \bmod 4 = 2$, in diesem Fall zerfällt das lineare Gleichungssystem in vier Teile, wovon einer unterbestimmt und drei überbestimmt sind. Zuerst soll hier der unterbestimmte Teil unter [4.1] behandelt werden, bevor unter [4.2], [4.3] und [4.4] die drei Wirbelbedingungen bzw. die Berechnung der Wirbelgrößen betrachtet wird.

4.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{0,n-2} := 0$
rekursive Gleichung	$A_{4x,(n-2)-4x} = \frac{1}{4x}([(n-2) - 4(x-1)]$ $A_{4(x-1),(n-2)-4(x-1)} - C_{3+4x,(n-3)-4x})$
Bedingungen	$(n-2) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$

4.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-3,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-3)-4x,1+4x} = \frac{1}{1+4x}([(n-3) - 4(x-1)]$ $A_{(n-3)-4(x-1),1+4(x-1)} + C_{n-4x,4x})$
Bedingungen	$(n-3) - 4x \geq 0, x \in \mathbb{N}, x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-3)-4x,1+4x}$	$A'_{(n-3)-4x,1+4x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-3)-4x,1+4x} - A'_{(n-3)-4x,1+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-2,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-4)-4x,2+4x} = \frac{1}{2+4x}([(n-4) - 4(x-1)])$ $A_{(n-4)-4(x-1),2+4(x-1)} + C_{(n-1)-4x,1+4x}$
Bedingungen	$(n-4) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-4)-4x,2+4x}$	$A'_{(n-4)-4x,2+4x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-4)-4x,2+4x} - A'_{(n-4)-4x,2+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-4x,3+4x} = \frac{1}{3+4x}([(n-5) - 4(x-1)])$ $A_{(n-5)-4(x-1),3+4(x-1)} + C_{(n-2)-4x,2+4x}$
Bedingungen	$(n-5) - 4x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-4x,3+4x}$	$A'_{(n-5)-4x,3+4x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-5)-4x,3+4x} - A'_{(n-5)-4x,3+4x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

Mit diesen aufgestellten rekursiven Formel ist man jetzt in der Lage das lineare Gleichungssystem, welches in jedem A-Schritt aufgestellt wird, auf eine einfache Art und Weise zu lösen und eine sequentielle Implementierung zu erstellen.

4.2.4 Umsetzung in Maple - das Programm

Die für eine Computer-Implementierung benötigten Hilfsmittel wurden ja bereits in den letzten Abschnitten erarbeitet. Dieser Abschnitt soll einen unter Maple umgesetzten rekursiven Algorithmus zur Berechnung der Wirbelgrößen vorstellen. Dabei soll das sequentielle Maple-Programm mit einigen für den Anwender nützlichen Hinweisen, sowie die wesentlichen Schritte des zugrundeliegenden Algorithmus, dargelegt werden.

Die hier vorgestellte reale Umsetzung der bisher dargelegten Theorie ist interaktiv, so daß der Benutzer ohne große Kenntnisse über das Aussehen der zugrundeliegenden Datenstruktur in der Lage sein sollte, mit dem Programm umzugehen. Dadurch ist es möglich, schnell die ersten Ergebnisse zu erzielen.

Um dies zu erreichen, ist zu beachten, daß alle Eingaben an das Programm mit einem

„Return“ bestätigt werden müssen. Berücksichtigt der Anwender dies, so besteht das Programm für ihn eigentlich nur aus drei wesentlichen Verzweigungen.

1. Art der Eingabe (siehe Abbildung C.1), d.h. ob der Anwender die zu betrachtende Differentialgleichung eingeben (1) oder diese laden (2) möchte.
2. Berechnung oder Grafik (siehe Abbildung C.2), d.h. ob der Nutzer für die zu betrachtende Differentialgleichung die Wirbelgrößen berechnen (1) oder die grafische Ausgabe (2) derselbigen möchte.
Die vom Anwender unter der grafischen Ausgabe geforderten Angaben sind nur einige von Maple für die grafische Darstellung der Differentialgleichung benötigte Parameter, welche am Anfang mit den in Klammern angegebenen Standardwerten (siehe Abbildung C.3) belegt werden können.
3. Ende oder nochmal (siehe Abbildung C.4), d.h. ob der Nutzer noch eine Differentialgleichung mit dem Programm betrachten möchte oder nicht und dieses damit beendet.

Der dem Programm zugrundeliegende Algorithmus für die Berechnung der Wirbelgrößen besteht im wesentlichen aus drei Schritten. Zum einen aus den in Abschnitt 4.2.1 bereits vorgestellten C-Schritt und A-Schritt, zum anderen aus der Berechnung der, wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben, Wirbelgröße selbst.

C-Schritt

Die Realisierung des C-Schrittes wurde in die gleichnamige Routine `CSchritt` ausgelagert (siehe hierzu Anhang C).

Hier werden, wie auch in Abschnitt 4.2.1 beschrieben, alle aus früheren Schritten bereits bekannten Koeffizienten von $(F_i)_{i \leq n-3}$, im Programm mit `dyA`, `dxA` bzw. `B11` („frühere“) bezeichnet, mit den Koeffizienten von `p` und `q` verrechnet und so die entsprechenden $C_{i,j}$ (im Programm $B_{i,j}$), deshalb `CSchritt`, gesetzt. Die für die erste Berechnung von $B_{i,j}$ benötigten Initialisierungen, vgl. in der Theorie Gleichung 4.5, werden in den Routinen `init` und `ableitung` gemacht (vgl. Anhang C).

A-Schritt

Die weiteren für die Berechnung der Wirbelgrößen benötigten Koeffizienten von $F(x, y)$ werden nun im A-Schritt berechnet, der genau wie der C-Schritt in die gleichnamige Routine `ASchritt` ausgelagert wurde (siehe hierzu Anhang C).

Hier werden die in Abschnitt 4.2.3 hergeleiteten Formeln praktisch umgesetzt und damit das in der Theorie beschriebene lineare Gleichungssystem 4.7 auf eine, der speziellen Struktur dieses Systems angepasste Art und Weise, rekursiv gelöst.

¹¹die Namensgebung im Programm wie Frommer, in der Arbeit wie Moritzen

Berechnung der Wirbelgrößen

Nachdem jetzt alle nötigen Vorbereitungen getroffen sind, werden die Wirbelgrößen berechnet, um mit Hilfe dieser dann Vermutungen bzw. Aussagen über das Aussehen der Differentialgleichung aufzustellen bzw. zu treffen (siehe auch hierzu Anhang C). Hierzu ist zu bemerken, daß die in Abschnitt 4.2.2 vorgestellte Theorie im Programm in leicht modifizierter Form umgesetzt worden ist.

Die im Programm gemachte Fallunterscheidung, wie bei der Aufstellung der rekursiven Formeln, nach $n \bmod 4$ ist eigentlich nur nötig, da für die verschiedenen Fälle eine unterschiedliche Anzahl von Wirbelgrößen, welche auf unterschiedliche Art und Weise zu bestimmen sind, zu berechnen ist. Tatsächlich genügt es anfänglich zwei Fälle, die über das Aussehen der Differentialgleichung bestimmen, zu unterscheiden.

1. Abbruch¹² der Rekursion in einem ungeraden Grad, d.h. $n \bmod 4 = 1$ oder $n \bmod 4 = 3$. In diesem Fall liegt die Vermutung nahe, daß es sich um keinen Wirbel handelt. Es ist keine Aussage zum Aussehen der Lösung der Differentialgleichung möglich, da man einen Vorzeichenwechsel von Z außerhalb des Nullpunktes nicht ausschließen kann.

2. Sollte die Rekursion in einem geraden Grad (n gerade) abbrechen, so muß man die $d_{i,k}$ auf die in der Aufzählung in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Bedingungen hin untersuchen.

Hier gilt es auch wieder zwei Fälle zu unterscheiden, da wie schon erwähnt teilweise eine unterschiedliche Anzahl von Wirbelgrößen, aufgrund der unterschiedlichen Anzahl von überbestimmten Teilen des linearen Gleichungssystems, zu berechnen ist.

- 2.1. Ist bei Abbruch $n \bmod 4 = 0$, dann sind nur zwei Wirbelgrößen, im Programm mit `Wirbelgroesse_1[n]` bzw. `Wirbelgroesse_2[n]` bezeichnet, zu bestimmen.

Dabei stellt die `Wirbelgroesse_1[n]`, verwendet man die Bezeichnungsweise aus der Theorie, $d_{0,n}$ und `Wirbelgroesse_2[n]` $d_{2,n-2}$ aus der ersten Summe von Gleichung 4.8 dar. Hierbei ist zu bemerken, daß die von `Wirbelgroesse_1[n]` quantifizierte Ungereimtheit im Gleichungssystem auch auf $d_{n,0}$ „mitverteilt“ werden kann, so daß zumindest numerisch die in der Theorie an einen Strudelfall gestellten Anforderungen erfüllt werden können. Für das Vorliegen eines Strudels ist es also erforderlich, daß `Wirbelgroesse_1[n]` ungleich Null ist und `Wirbelgroesse_2[n]`, falls sie ungleich Null ist, das gleiche Vorzeichen hat. Sollte dies nicht erfüllt werden, so wird Unbestimmtheit vermutet.

- 2.2. Bei Beendigung der Rekursion mit $n \bmod 4 = 2$, sind drei Wirbelgrößen, im Programm mit `Wirbelgroesse_1[n]`, `Wirbelgroesse_2[n]` bzw.

¹²unter Abbruch soll hier und in den folgenden Fällen der durch auftreten einer Wirbelgröße ungleich Null erzwungene Abbruch (strudel=maxstrudel) verstanden werden

Wirbelgroesse_3[n] bezeichnet, zu bestimmen.

Hierbei stehen Wirbelgroesse_1[n] für $d_{2,n-2}$, Wirbelgroesse_3[n] für $d_{0,n}$ aus der ersten Summe und Wirbelgroesse_2[n] für $d_{1,n-1}$ aus der zweiten Summe von Gleichung 4.8.

Wirbelgroesse_1[n] und Wirbelgroesse_3[n] müssen also für den Strudelfall beiden ungleich Null sein und das gleiche Vorzeichen haben, da in diesem Fall die von Wirbelgroesse_1[n] dargestellte Ungereimtheit des im A-Schritt aufgestellten Gleichungssystems auf $d_{n,0}$ „umverteilt“ werden kann. Wirbelgroesse_2[n] muß Null sein, damit ein Strudel vorliegen kann. Bei Verstoß gegen eine dieser Bedingungen liegt auch hier der Unbestimmtheitsfall nahe.

Alle anderen in der Theorie noch untersuchten $d_{i,k}$ mit $i+k=n$ werden durch den Algorithmus automatisch auf Null gerechnet und erfüllen so auf jeden Fall die an sie gestellten Anforderungen.

Abbruchkriterien

Abgebrochen wird die eben vorgestellte Berechnung von Wirbelgrößen in zwei Fällen. Zum einen falls eine Wirbelgröße ungleich Null berechnet worden ist, wobei man hier vom erzwungen Abbruch sprechen kann, da `strudel` auf `maxstrudel` gesetzt wird. Anschließend müssen in diesem Fall noch die Wirbelgrößen wie in Abschnitt 4.2.4 untersucht werden. Zum anderen falls die obere Schranke für die Anzahl an zu berechnenden Wirbelgrößen `maxstrudel` erreicht wurde, in diesem Fall geht man von einem Wirbel aus.

Allgemein ist zu der hier vorliegenden Realisierung noch zu sagen, daß sie, im Gegensatz zu in anderen Programmiersprachen umgesetzten Implementierungen, keine Probleme mit Fehlerfortpflanzung hat. Dies konnte durch die Verwendung von dem algebraischen Löser Maple erreicht werden.

Bezahlt wird dieses exakte Rechnen und auch der Komfort bei der Eingabe von Differentialgleichungen durch einen erhöhten Speicher-, Rechen- und dem automatisch damit verbundenen erhöhten Zeitaufwand.

Für weitere noch auftretende Fragen zum Ablauf des Programmes oder zu programmtechnischen Feinheiten steht im Anhang C der komplette Quellcode des Programmes zur Verfügung.

Sollten diese Informationen nicht ausreichend sein, sei auf Höhn [11] verwiesen, der in seiner Arbeit „Algebraische Berechnung von Strudelgrößen und graphisches Auffinden von Grenzyklen um ein Stelle der Unbestimmtheit“, bis auf die rekursiven Formeln selbst, das gleiche Programm näher vorstellt. Dort wird auch auf die Komplexität des Algorithmus, die Konditionierung des Problems, sowie auf Vor- und Nachteile, die die Realisierung in Maple mit sich bringt, eingegangen.

4.2.5 Eigene Beispiele

Dieser Abschnitt soll einige selbstentworfenen¹³ Beispiele zeigen. Zuerst soll hierbei, ausgehend von der „Grundgleichung“ $y' = -\frac{x^3}{y^3}$, eine Gruppe von Differentialgleichungen betrachtet werden, welche durch hinzufügen eines Terms immer wieder in ihrem Charakter¹⁴ verändert wurden. Anschließend werden noch einige interessante Beispiele, auch von der Optik her, einer Analyse unterzogen.

Allgemein gilt für die vom Algorithmus des Programms ausgegebenen Ergebnisse das Format

```
Aktueller Grad = Wert
A[i][j] = Wert           # alle Kombinationen für die gilt
B[i][j] = Wert           # i + j ≤ n
[...]
Wirbelgroesse_1[k] = Wert      # k ≤ n
Wirbelgroesse_2[k] = Wert      # k ≤ n
Wirbelgroesse_3[k] = Wert      # k ≤ n; entspricht n mod 4 = 2 !!!

*****

k+6. C-Schritt : Polynom der C-Koeffizienten          # k ≤ n
k+6. A-Schritt : Polynom der A-Koeffizienten (neu berechnet) # k ≤ n
Wirbelgroesse_1[k] = Wert      # k ≤ n
Wirbelgroesse_2[k] = Wert      # k ≤ n
Wirbelgroesse_3[k] = Wert      # k ≤ n; entspricht n mod 4 = 2 !!!
[...].
```

Aus platztechnischen Gründen soll in den folgenden Beispielen allerdings nur der, im Formataufbau unterhalb der durch * gekennzeichneten Trennlinie liegende, Bereich abgedruckt werden.

Prinzipiell befindet sich auf den nächsten Seiten bei der Vorstellung der Beispiele die betrachtete Differentialgleichung im ersten Satz. Darunter liegt dann zentriert, die von Maple erstellte grafische Darstellung der Differentialgleichung mit der Bildunterschrift des jeweiligen Startpunktes. Abgeschlossen wird die Seite dann von den, vom Algorithmus für den C-Schritt, A-Schritt und die Wirbelgrößen, berechneten Werte, die in der vorgestellten Form präsentiert werden.

¹³in der Literatur wurden keine bereits betrachteten Beispiele gefunden, die man hier hätte nachvollziehen können

¹⁴bezieht sich hier auf Strudel, Wirbel oder Unbestimmtheit

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $y' = -\frac{x^3}{y^3}$.

