

Abschätzung
des
Gradienten eines Vektorfeldes
durch
Divergenz, Rotation,
Tangentialkomponente
und von der Topologie der
Grundmenge
abhängige Größen
bezüglich der C^α -Norm

Diplomarbeit

vorgelegt
im November 1995
von Michael Neudert
bei Prof. Wolf von Wahl
in Bayreuth

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	3
Kapitel 0: Einleitung, Bezeichnungen, Hilfsmittel	4
Kapitel 1: Abschätzung volumenhafter Potentiale	9
Kapitel 2: Abschätzungen, die sich aus dem Fundamentalsatz ergeben	39
Kapitel 3: Abschätzung von $\ u\ _{C^{1+\alpha}(\bar{G})}$ durch $\ div\, u\ _{C^\alpha(\bar{G})}$, $\ rot\, u\ _{C^\alpha(\bar{G})}$, $\ \gamma^*\ _{C^{1+\alpha}(\partial G)}$ und $ E^{(i)} $	41
Literaturverzeichnis	46
Erklärung	47

Vorbemerkung

Für die intensive, geduldige und für mich sehr lehrreiche Betreuung dieser Diplomarbeit sei Herrn Professor von Wahl, der mir das Thema gestellt hat, an dieser Stelle herzlich gedankt.

Bayreuth, im November 1995

Michael Neudert

Kapitel 0

Einleitung, Bezeichnungen, Hilfsmittel

Ziel dieser Arbeit ist es, den Gradienten eines beliebigen auf einer glatt berandeten beschränkten Menge definierten Vektorfeldes durch dessen Divergenz, Rotation, durch die Tangentialkomponente auf dem Rand und durch Zahlen, die durch die Topologie der Menge bedingt sind, abzuschätzen. Wir führen diese Abschätzung bezüglich der C^α -Norm durch, was konzeptionell einfacher ist als eine Abschätzung bezüglich der L^p -Norm; die C^α -Norm ist auch auf dem Rand der Menge sinnvoll erklärt. Wir betrachten dazu das Vektorfeld als Lösung eines Dirichlet-Problems für inhomogen harmonische Vektorfelder. Dabei beziehen wir uns auf die in der Lipschitz-Vorlesung [3] mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Vektoranalysis vorgestellte Lösungstheorie dieses Problems. Bei der Untersuchung des Einflusses der Topologie der Menge benutzen wir aus [3] eine Integralgleichung für die Normalkomponente des Vektorfeldes auf dem Rand, in der der Neumann-Operator vorkommt. Dort wird entscheidend davon Gebrauch gemacht, daß die Riesz-Zahl dieses Operators gleich eins ist.

Im ersten Kapitel schätzen wir zunächst die $C^{2+\alpha}$ -Norm des Potentials einer volumenhaften Ladungsverteilung durch die C^α -Norm der Ladungsdichte ab, wobei wir eine Verallgemeinerung der Hölder-Korn-Lichtenstein-Giraud-Ungleichung zeigen. Im Kapitel 2 verwenden wir eine Abschätzung für Einfachschichtpotentiale aus [5] zusammen mit dem Resultat aus Kapitel 1 und schätzen mit Hilfe des Fundamentalsatzes die $C^{1+\alpha}$ -Norm des Vektorfeldes durch die C^α -Normen von Divergenz und Rotation sowie die $C^{1+\alpha}$ -Normen von Tangential- und Normalkomponente des Vektorfeldes auf dem Rand ab. Schließlich eliminieren wir im dritten Kapitel die $C^{1+\alpha}$ -Norm der Normalkomponente aus der in Kapitel 2 gewonnenen Abschätzung unter Zuhilfenahme der oben genannten Integralgleichung und ersetzen sie durch die von der Topologie der Menge abhängigen Ergiebigkeiten des Vektorfeldes auf dem Rand.

Der Rand einer beschränkten Menge heißt von der Klasse $C^{k+\alpha}$ (bzw. C^k), wenn es einen Atlas von lokalen Karten $(\bar{T}, \xi, \xi(\bar{T}))$ mit $T \subset \mathbf{R}^2$ offen, $\xi \in C^{k+\alpha}(\bar{T})$ (bzw. $C^k(\bar{T})$) und $\xi(\bar{T}) \subset \partial G$ gibt und in jedem Punkt $\xi_0 \in \partial G$ die äußere Normale existiert.

Ist Ω eine beschränkte Menge, $\partial\Omega$ von der Klasse C^1 und ist $(\bar{T}_j, \xi_j, \xi_j(\bar{T}_j))_{j=1,\dots,r}$

ein Atlas im obigen Sinne, so ist für $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\partial\Omega)} := \sum_{j=1}^r \|f \circ \xi_j\|_{C^{k+\alpha}(\overline{T_j})};$$

und

$$C^{k+\alpha}(\partial\Omega) := \{f : \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid \forall j \in \{1, \dots, r\} : f \circ \xi_j \in C^{k+\alpha}(\overline{T_j})\}$$

ist ein Banachraum (ebenso wie $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$). Wir beachten, daß $\|f\|_{C^{k+\alpha}(\partial\Omega)}$ von der Wahl des Atlases von $\partial\Omega$ abhängt.

Nun präzisieren wir die Regularitätsvoraussetzungen an die glatt berandete Menge:

Wir bezeichnen eine Menge $G \subset \mathbf{R}^3$ als zulässig, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

Es gibt ein $m_0 \in \mathbf{N}$ und beschränkte Gebiete $G_1, \dots, G_{m_0} \subset \mathbf{R}^3$ mit

- (i) $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset$ für $i, j \in \{1, \dots, m_0\}$ und $i \neq j$,
- (ii) $G = \bigcup_{i=1}^{m_0} G_i$.
- (iii) Die Zusammenhangskomponenten von ∂G_i ($i = 1, \dots, m_0$) seien jeweils endlich viele geschlossene, paarweise durchschnittsfremde Flächen von der Klasse C^6 .

In der Lipschitz-Vorlesung, auf die wir uns stets beziehen und die das Dirichlet-Problem für inhomogen harmonische Vektorfelder unter etwas schwächeren Voraussetzungen an die Glattheit der Flächen ∂G_i behandelt, wird zusätzlich von einer Approximationseigenschaft ausgegangen, die in unserem Fall erfüllt ist. Dies läßt sich mit Hilfe der im Beweis des Satzes 1.4. verwendeten Transformation verifizieren, worauf aber hier nicht näher eingegangen werden soll. Wir legen hier keinen Wert darauf, mit möglichst schwachen Voraussetzungen an die Glattheit von ∂G auszukommen.

Es sei m die zweite Betti-Zahl der Menge G , also die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbf{R}^3 \setminus \overline{G}$. Diese seien mit $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_m$ bezeichnet. Es sei außerdem für $i = 1, \dots, m$

$$\tilde{h}_i(x) := \begin{cases} 1, & x \in \overline{\tilde{G}_i}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

ν sei das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂G .

Jetzt können wir das Dirichlet-Problem für inhomogen harmonische Vektorfelder $D(G, \epsilon, \gamma, \gamma^*, E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ formulieren:

Gegeben seien $\epsilon \in C^\alpha(\overline{G}, \mathbf{R})$, $\gamma \in C^\alpha(\overline{G}, \mathbf{R}^3)$, $\gamma^* \in C^{1+\alpha}(\partial G, \mathbf{R}^3)$ mit $\langle \nu, \gamma^* \rangle = 0$ auf ∂G , und $E^{(1)}, \dots, E^{(m)} \in \mathbf{R}$.
 Gesucht ist ein $u \in C^{1+\alpha}(\overline{G}, \mathbf{R}^3)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= \epsilon \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} u = \gamma \quad \text{in } G, \\ u \times \nu &= \gamma^* \quad \text{auf } \partial G, \end{aligned}$$

und

$$-\int_{\partial G} \langle \nu, u \rangle \tilde{h}_i d\Omega = E^{(i)}$$

für $i = 1, \dots, m$.

Das Endresultat dieser Arbeit ist der Beweis der Existenz einer Abschätzung der Form

$$\|u\|_{C^{1+\alpha}(\overline{G})} \leq c(\|\epsilon\|_{C^\alpha(\overline{G})} + \|\gamma\|_{C^\alpha(\overline{G})} + \|\gamma^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} + \sum_{i=1}^m |E^{(i)}|).$$

Im Falle $m = 0$ setzen wir $\sum_{i=1}^m |E^{(i)}|$ gleich 0.¹

Wir stellen jetzt noch einige Hilfsmittel bereit.

Im folgenden bezeichne $[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$ für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $\alpha \in]0, 1[$ die Hölder-Seminorm von f , also

$$[f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_{x, y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

0.1. Hilfssatz: Es sei $\Omega \in \mathbf{R}^n$ ein beschränktes Gebiet.

Für zwei Funktionen $f, g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ ist auch $f \cdot g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ und es gelten die folgenden Ungleichungen:

$$(i) \quad [f \cdot g]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} \cdot [g]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^0(\overline{\Omega})} \cdot [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

$$(ii) \quad \|f \cdot g\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \cdot \|g\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

¹Verschwundet außerdem die Tangentialkomponente auf dem Rand, so läßt sich der Gradient von u durch Divergenz und Rotation abschätzen, vgl. von Wahl, Estimating ∇u by $\operatorname{div} u$ and $\operatorname{curl} u$, in: Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 15, 1992.

0.2. Definition: Es sei $R > 0$. Wir bezeichnen eine Funktion $\kappa \in C^1(\overline{K_R(0)} \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}))$ als *singulären Kern*, wenn folgendes gilt:

(i) Für $0 < R_1 < R_2$, $z \in \overline{K_R(0)}$ gilt stets

$$\int_{R_1 < |r| < R_2} \kappa(z, r) dr = 0$$

und

(ii) es existiert ein $c > 0$, so daß für $z \in \overline{K_R(0)}$, $r \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$|\kappa(z, r)| \leq \frac{c}{|r|^n}.$$

Aus (i) folgt die Existenz des Cauchyschen Hauptwertes $H \int \kappa(z, r) dr$ mit

$$H \int_{\mathbf{R}^n} \kappa(z, r) dr := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon < |r|} \kappa(z, r) dr = 0.$$

Ist $\chi \in C^2(\overline{K_R(0)} \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\}))$ in r homogen vom Grad $1 - n$, d.h. gilt für $z \in \overline{K_R(0)}$, $r \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ und $\lambda > 0$ stets

$$\chi(z, \lambda \cdot r) = \lambda^{1-n} \cdot \chi(z, r),$$

dann ist für $i = 1, \dots, n$ $\frac{\partial \chi}{\partial r_i}$ ein singulärer Kern im Sinne der Definition 0.2., vgl. [1].

Im Beweis des Satzes 1.4. benutzen wir den folgenden Satz aus [1], der dort in etwas allgemeinerer Form gezeigt wird:

0.3. Satz: Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{2+\alpha}$. Sei $f \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$. Dann gilt:

$$\|f\|_{C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})} \leq c (\|\Delta f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)} + \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})})$$

mit einer von der Beschaffenheit von Ω und $\partial\Omega$ abhängigen, aber von f unabhängigen Konstanten $c > 0$.

Im dritten Kapitel machen wir von den Eigenschaften des Neumann-Operators K Gebrauch. Für $\lambda \in C^0(\partial G)$ ist:

$$K\lambda(\xi) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{1}{|\xi - \xi'|^3} \langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle \lambda(\xi') d\Omega' \quad \xi \in \partial G.$$

Wir benutzen den folgenden Satz aus [2]:

0.4. Satz: Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in]0, 1[$ und ∂G von der Klasse C^{k+5} . Dann gilt für $\lambda \in C^{k+\alpha}(\partial G)$

$$K\lambda \in C^{k+1+\alpha}(\partial G)$$

und

$$\|K\lambda\|_{C^{k+1+\alpha}(\partial G)} \leq c \|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)}$$

mit einer von λ unabhängigen Konstanten $c > 0$.

In den Beweisen des Hilfssatzes 3.1. und des Satzes 3.2. benutzen wir folgenden Spezialfall von Satz 1.2.4. aus [3]:

0.5. Satz: Es existiert eine Basis $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m)$ von $N(I + K)$, dem Nullraum von $I + K$, mit der Eigenschaft

$$\int_{\partial G} \tilde{e}_i \tilde{h}_k |_{\partial G} d\Omega = \delta_{ik} \quad \text{für } i, k = 1, \dots, m,$$

wobei m die zweite Betti-Zahl von G ist. Wir können dabei annehmen, daß $N(I + K) \subset C^{1+\alpha}(\partial G)$ ist.

Die bereits erwähnte Integralgleichung für die Normalkomponente der Lösung des Dirichlet-Problems für inhomogen harmonische Vektorfelder wird im Beweis des Satzes 3.2. zitiert.

Der Übersichtlichkeit wegen vereinbaren wir noch folgende Notationsweise: Ein Ausdruck der Form

$$A \leq c B$$

bedeute stets: Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß $A \leq cB$.

Die Konstante c kann sich bei Ungleichungsketten von Zeile zu Zeile ändern. Sie hängt im allgemeinen, d.h. sofern nichts anderes über sie gesagt wird, nur von der Beschaffenheit von G und ∂G , insbesondere von den hierfür gewählten Atlanten und von α ab.

Kapitel 1

Abschätzung volumenhafter Potentiale

Um zu einer Abschätzung volumenhafter Potentiale bezüglich der Hölder-norm zu gelangen, bedarf es noch einiger Vorbereitungen, die das Verhalten schwach singulärer und singulärer Integraloperatoren betreffen.

1.1. Satz: Es sei $\beta \geq 1$, $\alpha \in]0, 1[$, $\rho > 0$, $R > 0$.

Es sei $S \in C^0(\overline{K_R(0)} \times \mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$ ein schwach singulärer Kern zum Exponenten $3 - \beta$, d.h. es gelte

$$(i) \quad |S(z, r)| \leq \frac{c}{|r|^{3-\beta}} \quad \text{für } z \in \overline{K_R(0)}, \quad r \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}.$$

S erfülle außerdem die folgenden Bedingungen:

$$(ii) \quad \text{Für alle } z', z'' \in \overline{K_R(0)}, \quad r \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\} \text{ sei}$$

$$|S(z', r) - S(z'', r)| \leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|r|^{3-\beta}}.$$

$$(iii) \quad \text{Für alle } z \in \overline{K_R(0)} \text{ gelte mit } r', r'' \in \mathbf{R}^3 \text{ und } |r'|, |r''| \geq \lambda > 0 \text{ stets}$$

$$(a) \quad |S(z, r') - S(z, r'')| \leq \frac{c}{\lambda^3} \cdot \frac{|r' - r''|^\alpha}{|\ln|r' - r''||} \quad \text{im Fall } \beta = 1 \text{ und}$$

$$(b) \quad |S(z, r') - S(z, r'')| \leq \frac{c}{\lambda^{3+(1-\beta)}} \cdot |r' - r''|^\alpha \quad \text{im Fall } \beta > 1.$$

Es sei $\phi \in C^0(\mathbf{R}^3)$ mit $\text{supp } \phi \subset K_\rho(0)$. Dann gilt:

$$S * \phi := \int_{\mathbf{R}^3} S(.,. - y) \phi(y) dy \in C^\alpha(\overline{K_R(0)})$$

und

$$\|S * \phi\|_{C^\alpha(\overline{K_R(0)})} \leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K_\rho(0)})}$$

mit einem von ρ , R und α abhängigen, aber von ϕ unabhängigen $c > 0$.

Beweis: Wir benutzen die Abkürzungen $K := K_R(0)$ und $K' := K_\rho(0)$. Es seien $z', z'' \in \overline{K}$ mit $z' \neq z''$. Es ist dann

$$\begin{aligned}
|(S * \phi)(z') - (S * \phi)(z'')| &= \left| \int_{K'} [S(z', z' - y) - S(z'', z'' - y)] \phi(y) dy \right| \leq \\
&\leq \int_{K'} |S(z', z' - y) - S(z'', z' - y)| |\phi(y)| dy + \\
&\quad + \int_{K'} |S(z'', z' - y) - S(z'', z'' - y)| |\phi(y)| dy.
\end{aligned} \tag{1}$$

Wir bezeichnen im folgenden das erste Integral auf der rechten Seite von (1) mit I_1 , das zweite mit I_2 . Daß beide Integrale existieren wird mit gezeigt. Für I_1 erhalten wir unter Verwendung von (ii):

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \int_{K'} \frac{|z' - z''|^\alpha}{|z' - y|^{3-\beta}} dy \leq \\
&\leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot |z' - z''|^\alpha \cdot \int_0^{\rho+R} \frac{1}{r^{3-\beta}} r^2 dr \leq \\
&\leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot |z' - z''|^\alpha
\end{aligned} \tag{2}$$

Um jetzt I_2 abschätzen zu können, teilen wir das Integrationsgebiet. Es seien

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \{y \in K' : |z' - y| \leq |z'' - y|\} \text{ und} \\
\Delta_2 &:= \{y \in K' : |z'' - y| \leq |z' - y|\}.
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\mathfrak{I} := S(z'', z' - y) - S(z'', z'' - y)$$

gilt dann wegen $K' = \Delta_1 \cup \Delta_2$

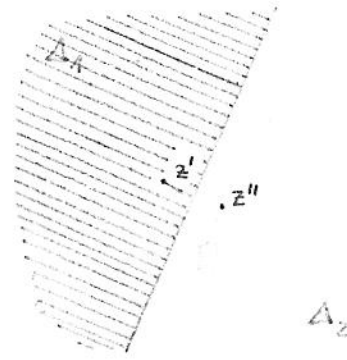
$$I_2 \leq \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \int_{K'} |\mathfrak{I}| dy \leq \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \left[\int_{\Delta_1} |\mathfrak{I}| dy + \int_{\Delta_2} |\mathfrak{I}| dy \right]. \tag{3}$$

Es seien weiter

$$\Gamma_1 := \{y \in K' : |z' - y| < 2|z' - z''|\} \text{ und}$$

$$\Gamma_2 := \{y \in K' : |z' - y| \geq 2|z' - z''|\}.$$

Die Aufteilung des Integrationsgebietes ist in folgender Abbildung anschaulich dargestellt:



Für $y \in \Gamma_1$ ist $|y - z''| < 3|z' - z''|$, für $y \in \Gamma_2$ hingegen $|y - z''| \geq |z' - z''|$. Es gilt wegen $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = K'$ und (3):

$$I_2 \leq \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \left[\int_{\Delta_1 \cap \Gamma_1} |\Im| dy + \int_{\Delta_2 \cap \Gamma_1} |\Im| dy + \int_{\Delta_1 \cap \Gamma_2} |\Im| dy + \int_{\Delta_2 \cap \Gamma_2} |\Im| dy \right] \quad (4)$$

Wir schätzen nun die Integrale auf der rechten Seite von (4) einzeln ab. Unter Verwendung von (i) und der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1 \cap \Gamma_1} |\Im| dy &\leq c \int_{\Delta_1 \cap \Gamma_1} \frac{1}{|y - z'|^{3-\beta}} dy \leq c \int_0^{2|z' - z''|} \frac{1}{r^{3-\beta}} r^2 dr \leq \\ &\leq c |z' - z''|^\beta \leq c |z' - z''|^\alpha \end{aligned} \quad (5)$$

$\int_{\Delta_2 \cap \Gamma_1} |\Im| dy$ wird analog abgeschätzt, im Nenner des Integranden steht z''

statt z' , die obere Integrationsgrenze ist $3|z' - z''|$ anstatt von $2|z' - z''|$.

Im Fall $\beta = 1$ ergibt sich mit Hilfe von (iii) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1 \cap \Gamma_2} |\Im| dy &\leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|\ln|z' - z''||} \cdot \int_{\Delta_1 \cap \Gamma_2} \frac{1}{|y - z'|^3} dy \leq \\
&\leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|\ln|z' - z''||} \cdot \int_{2|z' - z''|}^{\rho+R} \frac{1}{r^3} r^2 dr \leq \\
&\leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|\ln|z' - z''||} \cdot [\ln(\rho+R) - \ln(2|z' - z''|)] \leq \\
&\leq c \left\{ \frac{|z' - z''|^\alpha}{|\ln|z' - z''||} \cdot |\ln(\rho+R) - \ln 2| + |z' - z''|^\alpha \right\} \leq \\
&\leq c |z' - z''|^\alpha
\end{aligned} \tag{6}$$

Im Fall $\beta > 1$ bekommen wir mit (iii):

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_1 \cap \Gamma_2} |\Im| dy &\leq c |z' - z''|^\alpha \cdot \int_{\Delta_1 \cap \Gamma_2} \frac{1}{|y - z'|^{3+1-\beta}} dy \leq \\
&\leq c |z' - z''|^\alpha \cdot \int_{2|z' - z''|}^{\rho+R} \frac{1}{r^{3+1-\beta}} r^2 dr \leq \\
&\leq c |z' - z''|^\alpha \cdot [(\rho+R)^{\beta-1} - (2|z' - z''|)^{\beta-1}] \leq \\
&\leq c |z' - z''|^\alpha
\end{aligned} \tag{7}$$

$\int_{\Delta_2 \cap \Gamma_2} |\Im| dy$ wird wieder analog abgeschätzt, im Nenner des Integranden steht

z'' anstatt von z' , die untere Integrationsgrenze ist $|z' - z''|$ statt $2|z' - z''|$.
Aus den Ungleichungen (1) bis (7) folgt insgesamt

$$|(S * \phi)(z') - (S * \phi)(z'')| \leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})} \cdot |z' - z''|^\alpha,$$

also haben wir

$$[S * \phi]_{C^\alpha(\overline{K})} \leq c \|\phi\|_{C^0(\overline{K'})}. \tag{8}$$

Es ist noch $\| S * \phi \|_{C^0(\overline{K'})}$ abzuschätzen.