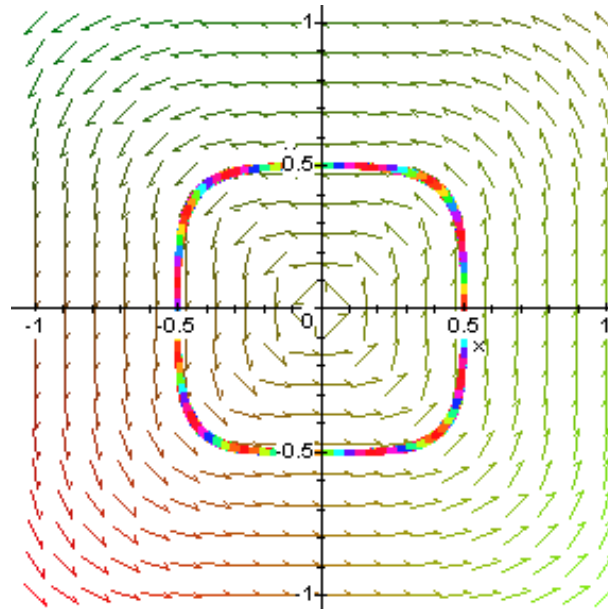


Abbildung 4.1: Startpunkt(0.5/0)

Der Algorithmus berechnete dazu für einen Wirbelfall sprechende Werte (alle Wirbelgrößen gleich Null). Dies stimmt in diesem Fall auch mit der durch die Grafik naheliegende Vermutung überein.

7. C-Schritt :

7. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[1] = 0

Wirbelgroesse_2[1] = 0

8. C-Schritt :

8. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[2] = 0

Wirbelgroesse_2[2] = 0

9. C-Schritt :

9. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[3] = 0

Wirbelgroesse_2[3] = 0

10. C-Schritt :

10. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[4] = 0

Wirbelgroesse_2[4] = 0

Wirbelgroesse_3[4] = 0

11. C-Schritt :

11. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[5] = 0

Wirbelgroesse_2[5] = 0

12. C-Schritt :

12. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[6] = 0

Wirbelgroesse_2[6] = 0

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2 y^2}{y^3}$.

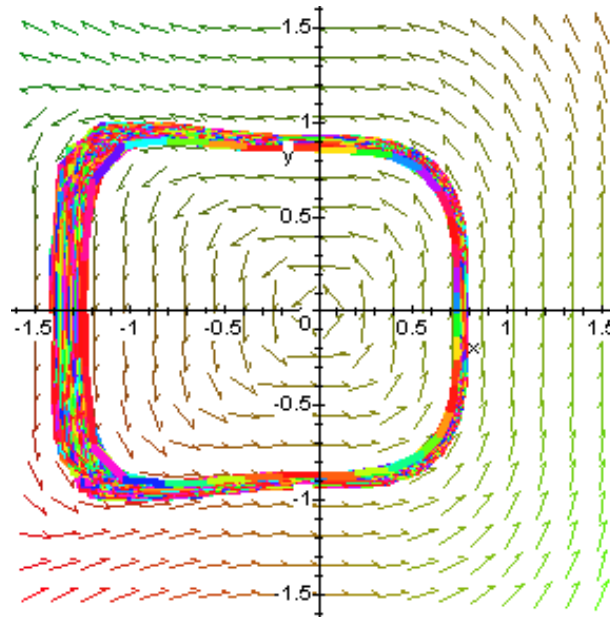


Abbildung 4.2: Startpunkt(0.78/0)

Geht man von der Grafik aus, so liegt die Vermutung eines Strudels nahe. Der Algorithmus berechnete dazu allerdings für einen Unbestimmtheitsfall sprechende Werte (erzwungener Abbruch in einem ungeradem Grad, n ungerade).

```
7. C-Schritt :+(-4)*x^2*y^5
7. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[1] = -4/3
Wirbelgroesse_2[1] = 0
```

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2 y^2}{y^3 + \frac{2}{3} x^3 y}$.

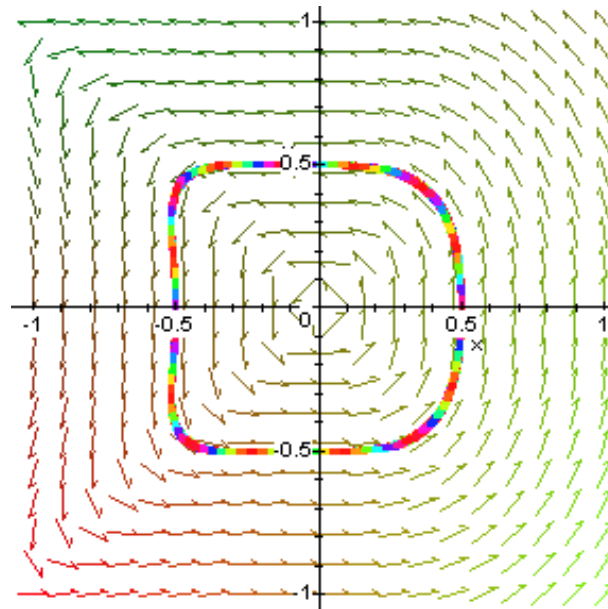


Abbildung 4.3: Startpunkt(0.5/0)

Der Algorithmus berechnete dazu, wie man auch aus der Grafik vermuten kann, für einen Wirbelfall sprechende Werte (alle Wirbelgrößen gleich Null).

7. C-Schritt : $+(8/3)*x^6*y^1 + (-4)*x^2*y^5$	10. C-Schritt :
7. A-Schritt : $+(4/3)*x^3*y^2$	10. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[1] = 0	Wirbelgroesse_1[4] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0	Wirbelgroesse_2[4] = 0
8. C-Schritt :	Wirbelgroesse_3[4] = 0
8. A-Schritt :	11. C-Schritt :
Wirbelgroesse_1[2] = 0	11. A-Schritt :
Wirbelgroesse_2[2] = 0	Wirbelgroesse_1[5] = 0
9. C-Schritt :	Wirbelgroesse_2[5] = 0
9. A-Schritt :	12. C-Schritt :
Wirbelgroesse_1[3] = 0	12. A-Schritt :
Wirbelgroesse_2[3] = 0	Wirbelgroesse_1[6] = 0
	Wirbelgroesse_2[6] = 0

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2 y^2}{y^3 + \frac{2}{3}x^3 y - y^5}$.

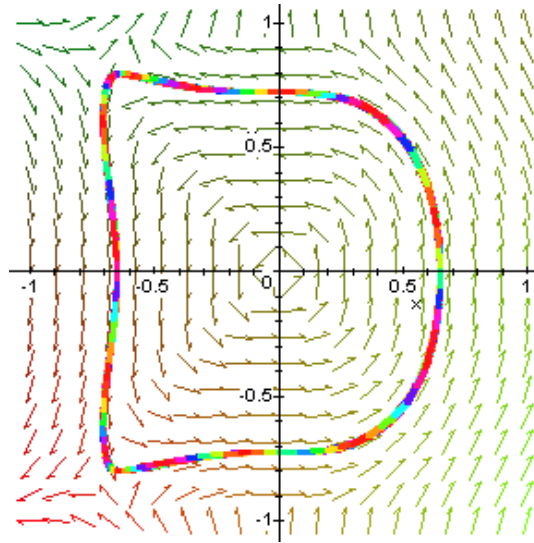


Abbildung 4.4: Startpunkt(0.65/0)

Auch hier stimmen die durch die Grafik und den Algorithmus naheliegende Vermutungen überein - Wirbelfall (alle Wirbelgrößen gleich Null).

7. C-Schritt $+(8/3)*x^6*y^1+(-4)*x^2*y^5$	11. A-Schritt :
	Wirbelgroesse_1[5] = 0
7. A-Schritt $+(4/3)*x^3*y^2$	Wirbelgroesse_2[5] = 0
Wirbelgroesse_1[1] = 0	12. C-Schritt :
Wirbelgroesse_2[1] = 0	12. A-Schritt :
8. C-Schritt $+(-4)*x^3*y^5$	Wirbelgroesse_1[6] = 0
8. A-Schritt $+(-2/3)*x^0*y^6$	Wirbelgroesse_2[6] = 0
Wirbelgroesse_1[2] = 0	13. C-Schritt :
Wirbelgroesse_2[2] = 0	13. A-Schritt :
9. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[7] = 0
9. A-Schritt :	Wirbelgroesse_2[7] = 0
Wirbelgroesse_1[3] = 0	14. C-Schritt :
Wirbelgroesse_2[3] = 0	14. A-Schritt :
10. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[8] = 0
10. A-Schritt :	Wirbelgroesse_2[8] = 0
Wirbelgroesse_1[4] = 0	Wirbelgroesse_3[8] = 0
Wirbelgroesse_2[4] = 0	15. C-Schritt :
Wirbelgroesse_3[4] = 0	15. A-Schritt :
11. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[9] = 0
	Wirbelgroesse_2[9] = 0

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2 y^2 - x^7 - y^7}{y^3 + \frac{2}{3} x^3 y}$.

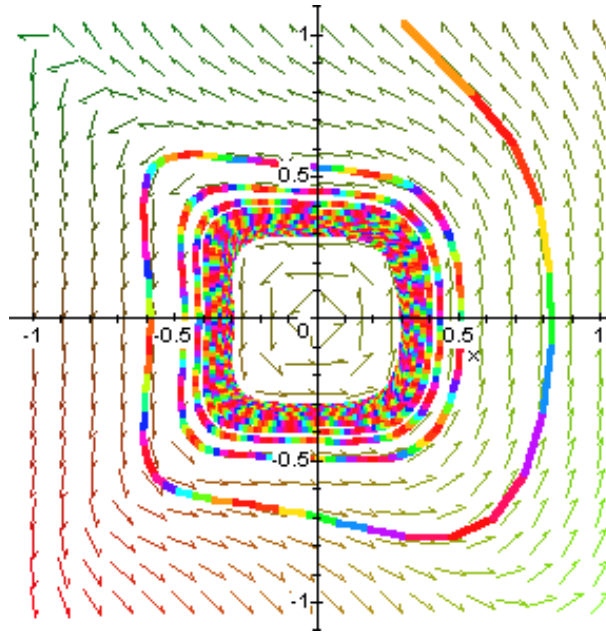


Abbildung 4.5: Startpunkt(0.3/0)

Der Algorithmus berechnet dazu für einen Unbestimmtheitsfall sprechende Werte (erzwungener Abbruch mit n gerade, aber $d_{n,0} = 0$ und nur $d_{0,n} \neq 0$).

```

7. C-Schritt : +(8/3)*x^6*y^1+(-4)*x^2*y^5
7. A-Schritt : +(4/3)*x^3*y^2
Wirbelgroesse_1[1] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0
8. C-Schritt :
8. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[2] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0
9. C-Schritt :
9. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[3] = 0
Wirbelgroesse_2[3] = 0
10. C-Schritt : +(-4)*x^7*y^3+(-4)*x^0*y^10
10. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[4] = 0
Wirbelgroesse_2[4] = 0
Wirbelgroesse_3[4] = -4

```


Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2y^2 - x^3y^2}{y^3 + \frac{2}{3}x^3y}$.

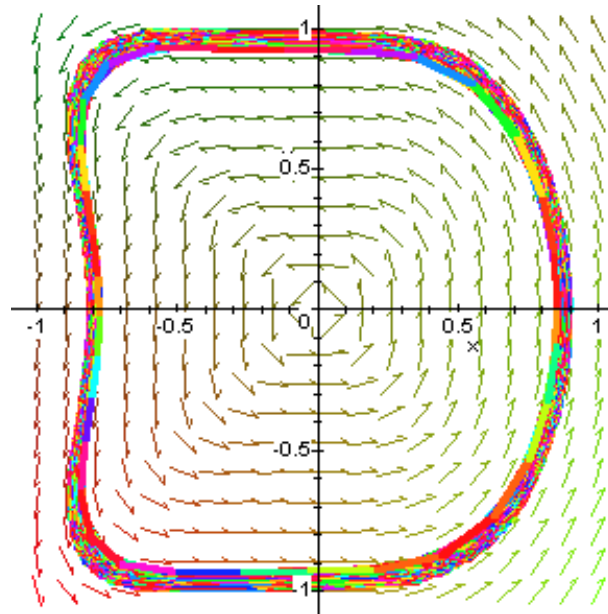


Abbildung 4.6: Startpunkt(0.9/0)

Der Algorithmus berechnete dazu Werte, die die Vermutung Unbestimmtheit erlauben (zwar erzwungener Abbruch mit n gerade, aber $d_{1,n-1}$ ungleich Null).

```

7. C-Schritt :+(8/3)*x^6*y^1+(-4)*x^2*y^5
7. A-Schritt :+(4/3)*x^3*y^2
Wirbelgroesse_1[1] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0
8. C-Schritt :+(-4)*x^3*y^5
8. A-Schritt :+(-2/3)*x^0*y^6
Wirbelgroesse_1[2] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0
9. C-Schritt :+(-8/3)*x^6*y^3+(4)*x^2*y^7
9. A-Schritt :+(-8/21)*x^7*y^0+(-4/3)*x^3*y^4
Wirbelgroesse_1[3] = 0
Wirbelgroesse_2[3] = 0
10. C-Schritt :+(-16/9)*x^9*y^1+(8/3)*x^5*y^5+(4)*x^3*y^7
10. A-Schritt :+(-8/9)*x^6*y^2+(-4/9)*x^2*y^6
Wirbelgroesse_1[4] = 0
Wirbelgroesse_2[4] = -4/9
Wirbelgroesse_3[4] = 0

```

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $y' = -\frac{x^3 - x^2y^2 - x^3y^2 + \frac{2}{9}xy^6}{y^3 + \frac{2}{3}x^3y}$.

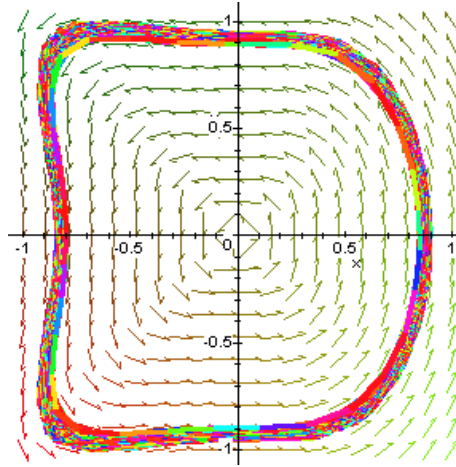


Abbildung 4.7: Startpunkt(0.9/0)

Nach dem Algorithmus liegt auch hier der Unbestimmtheitsfall vor (erzwungener Abbruch mit n ungerade).

```

7. C-Schritt :+(8/3)*x^6*y^1+(-4)*x^2*y^5
7. A-Schritt :+(4/3)*x^3*y^2
Wirbelgroesse_1[1] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0
8. C-Schritt :+(-4)*x^3*y^5
8. A-Schritt :+(-2/3)*x^0*y^6
Wirbelgroesse_1[2] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0
9. C-Schritt :+(-8/3)*x^6*y^3+(4)*x^2*y^7
9. A-Schritt :+(-8/21)*x^7*y^0+(-4/3)*x^3*y^4
Wirbelgroesse_1[3] = 0
Wirbelgroesse_2[3] = 0
10. C-Schritt :+(-16/9)*x^9*y^1+(8/3)*x^5*y^5+(4)*x^3*y^7+(8/9)*x^1*y^9
10. A-Schritt :+(-8/9)*x^6*y^2+(-4/9)*x^2*y^6
Wirbelgroesse_1[4] = 0
Wirbelgroesse_2[4] = 0
Wirbelgroesse_3[4] = 0
11. C-Schritt :+(-16/9)*x^8*y^3+(16/3)*x^6*y^5+(8/3)*x^4*y^7
11. A-Schritt :+(-16/405)*x^9*y^0+(-8/15)*x^5*y^4+(8/9)*x^3*y^6
Wirbelgroesse_1[5] = 8/9
Wirbelgroesse_2[5] = 0

```

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3 - x^2 y^2 - 5x^7}{y^3 + x^2 y^4 - y^5}$.