Für $z \in \overline{K}$ gilt mit (i)

$$\begin{aligned} |(S * \phi)(z)| &\leq \| \phi \|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \int_{K'} |S(z, z - y)| dy \leq \\ &\leq c \| \phi \|_{C^0(\overline{K'})} \cdot \int_0^{\rho+R} \frac{1}{r^{3-\beta}} r^2 dr \leq c \| \phi \|_{C^0(\overline{K'})}, \end{aligned}$$

also

$$\| S * \phi \|_{C^0(\overline{K})} \leq c \| \phi \|_{C^0(\overline{K'})}. \quad (9)$$

Aus (8) und (9) folgt schließlich die Aussage des Satzes. $\square$

Im Beweis dieses Satzes haben wir von der Setigkeit der Funktion ϕ nur bezüglich ihrer Beschränktheit und ihrer Integrierbarkeit Gebrauch gemacht. Der Satz gilt demnach auch, wenn man die Bedingung $\phi \in C^0(\mathbf{R}^3)$ durch $\phi \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ und den Ausdruck $\| \phi \|_{C^0(\mathbf{R}^3)}$ durch $\| \phi \|_\infty$ ersetzt.

Die Voraussetzung (iii) des Satzes ist immer erfüllt, wenn S in folgendem Sinne Lipschitz-stetig ist:

(iii') Für alle $z \in \overline{K_R(0)}$ gelte mit $r', r'' \in \mathbf{R}^3$ und $|r'|, |r''| \geq \lambda > 0$ stets

$$|S(z, r') - S(z, r'')| \leq \frac{c}{\lambda^{3+(1-\beta)}} \cdot |r' - r''|.$$

Diese stärkere Voraussetzung ist insbesondere dann erfüllt, wenn zusätzlich $S(z, \cdot) \in C^1(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$ mit

$$(iii'') \quad \left| \frac{\partial S}{\partial r_i}(z, r) \right| \leq \frac{c}{|r|^{3+(1-\beta)}}$$

für alle $z \in \overline{K_R(0)}$, $r \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ und $i = 1, 2, 3$ angenommen wird. Wir werden den Satz nur in diesen schwächeren Formen benutzen.

Der nun folgende Satz ist eine modifizierte Form der Hölder-Korn-Lichtenstein-Giraud-Ungleichung. Im Gegensatz zu der Situation des Satzes 1.1. benötigen wir im Fall eines *singulären* Kerns die Hölderstetigkeit der Funktion ϕ um eine entsprechende Aussage zu erhalten.

1.2. Satz: Es seien $R, R' > 0$, sei $\kappa \in C^1(\overline{K_R(0)} \times \mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$.

κ und $\frac{\partial \kappa}{\partial z_i}$, $i = 1, 2, 3$, seien singuläre Kerne auf $\overline{K_R(0)} \times \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$.

Für $z \in \overline{K_R(0)}$, $r \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, 3$ gelte stets

$$\left| \frac{\partial \kappa}{\partial r_i}(z, r) \right| \leq c \frac{1}{|r|^4}.$$

Es sei $\phi \in C^\alpha(\mathbf{R}^3)$ mit $\text{supp } \phi \in K_{R'}(0)$.

Dann ist

$$\kappa * \phi := H \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(.,. - x) \phi(x) dx \in C^\alpha(\overline{K_R(0)}),$$

und es gilt

$$\| \kappa * \phi \|_{C^\alpha(\overline{K_R(0)})} \leq c \| \phi \|_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)}$$

für ein von R, R' und α abhängiges, aber von ϕ unabhängiges $c > 0$.

Beweis: Sei $K := K_R(0)$. Weil κ ein singulärer Kern ist, gilt für $z \in K$:

$$(\kappa * \phi)(z) = H \int_{\mathbf{R}^3} \kappa(z, z - x) [\phi(x) - \phi(z)] dx. \quad (10)$$

Für beliebige, aber feste $z, z' \in K, z \neq z'$, definieren wir:

$$\delta := |z - z'|, \Delta_1 := \{x \in \mathbf{R}^3 : |z - x| \leq 2\delta\}, \Delta_2 := \{x \in \mathbf{R}^3 : |z - x| > 2\delta\}.$$

Es ist mit (10):

$$(\kappa * \phi)(z) - (\kappa * \phi)(z') = H \int_{\mathbf{R}^3} \{ \kappa(z, z - x) [\phi(x) - \phi(z)] - \kappa(z', z' - x) [\phi(x) - \phi(z')] \} dx. \quad (11)$$

Definieren wir

$$I_1(z, z') := H \int_{\Delta_1} \{ \kappa(z, z - x) [\phi(x) - \phi(z)] - \kappa(z', z' - x) [\phi(x) - \phi(z')] \} dx$$

und

$$I_2(z, z') := \int_{\Delta_2} \{ \kappa(z, z-x)[\phi(x) - \phi(z)] - \kappa(z', z'-x)[\phi(x) - \phi(z')] \} dx,$$

dann können wir (11) schreiben als

$$(\kappa * \phi)(z) - (\kappa * \phi)(z') = I_1(z, z') + I_2(z, z').$$

Nun schätzen wir $|I_1|$ und $|I_2|$ ab:

$$\begin{aligned} |I_1(z, z')| &\leq [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \left\{ \int_{\Delta_1} |\kappa(z, z-x)| |z-x|^\alpha dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Delta_1} |\kappa(z', z'-x)| |z'-x|^\alpha dx \right\} \\ &\leq [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \left\{ c \int_0^{2\delta} \frac{r^\alpha}{r^3} r^2 dr + c \int_0^{3\delta} \frac{r^\alpha}{r^3} r^2 dr \right\} \\ &\leq \frac{c}{\alpha} [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} [(2\delta)^\alpha + (3\delta)^\alpha] \leq c[\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \delta^\alpha \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} I_2(z, z') &= \int_{\Delta_2} [\phi(z') - \phi(z)] \kappa(z, z-x) dx + \\ &\quad + \int_{\Delta_2} [\phi(x) - \phi(z')] [\kappa(z, z-x) - \kappa(z', z'-x)] dx \end{aligned} \tag{13}$$

Weil κ ein singulärer Kern ist, verschwindet das erste Integral auf der rechten Seite von (13).

Betrachten wir für feste $z, z' \in \overline{K}$ die Abbildung

$$\tilde{\kappa}_{zz'} : [0, 1] \times \Delta_2 \rightarrow \mathbf{R}, \quad \tilde{\kappa}_{zz'}(\tau, x) := \kappa(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z)),$$

so gilt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\kappa(z', z' - x) - \kappa(z, z - x) = \tilde{\kappa}_{zz'}(1, x) - \tilde{\kappa}_{zz'}(0, x) = \int_0^1 \frac{\partial \tilde{\kappa}_{zz'}}{\partial \tau}(\tau, x) d\tau.$$

Unter Verwendung der Sätze von Tonelli¹ und Fubini können wir (13) schreiben als:

$$\begin{aligned} I_2(z, z') &= \int_{\Delta_2} [\phi(x) - \phi(z')] \left(\int_0^1 \frac{\partial \tilde{\kappa}_{zz'}}{\partial \tau}(\tau, x) d\tau \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} [\phi(x) - \phi(z')] \frac{\partial \tilde{\kappa}_{zz'}}{\partial \tau}(\tau, x) dx \right) d\tau \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt aber in Δ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\kappa}_{zz'}}{\partial \tau}(\tau, x) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial r_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt jedoch für $z, z' \in \overline{K}, x \in \Delta_2, \tau \in [0, 1], i = 1, 2, 3$:

$$\left| \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z)) \right| \leq \frac{c}{|z - x + \tau(z' - z)|^3} \leq \frac{2c}{|z - x|^3}$$

und

$$\left| \frac{\partial \kappa}{\partial r_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z)) \right| \leq \frac{c}{|z - x + \tau(z' - z)|^4} \leq \frac{2c}{|z' - x|^4}.$$

Mit den Abkürzungen

$$I_{21}(z, z') := \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} \phi(x) \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \right) dx \right) d\tau,$$

$$I_{22}(z, z') := \phi(z') \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \right) dx \right) d\tau,$$

$$\begin{aligned} I_{23}(z, z') &:= \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} [\phi(x) - \phi(z')] \cdot \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial r_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \right) dx \right) d\tau \end{aligned}$$

¹Die Existenz des Integrals I_2 in der zweiten Form wird im folgenden gezeigt.

gilt:

$$I_2(z, z') = I_{21}(z, z') - I_{22}(z, z') + I_{23}(z, z').$$

Jetzt schätzen wir I_{21} , I_{22} und I_{23} einzeln ab. Es gilt wegen $\text{supp}(\phi) \subset K_{R'}(0) \subset K_{R+R'}(z)$:

$$\begin{aligned} |I_{21}(z, z')| &\leq \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \cdot c\delta \cdot 4\pi \int_{2\delta}^{R+R'} \frac{1}{r^3} r^2 dr = \\ &= \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \cdot c\delta \cdot 4\pi (\ln(R+R') - \ln(2\delta)) \leq \\ &\leq c \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} (\delta + \delta^\alpha), \end{aligned} \quad (14)$$

wobei wir beim letzten Ungleichheitszeichen von der Tatsache Gebrauch gemacht haben, daß zu $a > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ stets eine positive Konstante $c(a, \alpha)$ existiert, mit der Eigenschaft, daß für alle $x \in]0, a]$ gilt: $|x \ln x| \leq c(a, \alpha) x^\alpha$.