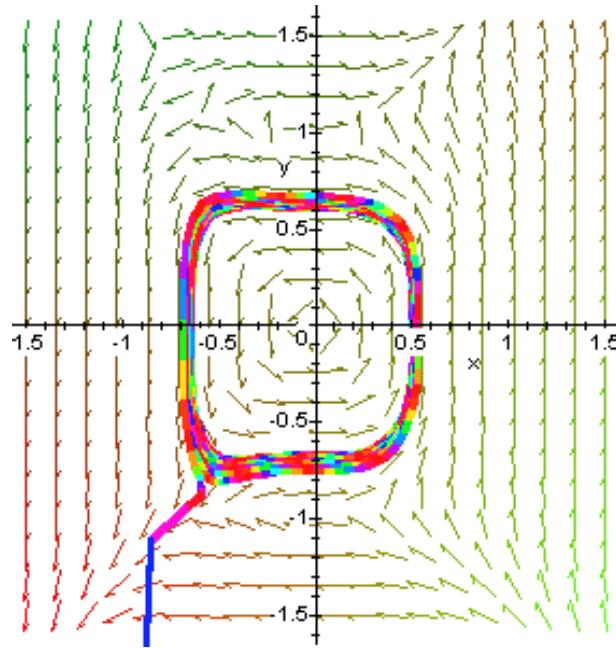


Abbildung 4.8: Startpunkt(0.5/0)

Der Algorithmus berechnete dazu für einen Unbestimmtheitsfall sprechende Werte (n bei erzwungenem Abbruch ungerade).

7. C-Schritt $:+(-4)*x^2*y^5$

7. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[1] = -4/3

Wirbelgroesse_2[1] = 0

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3-2x^4y^3}{y^3-x^7}$.

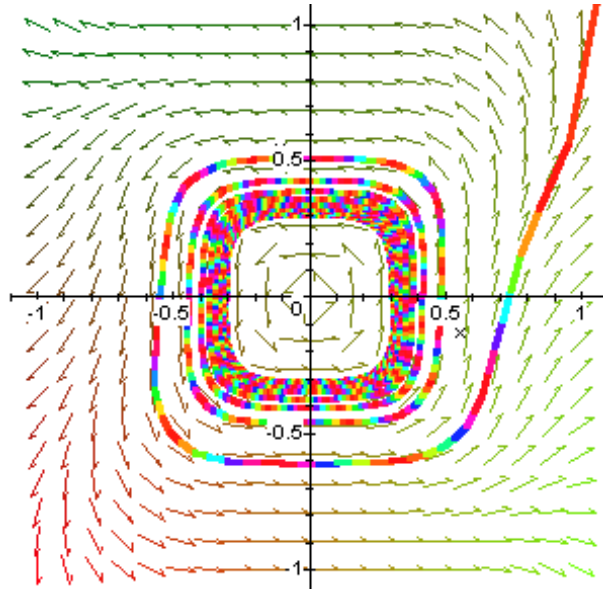


Abbildung 4.9: Startpunkt(0.3/0)

Der Algorithmus berechnete dazu, mit der Grafik übereinstimmend, für einen Strudelfall sprechende Werte (n ist bei erzwungenem Abbruch gerade und nur $d_{0,n}$ und $d_{n,0}$ sind ungleich Null und haben gleiches Vorzeichen).

7. C-Schritt :

7. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[1] = 0

Wirbelgroesse_2[1] = 0

8. C-Schritt :

8. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[2] = 0

Wirbelgroesse_2[2] = 0

9. C-Schritt :

9. A-Schritt :

Wirbelgroesse_1[3] = 0

Wirbelgroesse_2[3] = 0

10. C-Schritt : $+(-4)*x^{10}*y^0+(-8)*x^4*y^6$

10. A-Schritt : $+(-4)*x^7*y^1+(-28/5)*x^3*y^5+(-8/7)*x^1*y^7$

Wirbelgroesse_1[4] = -28/5

Wirbelgroesse_2[4] = 0

Wirbelgroesse_3[4] = -8/7

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $y' = -\frac{x^3 - 2x^6y^3}{y^3 - x^9}$.

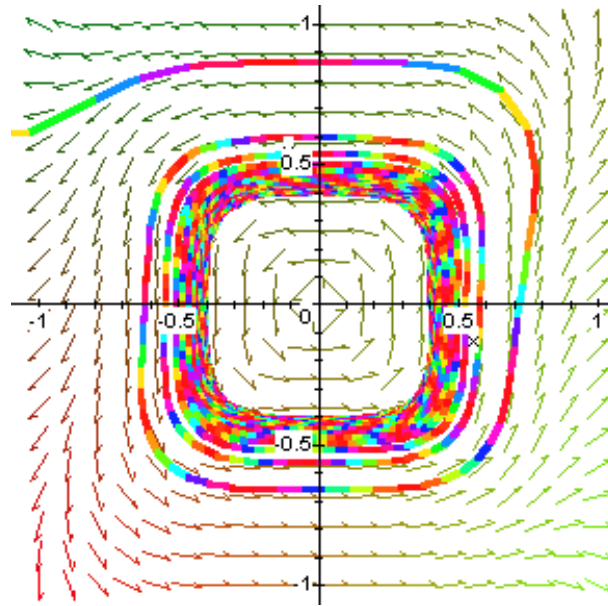


Abbildung 4.10: Startpunkt(0.4/0)

Der Algorithmus berechnete dazu Werte, welche für einen Strudel sprechen (n bei erzwungenem Abbruch gerade, $d_{0,n}$ und $d_{n,0}$ ungleich Null mit gleichem Vorzeichen und nur noch weitere $d_{i,k}$ aus der ersten Summe von Gleichung 4.8 mit gleichem Vorzeichen ungleich Null).

7. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[4] = 0
7. A-Schritt :	Wirbelgroesse_2[4] = 0
Wirbelgroesse_1[1] = 0	Wirbelgroesse_3[4] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0	11. C-Schritt :
8. C-Schritt :	11. A-Schritt :
8. A-Schritt :	Wirbelgroesse_1[5] = 0
Wirbelgroesse_1[2] = 0	Wirbelgroesse_2[5] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0	12. C-Schritt :+(-4)*x ¹² *y ⁰ +(-8)*x ⁶ *y ⁶
9. C-Schritt :	12. A-Schritt :+(-4)*x ⁹ *y ¹ +(-36/5)*x ⁵ *y ⁵ +(-8/7)*x ³ *y ⁷ +(-4)*x ¹ *y ⁹
9. A-Schritt :	
Wirbelgroesse_1[3] = 0	
Wirbelgroesse_2[3] = 0	
10. C-Schritt :	
10. A-Schritt :	Wirbelgroesse_1[6] = -4
	Wirbelgroesse_2[6] = -8/7

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3-2x^6y^3-x^2y^7}{y^3+x^7y^2}$.

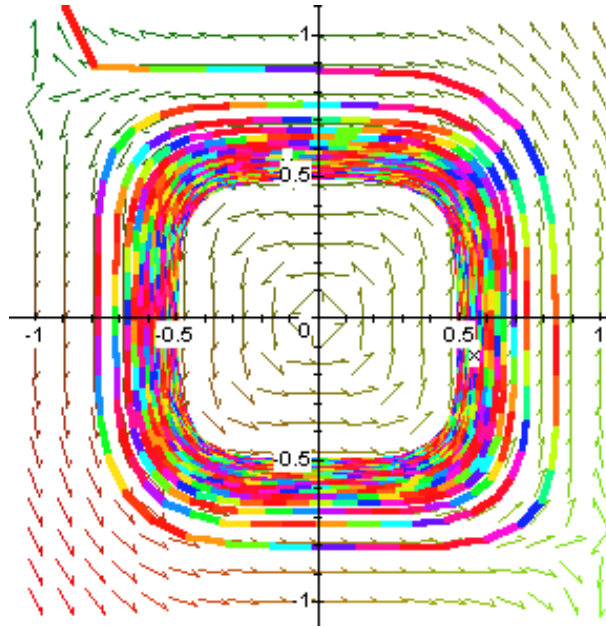


Abbildung 4.11: Startpunkt(0.5/0)

Der Algorithmus berechnete dazu für einen Unbestimmtheitsfall sprechende Werte (n zwar bei erzwungenem Abbruch gerade, aber $d_{n,0}$ und $d_{0,n}$ gleich Null).

7. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[4] = 0
7. A-Schritt :	Wirbelgroesse_2[4] = 0
Wirbelgroesse_1[1] = 0	Wirbelgroesse_3[4] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0	11. C-Schritt :
8. C-Schritt :	11. A-Schritt :
8. A-Schritt :	Wirbelgroesse_1[5] = 0
Wirbelgroesse_1[2] = 0	Wirbelgroesse_2[5] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0	12. C-Schritt :+(4)*x ¹⁰ *y ² +(-8)*x ⁶ *y ⁶ +(-4)*x ² *y ¹⁰
9. C-Schritt :	
9. A-Schritt :	12. A-Schritt :+(4/3)*x ⁷ *y ³ +(4/21)*x ³ *y ⁷
Wirbelgroesse_1[3] = 0	
Wirbelgroesse_2[3] = 0	
10. C-Schritt :	Wirbelgroesse_1[6] = 0
10. A-Schritt :	Wirbelgroesse_2[6] = 32/21

Die hier betrachtete Differentialgleichung lautet $\mathbf{y}' = -\frac{x^3+y^7}{y^3+x^7}$.

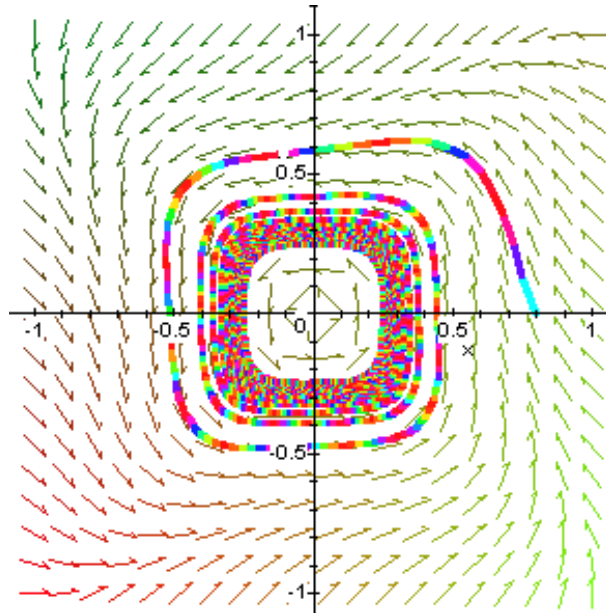


Abbildung 4.12: Startpunkt(0.8/0)

Der Algorithmus berechnete dazu für einen Strudelfall sprechende Werte (erzwungener Abbruch mit n gerade, $d_{n,0}$ und $d_{0,n}$ ungleich Null und gleiches Vorzeichen, Rest der $d_{i,k}$ gleich Null).

```

7. C-Schritt :
7. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[1] = 0
Wirbelgroesse_2[1] = 0
8. C-Schritt :
8. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[2] = 0
Wirbelgroesse_2[2] = 0
9. C-Schritt :
9. A-Schritt :
Wirbelgroesse_1[3] = 0
Wirbelgroesse_2[3] = 0
10. C-Schritt : +(4)*x^10*y^0+(4)*x^0*y^10
10. A-Schritt : +(4)*x^7*y^1+(28/5)*x^3*y^5
Wirbelgroesse_1[4] = 28/5
Wirbelgroesse_2[4] = 0
Wirbelgroesse_3[4] = 4

```

4.3 Überlegungen für $h \geq 3$

Nachdem sich in Abschnitt 4.2 nur eingehend mit dem Fall $h=2$, also mit Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x^3 + p_{\geq 4}(x, y)}{y^3 + q_{\geq 4}(x, y)}$$

beschäftigt worden ist, soll es in diesem Abschnitt um Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x^{2h-1} + p_{\geq 2h}(x, y)}{y^{2h-1} + q_{\geq 2h}(x, y)}, \quad h \geq 3$$

gehen. Hierbei wird im ersten Absatz im speziellen auf den Fall $h=3$ eingegangen, bevor im folgenden ein Ausblick auf beliebige Differentialgleichungen der oben genannten Form gegeben werden soll.

4.3.1 Die Berechnung rekursiver Formeln für $h=3$

Für $h=3$ ist die Vorgehensweise, um rekursive Formel für die Berechnung der $A_{i,j}$ zu erhalten, ähnlich zu der im Fall $h=2$ vorgestellten.

Zuerst muß man sich auch hier die Struktur des im A-Schritt aufgestellten linearen Gleichungssystems über mehrere Rekursionschritte n hinweg anschauen.

Bei Betrachtung mehrerer Gleichungssysteme (vgl. hierzu Anhang B) wird dann zu erkennen sein, daß hier im Gegensatz zu $h=2$ eine Fallunterscheidung nach $n \bmod 6$ von Nöten ist.

Untersucht man die Struktur innerhalb eines Gleichungssystems näher, so stellt man fest, daß, die für die Bestimmung von $A_{n-5,1}$, $A_{n-6,2}$, $A_{n-7,3}$, $A_{n-8,4}$, $A_{n-9,5}$ und $A_{1,n-5}$, $A_{2,n-6}$, $A_{3,n-7}$, $A_{4,n-8}$, $A_{5,n-9}$ aufgestellten Gleichungen, einfach¹⁵ sind. Die restlichen Gleichungen, deren Anzahl wieder vom Rekursionsgrad n abhängt sind nach dem Schema genau zwei $A_{i,j}$ und ein $C_{i,j}$ aufgebaut.

Zusätzlich kann auch hier festgestellt werden, daß das Gleichungssystem in mehrere, in diesem Fall sechs, Teilsysteme zerfällt.

Es bietet sich hier also genauso wie bei $h=2$ an mit einer einfachen Gleichung in einem Teilsystem zu starten, um so auf die anderen $A_{i,j}$ dieses Systems zu schließen. Ausnahme bildet auch hier wieder das einmal auftretende unterbestimmte Teilsystem.

Die Lösung des kompletten Gleichungssystem wird dann durch Berechnung der einzelnen Teilsysteme gefunden.

¹⁵einfach im gleichen Sinn wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben

Gegebenenfalls muß in den einzelnen Teilsystemen, die zum Teil überbestimmt sind, natürlich auch ein Vergleich von $A_{i,j}$ und $A'_{i,j}$ durchgeführt werden.

Auf diese Art und Weise entstehen dann 36 Gleichungen, die, aufgrund ihres Ausmasses nicht hier, sondern in Anhang D dargestellt sind.

4.3.2 Ausblick für $h > 3$

Inhalt dieses Abschnittes soll ein kleiner Ausblick auf Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x^{2h-1} + p_{\geq 2h}(x, y)}{y^{2h-1} + q_{\geq 2h}(x, y)}, \quad h > 3$$

sein.

Sieht man sich die Struktur der im A-Schritt aufgestellten linearen Gleichungssysteme über mehrere Potenzen h und mehrere Rekursionsschritte n hinweg an (vgl. hierzu Anhang B), so stellt man folgenden Zusammenhang

	h=1	h=2	h=3	...
n=3	(2,2)(2,2)	-	-	...
n=4	(3,2)(2,3)	-	-	...
n=5	(3,3)(3,3)	-	-	...
n=6	(4,3)(3,4)	-	-	...
n=7	(4,4)(4,4)	(2,1)(2,1)(2,2)(2,2)	-	...
n=8	(5,4)(4,5)	(3,2)(2,1)(2,2)(2,2)	-	...
n=9	(5,5)(5,5)	(3,2)(3,2)(2,2)(2,2)	-	...
n=10	(6,5)(5,6)	(3,2)(3,2)(3,2)(2,3)	-	...
n=11	(6,6)(6,6)	(3,2)(3,2)(3,3)(3,3)	(2,1)(2,1)(2,1)(2,1)(2,2)(2,2)	...
n=12	(7,6)(6,7)	(4,3)(3,2)(3,3)(3,3)	(3,2)(2,1)(2,1)(2,1)(2,2)(2,2)	...
n=13	(7,7)(7,7)	(4,3)(4,3)(3,3)(3,3)	(3,2)(3,2)(2,1)(2,1)(2,2)(2,2)	...
n=14	(8,7)(7,8)	(4,3)(4,3)(4,3)(3,4)	(3,2)(3,2)(3,2)(2,1)(2,2)(2,2)	...
n=15	(8,8)(8,8)	(4,3)(4,3)(4,4)(4,4)	(3,2)(3,2)(3,2)(3,2)(2,2)(2,2)	...
n=16	(9,8)(8,9)	(5,4)(4,3)(4,4)(4,4)	(3,2)(3,2)(3,2)(3,2)(3,2)(2,3)	...
n=17	(9,9)(9,9)	(5,4)(5,4)(4,4)(4,4)	(3,2)(3,2)(3,2)(3,2)(3,3)(3,3)	...
n=18	(10,9)(9,10)	(5,4)(5,4)(5,4)(4,5)	(4,3)(3,2)(3,2)(3,2)(3,3)(3,3)	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

fest. Wobei an dieser Übersicht leicht zu erkennen ist, daß, wie in Abschnitt 4.2.3 bereits angesprochen wurde, das im A-Schritt aufgestellte lineare Gleichungssystem für $h=2$ in vier und für $h=3$ in sechs Teilsysteme, hier durch die Anzahl der Klammerpaare zum Ausdruck gebracht, zerfällt. Desweiteren soll die erste Zahl eines jeden Klammerpaares für die Anzahl der, in diesem Teilsystem enthaltenen, Gleichungen und die zweite Zahl für die entsprechende Anzahl an Unbekannten stehen.

Hieraus, betrachtet man speziell mehrere h 's, ist zu ersehen, daß die Anzahl von Wirbelgrößen abhängig von h und damit von der Anfangspotenz der zu betrachtenden Differentialgleichung ist. Genauer gesagt sind für $h=1$ keine oder eine, für $h=2$ zwei oder drei, für $h=3$ vier oder fünf, für $h=4$ sechs oder sieben, ..., Wirbelgrößen bzw. für den Fall $h=1$ Strudelgrößen zu berechnen.

Bei Betrachtung der Struktur „innerhalb“ eines h 's über mehrere n hinweg fällt dagegen auf, daß sich jedes $n \bmod 2h$ -te Gleichungssystem gleicht und jedes dieser Gleichungssystem in $2h$ Teilsysteme zerfällt.

Damit liegt die Vermutung nahe, daß sich, auf die gleiche Art und Weise wie bisher geschehen, auch für $h > 3$ rekursive Formeln, die bis auf den Index den bisher vorgestellten ähneln, aufstellen lassen.

Man sollte allerdings beachten, daß die Anzahl der für die Lösung des linearen Gleichungssystems benötigten Gleichungen nach der Formel $(2h)^2$, also quadratisch, anwächst.

Anhang A

Symbolverzeichnis

Räume

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen
 $\mathbb{Q}$: Körper der rationalen Zahlen
 $\mathbb{R}$: Körper der reellen Zahlen
 $\mathbb{C}$: Körper der komplexen Zahlen
 $\mathbb{R}^{++}$: positive Zahlen

Autonomes System

ω : Pfaffsche Form
 $\dot{x}$: 1. Ableitung
 dF : Differential
 $A(x, y), B(x, y)$: Funktionen als Abbildungen von Teilmengen des $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Koeffizienten

$C_{ij}^{(n)}$: Koeffizienten des C-Schrittes
 $A_{ij}^{(n)}$: Koeffizienten des neuen homogen Polynoms n-ten Grades
 $F(x, y)$: Design Stammfunktion bzw. Stammfunktion der
Vergleichsdifferentialgleichung

weitere Bezeichnungen

$|a|$: Betrag von a
 G : offene Umgebung $\subset \mathbb{R}^2$
 I : Intervall
 D_i : i-te Strudelgröße, Definition wie in Satz 2.14

Anhang B

Lineare Gleichungssysteme

B.1 Gleichungssysteme für $h=2$; $n = 7, \dots, 14$

n=7, also $n \bmod 4 = 3$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{4,1} & & + & B_{7,0} & = & 0 \\
 -2A_{3,2} & & + & B_{6,1} & = & 0 \\
 -3A_{2,3} & & + & B_{5,2} & = & 0 \\
 -4A_{1,4} & + & 5A_{5,0} & + & B_{4,3} & = & 0 \\
 -5A_{0,5} & + & 4A_{4,1} & + & B_{3,4} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,2} & + & B_{2,5} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,3} & + & B_{1,6} & = & 0 \\
 & & A_{1,4} & + & B_{0,7} & = & 0
 \end{array}$$

n=8, also $n \bmod 4 = 0$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{5,1} & & + & B_{8,0} & = & 0 \\
 -2A_{4,2} & & + & B_{7,1} & = & 0 \\
 -3A_{3,3} & & + & B_{6,2} & = & 0 \\
 -4A_{2,4} & + & 6A_{6,0} & + & B_{5,3} & = & 0 \\
 -5A_{1,5} & + & 5A_{5,1} & + & B_{4,4} & = & 0 \\
 -6A_{0,6} & + & 4A_{4,2} & + & B_{3,5} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,3} & + & B_{2,6} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,4} & + & B_{1,7} & = & 0 \\
 & & A_{1,5} & + & B_{0,8} & = & 0
 \end{array}$$

n=9, also $n \bmod 4 = 1$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{6,1} & & + & B_{9,0} & = & 0 \\
 -2A_{5,2} & & + & B_{8,1} & = & 0 \\
 -3A_{4,3} & & + & B_{7,2} & = & 0 \\
 -4A_{3,4} & + & 7A_{7,0} & + & B_{6,3} & = & 0 \\
 -5A_{2,5} & + & 6A_{6,1} & + & B_{5,4} & = & 0 \\
 -6A_{1,6} & + & 5A_{5,2} & + & B_{4,5} & = & 0 \\
 -7A_{0,7} & + & 4A_{4,3} & + & B_{3,6} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,4} & + & B_{2,7} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,5} & + & B_{1,8} & = & 0 \\
 & & A_{1,6} & + & B_{0,9} & = & 0
 \end{array}$$

n=10, also $n \bmod 4 = 2$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{7,1} & & + & B_{10,0} & = & 0 \\
 -2A_{6,2} & & + & B_{9,1} & = & 0 \\
 -3A_{5,3} & & + & B_{8,2} & = & 0 \\
 -4A_{4,4} & + & 8A_{8,0} & + & B_{7,3} & = & 0 \\
 -5A_{3,5} & + & 7A_{7,1} & + & B_{6,4} & = & 0 \\
 -6A_{2,6} & + & 6A_{6,2} & + & B_{5,5} & = & 0 \\
 -7A_{1,7} & + & 5A_{5,3} & + & B_{4,6} & = & 0 \\
 -8A_{0,8} & + & 4A_{4,4} & + & B_{3,7} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,5} & + & B_{2,8} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,6} & + & B_{1,9} & = & 0 \\
 & & A_{1,7} & + & B_{0,10} & = & 0
 \end{array}$$

n=11, also $n \bmod 4 = 3$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{8,1} & & + & B_{11,0} & = & 0 \\
-2A_{7,2} & & + & B_{10,1} & = & 0 \\
-3A_{6,3} & & + & B_{9,2} & = & 0 \\
-4A_{5,4} & + & 9A_{9,0} & + & B_{8,3} & = & 0 \\
-5A_{4,5} & + & 8A_{8,1} & + & B_{7,4} & = & 0 \\
-6A_{3,6} & + & 7A_{7,2} & + & B_{6,5} & = & 0 \\
-7A_{2,7} & + & 6A_{6,3} & + & B_{5,6} & = & 0 \\
-8A_{1,8} & + & 5A_{5,4} & + & B_{4,7} & = & 0 \\
-9A_{0,9} & + & 4A_{4,5} & + & B_{3,8} & = & 0 \\
& & 3A_{3,6} & + & B_{2,9} & = & 0 \\
& & 2A_{2,7} & + & B_{1,10} & = & 0 \\
& & A_{1,8} & + & B_{0,11} & = & 0
\end{array}$$

n=12, also $n \bmod 4 = 0$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{9,1} & & + & B_{12,0} & = & 0 \\
-2A_{8,2} & & + & B_{11,1} & = & 0 \\
-3A_{7,3} & & + & B_{10,2} & = & 0 \\
-4A_{6,4} & + & 10A_{10,0} & + & B_{9,3} & = & 0 \\
-5A_{5,5} & + & 9A_{9,1} & + & B_{8,4} & = & 0 \\
-6A_{4,6} & + & 8A_{8,2} & + & B_{7,5} & = & 0 \\
-7A_{3,7} & + & 7A_{7,3} & + & B_{6,6} & = & 0 \\
-8A_{2,8} & + & 6A_{6,4} & + & B_{5,7} & = & 0 \\
-9A_{1,9} & + & 5A_{5,5} & + & B_{4,8} & = & 0 \\
-10A_{0,10} & + & 4A_{4,6} & + & B_{3,9} & = & 0 \\
& & 3A_{3,7} & + & B_{2,10} & = & 0 \\
& & 2A_{2,8} & + & B_{1,11} & = & 0 \\
& & A_{1,9} & + & B_{0,12} & = & 0
\end{array}$$

n=13, also $n \bmod 4 = 1$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{10,1} & & + & B_{13,0} & = & 0 \\
-2A_{9,2} & & + & B_{12,1} & = & 0 \\
-3A_{8,3} & & + & B_{11,2} & = & 0 \\
-4A_{7,4} & + & 11A_{11,0} & + & B_{10,3} & = & 0 \\
-5A_{6,5} & + & 10A_{10,1} & + & B_{9,4} & = & 0 \\
-6A_{5,6} & + & 9A_{9,2} & + & B_{8,5} & = & 0 \\
-7A_{4,7} & + & 8A_{8,3} & + & B_{7,6} & = & 0 \\
-8A_{3,8} & + & 7A_{7,4} & + & B_{6,7} & = & 0 \\
-9A_{2,9} & + & 6A_{6,5} & + & B_{5,8} & = & 0 \\
-10A_{1,10} & + & 5A_{5,6} & + & B_{4,9} & = & 0 \\
-11A_{0,11} & + & 4A_{4,7} & + & B_{3,10} & = & 0 \\
& & 3A_{3,8} & + & B_{2,11} & = & 0 \\
& & 2A_{2,9} & + & B_{1,12} & = & 0 \\
& & A_{1,10} & + & B_{0,13} & = & 0
\end{array}$$

n=14, also $n \bmod 4 = 2$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{11,1} & & + & B_{14,0} & = & 0 \\
-2A_{10,2} & & + & B_{13,1} & = & 0 \\
-3A_{9,3} & & + & B_{12,2} & = & 0 \\
-4A_{8,4} & + & 12A_{12,0} & + & B_{11,3} & = & 0 \\
-5A_{7,5} & + & 11A_{11,1} & + & B_{10,4} & = & 0 \\
-6A_{6,6} & + & 10A_{10,2} & + & B_{9,5} & = & 0 \\
-7A_{5,7} & + & 9A_{9,3} & + & B_{8,6} & = & 0 \\
-8A_{4,8} & + & 8A_{8,4} & + & B_{7,7} & = & 0 \\
-9A_{3,9} & + & 7A_{7,5} & + & B_{6,8} & = & 0 \\
-10A_{2,10} & + & 6A_{6,6} & + & B_{5,9} & = & 0 \\
-11A_{1,11} & + & 5A_{5,7} & + & B_{4,10} & = & 0 \\
-12A_{0,12} & + & 4A_{4,8} & + & B_{3,11} & = & 0 \\
& & 3A_{3,9} & + & B_{2,12} & = & 0 \\
& & 2A_{2,10} & + & B_{1,13} & = & 0 \\
& & A_{1,11} & + & B_{0,14} & = & 0
\end{array}$$

B.2 Gleichungssysteme für $h=3$; $n = 11, \dots, 18$

n=11, also $n \bmod 6 = 5$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{6,1} & & + & B_{11,0} & = & 0 \\
 -2A_{5,2} & & + & B_{10,1} & = & 0 \\
 -3A_{4,3} & & + & B_{9,2} & = & 0 \\
 -4A_{3,4} & + & & + & B_{8,3} & = & 0 \\
 -5A_{2,5} & + & & + & B_{7,4} & = & 0 \\
 -6A_{1,6} & + & 7A_{7,0} & + & B_{6,5} & = & 0 \\
 -7A_{0,7} & + & 6A_{6,1} & + & B_{5,6} & = & 0 \\
 & & 5A_{5,2} & + & B_{4,7} & = & 0 \\
 & & 4A_{4,3} & + & B_{3,8} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,4} & + & B_{2,9} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,5} & + & B_{1,10} & = & 0 \\
 & & A_{1,6} & + & B_{0,11} & = & 0
 \end{array}$$

n=12, also $n \bmod 6 = 0$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{7,1} & & + & B_{12,0} & = & 0 \\
 -2A_{6,2} & & + & B_{11,1} & = & 0 \\
 -3A_{5,3} & & + & B_{10,2} & = & 0 \\
 -4A_{4,4} & + & & + & B_{9,3} & = & 0 \\
 -5A_{3,5} & + & & + & B_{8,4} & = & 0 \\
 -6A_{2,6} & + & 8A_{8,0} & + & B_{7,5} & = & 0 \\
 -7A_{1,7} & + & 7A_{7,1} & + & B_{6,6} & = & 0 \\
 -8A_{0,8} & + & 6A_{6,2} & + & B_{5,7} & = & 0 \\
 & & 5A_{5,3} & + & B_{4,8} & = & 0 \\
 & & 4A_{4,4} & + & B_{3,9} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,5} & + & B_{2,10} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,6} & + & B_{1,11} & = & 0 \\
 & & A_{1,7} & + & B_{0,12} & = & 0
 \end{array}$$

n=13, also $n \bmod 6 = 1$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{8,1} & & + & B_{13,0} & = & 0 \\
 -2A_{7,2} & & + & B_{12,1} & = & 0 \\
 -3A_{6,3} & & + & B_{11,2} & = & 0 \\
 -4A_{5,4} & + & & + & B_{10,3} & = & 0 \\
 -5A_{4,5} & + & & + & B_{9,4} & = & 0 \\
 -6A_{3,6} & + & 9A_{9,0} & + & B_{8,5} & = & 0 \\
 -7A_{2,7} & + & 8A_{8,1} & + & B_{7,6} & = & 0 \\
 -8A_{1,8} & + & 7A_{7,2} & + & B_{6,7} & = & 0 \\
 -9A_{0,9} & + & 6A_{6,3} & + & B_{5,8} & = & 0 \\
 & & 5A_{5,4} & + & B_{4,9} & = & 0 \\
 & & 4A_{4,5} & + & B_{3,10} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,6} & + & B_{2,11} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,7} & + & B_{1,12} & = & 0 \\
 & & A_{1,8} & + & B_{0,13} & = & 0
 \end{array}$$