Mit der Abkürzung $K'_{3\delta} := K_{3\delta}(z + \tau(z' - z))$ gilt:

$$\begin{aligned} I_{22}(z, z') &= \phi(z') \left\{ \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2 \cap K'_{3\delta}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \right) dx \right) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left(\int_{\mathbf{R}^3 \setminus K'_{3\delta}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \kappa}{\partial z_i}(z + \tau(z' - z), z - x + \tau(z' - z))(z'_i - z_i) \right) dx \right) d\tau \right\} \end{aligned}$$

Weil $\frac{\partial \kappa}{\partial z_i}$ für $i = 1, 2, 3$ ein singulärer Kern ist, verschwindet das zweite Integral. Also gilt mit $K'_\delta := K_\delta(z + \tau(z' - z))$, $K'_{3\delta}$ wie oben:

$$\begin{aligned} |I_{22}(z, z')| &\leq 3\delta \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \cdot \int_0^1 \left(\int_{K'_{3\delta} \setminus K'_\delta} \frac{c}{|z - x + \tau(z' - z)|^3} dx \right) d\tau \leq \\ &\leq 3c\delta \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \cdot 4\pi \int_0^1 \left(\int_\delta^{3\delta} \frac{1}{r^3} r^2 dr \right) d\tau = \\ &= 3c\delta \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \cdot 4\pi \ln 3 \leq c \|\phi\|_{C^0(\mathbf{R}^3)} \delta \end{aligned} \quad (15)$$

Für I_{23} erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
|I_{23}(z, z')| &\leq 3 \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} [\phi(x) - \phi(z')] \frac{c}{|z - x + \tau(z' - z)|^4} |z - z'| dx \right) d\tau \quad (16) \\
&\leq 3c\delta[\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \cdot \int_0^1 \left(\int_{\Delta_2} \frac{|z' - x|^\alpha}{|z - x + \tau(z' - z)|^4} dx \right) d\tau \\
&\leq c\delta[\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \cdot \int_{\Delta_2} \frac{|z' - x|^\alpha}{|z' - x|^4} dx \\
&\leq c\delta \|\phi\|_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \cdot 4\pi \int_\delta^\infty \frac{r^\alpha}{r^4} r^2 dr \\
&\leq c \|\phi\|_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \delta^\alpha
\end{aligned}$$

Es gilt außerdem:

$$\delta = |z - z'| = |z - z'|^{1-\alpha} |z - z'|^\alpha \leq (2R)^{1-\alpha} |z - z'|^\alpha = (2R)^{1-\alpha} \delta^\alpha$$

Mit (12), (14), (15) und (16) folgt also:

$$[\kappa * \phi]_{C^\alpha(\overline{K_R(0)})} \leq c \|\phi\|_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \quad (17)$$

Mit (10) gilt wegen $\text{supp}(\phi) \subset K_{R'}(0) \subset K_{R+R'}(z)$ weiter:

$$\begin{aligned}
|(\kappa * \phi)(z)| &\leq \int_{K_{R+R'}(z)} |\kappa(z, z - x)| |x - z|^\alpha dx \cdot [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \\
&\leq c[\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \cdot 4\pi \int_0^{R+R'} \frac{r^\alpha}{r^3} r^2 dr \\
&= c[\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \frac{1}{\alpha} (R+R')^\alpha \leq c [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)}
\end{aligned}$$

und damit:

$$\|\kappa * \phi\|_{C^0(\overline{K_R(0)})} \leq c [\phi]_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \leq c \|\phi\|_{C^\alpha(\mathbf{R}^3)} \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt schließlich die Behauptung. $\square$

1.3. Hilfssatz: Seien $R, \epsilon > 0$, $a_{ik} \in C^{2+\alpha}(K_{R+\epsilon}(0))$ mit $a_{ik} = a_{ki}$ für $i, k = 1, 2, 3$. Es existiere ein $c > 0$, so daß für alle $z \in K_{R+\epsilon}(0)$ und $\xi \in \mathbf{R}^3$ gilt

$$c \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) \xi_i \xi_k.$$

Sei $f \in C^\alpha(\mathbf{R}^3)$, $\text{supp}(f) \subset K_R(0)$,

$$F : \overline{K_R(0)} \rightarrow \mathbf{R}, \quad z \mapsto \int_{K_R(0)} \frac{f(x)}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z)(z_i - x_i)(z_k - x_k)}} dx.$$

Dann gilt: $F \in C^{2+\alpha}(\overline{K_R(0)})$ und

$$\|F\|_{C^{2+\alpha}(\overline{K_R(0)})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\overline{K_R(0)})}$$

für ein von R, ϵ und den a_{ik} abhängiges, aber von f unabhängiges $c > 0$.

Beweis: Seien $K := K_R(0)$ und $K' := K_{R+\epsilon}(0)$. Wir definieren

$$\varrho : \overline{K} \times (\mathbf{R}^3 \setminus \{\theta\}) \rightarrow \mathbf{R}, \quad (z, r) \mapsto \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) \cdot r_i r_k \right)^{-\frac{1}{2}}$$

und für $z, x \in \overline{K}$, $x \neq z$

$$\rho(z, x) := \varrho(z, z - x) = \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z)(z_i - x_i)(z_k - x_k) \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt für $z, x \in \overline{K}$, $x \neq z$ ($j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) &= \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(z, z - x) + \frac{\partial \varrho}{\partial r_j}(z, z - x) = \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_j}(z)(z_i - x_i)(z_k - x_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z)(z_i - x_i)(z_k - x_k))^{3/2}} - \frac{\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z)(z_k - x_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z)(z_i - x_i)(z_k - x_k))^{3/2}} \end{aligned} \quad (19)$$

und

$$F(z) = \int_K \varrho(z, z - x) f(x) dx$$

(a) Wir zeigen zunächst, daß F stetig partiell differenzierbar ist und daß gilt ($j=1,2,3$):

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}(z) = \int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) f(x) dx \quad (20)$$

Dazu definieren wir die Funktionenfolge $(\eta_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$:

$$\eta_\nu : \mathbb{R}_+^0 \rightarrow [0, 1], \quad \eta_\nu(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{\nu} \\ \sin^2[(x - \frac{1}{\nu}) \cdot \nu \cdot \frac{\pi}{2}], & \frac{1}{\nu} \leq x \leq \frac{2}{\nu} \\ 1, & x > \frac{2}{\nu} \end{cases}$$

Offenbar ist η_ν für $\nu \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbar.

Weil ρ außerhalb der Singularitäten stetig partiell nach z_j , $j = 1, 2, 3$, differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} \int_K \rho(x, z) \eta_\nu(|z - x|) f(x) dx &= \int_K \frac{\partial}{\partial z_j} [\rho(z, x) \eta_\nu(|z - x|)] f(x) dx \\ &= \int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) \eta_\nu(|z - x|) f(x) dx + \int_K \rho(z, x) \left[\frac{\partial}{\partial z_j} \eta_\nu(|z - x|) \right] f(x) dx \end{aligned} \quad (21)$$

Betrachten wir zunächst den zweiten Term von (21):

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \eta_\nu(|z - x|) = \eta'_\nu(|z - x|) \cdot \frac{z_j - x_j}{|z - x|}$$

Dabei gilt $|\frac{\partial}{\partial z_j} \eta_\nu(|z - x|)| \leq \nu\pi$ und

$$\text{supp}(\eta'_\nu) = \{r \in \mathbb{R} : \frac{1}{\nu} \leq r \leq \frac{2}{\nu}\},$$

also

$$\text{supp}(x \mapsto \eta'_\nu(|z - x|)) = K_{\frac{2}{\nu}}(z) \setminus K_{\frac{1}{\nu}}(z).$$

Nach Voraussetzung ist für alle $x, z \in \overline{K}$

$$\rho(z, x) \leq \frac{c}{|z - x|}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\pi c \left(\int_0^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{r} r^2 dr + 3 \int_0^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{r^2} r^2 dr \right) \\
&\leq c \left(\frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{\nu} \right) \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty \text{ (gleichmäßig bezüglich } z)
\end{aligned}$$

Aus (21), (22), (23) und (24) folgt nun, daß $\frac{\partial}{\partial z_j} \int_K \rho(z, x) \eta_\nu(|z - x|) f(x) dx$ für $\nu \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $\int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) f(x) dx$ konvergiert. Offenbar konvergiert auch $\int_K \rho(z, x) \eta_\nu(|z - x|) f(x) dx$ für $\nu \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen $F(z)$, womit die partielle Differenzierbarkeit von F und die Gültigkeit von (20) gezeigt sind.

Zur Vereinfachung der Notation führen wir jetzt folgende Bezeichnungen ein ($j=1,2,3$ sei im folgenden festgehalten):

$$T_1(z, r) := - \frac{\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_j}(z) r_i r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}}$$

$$T_2(z, r) := - \frac{\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z) r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}}$$

Damit können wir (19) schreiben als:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) = T_1(z, z - x) + T_2(z, z - x)$$

Es gilt dann für $l = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_l \partial z_j}(z, x) = \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z, z - x) + \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z, z - x) + \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z, z - x) + \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z - x)$$

mit

$$\frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z, r) = - \frac{\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial z_l \partial z_j}(z) r_i r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}} + \frac{\frac{3}{4} (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_j}(z) r_i r_k) \cdot (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z) r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z, r) = - \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z) r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}} + \frac{\frac{3}{2} (\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z) r_k) \cdot (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z) r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{5/2}},$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

Damit kommen wir zu folgender Abschätzung für den zweiten Term von (21):

$$\begin{aligned}
\left| \int_K \rho(z, x) \left[\frac{\partial}{\partial z_j} \eta_\nu(|z-x|) \right] f(x) dx \right| &\leq \\
&\leq c \nu \pi \cdot \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \int_{K_{2/\nu}(z)} \frac{1}{|z-x|} dx \\
&= c \nu \pi \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot 4\pi \int_0^{\frac{2}{\nu}} \frac{1}{r} r^2 dr \\
&\leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \frac{1}{\nu} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty \text{ (gleichmäßig bezüglich } z)
\end{aligned} \tag{22}$$

Jetzt untersuchen wir den ersten Term von (21) auf sein Konvergenzverhalten:

$$\begin{aligned}
\left| \int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) \eta_\nu(|z-x|) f(x) dx - \int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) f(x) dx \right| &\leq \\
&\leq \left| \int_{K \cap K_{2/\nu}(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) f(x) dx \right| \\
&\leq \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \left| \int_{K \cap K_{2/\nu}(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) dx \right|
\end{aligned} \tag{23}$$