n=14, also $n \bmod 6 = 2$

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{9,1} & & + & B_{14,0} & = & 0 \\
 -2A_{8,2} & & + & B_{13,1} & = & 0 \\
 -3A_{7,3} & & + & B_{12,2} & = & 0 \\
 -4A_{6,4} & + & & + & B_{11,3} & = & 0 \\
 -5A_{5,5} & + & & + & B_{10,4} & = & 0 \\
 -6A_{4,6} & + & 10A_{10,0} & + & B_{9,5} & = & 0 \\
 -7A_{3,7} & + & 9A_{9,1} & + & B_{8,6} & = & 0 \\
 -8A_{2,8} & + & 8A_{8,2} & + & B_{7,7} & = & 0 \\
 -9A_{1,9} & + & 7A_{7,3} & + & B_{6,8} & = & 0 \\
 -10A_{0,10} & + & 6A_{6,4} & + & B_{5,9} & = & 0 \\
 & & 5A_{5,5} & + & B_{4,10} & = & 0 \\
 & & 4A_{4,6} & + & B_{3,11} & = & 0 \\
 & & 3A_{3,7} & + & B_{2,12} & = & 0 \\
 & & 2A_{2,8} & + & B_{1,13} & = & 0 \\
 & & A_{1,9} & + & B_{0,14} & = & 0
 \end{array}$$

n=15, also $n \bmod 6 = 3$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{10,1} & & + & B_{15,0} & = & 0 \\
-2A_{9,2} & & + & B_{14,1} & = & 0 \\
-3A_{8,3} & & + & B_{13,2} & = & 0 \\
-4A_{7,4} & + & & + & B_{12,3} & = & 0 \\
-5A_{6,5} & + & & + & B_{11,4} & = & 0 \\
-6A_{5,6} & + & 11A_{11,0} & + & B_{10,5} & = & 0 \\
-7A_{4,7} & + & 10A_{10,1} & + & B_{9,6} & = & 0 \\
-8A_{3,8} & + & 9A_{9,2} & + & B_{8,7} & = & 0 \\
-9A_{2,9} & + & 8A_{8,3} & + & B_{7,8} & = & 0 \\
-10A_{1,10} & + & 7A_{7,4} & + & B_{6,9} & = & 0 \\
-11A_{0,11} & + & 6A_{6,5} & + & B_{5,10} & = & 0 \\
& & 5A_{5,6} & + & B_{4,11} & = & 0 \\
& & 4A_{4,7} & + & B_{3,12} & = & 0 \\
& & 3A_{3,8} & + & B_{2,13} & = & 0 \\
& & 2A_{2,9} & + & B_{1,14} & = & 0 \\
& & A_{1,10} & + & B_{0,15} & = & 0
\end{array}$$

n=16, also $n \bmod 6 = 4$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{11,1} & & + & B_{16,0} & = & 0 \\
-2A_{10,2} & & + & B_{15,1} & = & 0 \\
-3A_{9,3} & & + & B_{14,2} & = & 0 \\
-4A_{8,4} & + & & + & B_{13,3} & = & 0 \\
-5A_{7,5} & + & & + & B_{12,4} & = & 0 \\
-6A_{6,6} & + & 12A_{12,0} & + & B_{11,5} & = & 0 \\
-7A_{5,7} & + & 11A_{11,1} & + & B_{10,6} & = & 0 \\
-8A_{4,8} & + & 10A_{10,2} & + & B_{9,7} & = & 0 \\
-9A_{3,9} & + & 9A_{9,3} & + & B_{8,8} & = & 0 \\
-10A_{2,10} & + & 8A_{8,4} & + & B_{7,9} & = & 0 \\
-11A_{1,11} & + & 7A_{7,5} & + & B_{6,10} & = & 0 \\
-12A_{0,12} & + & 6A_{6,6} & + & B_{5,11} & = & 0 \\
& & 5A_{5,7} & + & B_{4,12} & = & 0 \\
& & 4A_{4,8} & + & B_{3,13} & = & 0 \\
& & 3A_{3,9} & + & B_{2,14} & = & 0 \\
& & 2A_{2,10} & + & B_{1,15} & = & 0 \\
& & A_{1,11} & + & B_{0,16} & = & 0
\end{array}$$

n=17, also $n \bmod 6 = 5$

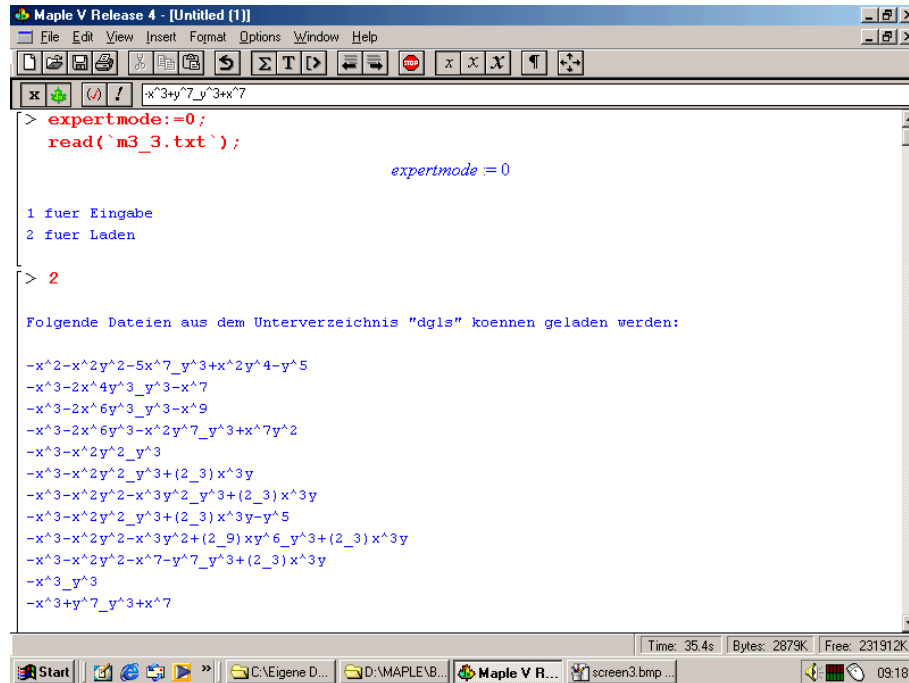
$$\begin{array}{rclcl}
-A_{12,1} & & + & B_{17,0} & = & 0 \\
-2A_{11,2} & & + & B_{16,1} & = & 0 \\
-3A_{10,3} & & + & B_{15,2} & = & 0 \\
-4A_{9,4} & + & & + & B_{14,3} & = & 0 \\
-5A_{8,5} & + & & + & B_{13,4} & = & 0 \\
-6A_{7,6} & + & 13A_{13,0} & + & B_{12,5} & = & 0 \\
-7A_{6,7} & + & 12A_{12,1} & + & B_{11,6} & = & 0 \\
-8A_{5,8} & + & 11A_{11,2} & + & B_{10,7} & = & 0 \\
-9A_{4,9} & + & 10A_{10,3} & + & B_{9,8} & = & 0 \\
-10A_{3,10} & + & 9A_{9,4} & + & B_{8,9} & = & 0 \\
-11A_{2,11} & + & 8A_{8,5} & + & B_{7,10} & = & 0 \\
-12A_{1,12} & + & 7A_{7,6} & + & B_{6,11} & = & 0 \\
-13A_{0,13} & + & 6A_{6,7} & + & B_{5,12} & = & 0 \\
& & 5A_{5,8} & + & B_{4,13} & = & 0 \\
& & 4A_{4,9} & + & B_{3,14} & = & 0 \\
& & 3A_{3,10} & + & B_{2,15} & = & 0 \\
& & 2A_{2,11} & + & B_{1,16} & = & 0 \\
& & A_{1,12} & + & B_{0,17} & = & 0
\end{array}$$

n=18, also $n \bmod 6 = 0$

$$\begin{array}{rclcl}
-A_{13,1} & & + & B_{18,0} & = & 0 \\
-2A_{12,2} & & + & B_{17,1} & = & 0 \\
-3A_{11,3} & & + & B_{16,2} & = & 0 \\
-4A_{10,4} & + & & + & B_{15,3} & = & 0 \\
-5A_{9,5} & + & & + & B_{14,4} & = & 0 \\
-6A_{8,6} & + & 14A_{14,0} & + & B_{13,5} & = & 0 \\
-7A_{7,7} & + & 13A_{13,1} & + & B_{12,6} & = & 0 \\
-8A_{6,8} & + & 12A_{12,2} & + & B_{11,7} & = & 0 \\
-9A_{5,9} & + & 11A_{11,3} & + & B_{10,8} & = & 0 \\
-10A_{4,10} & + & 10A_{10,4} & + & B_{9,9} & = & 0 \\
-11A_{3,11} & + & 9A_{9,5} & + & B_{8,10} & = & 0 \\
-12A_{2,12} & + & 8A_{8,6} & + & B_{7,11} & = & 0 \\
-13A_{1,13} & + & 7A_{7,7} & + & B_{6,12} & = & 0 \\
-14A_{0,14} & + & 6A_{6,8} & + & B_{5,13} & = & 0 \\
& & 5A_{5,9} & + & B_{4,14} & = & 0 \\
& & 4A_{4,10} & + & B_{3,15} & = & 0 \\
& & 3A_{3,11} & + & B_{2,16} & = & 0 \\
& & 2A_{2,12} & + & B_{1,17} & = & 0 \\
& & A_{1,13} & + & B_{0,18} & = & 0
\end{array}$$

Anhang C

Mapleprogramm - Screenshots und Quellcode



```
Maple V Release 4 - [Untitled (1)]
File Edit View Insert Format Options Window Help
[Icons]
x^3+y^7_y^3+x^7
> expertmode:=0;
  read('m3_3.txt');
                                     expertmode := 0

1 fuer Eingabe
2 fuer Laden
> 2

Folgende Dateien aus dem Unterverzeichnis "dgl3" koennen geladen werden:

-x^2-x^2y^2-5x^7_y^3+x^2y^4-y^5
-x^3-2x^4y^3_y^3-x^7
-x^3-2x^6y^3_y^3-x^9
-x^3-2x^6y^3-x^2y^7_y^3+x^7y^2
-x^3-x^2y^2_y^3
-x^3-x^2y^2_y^3+(2_3)x^3y
-x^3-x^2y^2-x^3y^2_y^3+(2_3)x^3y
-x^3-x^2y^2_y^3+(2_3)x^3y-y^5
-x^3-x^2y^2-x^3y^2+(2_9)xy^6_y^3+(2_3)x^3y
-x^3-x^2y^2-x^7-y^7_y^3+(2_3)x^3y
-x^3_y^3
-x^3+y^7_y^3+x^7

Time: 35.4s Bytes: 2879K Free: 231912K
Start [Icons] C:\Eigene D... D:\MAPLE\B... Maple V R... screen3.bmp ... 09:18
```

Abbildung C.1:

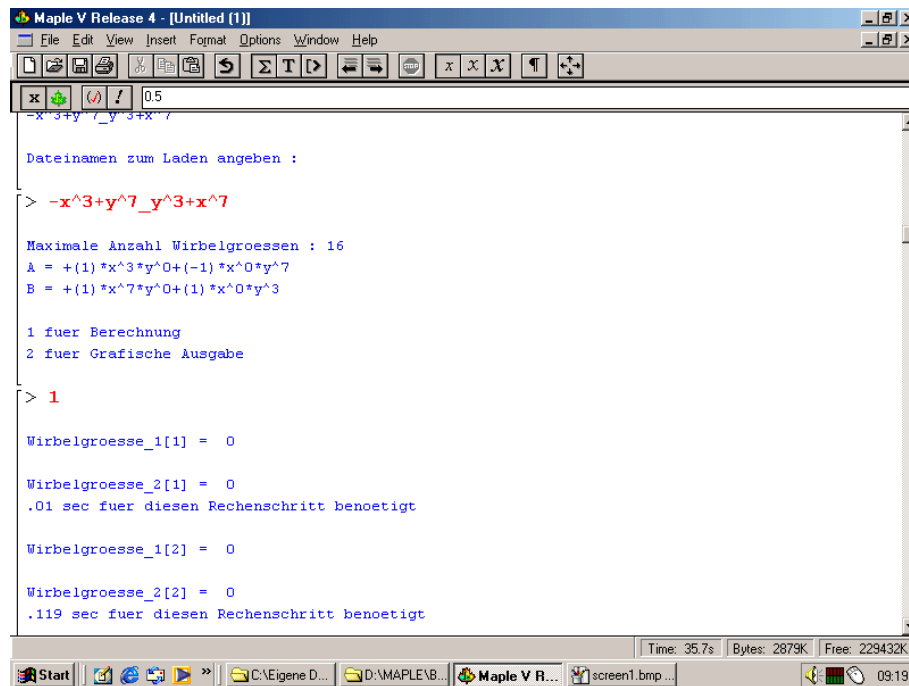


Abbildung C.2:

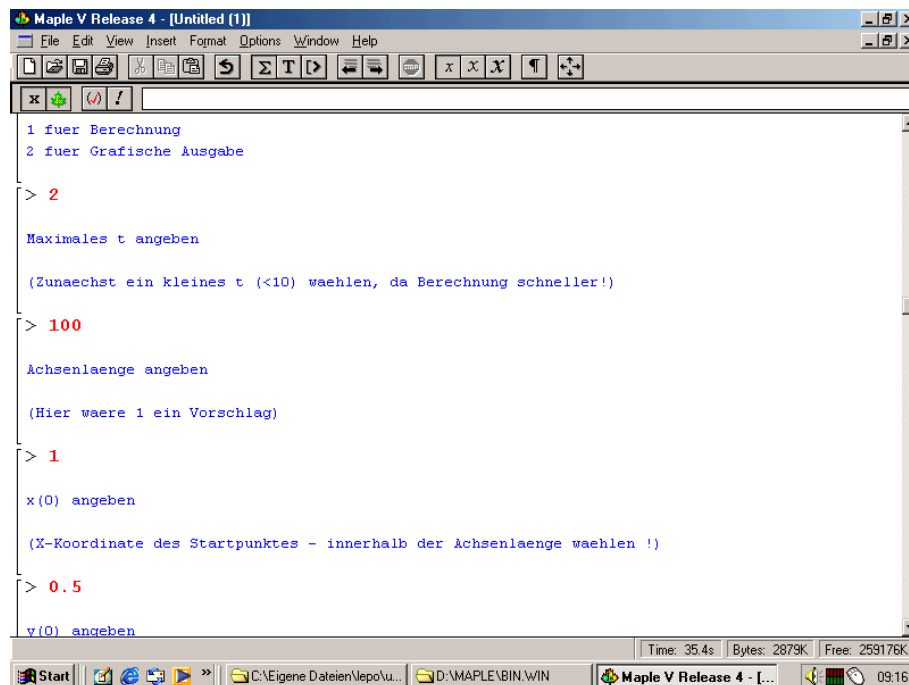


Abbildung C.3:

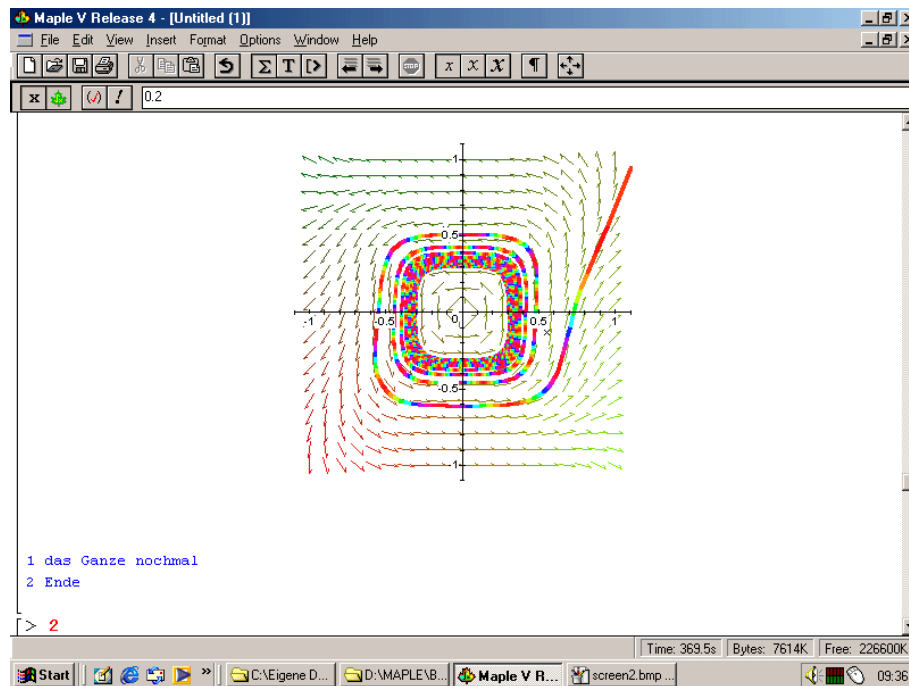


Abbildung C.4:

```
# ***** Diffgl. einlesen *****
Einlesen:=proc()
    global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel;
    local i, j, Hilfs_A_, Hilfs_B_;
    printf('\nMaximale Wirbelgroesse eingeben\n \n');
    if expertmode=0 then
        printf('(Zuerst mit einem Wert <10 testen)\n ');
    fi;
    maxstrudel:=parse(readline(terminal));
    init();
    printf('\nDifferentialgleichung der Form -A/B\n');
    printf('\nA eingeben\n');
    if expertmode=0 then
        printf('zB:  x+2*x^2*y+(1/3)*x^2*y^2+3^(1/2)*x^2*y^3\n ');
    fi;
    Poly_A:=simplify(parse(readline(terminal)));
    Poly_A:=-Poly_A;
    printf('\nB eingeben\n');
    if expertmode=0 then
        printf('zB:  y+2*x^2*y+(1/3)*x^2*y^2+3^(1/2)*x^2*y^3\n ');
    fi;
end proc;
```

```

Poly_B:=simplify(parse(readline(terminal)));
for i from 1 to degree(Poly_A) do
  p[i,0]:=coeff(Poly_A, x^i);
  p[i,0]:=subs(y=0, p[i,0]);
  p[0,i]:=coeff(Poly_A, y^i);
  p[0,i]:=subs(x=0, p[0,i]);
od:
for i from 1 to degree(Poly_B) do
  q[i,0]:=coeff(Poly_B, x^i);
  q[i,0]:=subs(y=0, q[i,0]);
  q[0,i]:=coeff(Poly_B, y^i);
  q[0,i]:=subs(x=0, q[0,i]);
od:
for i from 1 to degree(Poly_A) do
  Hilfs_A:=coeff(Poly_A, x^i);
  for j from 1 to degree(Poly_A) do
    p[i,j]:=coeff(Hilfs_A, y^j);
  od:
od:
for i from 1 to degree(Poly_B) do
  Hilfs_B:=coeff(Poly_B, x^i);
  for j from 1 to degree(Poly_B) do
    q[i,j]:=coeff(Hilfs_B, y^j);
  od:
od:
q[0,0]:=0;
p[0,0]:=0;
end:

# ***** Speicherprozedur *****
Speichern:=proc()
  global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel, dateiname, grad_A, grad_B;
  local i, j, fp;
  grad_A:=degree(Poly_A);
  grad_B:=degree(Poly_B);
  printf('\nDateinamen zum Abspeichern angeben :\n ');
  dateiname:=readline(terminal);
  dateiname:='dgls/'..dateiname;
  fp:=fopen(dateiname, WRITE, TEXT):
  fprintf(fp, 'maxstrudel:=%d;', maxstrudel):
  fprintf(fp, '\ngrad_A:=%d;', grad_A):
  fprintf(fp, '\ngrad_B:=%d;', grad_B):
  for j from 0 to degree(Poly_A) do

```

```

        for i from 0 to degree(Poly_A) do
            fprintf(fp, '\np[%d,%d]:=s;',i,j, convert(p[i,j],string)):
        od:
    od:
    for j from 0 to degree(Poly_B) do
        for i from 0 to degree(Poly_B) do
            fprintf(fp, '\nq[%d,%d]:=s;',i,j, convert(q[i,j],string)):
        od:
    od:
    fclose(fp);
end:

# ***** Datei laden *****
Lade:=proc()
    global dateiname;
    local dgls;
    printf(' \n');
    if expertmode=0 then
        printf('Folgende Dateien aus dem Unterverzeichnis "dgls" koennen
        geladen werden:\n \n');
    fi;
    dgls:=sssystem('dir dgls /b /on');
    printf('%s',dgls[2]);
    printf('\nDateinamen zum Laden angeben : \n ');
    dateiname:=readline(terminal);
    dateiname:='dgls/'..dateiname;
    # ***** quasi nur maxstrudel einlesen *****
    read(dateiname);
    # ***** Startinitialisierung *****
    init():
    # ***** p's und q's erneut einlesen da ueberschrieben !!! *****
    read(dateiname):
    Poly_bau();
end:

# ***** Initialisierungen *****
init:=proc()
    global p, q, A, B, aktueller_grad, dxA, dyA, maxstrudel:
    local i,j:
    for i from 0 to maxstrudel+7 do
        for j from 0 to maxstrudel+7 do
            p[i,j]:=0;

```

```

        q[i,j]:=0;
    od:
od:
A[4,0]:=1:
A[1,3]:=0:
A[3,1]:=0:
A[2,2]:=0:
A[0,4]:=1:
aktueller_grad:=6:
for i from 0 to maxstrudel+7 do
    for j from 0 to maxstrudel+7 do
        B[i,j]:=0;
    od;
od;
for i from 0 to maxstrudel+7 do
    for j from 0 to maxstrudel+7 do
        dyA[i, j]:=0;
        dxA[i, j]:=0;
    od:
od:
end:

# ***** Ableitungen von Gross_F *****
ableitung:=proc()
    global dyA,dxA:
    local i:
    for i from 0 to (aktueller_grad-4) do
        dyA[i, aktueller_grad-4-i]:=(aktueller_grad-3-i)*
        A[i, aktueller_grad-3-i];
        dxA[i, aktueller_grad-4-i]:=(i+1)*A[i+1, aktueller_grad-4-i];
    od:
end:

# ***** C-Schritt *****
CSchritt:=proc()
    global B:
    local k,l,m,n:
    for k from 0 to aktueller_grad do
        for l from 0 to aktueller_grad do
            for m from 0 to (aktueller_grad-4) do

```

```

    for n from 0 to (aktueller_grad-4) do
        if k+m+l+n=aktueller_grad then
            if m+n>2 then # >2 wegen grad 3!
                B[k+m,l+n]:=p[k,l]*dyA[m,n]+q[k,l]*dxA[m,n]+B[k+m,l+n];
            fi;
        fi;
    od;
od;
od;
od;
od;
end:

```

***** A-Schritt *****

```

ASchritt:=proc()
    global aktueller_grad,B,A;
    local x:

    if (aktueller_grad mod 4) = 3 then
        A[aktueller_grad-3, 1]:=B[aktueller_grad, 0];
        for x from 1 to ((aktueller_grad-3)/4) do
            A[(aktueller_grad-3)-(4*x), 1+(4*x)]:=1/(1+(4*x))*
            ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
            A[(aktueller_grad-3)-((x-1)*4), 1+((x-1)*4)]
            +B[aktueller_grad-(x*4), (x*4)] );
        od:
        A[1, aktueller_grad-3]:=-B[0, aktueller_grad];
        for x from 1 to ((aktueller_grad-3)/4) do
            A[1+(4*x), (aktueller_grad-3)-(4*x)]:=1/(1+(4*x))*
            ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
            A[1+((x-1)*4), (aktueller_grad-3)-((x-1)*4)]-
            B[(x*4), aktueller_grad-(x*4)] );
        od:
        A[aktueller_grad-4, 2]:=(1/2)*B[aktueller_grad-1, 1];
        for x from 1 to (((aktueller_grad-3)/4)-1) do
            A[(aktueller_grad-4)-(4*x), 2+(4*x)]:=1/(2+(4*x))*
            ( ((aktueller_grad-4)-((x-1)*4))*
            A[(aktueller_grad-4)-((x-1)*4), 2+((x-1)*4)]+
            B[(aktueller_grad-1)-(x*4), 1+(x*4)] );
        od:
        A[2, aktueller_grad-4]:=-(1/2)*B[1, aktueller_grad-1];
        for x from 1 to (((aktueller_grad-3)/4)-1) do
            A[2+(4*x), (aktueller_grad-4)-(4*x)]:=1/(2+(4*x))*

```

```

      ( ((aktueller_grad-4)-((x-1)*4))*
      A[2+((x-1)*4), (aktueller_grad-4)-((x-1)*4)] -
      B[1+(x*4), (aktueller_grad-1)-(x*4)] );
od:

elif (aktueller_grad mod 4) = 0 then
  A[aktueller_grad-4, 2] := (1/2)*B[(aktueller_grad-1), 1];
  for x from 1 to ((aktueller_grad-4)/4) do
    A[(aktueller_grad-4)-(4*x), 2+(4*x)] := 1/(2+(4*x))*
    ( ((aktueller_grad-4)-((x-1)*4))*
    A[(aktueller_grad-4)-((x-1)*4), 2+((x-1)*4)] +
    B[(aktueller_grad-1)-(x*4), 1+(x*4)] );
  od:
  A[2, aktueller_grad-4] := -(1/2)*B[1, (aktueller_grad-1)];
  for x from 1 to ((aktueller_grad-4)/4) do
    A[2+(4*x), (aktueller_grad-4)-(4*x)] := 1/(2+(4*x))*
    ( ((aktueller_grad-4)-((x-1)*4))*
    A[2+((x-1)*4), (aktueller_grad-4)-((x-1)*4)] -
    B[1+(x*4), (aktueller_grad-1)-(x*4)] );
  od:
  A[aktueller_grad-3, 1] := B[aktueller_grad, 0];
  for x from 1 to ((aktueller_grad-4)/4) do
    A[(aktueller_grad-3)-(4*x), 1+(4*x)] := 1/(1+(4*x))*
    ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
    A[(aktueller_grad-3)-((x-1)*4), 1+((x-1)*4)] +
    B[aktueller_grad-(x*4), (x*4)] );
  od:
  A[aktueller_grad-5, 3] := (1/3)*B[(aktueller_grad-2), 2];
  for x from 1 to (((aktueller_grad-4)/4)-1) do
    A[(aktueller_grad-5)-(4*x), 3+(4*x)] := 1/(3+(4*x))*
    ( ((aktueller_grad-5)-((x-1)*4))*
    A[(aktueller_grad-5)-((x-1)*4), 3+((x-1)*4)] +
    B[(aktueller_grad-2)-(x*4), 2+(x*4)] );
  od:

elif (aktueller_grad mod 4) = 1 then
  A[aktueller_grad-5, 3] := (1/3)*B[(aktueller_grad-2), 2];
  for x from 1 to ((aktueller_grad-5)/4) do
    A[(aktueller_grad-5)-(4*x), 3+(4*x)] := 1/(3+(4*x))*
    ( ((aktueller_grad-5)-((x-1)*4))*
    A[(aktueller_grad-5)-((x-1)*4), 3+((x-1)*4)] +
    B[(aktueller_grad-2)-(x*4), 2+(x*4)] );
  od:
  A[3, aktueller_grad-5] := -(1/3)*B[2, (aktueller_grad-2)];

```

```

for x from 1 to ((aktueller_grad-5)/4) do
  A[3+(4*x), (aktueller_grad-5)-(4*x)] := 1/(3+(4*x))*
  ( ((aktueller_grad-5)-((x-1)*4))*
  A[3+((x-1)*4), (aktueller_grad-5)-((x-1)*4)] -
  B[2+(x*4), (aktueller_grad-2)-(x*4)] );
od:
A[aktueller_grad-3, 1] := B[aktueller_grad, 0];
for x from 1 to ((aktueller_grad-5)/4) do
  A[(aktueller_grad-3)-(4*x), 1+(4*x)] := 1/(1+(4*x))*
  ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
  A[(aktueller_grad-3)-((x-1)*4), 1+((x-1)*4)] +
  B[aktueller_grad-(x*4), (x*4)] );
od:
A[1, aktueller_grad-3] := -B[0, aktueller_grad];
for x from 1 to ((aktueller_grad-5)/4) do
  A[1+(4*x), (aktueller_grad-3)-(4*x)] := 1/(1+(4*x))*
  ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
  A[1+((x-1)*4), (aktueller_grad-3)-((x-1)*4)] -
  B[(x*4), aktueller_grad-(x*4)] );
od:

else
A[0, aktueller_grad-2] := 0; #1 A im unterbestimmten Teil frei wählbar
for x from 1 to ((aktueller_grad-2)/4) do
  A[(4*x), (aktueller_grad-2)-(4*x)] := 1/(4*x)*
  ( ((aktueller_grad-2)-((x-1)*4))*
  A[((x-1)*4), (aktueller_grad-2)-((x-1)*4)] -
  B[3+(x*4), (aktueller_grad-2)-(x*4)] );
od:
A[aktueller_grad-3, 1] := B[aktueller_grad, 0];
for x from 1 to (((aktueller_grad-2)/4)-1) do
  A[(aktueller_grad-3)-(4*x), 1+(4*x)] := 1/(1+(4*x))*
  ( ((aktueller_grad-3)-((x-1)*4))*
  A[(aktueller_grad-3)-((x-1)*4), 1+((x-1)*4)] +
  B[aktueller_grad-(x*4), (x*4)] );
od:
A[aktueller_grad-4, 2] := (1/2)*B[(aktueller_grad-1), 1];
for x from 1 to (((aktueller_grad-2)/4)-1) do
  A[(aktueller_grad-4)-(4*x), 2+(4*x)] := 1/(2+(4*x))*
  ( ((aktueller_grad-4)-((x-1)*4))*
  A[(aktueller_grad-4)-((x-1)*4), 2+((x-1)*4)] +
  B[(aktueller_grad-1)-(x*4), 1+(x*4)] );
od:

```



```

    A[aktueller_grad-5, 3]:=(1/3)*B[(aktueller_grad-2), 2];
    for x from 1 to (((aktueller_grad-2)/4)-1) do
        A[(aktueller_grad-5)-(4*x), 3+(4*x)]:=1/(3+(4*x))*
        ( ((aktueller_grad-5)-((x-1)*4))*
        A[(aktueller_grad-5)-((x-1)*4), 3+((x-1)*4)]+
        B[(aktueller_grad-2)-(x*4), 2+(x*4)] );
    od:
fi:

end:

# ***** Ergebnisausgabe in Datei *****
ausgabeindatei:=proc()
    global aktueller_grad, A, B, Wirbelgroesse_1, Wirbelgroesse_2,
    Wirbelgroesse_3:
    local i,j,fp, erg_datei:
    printf('\n\nDateinamen zum Speichern der Ergebnisse
    angeben :\n \n');
    if expertmode=0 then
        printf('(Diese werden im Unterverzeichnis "ergs"
        gespeichert)\n ');
    fi;
    erg_datei:=readline(terminal);
    erg_datei:='ergs/'..erg_datei;
    fp:=fopen(erg_datei, WRITE, TEXT):
    fprintf(fp, 'Aktueller Grad = ');
    fprintf(fp, convert(aktueller_grad,string) ):
    for j from 5 to (aktueller_grad-2) do
        for i from 0 to j do
            fprintf(fp, '\nA[%d][%d] = ',i,j-i):
            fprintf(fp, convert(A[i,j-i],string) ):
        od:
    od:
    for j from 7 to aktueller_grad do
        for i from 0 to j do
            fprintf(fp, '\nB[%d][%d] = ',i,j-i):
            fprintf(fp, convert(B[i,j-i],string) ):
        od:
    od:
    for j from 1 to (aktueller_grad-6) do
        fprintf(fp, '\nWirbelgroesse_1[%d] = ',j):