Weil a_{ik} und $\frac{\partial a_{ik}}{\partial z_j}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) beschränkt sind, können wir das letzte Integral aus (23) weiter nach oben abschätzen. Es ist dann mit (19):

$$\begin{aligned}
\left| \int_{K \cap K_{2/\nu}(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) dx \right| &\leq \\
&\leq c \left(\int_{K_{2/\nu}(z)} \frac{|z-x|^2}{|z-x|^3} dx + \int_{K_{2/\nu}(z)} \sum_{k=1}^3 \frac{|z_k - x_k|}{|z-x|^3} dx \right) \leq
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z, r) = -\frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{lk}}{\partial z_j}(z) r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}} + \frac{\frac{3}{2} (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{lk}}{\partial z_j}(z) r_i r_k) \cdot (\sum_{k=1}^3 a_{lk}(z) r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{5/2}},$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, r) = -\frac{a_{jl}(z)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{3/2}} + \frac{3(\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z) r_k) \cdot (\sum_{k=1}^3 a_{lk}(z) r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z) r_i r_k)^{5/2}}.$$

(b) Im nächsten Schritt werden wir zeigen, daß F zweimal partiell differenzierbar ist und daß für die zweiten Ableitungen von F gilt ($j = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z_l \partial z_j}(z) &= \int_K \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z, z-x) f(x) dx + \int_K \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z, z-x) f(x) dx + \\ &\quad (25) \\ &\quad + \int_K \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z, z-x) f(x) dx + \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) [f(x) - f(z)] dx - \\ &\quad - f(z) \cdot \int_{\partial K'} T_2(z, z-x) \cdot \nu_l(x) dS(x), \end{aligned}$$

wobei ν_l für die l -te Komponente des Einheitsnormalenfeldes von $\partial K'$ steht. Mit den Bezeichnungen

$$T_{1\nu}(z, r) := T_1(z, r) \cdot \eta_\nu(|r|) \text{ und } T_{2\nu}(z, r) := T_2(z, r) \cdot \eta_\nu(|r|)$$

gilt, weil $T_{1\nu}$ und $T_{2\nu}$ stetig partiell differenzierbar sind ($\nu \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_l} \int_K \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z, x) \cdot \eta_\nu(|z-x|) f(x) dx &= \int_K \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial z_l}(z, z-x) f(x) dx + \\ &\quad (26) \\ &\quad + \int_K \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) f(x) dx + \\ &\quad + \int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial z_l}(z, z-x) f(x) dx + \\ &\quad + \int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Für den letzten Term von (26) gilt wegen $\text{supp}(f) \subset K$:

$$\int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) f(x) dx = \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) f(x) dx = \quad (27)$$

$$= \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)[f(x) - f(z)]dx + f(z) \cdot \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)dx.$$

Mit $r_l = z_l - x_l$ gilt:

$$\frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) = -\frac{\partial}{\partial x_l}(T_{2\nu}(z, z-x)).$$

Ist $\nu \geq \frac{3}{\epsilon}$, dann gilt für $x \in \partial K'$: $T_{2\nu}(z, z-x) = T_2(z, z-x)$.

Der Integralsatz von Gauß besagt dann für $\nu \geq \frac{3}{\epsilon}$:

$$\int_{K'} \frac{\partial}{\partial x_l}(T_{2\nu}(z, z-x))dx = \int_{\partial K'} T_2(z, z-x) \cdot \nu_l(x) dS(x). \quad (28)$$

Insgesamt können wir für $\nu \geq \frac{3}{\epsilon}$ Gleichung (27) unter Verwendung von (28) schreiben als:

$$\begin{aligned} \int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)f(x)dx &= \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)[f(x) - f(z)]dx - \\ &- f(z) \cdot \int_{\partial K'} T_2(z, z-x) \cdot \nu_l(x) dS(x). \end{aligned} \quad (29)$$

Wir beachten dabei, daß der letzte Term von (29) für $\nu \geq \frac{3}{\epsilon}$ unabhängig vom Folgenindex ν ist. Um das Konvergenzverhalten des ersten Terms auf der rechten Seite von (29) zu untersuchen, gehen wir analog zum ersten Teil des Beweises vor. Wir haben zunächst:

$$\begin{aligned} \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)]dx &= \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot \eta_\nu(|z-x|) \cdot [f(x) - f(z)]dx + \\ &+ \int_{K'} T_2(z, z-x) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r_l} \eta_\nu(|z-x|) \right] \cdot [f(x) - f(z)]dx \quad (30) \end{aligned}$$

Betrachten wir zuerst den zweiten Term auf der rechten Seite von (30):

$$\left| \int_{K'} T_2(z, z-x) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial r_l} \eta_\nu(|z-x|) \right] \cdot [f(x) - f(z)]dx \right| \leq \quad (31)$$

² $\frac{\partial}{\partial r_l} \eta_\nu(|z-x|)$ bedeute die partielle Ableitung der Funktion $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, r \mapsto \eta_\nu(|r|)$ nach r_l an der Stelle $r = z - x$.

$$\begin{aligned}
&\leq [f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \nu \pi \cdot \int_{K_{2/\nu}(z)} |T_2(z, z-x)| |z-x|^\alpha dx \leq \\
&\leq c[f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \nu \int_{K_{2/\nu}(z)} \frac{|z-x|^{1+\alpha}}{|z-x|^3} dx \leq \\
&\leq c[f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \nu \cdot \int_0^{2/\nu} \frac{r^{1+\alpha}}{r^3} r^2 dr \leq \\
&\leq c[f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \nu^{-\alpha} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty \text{ (gleichmäßig bezüglich } z)
\end{aligned}$$

Für das Konvergenzverhalten des ersten Terms auf der rechten Seite von (30) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot \eta_\nu(|z-x|) \cdot [f(x) - f(z)] dx - \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)] dx \right| \leq \\
& \leq \int_{K_{2/\nu}(z)} \left| \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \right| \cdot |f(x) - f(z)| dx \\
& \leq [f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \int_{K_{2/\nu}(z)} \left| \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \right| \cdot |z-x|^\alpha dx \\
& \leq c[f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \int_{K_{2/\nu}(z)} \frac{|z-x|^\alpha}{|z-x|^3} dx \\
& \leq c[f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot \nu^{-\alpha} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty \text{ (gleichmäßig bezüglich } z)
\end{aligned} \tag{32}$$

Mit (30), (31) und (32) folgt also

$$\begin{aligned}
& \int_{K'} \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)] dx \\
& \rightarrow \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)] dx, \quad \nu \rightarrow \infty \text{ (glm. bzgl. } z)
\end{aligned} \tag{33}$$

Insgesamt haben wir dann:

$$\int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)f(x)dx \quad (34)$$

$$\rightarrow \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)]dx - f(z) \cdot \int_{\partial K'} T_2(z, z-x) \cdot \nu_l(x) dS(x),$$

$\nu \rightarrow \infty$ (gleichmäßig bezüglich z).

Wie im Teil (a) des Beweises zeigt man, daß

$$\int_K \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx \rightarrow \int_K \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (35)$$

$$\int_K \frac{\partial T_{1\nu}}{\partial r_l}(z, z-x)f(x)dx \rightarrow \int_K \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z, z-x)f(x)dx, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$\int_K \frac{\partial T_{2\nu}}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx \rightarrow \int_K \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx, \quad \nu \rightarrow \infty, \quad (37)$$

wobei die Konvergenz jeweils gleichmäßig bezüglich $z \in \overline{K}$ ist.

Aus (34), (35), (36) und (37) folgt schließlich die gleichmäßige Konvergenz der linken Seite von (26) gegen die rechte Seite von (25), womit (b) bewiesen ist.

Um die Terme auf der rechten Seite von (25) einzeln bezüglich der Hölder-norm abzuschätzen, führen wir die folgenden Abkürzungen ein:

$$\psi_1(z) := \int_K \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx$$

$$\psi_2(z) := \int_K \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z, z-x)f(x)dx$$

$$\psi_3(z) := \int_K \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z, z-x)f(x)dx$$

$$\psi_4(z) := \int_{K'} \frac{\partial T_2}{\partial r_l}(z, z-x) \cdot [f(x) - f(z)]dx$$

$$\psi_5(z) := -f(z) \cdot \int_{\partial K'} T_2(z, z-x) \cdot \nu_l(x) dS(x)$$

Nach (25) ist dann für $z \in \overline{K}$ ($j, l=1, 2, 3$ fest):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_l \partial z_j}(z) = \sum_{\mu=1}^5 \psi_\mu(z)$$

(c) Wir zeigen jetzt für $\mu = 1, 2, 3$ die Abschätzungen

$$\|\psi_\mu\|_{C^\alpha(\overline{K})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\overline{K})}. \quad (38)$$

Die zugehörigen Integralkerne erfüllen mit $\beta = 2$ für ψ_1 und mit $\beta = 1$ für ψ_2 und ψ_3 die Voraussetzungen (i) und (iii') des Satzes 1.1.. Es ist noch zu verifizieren, daß für $z', z'' \in K$ und $r \in \mathbf{R}^3$ die Bedingungen

$$\left| \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z', r) - \frac{\partial T_1}{\partial z_l}(z'', r) \right| \leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|r|},$$

$$\left| \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z', r) - \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z'', r) \right| \leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|r|^2},$$

und

$$\left| \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z', r) - \frac{\partial T_1}{\partial r_l}(z'', r) \right| \leq c \frac{|z' - z''|^\alpha}{|r|^2}$$

erfüllt sind.