```

```

    fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_1[j],string)):
    fprintf(fp,  '\nWirbelgroesse_2[%d] = ',j):
    fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_2[j],string)):
    if (j mod 4 = 0) then          # entspricht grad mod 4 = 2 !!!
        fprintf(fp,  '\nWirbelgroesse_3[%d] = ',j):
        fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_3[j],string)):
    fi:
od:

fprintf(fp,  '\n\n ***** \n'):

for i from 7 to aktueller_grad do
    fprintf(fp,  '\n%d. C-Schritt :',i):
    for j from 0 to i do
        if B[i-j,j]<>0 then
            fprintf(fp,  '+(%s)*x^%d*y^%d',
                convert((B[i-j,j]),string),i-j,j):
        fi:
    od:
    fprintf(fp,  '\n%d. A-Schritt :',i):
    for j from 0 to (i-2) do
        if A[(i-2)-j,j]<>0 then
            fprintf(fp,  '+(%s)*x^%d*y^%d',
                convert((A[(i-2)-j,j]),string),(i-2)-j,j):
        fi:
    od:
    fprintf(fp,  '\nWirbelgroesse_1[%d] = ',(i-6) ):
    fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_1[(i-6)],string)):
    fprintf(fp,  '\nWirbelgroesse_2[%d] = ',(i-6) ):
    fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_2[(i-6)],string)):
    if (i mod 4 = 2) then
        fprintf(fp,  '\nWirbelgroesse_3[%d] = ',(i-6) ):
        fprintf(fp,  convert(Wirbelgroesse_3[(i-6)],string)):
    fi:
od:

    fclose(fp):
end:

# ***** Frommer Algorithmus *****
Frommer:=proc()

```

```

global aktueller_grad;

# ***** aktuellen_grad erhöhen *****
aktueller_grad:=aktueller_grad+1:
# ***** Ableitung *****
ableitung():
# ***** C-Schritt*****
CSchritt():
# ***** A-Schritt *****
ASchritt():
end:

# ***** Testausgabe *****
Testausgabe:=proc()
  global p, q, maxstrudel, grad_A, grad_B:
  local i,j:
  printf('\nMaximale Anzahl Wirbelgroessen : %d',maxstrudel):
  printf('\nA = '):
  for j from 0 to grad_A do
    for i from 0 to grad_A do
      if p[i,j]<>0 then
        printf('+(%s)*x^%d*y^%d',
          convert((-p[i,j]),string),i,j):
      fi:
    od:
  od:
  printf('\nB = '):
  for j from 0 to grad_B do
    for i from 0 to grad_B do
      if q[i,j]<>0 then
        printf('+(%s)*x^%d*y^%d', convert(q[i,j],string),i,j):
      fi:
    od:
  od:
  printf('\n '):
end:

# ***** Polynom zusammenbauen *****
Poly_bau:=proc()

  global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel, grad_A, grad_B:
  local i,j:

```

```

Poly_A:=0;
Poly_B:=0;
for j from 0 to grad_A do
  for i from 0 to grad_A do
    Poly_A:=Poly_A+p[i,j]*x^i*y^j;
  od:
od:
for j from 0 to grad_B do
  for i from 0 to grad_B do
    Poly_B:=Poly_B+q[i,j]*x^i*y^j;
  od:
od:
end:

# ***** grafische Ausgabe *****
Grafik:=proc()
global Poly_A, Poly_B;
local Fkt_A, Fkt_B, Diagramm, max_t, achse, \
  x_axe, y_axe, x_start, y_start, xy_start, schrittweite;

printf('\nMaximales t angeben\n\n');
if expertmode=0 then
  printf('(Zunaechst ein kleines t (<10) waehlen, da
  Berechnung schneller!)\n ');
fi;
max_t:=readline(terminal);
printf('\nAchsenlaenge angeben\n\n');
if expertmode=0 then
  printf('(Hier waere 1 ein Vorschlag)\n ');
fi;
achse:=readline(terminal);
printf('\nx(0) angeben\n\n');
if expertmode=0 then
  printf('(X-Koordinate des Startpunktes - innerhalb der Achsenlaenge
  waehlen !)\n ');
fi;
x_start:=readline(terminal);
printf('\ny(0) angeben\n\n');
if expertmode=0 then
  printf('(Y-Koordinate des Startpunktes - innerhalb der Achsenlaenge
  waehlen !)\n ');
fi;

```

```

y_start:=readline(terminal);
printf('\nSchrittweite angeben\n ');
if expertmode=0 then
    printf('(Schrittweite zunaechst 0.4 waehlen, spaeter evtl.
    verfeinern)\n ');
fi;
schrittweite:=readline(terminal);
max_t:='t=0..'max_t;
x_axe:='x=-'.achse..'achse;
y_axe:='y=-'.achse..'achse;
xy_start:='[[x(0)='.x_start.',y(0)='.y_start.']]';
schrittweite:='stepsize='.schrittweite;
max_t:=parse(max_t);
x_axe:=parse(x_axe);
y_axe:=parse(y_axe);
xy_start:=parse(xy_start);
schrittweite:=parse(schrittweite);

Fkt_A:=unapply(Poly_A,x,y);
Fkt_B:=unapply(Poly_B,x,y);
with(DEtools):
Diagramm:=DEplot([diff(x(t),t)=-Fkt_B(x,y),diff(y(t),t)=
-Fkt_A(x,y)], [x(t),y(t)], \

max_t, x_axe, y_axe, xy_start, schrittweite, \

linecolour=sin(t*Pi/2), \
color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),.1]);
print(Diagramm);
end:

# ***** Hier beginnt quasi das main Programm *****

# ***** Rechengenauigkeit *****
Digits:=100:

menu:=0:
while menu=0 do
    menu:=1:
    while menu=1 do
        printf('\n1 fuer Eingabe');

```

```

printf('\n2 fuer Laden\n \n');
menu_wahl:=readline(terminal);
if menu_wahl = '1' then
    Einlesen();
    Speichern();
    Testausgabe();
    menu:=2;
elif menu_wahl = '2' then
    Lade();
    Testausgabe();
    menu:=2;
else
    printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n');
fi;
od:
while menu=2 do
    printf('\n1 fuer Berechnung');
    printf('\n2 fuer Grafische Ausgabe\n ');
    menu_wahl:=readline(terminal);
    if menu_wahl = '1' then
        for strudel from 1 to maxstrudel do
            anfang:=time();
            Frommer();

            if (aktueller_grad mod 4) = 3 then
                Wirbelgroesse_1[strudel]:=A[3, aktueller_grad-5]+(1/3)*
                B[2, aktueller_grad-2]:#Faktor (1/3) ist durch auflösen
                Wirbelgroesse_2[strudel]:=A[aktueller_grad-5, 3]-(1/3)*
                B[aktueller_grad-2, 2]:#Faktor (1/3) ist durch auflösen
                print();
                printf('\nWirbelgroesse_1[%d] = %s\n', strudel,
                convert(Wirbelgroesse_1[strudel], string) );
                printf('\nWirbelgroesse_2[%d] = %s\n', strudel,
                convert(Wirbelgroesse_2[strudel], string) );
                printf('%f sec fuer diesen Rechenschritt benoetigt',
                (time()-anfang));
                if (Wirbelgroesse_1[strudel]<>0 or
                Wirbelgroesse_2[strudel]<>0) then
                    printf('\n\nDie Dgl. stellt vermutlich keinen Wirbel dar,
                    keine Aussagen sind moeglich - der Unbestimmtheitsfall
                    wird angenommen!\n');
                    # strudel:=maxstrudel:
                    break;
                fi:
            fi;
        fi;
    fi;
end while;

```

```

elif (aktueller_grad mod 4) = 0 then
    Wirbelgroesse_1[strudel]:=A[1, aktueller_grad-3]+
    B[0, aktueller_grad]:
    Wirbelgroesse_2[strudel]:=A[3, aktueller_grad-5]-
    (1/3)*B[2, aktueller_grad-2]:
    print();
    printf('\nWirbelgroesse_1[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_1[strudel], string) );
    printf('\nWirbelgroesse_2[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_2[strudel], string) );
    printf('%f sec fuer diesen Rechenschritt benoetigt',
    (time()-anfang));
    if (Wirbelgroesse_1[strudel]<>0 or
    Wirbelgroesse_2[strudel]<>0) then
        if (Wirbelgroesse_1[strudel] <> 0 and
        Wirbelgroesse_1[strudel]*Wirbelgroesse_2[strudel]>=0)
        then
            printf('\n\nEs liegt ein Strudel vor !
            (Da Wirbelgroesse_1[strudel] <> 0 und
            Wirbelgroesse_1[strudel]*Wirbelgroesse_2[strudel]>=0!)\n');
            printf('\nWirbelgroesse_1[strudel] und Wirbelgroesse_2[strudel]
            sind die Vorfaktoren von  $x^0y^n$  bzw.  $x^ny^0$  und  $x^2y^{(n-2)}$ \n');
        else
            printf('\n\nDie Dgl. stellt vermutlich keinen Wirbel dar,
            keine Aussagen sind moeglich - der Unbestimmtheitsfall
            wird angenommen!\n');
        fi:
#       strudel:=maxstrudel:
        break;
    fi:

elif (aktueller_grad mod 4) = 1 then
    Wirbelgroesse_1[strudel]:=A[2, aktueller_grad-4]+(1/2)*
    B[1, aktueller_grad-1]:#Faktor (1/2) ist durch auflösen
    Wirbelgroesse_2[strudel]:=A[aktueller_grad-4, 2]-(1/2)*
    B[aktueller_grad-1, 1]:#Faktor (1/2) ist durch auflösen
    print();
    printf('\nWirbelgroesse_1[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_1[strudel], string) );
    printf('\nWirbelgroesse_2[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_2[strudel], string) );
    printf('%f sec fuer diesen Rechenschritt benoetigt',
    (time()-anfang));
    if (Wirbelgroesse_1[strudel]<>0 or

```

```

Wirbelgroesse_2[strudel]<>0) then
    printf('\n\nDie Dgl. stellt vermutlich keinen Wirbel dar,
    keine Aussagen sind moeglich - der Unbestimmtheitsfall
    wird angenommen!\n');
#    strudel:=maxstrudel:
    break;
fi:

else
    Wirbelgroesse_1[strudel]:=A[3, aktueller_grad-5]+(1/3)*
    B[2, aktueller_grad-2]:#Faktor (1/3) ist durch auflösen
    Wirbelgroesse_2[strudel]:=A[2, aktueller_grad-4]+(1/2)*
    B[1, aktueller_grad-1]:#Faktor (1/2) ist durch auflösen
    Wirbelgroesse_3[strudel]:=A[1, aktueller_grad-3]+
    B[0, aktueller_grad]:
    print();
    printf('\nWirbelgroesse_1[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_1[strudel], string) );
    printf('\nWirbelgroesse_2[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_2[strudel], string) );
    printf('\nWirbelgroesse_3[%d] = %s\n', strudel,
    convert(Wirbelgroesse_3[strudel], string) );
    printf('%f sec fuer diesen Rechenschritt benoetigt',
    (time()-anfang));
    if (Wirbelgroesse_1[strudel]<>0 or
    Wirbelgroesse_2[strudel]<>0 or Wirbelgroesse_3[strudel]<>0)
    then
        if (Wirbelgroesse_1[strudel] <> 0 and
        Wirbelgroesse_3[strudel] <> 0 and
        Wirbelgroesse_1[strudel]*Wirbelgroesse_3[strudel]>0 and
        Wirbelgroesse_2[strudel]=0) then
            printf('\n\nEs liegt ein Strudel vor !
            (Da Wirbelgroesse_1[strudel] <> 0 und
            Wirbelgroesse_3[strudel] <> 0 und
            Wirbelgroesse_1[strudel]*Wirbelgroesse_3[strudel]>0 und
            Wirbelgroesse_2[strudel]=0!)\n');
            printf('\nWirbelgroesse_1[strudel] und
            Wirbelgroesse_3[strudel] sind die Vorfaktoren
            von  $x^2y^{(n-2)}$  bzw.  $x^ny^0$  und  $x^0y^n$ ,
            Wirbelgroesse_2[strudel] von einer ungeraden Potenz.\n');
        else
            printf('\n\nDie Dgl. stellt vermutlich keinen Wirbel dar,
            keine Aussagen sind moeglich - der Unbestimmtheitsfall
            wird angenommen!\n');

```



```

        fi:
#         strudel:=maxstrudel:
        break;
        fi:

        fi:

    od:

    if (strudel > maxstrudel) then
        printf('\n\n\nAlle berechneten Wirbelbedingungen wurden
        erfuehlt, dies deutet auf einen Wirbel hin. ');
        printf('\n(Nun kann man den maximal zu berechnenden Grad
        erhoeihen.) ');
        fi:

        # ***** Ausgabe in Datei *****
        ausgabeindatei():
        menu:=3;
    elif menu_wahl = '2' then
        Grafik();
        menu:=3;
    else
        printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n ');
        fi;
    od:
    while menu=3 do
        printf('\n1 das Ganze nochmal ');
        printf('\n2 Ende\n ');
        menu_wahl:=readline(terminal);
        if menu_wahl = '1' then
            menu:=0;
        elif menu_wahl = '2' then
            menu:=4;
        else
            printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n ');
        fi;
    od:
od:

# ***** Maple beenden *****
# quit;

```

Anhang D

Rekursive Gleichungen für $h=3$

Die hier dargestellten rekursiven Formeln sollen auf die gleiche Art und Weise wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben präsentiert werden. Auch hier wird in jedem Rekursionsschritt x um eins erhöht.

1. $n \bmod 6 = 5$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in zwei eindeutige und vier überbestimmte Teilsysteme, wovon die zwei eindeutigen unter [1.1] und [1.6] und die anderen unter [1.2], [1.3], [1.4] und [1.5] behandelt werden sollen.

1.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x}$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

1.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung	$A'_{(n-6)-6x,2+6x} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-6)-6x,2+6x} - A'_{(n-6)-6x,2+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

1.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-7)-6x,3+6x}$	$A'_{(n-7)-6x,3+6x} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-7)-6x,3+6x} - A'_{(n-7)-6x,3+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

1.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-8)-6x,4+6x}$	$A'_{(n-8)-6x,4+6x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-8)-6x,4+6x} - A'_{(n-8)-6x,4+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

1.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-9)-6x,5+6x}$	$A'_{(n-9)-6x,5+6x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-9)-6x,5+6x} - A'_{(n-9)-6x,5+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

1.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{1,n-5} = -C_{0,n}$
rekursive Gleichung	$A_{1+6x,(n-5)-6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{1+6(x-1),(n-5)-6(x-1)} - C_{6x,n-6x})$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

2. $n \bmod 6 = 0$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in zwei eindeutige und vier überbestimmte Teilsysteme, wovon die zwei eindeutigen unter [2.2] und [2.6] und die anderen unter [2.1], [2.3], [2.4] und [2.5] behandelt werden sollen.

2.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x})$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-6x,1+6x}$	$A'_{(n-5)-6x,1+6x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-5)-6x,1+6x} - A'_{(n-5)-6x,1+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

2.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-7)-6x,3+6x}$	$A'_{(n-7)-6x,3+6x} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-7)-6x,3+6x} - A'_{(n-7)-6x,3+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-8)-6x,4+6x}$	$A'_{(n-8)-6x,4+6x} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-8)-6x,4+6x} - A'_{(n-8)-6x,4+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-9)-6x,5+6x}$	$A'_{(n-9)-6x,5+6x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-9)-6x,5+6x} - A'_{(n-9)-6x,5+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

2.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{2,n-6} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$
rekursive Gleichung	$A_{2+6x,(n-6)-6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{2+6(x-1),(n-6)-6(x-1)} - C_{1+6x,(n-1)-6x}$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

3. $n \bmod 6 = 1$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in zwei eindeutige und vier überbestimmte Teilsysteme, wovon die zwei eindeutigen unter [3.3] und [3.6] und die anderen unter [3.1], [3.2], [3.4] und [3.5] behandelt werden sollen.

3.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x})$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-6x,1+6x}$	$A'_{(n-5)-6x,1+6x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-5)-6x,1+6x} - A'_{(n-5)-6x,1+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-6)-6x,2+6x}$	$A'_{(n-6)-6x,2+6x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-6)-6x,2+6x} - A'_{(n-6)-6x,2+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

3.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-8)-6x,4+6x}$	$A'_{(n-8)-6x,4+6x} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-8)-6x,4+6x} - A'_{(n-8)-6x,4+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-9)-6x,5+6x}$	$A'_{(n-9)-6x,5+6x} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-9)-6x,5+6x} - A'_{(n-9)-6x,5+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

3.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{3,n-7} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$
rekursive Gleichung	$A_{3+6x,(n-7)-6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{3+6(x-1),(n-7)-6(x-1)} - C_{2+6x,(n-2)-6x}$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

4. $n \bmod 6 = 2$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in zwei eindeutige und vier überbestimmte Teilsysteme, wovon die zwei eindeutigen unter [4.4] und [4.6] und die anderen unter [4.1], [4.2], [4.3] und [4.5] behandelt werden sollen.

4.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x}$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-6x,1+6x}$	$A'_{(n-5)-6x,1+6x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-5)-6x,1+6x} - A'_{(n-5)-6x,1+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-6)-6x,2+6x}$	$A'_{(n-6)-6x,2+6x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-6)-6x,2+6x} - A'_{(n-6)-6x,2+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x}$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-7)-6x,3+6x}$	$A'_{(n-7)-6x,3+6x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-7)-6x,3+6x} - A'_{(n-7)-6x,3+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

4.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-9)-6x,5+6x}$	$A'_{(n-9)-6x,5+6x} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-9)-6x,5+6x} - A'_{(n-9)-6x,5+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

4.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{4,n-8} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$
rekursive Gleichung	$A_{4+6x,(n-8)-6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{4+6(x-1),(n-8)-6(x-1)} - C_{3+6x,(n-3)-6x})$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

5. $n \bmod 6 = 3$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in zwei eindeutige und vier überbestimmte Teilsysteme, wovon die zwei eindeutigen unter [5.5] und [5.6] und die anderen unter [5.1], [5.2], [5.3] und [5.4] behandelt werden sollen.

5.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x})$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-6x,1+6x}$	$A'_{(n-5)-6x,1+6x} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-5)-6x,1+6x} - A'_{(n-5)-6x,1+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

5.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-6)-6x,2+6x}$	$A'_{(n-6)-6x,2+6x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-6)-6x,2+6x} - A'_{(n-6)-6x,2+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

5.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-7)-6x,3+6x}$	$A'_{(n-7)-6x,3+6x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-7)-6x,3+6x} - A'_{(n-7)-6x,3+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

5.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-8)-6x,4+6x}$	$A'_{(n-8)-6x,4+6x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-8)-6x,4+6x} - A'_{(n-8)-6x,4+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

5.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

5.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{5,n-9} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$
rekursive Gleichung	$A_{5+6x,(n-9)-6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{5+6(x-1),(n-9)-6(x-1)} - C_{4+6x,(n-4)-6x})$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

6. $n \bmod 6 = 4$, d.h. das Gleichungssystem zerfällt in einen unterbestimmten und fünf überbestimmte Teilsysteme, wovon der unterbestimmte unter [6.6] und die anderen unter [6.1], [6.2], [6.3], [6.4] und [6.5] behandelt werden sollen.

6.1 1. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-5,1} = C_{n,0}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-5)-6x,1+6x} = \frac{1}{1+6x}([(n-5) - 6(x-1)])$ $A_{(n-5)-6(x-1),1+6(x-1)} + C_{n-6x,6x})$
Abbruchbedingung	$(n-5) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-5)-6x,1+6x}$	$A'_{(n-5)-6x,1+6x} = -\frac{1}{5}C_{4,n-4}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_1[n] = A_{(n-5)-6x,1+6x} - A'_{(n-5)-6x,1+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

6.2 2. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-6,2} = \frac{1}{2}C_{n-1,1}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-6)-6x,2+6x} = \frac{1}{2+6x}([(n-6) - 6(x-1)])$ $A_{(n-6)-6(x-1),2+6(x-1)} + C_{(n-1)-6x,1+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-6) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-6)-6x,2+6x}$	$A'_{(n-6)-6x,2+6x} = -\frac{1}{4}C_{3,n-3}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_2[n] = A_{(n-6)-6x,2+6x} - A'_{(n-6)-6x,2+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

6.3 3. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-7,3} = \frac{1}{3}C_{n-2,2}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-7)-6x,3+6x} = \frac{1}{3+6x}([(n-7) - 6(x-1)])$ $A_{(n-7)-6(x-1),3+6(x-1)} + C_{(n-2)-6x,2+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-7) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-7)-6x,3+6x}$	$A'_{(n-7)-6x,3+6x} = -\frac{1}{3}C_{2,n-2}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_3[n] = A_{(n-7)-6x,3+6x} - A'_{(n-7)-6x,3+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

6.4 4. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-8,4} = \frac{1}{4}C_{n-3,3}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-8)-6x,4+6x} = \frac{1}{4+6x}([(n-8) - 6(x-1)])$ $A_{(n-8)-6(x-1),4+6(x-1)} + C_{(n-3)-6x,3+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-8) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-8)-6x,4+6x}$	$A'_{(n-8)-6x,4+6x} = -\frac{1}{2}C_{1,n-1}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_4[n] = A_{(n-8)-6x,4+6x} - A'_{(n-8)-6x,4+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

6.5 5. Teilsystem

Startgleichung	$A_{n-9,5} = \frac{1}{5}C_{n-4,4}$
rekursive Gleichung	$A_{(n-9)-6x,5+6x} = \frac{1}{5+6x}([(n-9) - 6(x-1)])$ $A_{(n-9)-6(x-1),5+6(x-1)} + C_{(n-4)-6x,4+6x})$
Abbruchbedingung	$(n-9) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$
Berechnung $A'_{(n-9)-6x,5+6x}$	$A'_{(n-9)-6x,5+6x} = -C_{0,n}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion
Wirbelgröße	$Wirbelgröße_5[n] = A_{(n-9)-6x,5+6x} - A'_{(n-9)-6x,5+6x}$ mit letztem gültigem x aus Rekursion

6.6 6. Teilsystem

Startgleichung	$A_{0,n-4} := 0$
rekursive Gleichung	$A_{6x,(n-4)-6x} = \frac{1}{6x}([(n-4) - 6(x-1)])$ $A_{6(x-1),(n-4)-6(x-1)} - C_{5+6x,(n-5)-6x})$
Abbruchbedingung	$(n-4) - 6x \geq 0, \quad x \in \mathbb{N}, \quad x \geq 1$

Anhang E

Datenträger

An dieser Stelle befindet sich ein Datenträger, auf dem, die in der Arbeit vorgestellten, Beispiele mit den dazugehörigen Bildern, der Quellcode mit einer dazugehörigen readme-Datei und die Diplomarbeit selbst (pdf-Format), gebrannt sind.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Anziehender Grenzykel	17
3.2	Abstoßender Grenzykel	17
3.3	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = 0$ und $r_0 = 0.1$	24
3.4	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = 0$ und $r_0 = 0.25$	24
3.5	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{50}$ und $r_0 = 0.11$	25
3.6	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{50}$ und $r_0 = 0.14$	25
3.7	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{20}$ und $r_0 = 0.18$	26
3.8	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{20}$ und $r_0 = 0.20$	26
3.9	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{10}$ und $r_0 = 0.24$	27
3.10	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{10}$ und $r_0 = 0.26$	27
3.11	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{5}$ und $r_0 = 0.3102$	28
3.12	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{5}$ und $r_0 = 0.3103$	28
3.13	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{13}{48}$ und $r_0 = 0.3335397747$	29
3.14	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{13}{48}$ und $r_0 = 0.3335397748$	29
3.15	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{9}{24}$ und $r_0 = 0.36006$	30
3.16	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{9}{24}$ und $r_0 = 0.36007$	30
3.17	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.3826$	31
3.18	Frommerbeispiel $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.3827$	31
3.19	Eigenes Beispiel abstoßend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y+x^6y}{y+xy^4}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.632$	32
3.20	Eigenes Beispiel abstoßend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y+x^6y}{y+xy^4}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.633$	32
3.21	Eigenes Beispiel abstoßend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y^3+x^8y}{y+x^3y^4}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.65$	33

3.22	Eigenes Beispiel abstoßend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y^3+x^8y}{y+x^3y^4}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.66$	33
3.23	Eigenes Beispiel anziehend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y-x^6y}{y+xy^4}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.55$	34
3.24	Eigenes Beispiel anziehend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y-x^6y}{y+xy^4}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.75$	34
3.25	Eigenes Beispiel anziehend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2y-x^6y}{y+xy^2}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.55$	35
3.26	Eigenes Beispiel anziehend $y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2y-x^6y}{y+xy^2}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.75$	35
3.27	$r_0(\epsilon)$ zum Frommerbsp.	37
4.1	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3}{y^3}$	57
4.2	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2}{y^3}$	58
4.3	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2}{y^3+\frac{2}{3}x^3y}$	59
4.4	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2}{y^3+\frac{2}{3}x^3y-y^5}$	60
4.5	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2-x^7-y^7}{y^3+\frac{2}{3}x^3y}$	61
4.6	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2-x^3y^2}{y^3+\frac{2}{3}x^3y}$	62
4.7	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2-x^3y^2+\frac{2}{9}xy^6}{y^3+\frac{2}{3}x^3y}$	63
4.8	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-x^2y^2-5x^7}{y^3+x^2y^4-y^5}$	64
4.9	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-2x^4y^3}{y^3-x^7}$	65
4.10	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-2x^6y^3}{y^3-x^9}$	66
4.11	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3-2x^6y^3-x^2y^7}{y^3+x^7y^2}$	67
4.12	Eigenes Beispiel kubisch $y' = -\frac{x^3+y^7}{y^3+x^7}$	68
C.1	Eingabe oder Laden	vi
C.2	Berechnung oder grafische Darstellung	vii
C.3	Standardparameter für grafische Darstellung	vii
C.4	Ende oder noch einmal	viii

Literaturverzeichnis

- [1] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H. [1993]: „*Taschenbuch der Mathematik*“, Harri Deutsch, Thun - Frankfurt a. M.
- [2] Reinhardt, F.; Soeder, H. [1974]: „*dtv-Atlas zur Mathematik, Bd. I & II*“, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co KG, München
- [3] Forster, O. [1981, 1992]: „*Analysis, Bd. I, II & III*“, F. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig - Wiesbaden
- [4] Königsberger, K. [1991]: „*Analysis, Bd. I & II*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [5] Grauert, H.; Fischer, W. [1973]: „*Differential- und Integralrechnung, Bd. II*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [6] von Wahl, W. [SS 1998]: „*Gewöhnliche Differentialgleichungen*“, Vorlesung an der Universität Bayreuth
- [7] von Wahl, W. [2001]: „*Beweisansatz zum Nullstellengebilde von Grenzyklen*“, Persönliche Mitteilungen
- [8] Boyce W.E.; DiPrima R.C. [2000]: „*Gewöhnliche Differentialgleichungen*“, Spektrum-Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin - Oxford
- [9] Frommer, M. [1935]: „*in Mathematische Analen 109, Seite 395 - 424*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [10] Moritzen, K. [2000]: „*Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle*“, Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [11] Höhn, A. [2001]: „*Algebraische Berechnung von Strudelgrößen und graphisches Auffinden von Grenzyklen um ein Stelle der Unbestimmtheit*“, Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth

- [12] Albrecht, T. [2001]: „*Die Poincarésche Wirbelbedingung*“, Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [13] Birnmeyer, M. [2000]: „*Die Poincaréschen Wirbelbedingungen an der Stelle einer Unbestimmtheit*“, Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [14] Schießl, R. [2000]: „*Die Wirbelbedingungen für $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ an der Stelle einer Unbestimmtheit*“, Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [15] Teichert, A. [2000]: „*Die Strudelbedingungen für $y' = -\frac{A}{B}$ an einer Stelle der Unbestimmtheit*“, Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [16] Heal, K. M.; Rickard, K. M.; Hansen, M. L. [1996]: „*Einführung in MapleV*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [17] Kofler, M. [1994]: „*MapleV, Release 3*“, Addison-Wesley, Bonn u.a.
- [18] Kopka, H. [1996]: „*LaTeX Einführung Band1, 2. Auflage*“, Addison Wesley, Deutschland
- [19] Kopka, H. [1997]: „*LaTeX Ergänzungen - Mit einer Einführung in METAFONT Band2, 2. Auflage*“, Addison Wesley, Deutschland
- [20] Poincaré, H. [1951]: „*Œvres, Bd. I, "Une équation différentielle"*“, Imprimerie Gauthier-Villares et *Cⁱe*, Paris

Index

- r_0
 - Definition, 6
- Differentialgleichung mit Anfangspotenz
 - höherer Ordnung
 - Definition, 41
- Grenzzzykel, 17
- abgeschlossenes Intervall, 6
- autonomes System
 - Definition, 7
- Dehn, 10
- Glattheit, 6
- Gleichgewichtspunkt
 - Definition, 6
- Gleichungssystem
 - Struktur, 70
- Grenzzzykel
 - ϵ_{max} , 37
 - Definition, 18
 - Existenz, 19
 - limes, 38
 - Radius, 18
 - Was ist, 16
- halboffenes Intervall
 - links, 6
 - rechts, 6
- Intervallschachtelung
 - Definition, 7
- kritischer Punkt
 - Definition, 6
- Lösung
 - Eindeutigkeit, 6
 - einer Differentialgleichung, 5
- offenes Intervall, 6
- Opelsches Problem
 - Definition, 8
- Pfaffsche Form, 8
 - Definition, 7
- Restglied, 14
- Richtungsfeld
 - Definition, 7
- Startradius
 - Definition, 6
- Stelle der Unbestimmtheit
 - Definition, 6
- Strudel
 - Definition, 10
- Strudelfall
 - Definition, 10
- Strudelgröße, 15
- Taylorpolynom, 14
- Unbestimmtheit
 - Definition, 10
- Unbestimmtheitsfall
 - Definition, 10
- Unbestimmtheitsstelle
 - Definition, 6
- Ursprung
 - Definition, 6
- Vergleichsdifferentialgleichung
 - $y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{y^3+q_{\geq 4}(x,y)}$, 11
- Wirbel
 - Definition, 9
- Wirbelbedingungen
 - Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^3+p_{>4}(x,y)}{x^3+q_{\geq 4}(x,y)}, \text{ 8}$$

Wirbelfall

Definition, 9

Wirbelgröße

Definition, 14

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth den, 20.11.2001

Jürgen Opel