Wir rechnen nur die zweite Ungleichung nach.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z', r) - \frac{\partial T_2}{\partial z_l}(z'', r) &= - \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z') r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{3/2}} + \\ &+ \frac{\frac{3}{2} (\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z') r_k) \cdot (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z') r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{5/2}} + \\ &+ \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z'') r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{3/2}} - \\ &- \frac{\frac{3}{2} (\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z'') r_k) \cdot (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z'') r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{5/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z'') r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{3/2}} - \frac{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z') r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{3/2}} \right| \leq \\
& \leq \left| \frac{\sum_{k=1}^3 (\frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z'') - \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z')) r_k}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{3/2}} \right| + \\
& \quad + \left| \sum_{k=1}^3 \frac{\partial a_{jk}}{\partial z_l}(z') r_k \right| \cdot \left| \frac{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{3/2} - (\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{3/2}}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{3/2} \cdot (\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{3/2}} \right| \\
& \leq c \frac{|r|}{|r|^3} |z'' - z'|^\alpha + c |r| \frac{|r|^3}{|r|^6} \left| \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') \frac{r_i r_k}{|r|^2} \right)^{3/2} - \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') \frac{r_i r_k}{|r|^2} \right)^{3/2} \right| \\
& \leq c \frac{|z'' - z'|^\alpha}{|r|^2} + c \frac{1}{|r|^2} \left| \sum_{i,k=1}^3 (a_{ik}(z'') - a_{ik}(z')) \frac{r_i r_k}{|r|^2} \right| \\
& \leq c \frac{|z'' - z'|^\alpha}{|r|^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\frac{3}{2} (\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z'') r_k) (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z'') r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{5/2}} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\frac{3}{2} (\sum_{k=1}^3 a_{jk}(z') r_k) (\sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z') r_i r_k)}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{5/2}} \right| \leq \\
& \leq \frac{3}{2} \left| \frac{\sum_{i,k,m=1}^3 [a_{jm}(z'') \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z'') - a_{jm}(z') \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z')] r_i r_k r_m}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{5/2}} \right| + \\
& \quad + \frac{3}{2} \left| \sum_{i,k,m=1}^3 a_{jm}(z') \cdot \frac{\partial a_{ik}}{\partial z_l}(z') r_i r_k r_m \right| \cdot \\
& \quad \cdot \left| \frac{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{5/2} - (\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{5/2}}{(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') r_i r_k)^{5/2} \cdot (\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') r_i r_k)^{5/2}} \right| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \frac{|r|^3}{|r|^5} \cdot |z'' - z'|^\alpha + \\
&+ c \frac{|r|^3 |r|^5}{|r|^{10}} \cdot \left| \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z'') \frac{r_i r_k}{|r|^2} \right)^{5/2} - \left(\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}(z') \frac{r_i r_k}{|r|^2} \right)^{5/2} \right| \leq \\
&\leq c \frac{1}{|r|^2} \cdot |z'' - z'|^\alpha
\end{aligned}$$

(d) Jetzt schätzen wir ψ_4 ab. Offenbar sind $T_2(z, \cdot)$ und $\frac{\partial T_2}{\partial z_j}(z, \cdot)$ für $z \in \overline{K}$ und $j = 1, 2, 3$ homogen vom Grad -2. Deshalb sind $\frac{\partial T_2}{\partial r_l}$ und $\frac{\partial}{\partial r_l} \left(\frac{\partial T_2}{\partial z_j} \right) = \frac{\partial^2 T_2}{\partial z_j \partial r_l}$ singuläre Kerne. Der Satz 1.2. liefert mit $\kappa := \frac{\partial T_2}{\partial r_l}$ die Abschätzung³

$$\|\psi_4\|_{C^\alpha(\overline{K})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\overline{K})}. \quad (39)$$

(e) Nun gilt es noch, eine entsprechende Abschätzung für ψ_5 zu zeigen. Weil für $x \in \partial K'$ und $z \in \overline{K}$ stets $|z - x| \geq \epsilon$ ist, ist die Abbildung

$$\overline{K} \times \partial K' \rightarrow \mathbf{R}, \quad (z, x) \mapsto T_2(z, z - x)$$

Lipschitz-stetig. Das bedeutet aber insbesondere, daß für alle $z', z'' \in \overline{K}$, $x \in \partial K'$ gilt:

$$|T_2(z', z' - x) - T_2(z'', z'' - x)| < c |z' - z''|$$

für ein $c > 0$. Außerdem ist $|T_2(z, z - x)|$ für $z \in \overline{K}$, $x \in \partial K'$ beschränkt. Seien also $z', z'' \in \overline{K}$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
|\psi_5(z') - \psi_5(z'')| &\leq |f(z') - f(z'')| \cdot \left| \int_{\partial K'} T_2(z', z' - x) \nu_l(x) dS(x) \right| + \\
&+ \left| \int_{\partial K'} (T_2(z', z' - x) - T_2(z'', z'' - x)) \nu_l(x) dS(x) \right| \cdot |f(z'')| \leq
\end{aligned}$$

³Es ist $\int_{K'} \kappa(z, z - x) f(z) dx = 0$, vgl. Beweis des Satzes 1.2.

$$\begin{aligned} &\leq c \cdot 4\pi(R+\epsilon)^2 \cdot ([f]_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot |z' - z''|^\alpha + \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot |z' - z''|) \\ &\leq c \cdot \|f\|_{C^\alpha(\bar{K})} \cdot |z' - z''|^\alpha \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $[\psi_5]_{C^\alpha(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\bar{K})}$, und wir erhalten endlich mit $\|\psi_5\|_{C^0(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})}$ die Abschätzung

$$\|\psi_5\|_{C^\alpha(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\bar{K})}. \quad (40)$$

Die Abschätzungen (38), (39) und (40) liefern zusammen mit Gleichung (25) die Aussage

$$\|D^2 F\|_{C^\alpha(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^\alpha(\bar{K})}. \quad (41)$$

(f) Es gilt nun noch, Abschätzungen für $\|F\|_{C^0(\bar{K})}$ und $\|DF\|_{C^0(\bar{K})}$ zu finden. Für $z \in \bar{K}$ gilt:

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \left| \int_K \rho(z, x) dx \right| \leq \\ &\leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \left| \int_{K_{2R}(z)} \frac{1}{|z - x|} dx \right| \\ &\leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot R^2 \leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \end{aligned}$$

Damit haben wir also

$$\|F\|_{C^0(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \quad (42)$$

für ein von f unabhängiges $c > 0$. Weiter gilt für $z \in \bar{K}$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F}{\partial z_j}(z) \right| &\leq \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \left\{ \left| \int_K T_1(z, z-x) dx \right| + \left| \int_K T_2(z, z-x) dx \right| \right\} \\ &\leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \cdot \left\{ \left| \int_{K_{2R}(z)} \frac{1}{|z - x|} dx \right| + \left| \int_{K_{2R}(z)} \frac{1}{|z - x|^2} dx \right| \right\} \\ &\leq c (R^2 + R) \|f\|_{C^0(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})} \end{aligned}$$

und somit schließlich

$$\|DF\|_{C^0(\bar{K})} \leq c \|f\|_{C^0(\bar{K})}. \quad (43)$$

Aus (41), (42) und (43) folgt die Aussage des Satzes. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum Resultat des ersten Kapitels:

1.4. Satz: Sei $G \subset \mathbf{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, ∂G sei von der Klasse $C^{4+\alpha}$. Sei $\epsilon \in C^\alpha(\overline{G})$, sei $f : G \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$f(x) := \int_G \frac{1}{|x - x'|} \cdot \epsilon(x') dx'.$$

Dann ist $f \in C^{2+\alpha}(G)$ und es existiert ein von ϵ unabhängiges $c > 0$ mit

$$\|f\|_{C^{2+\alpha}(\overline{G})} \leq c \|\epsilon\|_{C^\alpha(\overline{G})}.$$

Beweis: Der Übersichtlichkeit wegen seien folgende Abkürzungen eingeführt:

$$K_R := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2\}$$

$$\tilde{K}_R := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$$

$$K_R^0 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \wedge x_3 = 0\}$$

(a) Unter den Regularitätsvoraussetzungen an ∂G besitzt ∂G lokale Parametrisierungen $\xi \in C^{4+\alpha}$, genauer: Zu jedem Punkt $x \in \partial G$ gibt es eine Umgebung U_x von x in $\mathbf{R}^3$, ein $R > 0$ ⁴ und ein $\xi \in C^{4+\alpha}(\tilde{K}_R)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\xi : \tilde{K}_R \rightarrow \overline{U_x} \cap \partial G$ ist ein Diffeomorphismus.

(ii) $\varphi : \tilde{K}_R \rightarrow \overline{U_x}$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) := \xi(x_1, x_2) + x_3 \cdot \nu(x_1, x_2)$ ist ein Diffeomorphismus, wobei $\nu(x_1, x_2)$ der äußere Einheitsnormalenvektor von ∂G an der Stelle $\xi(x_1, x_2)$ ist.⁵

Für $\sum_{i=1}^2 x_i^2 < R^2$, $x_3 < 0$ ist dann $\varphi(x_1, x_2, x_3) \in G$. Offensichtlich ist für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{K}_R$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(x) = \nu(x_1, x_2).$$

$\frac{\partial \xi}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ und $\frac{\partial \xi}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ spannen den Tangentialraum im Punkt $\xi(x_1, x_2)$ auf. Für $x_3 = 0$ gilt außerdem $\frac{\partial \xi}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial \xi}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$.

Sei $x \in \overline{K}_R$. Mit

$$g_{ik}(x) := \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x); \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) \right\rangle$$

⁴Der Übersichtlichkeit halber lassen wir hier bei R , ξ und φ die Indizierung weg.

⁵ $\xi(x_1, x_2)$ ist die senkrechte Projektion von $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ auf ∂G .

gilt weiter:

- (i) Für $i = 1, 2$ und $x_3 = 0$ ist $g_{i3}(x) = g_{3i}(x) = 0$.
- (ii) $g_{33}(x) = 1$.
- (iii) Die Matrix $(g_{ik}(x))_{i,k=1,2,3}$ ist symmetrisch und positiv definit; es gibt ein $c > 0$, so daß für alle $x \in \overline{K_R}$ und $y \in \mathbf{R}^3$ gilt:

$$\sum_{i,k=1}^3 g_{ik}(x) y_i y_k \geq c |y|^2$$

- (b) Für eine Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^3$ und $\alpha > 0$ definieren wir

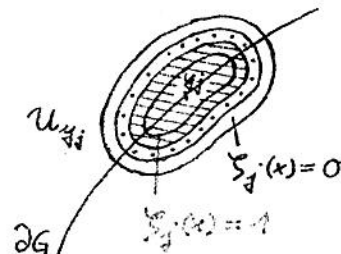
$$M^{-\alpha} := \{x \in M : \text{dist}(x, \partial M) > \alpha\}.$$

Wir gehen jetzt aus von einem $\delta > 0$ und einer endlichen vollständigen Überdeckung $U_{y_1}, \dots, U_{y_r}$ von ∂G gemäß (a) mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für $j = 1, \dots, r$ ist $U_{y_j}^{-3\delta} \cap \partial G$ zusammenhängend und
- (ii) $U_{y_1}^{-3\delta}, \dots, U_{y_r}^{-3\delta}$ ist eine vollständige offene Überdeckung von ∂G .

Für $j = 1, \dots, r$ wählen wir außerdem $\zeta_j \in C^1(\mathbf{R}^3)$ mit den Eigenschaften:

- (i) Für $x \in U_{y_j}^{-2\delta}$ gilt $\zeta_j(x) = 1$ und
- (ii) für $x \notin U_{y_j}^{-\delta}$ gilt $\zeta_j(x) = 0$.



- (c) Im folgenden sei die gemäß (a)(ii) zu U_{y_j} gehörige Abbildung φ mit $\varphi^{(j)}$ bezeichnet, g_{ik} entsprechend mit $g_{ik}^{(j)}$, ξ mit $\xi^{(j)}$, R mit R_j . Es seien

$$K_R^+(0) := \{x \in \mathbf{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 < R^2 \text{ und } x_3 > 0\}$$

und

$$K_R^-(0) := \{x \in \mathbf{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 < R^2 \text{ und } x_3 < 0\}.$$

Für $z = (z_1, z_2, z_3) \in \overline{K_{R_j}}$ seien weiter

$$\gamma^{(j)}(z) := \zeta_j(\varphi^{(j)}(z)) \cdot \epsilon(\varphi^{(j)}(z)) \cdot | \det J_{\varphi^{(j)}}(z) |,$$

$$\tilde{z} := (z_1, z_2, -|z_3|),$$

$$f_1^{(j)}(z) := \int_{K_{R_j}^-(0)} \left(\sum_{i,k=1}^3 g_{ik}^{(j)}(z)(z_i - w_i)(z_k - w_k) \right)^{-1/2} \cdot \gamma^{(j)}(w) dw \quad \text{und}$$

$$f_2^{(j)}(z) := \int_{K_{R_j}(0)} \left(\sum_{i,k=1}^2 g_{ik}^{(j)}(z)(z_i - w_i)(z_k - w_k) + (z_3 - w_3)^2 \right)^{-1/2} \cdot \gamma^{(j)}(\tilde{w}) d\tilde{w}.$$

$\gamma^{(j)}(\cdot)$ ist offenbar die stetige Fortsetzung von $\gamma^{(j)}|_{\overline{K_{R_j}^-(0)}}$ nach $\overline{K_{R_j}}$ durch

Spiegelung an der x_1 - x_2 -Ebene.

Für $z \in K_{R_j}^0$ gilt offensichtlich $f_1^{(j)}(z) = \frac{1}{2}f_2^{(j)}(z)$ und damit auch

$$D_{\{z_1, z_2\}} f_1^{(j)}(z) = \frac{1}{2} D_{\{z_1, z_2\}} f_2^{(j)}(z)$$

sowie

$$D_{\{z_1, z_2\}}^2 f_1^{(j)}(z) = \frac{1}{2} D_{\{z_1, z_2\}}^2 f_2^{(j)}(z).$$

Definieren wir

$$a_{ik}^{(j)}(z) := \begin{cases} g_{ik}^{(j)}(z), & i, k = 1, 2 \\ 0, & i = 3; k = 1, 2 \text{ oder } k = 3; i = 1, 2 \\ g_{33}^{(j)}(z) = 1, & i = 3; k = 3 \end{cases}$$

dann ist für $z \in K_{R_j}^0$ die Gleichung $a_{ik}^{(j)}(z) = g_{ik}^{(j)}(z)$ erfüllt, und wir können den Integralkern von $f_2^{(j)}$ schreiben als:

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}^{(j)}(z)(z_i - w_i)(z_k - w_k)}}.$$

Wegen

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}^{(j)}(z)x_i x_k = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}^{(j)}(z)x_i x_k - 2 \sum_{i=1}^2 g_{i3}^{(j)}(z)x_i x_3$$

und der Stetigkeit der $g_{i3}^{(j)}$ gilt, notfalls nach Verkleinerung von R_j für alle $z \in \overline{K_{R_j}}$ und $x \in \mathbf{R}^3$

$$\sum_{i,k=1}^3 a_{ik}^{(j)}(z)x_i x_k \geq c_j |x|^2$$

mit einer von j abhängigen Konstanten $c_j > 0$.
Nach dem Hilfssatz 1.3. gilt dann

$$\|f_2^{(j)}\|_{C^{2+\alpha}(\overline{K_{R_j}})} \leq c_j \|\gamma^{(j)}(\cdot)\|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}})}$$

für ein von $\gamma^{(j)}$ unabhängiges $c_j > 0$ und damit auch

$$\|D_{\{z_1, z_2\}}^2 f_1^{(j)}|_{K_{R_j}^0}\|_{C^\alpha(K_{R_j}^0)} \leq c_j \|\gamma^{(j)}\|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}^0(0)})}. \quad (44)$$

(d) Für $x, z \in \overline{K_{R_j}}$ sei

$$\varrho^{(j)}(z, x) := \frac{1}{|\varphi^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(z)|} - \frac{1}{|J_{\varphi^{(j)}}(z)(x - z)|}$$

Offenbar ist

$$|J_{\varphi^{(j)}}(z)(x - z)| = \left(\sum_{i,k=1}^3 g_{ik}^{(j)}(z)(x_i - z_i)(x_k - z_k)\right)^{1/2}.$$

$$\text{Sei } \mathfrak{R}^{(j)}(z) := \int_{K_{R_j}^-(0)} \varrho^{(j)}(z, x) \gamma^{(j)}(x) dx$$

Jetzt gilt es, $\|D_{\{z_1, z_2\}}^2 \mathfrak{R}^{(j)}\|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}})}$ abzuschätzen. Wir lassen der Übersichtlichkeit wegen den Index j weg.

Mit den Abkürzungen $\lambda := |\varphi(z) - \varphi(x)|^2$ und $\sigma := |J_\varphi(z)(x - z)|^2$ können wir ϱ schreiben als

$$\begin{aligned} \varrho(z, x) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} = - \int_0^1 \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda + \tau(\sigma - \lambda)}} \right) \right] d\tau \\ &= (\sigma - \lambda) \cdot \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\lambda + \tau(\sigma - \lambda)}^3} d\tau \end{aligned} \quad (45)$$

Nach der Taylorschen Formel gilt mit $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ für $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) - \varphi_i(z) &= \sum_{q=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z)(x_q - z_q) + \\ &+ \sum_{k,l=1}^3 \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z_k \partial z_l}(z + t(x - z))(1 - t) dt \cdot (x_k - z_k)(x_l - z_l).\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$G_{kl}^{(i)}(z, x - z) := \int_0^1 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z_k \partial z_l}(x + t(x - z))(1 - t) dt$$

folgt weiter

$$\begin{aligned}\lambda &= |\varphi(x) - \varphi(z)|^2 = \sum_{i=1}^3 (\varphi_i(x) - \varphi_i(z))^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z)(x_q - z_q) \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{q=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z)(x_q - z_q) \right) \cdot \left(\sum_{k,l=1}^3 G_{kl}^{(i)}(z, x - z)(x_k - z_k)(x_l - z_l) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k,l=1}^3 (G_{kl}^{(i)}(z, x - z)(x_k - z_k)(x_l - z_l)) \right)^2,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\lambda &= \sum_{i,q,k=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}(z) \cdot (x_q - z_q)(x_k - z_k) + \\ &+ 2 \sum_{i,q,k,l=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z) \cdot G_{lk}^{(i)}(z, x - z) \cdot (x_q - z_q)(x_k - z_k)(x_l - z_l) + \\ &+ \sum_{i,q,k,l,m=1}^3 G_{qk}^{(i)}(z, x - z) \cdot G_{lm}^{(i)}(z, x - z) \cdot (x_q - z_q)(x_k - z_k)(x_l - z_l)(x_m - z_m).\end{aligned}\tag{46}$$

Für σ erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\sigma = \sum_{i,k,l=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_k}(z) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_l}(z) \cdot (x_k - z_k)(x_l - z_l) \quad (47)$$

Setzen wir nun (46) und (47) in (45) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \varrho(z, x) = & \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\lambda + \tau(\sigma - \lambda)}} d\tau \cdot \\ & \cdot \left\{ 2 \sum_{i,q,k,l=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_q}(z) \cdot G_{kl}^{(i)}(z, x-z) \cdot (x_q - z_q)(x_k - z_k)(x_l - z_l) \right. \\ & \left. + \sum_{i,q,k,l,m=1}^3 G_{qk}^{(i)}(z, x-z) \cdot G_{lm}^{(i)}(z, x-z) \cdot (x_q - z_q)(x_k - z_k)(x_l - z_l)(x_m - z_m) \right\}. \end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt anstatt der Abbildung ϱ die Abbildung

$$\rho : \overline{K_R^-(0)} \times \{z - x | z, x \in \overline{K_R^-(0)}, z \neq x\} \rightarrow \mathbf{R}, \quad \rho(z, r) := \varrho(z, z - r),$$

dann gilt offenbar:

- (i) Für $x, z \in \overline{K_R^-(0)}, z \neq x$, ist $\rho(z, z - x) = \varrho(z, x)$, und
- (ii) ρ ist dreimal stetig partiell differenzierbar.

Außerdem gilt, wie man durch ähnliche Überlegungen wie im Beweis des Hilfssatzes 1.3. verifizieren kann, im Definitionsbereich von ρ

$$(iii) \quad |D^{\hat{\alpha}} \rho(z, r)| \leq \frac{R_{\hat{\alpha}}}{|r|^{|\hat{\alpha}|}}$$

für Multiindices $\hat{\alpha}$ mit $|\hat{\alpha}| = 1, 2, 3$ und ein von z und r unabhängiges $R_{\hat{\alpha}} > 0$. Damit ist

$$\Re(z) = \int_{K_R^-(0)} \rho(z, z - x) \gamma(x) dx$$

zweimal stetig partiell differenzierbar in $z \in \overline{K_R^-(0)}$ und wir dürfen unter dem Integral differenzieren.

Um die relevanten Terme

$$^{(2)}\mathfrak{R}_{kl}(z) := \int_{K_R^-(0)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r_k \partial r_l}(z, z-x) \gamma(x) dx$$

abzuschätzen, setzen wir den Integranden durch Spiegelung auf $K_R(0)$ fort. Mit der Bezeichnung aus (c) gilt für $z \in \overline{K_R^-(0)}$:

$$^{(2)}\mathfrak{R}_{kl}(z) = \frac{1}{2} \int_{K_R(0)} \frac{\partial^2 \rho}{\partial r_k \partial r_l}(z, z-\hat{x}) \gamma(\hat{x}) dx$$

Der neue Integralkern ist Lipschitz-stetig im Sinne von 1.1.(iii'), da mit $m=1,2$

$$\frac{\partial}{\partial r_m} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r_k \partial r_l} \right) (z, z - (z-\cdot))$$

stetig für $z-r \in \overline{K_R(0)}$, $r \neq 0$ und

$$\frac{\partial}{\partial r_3} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r_k \partial r_l} \right) (z, z - (z-\cdot))$$

stetig für $z-r \in \overline{K_R^-(0)}$, $r \neq 0$ oder $z-r \in \overline{K_R^+(0)}$, $r \neq 0$ ist.

Die Voraussetzungen (ii) und (iii') des Satzes 1.1. sind für $\beta = 1$ erfüllt.

Dieser liefert dann die Abschätzung

$$\| D^2 \mathfrak{R}^{(j)} \|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}^-(0)})} \leq c_j \| \gamma^{(j)} \|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}^-(0)})}$$

und damit schließlich

$$\| \mathfrak{R}^{(j)} |_{K_{R_j}^0} \|_{C^{2+\alpha}(K_{R_j}^0)} \leq c_j \| \gamma^{(j)} \|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}^-(0)})} \quad (48)$$

für eine von ϵ unabhängige Konstante $c_j > 0$.

(e) Sei $x_0 \in \partial G$. Dann gilt für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $x_0 \in U_{y_j}^{-3\delta} \cap \partial G$

$$f(x_0) = f_1^{(j)}((\varphi^{(j)})^{-1}(x_0)) + \mathfrak{R}^{(j)}((\varphi^{(j)})^{-1}(x_0)) + \Upsilon^{(j)}(x_0),$$

wobei

$$\Upsilon^{(j)}(x_0) := \int_G \frac{1}{|x_0 - x'|} \cdot \epsilon(x') \cdot (1 - \zeta_j(x')) dx',$$

denn nach der Transformationsformel ist

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \int_{U_{y_j} \cap G} \frac{1}{|x_0 - x'|} \cdot \epsilon(x') \cdot \zeta_j(x') dx' + \int_G \frac{1}{|x_0 - x'|} \cdot \epsilon(x') \cdot (1 - \zeta_j(x')) dx' = \\ &= \int_{K_R^-(0)} \frac{1}{|x_0 - \varphi^{(j)}(w)|} \cdot \epsilon(\varphi^{(j)}(w)) \zeta_j(\varphi^{(j)}(w)) | \det J_{\varphi^{(j)}}(w) | dw + \Upsilon^{(j)}(x_0). \end{aligned}$$

Mit $z'_0 \in \hat{K}_R$, $z'_0 = (\xi^{(j)})^{-1}(x_0)$, $z_0 = (\varphi^{(j)})^{-1}(x_0)$ und damit $z_0 = (z'_0, 0)$ ist

$$(f \circ \xi^{(j)})(z'_0) = f_1^{(j)}(z_0) + \Re^{(j)}(z_0) + (\Upsilon^{(j)} \circ \xi^{(j)})(z'_0).$$

Wegen $\text{dist}(\text{supp}(1 - \zeta_j); \partial G \cap U_{y_j}^{-3\delta}) \geq \delta$ ist klar, daß mit

$$T_j := (\xi^{(j)})^{-1}(\partial G \cap U_{y_j}^{-3\delta}) \subset \hat{K}_{R_j}$$

$$\| \Upsilon^{(j)} \circ \xi^{(j)} \|_{C^{2+\alpha}(\overline{T_j})} \leq c_j \| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})} \quad (49)$$

für ein von ϵ unabhängiges $c_j > 0$ gilt.

(f) Zunächst haben wir, wenn wir die Resultate von (c), (d) und (e) zusammenfassen und verwenden, daß

$$\| \gamma^{(j)} \|_{C^\alpha(\overline{K_{R_j}})} \leq c_j \| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})},$$

das Zwischenergebnis

$$\| f \circ \xi^{(j)} \|_{C^{2+\alpha}(\overline{T_j})} \leq c_j \| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})}$$

für ein von ϵ unabhängiges $c_j > 0$. Mit

$$\| f \|_{C^{2+\alpha}(\partial G)} = \sum_{j=1}^r \| f \circ \xi^{(j)} \|_{C^{2+\alpha}(\overline{T_j})}$$

folgt schließlich

$$\| f \|_{C^{2+\alpha}(\partial G)} \leq c \| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})}. \quad (50)$$

(g) Mit (50) und dem Satz 0.3. folgt wegen $\Delta f = \epsilon$ in G

$$\begin{aligned} \| f \|_{C^{2+\alpha}(\overline{G})} &\leq c (\| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| f \|_{C^{2+\alpha}(\partial G)} + \| f \|_{C^0(\overline{G})}) \\ &\leq c \| \epsilon \|_{C^\alpha(\overline{G})} \end{aligned}$$

für ein von ϵ unabhängiges $c > 0$. $\square$

Kapitel 2

Abschätzungen, die sich aus dem Fundamentalsatz ergeben

Um zunächst eine Abschätzung von Einfachschichtpotentialen bezüglich der C^α -Norm zu bekommen, übernehmen wir den folgenden Satz aus [5].

2.1.Satz: Sei G ein beschränktes Gebiet, ∂G von der Klasse $C^{2+\alpha}$. Sei $\lambda \in C^{1+\alpha}(\partial G)$, sei $i \in \{1, 2, 3\}$. Für $x \in G$ sei

$$v(x) := \int_{\partial G} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (|x - x'|^{-1}) \right] \lambda(x') d\Omega'.$$

Dann gilt:

Die stetige Fortsetzung v_G von v auf $\overline{G}$ ist aus $C^{1+\alpha}(\overline{G})$ und es gilt

$$\|v_G\|_{C^{1+\alpha}(\overline{G})} \leq c \|\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}$$

für ein von λ unabhängiges $c > 0$.

Wir wenden nun den Satz 2.1. zusammen mit dem Resultat aus dem ersten Kapitel auf das Dirichlet-Problem für inhomogen harmonische Vektorfelder an.

Sei $G \in \mathbb{R}^3$ eine im Sinne von Kapitel 0 zulässige Menge. Deren Zusammenhangskomponenten erfüllen die Regularitätsvoraussetzungen aus dem Satz 1.4.. Sei $u \in C^{1+\alpha}(\overline{G})$. Nach dem Fundamentalsatz der Vektoranalysis genügt u der Gleichung¹

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \operatorname{grad} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' u dx' + \operatorname{grad} \int_{\partial G} \frac{1}{r} \epsilon^{*'} d\Omega' + \right. \\ & \left. + \operatorname{rot} \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' u dx' + \operatorname{rot} \int_{\partial G} \frac{1}{r} \gamma^{*'} d\Omega' \right\} \end{aligned}$$

¹Wir benutzen dabei die Abkürzungen $r := |x - x'|$, $\operatorname{div}' u := \operatorname{div} u(x')$, $\operatorname{rot}' u := \operatorname{rot} u(x')$, $\epsilon^{*'} := \epsilon^*(x')$, $\gamma^{*'} := \gamma^*(x')$ und $u := u(x)$.

wobei $\gamma^* = u \times \nu$, $\epsilon^* = -\langle \nu, u \rangle$ und ν der äußere Einheitsnormalenvektor von ∂G ist.

Der Satz 1.4. liefert die Abschätzungen

$$\left\| \int_G \frac{1}{r} \operatorname{div}' u dx' \right\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G})} \leq c \left\| \operatorname{div} u \right\|_{C^\alpha(\bar{G})} \quad (1)$$

und

$$\left\| \int_G \frac{1}{r} \operatorname{rot}' u dx' \right\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G})} \leq c \left\| \operatorname{rot} u \right\|_{C^\alpha(\bar{G})}. \quad (2)$$

Mit dem Satz 2.1. erhalten wir

$$\left\| \int_{\partial G} \frac{1}{r} \epsilon^{*'} d\Omega' \right\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G})} \leq c \left\| \epsilon^* \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \quad (3)$$

und

$$\left\| \int_{\partial G} \frac{1}{r} \gamma^{*'} d\Omega' \right\|_{C^{2+\alpha}(\bar{G})} \leq c \left\| \gamma^* \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}. \quad (4)$$

Insgesamt haben wir also mit obigen Bezeichnungen:

2.2. Satz:

$$\begin{aligned} \left\| u \right\|_{C^{1+\alpha}(\bar{G})} \leq c & \left(\left\| \operatorname{div} u \right\|_{C^\alpha(\bar{G})} + \left\| \operatorname{rot} u \right\|_{C^\alpha(\bar{G})} + \right. \\ & \left. + \left\| \epsilon^* \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} + \left\| \gamma^* \right\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \right) \end{aligned}$$

für ein von u unabhängiges $c > 0$. □

Kapitel 3

Abschätzung von $\|u\|_{C^{1+\alpha}(\bar{G})}$ durch $\|\operatorname{div} u\|_{C^\alpha(\bar{G})}$, $\|\operatorname{rot} u\|_{C^\alpha(\bar{G})}$, $\|\gamma^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}$ und $|E^{(i)}|$

Um zu unserem Endresultat vorzudringen, müssen wir in der Abschätzung aus dem Satz 2.2. jetzt noch den Term $\|\epsilon^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}$ durch $\sum_{i=1}^m |E^{(i)}|$ ersetzen. Dies wird dadurch geschehen, daß wir für die Lösung der inhomogenen Integralgleichung

$$\epsilon^* + K\epsilon^* = f, \quad f \in C^{1+\alpha}(\partial G)$$

eine Abschätzung der Form

$$\|\epsilon^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq c \left(\sum_{i=1}^m |E^{(i)}| + \|f\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \right)$$

beweisen. K ist dabei der Neumann-Operator. Mit der Integralgleichung aus [3] folgt schließlich das gewünschte Resultat.

Nach den in Kapitel 0 an G gestellten Voraussetzungen ist ∂G von der Klasse C^6 . Aus dem Satz 0.4. folgt dann für $\lambda \in C^{1+\alpha}(\partial G)$:

$$K\lambda \in C^{2+\alpha}(\partial G)$$

und

$$\|K\lambda\|_{C^{2+\alpha}(\partial G)} \leq c \|\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}.$$

Ist $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $C^{1+\alpha}(\partial G)$ mit $\|\lambda_n\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, dann ist also $(K\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $C^{2+\alpha}(\partial G)$. Diese Folge enthält eine in $C^{1+\alpha}(\partial G)$ konvergente Teilfolge. Damit folgt, daß der Neumann-Operator

$$K: C^{1+\alpha}(\partial G) \rightarrow C^{1+\alpha}(\partial G)$$

vollstetig ist.

Im folgenden bezeichne m die Anzahl der beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$. Diese seien mit $\bar{G}_i$, $i = 1, \dots, m$, bezeichnet. Wir

definieren für $i = 1, \dots, m$:

$$\tilde{h}_i(x) := \begin{cases} 1, & x \in \overline{G_i} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

3.1. Hilfssatz: Es sei

$$U := \{\varphi \in C^{1+\alpha}(\partial G) \mid \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_i d\Omega = 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}.$$

Betrachten wir K als vollstetigen Operator in $C^{1+\alpha}(\partial G)$, dann gilt

$$C^{1+\alpha}(\partial G) = N(I + K) \oplus U.$$

Beweis: (a) Wir zeigen zunächst $N(I + K) \cap U = 0$.

Sei $\varphi \in N(I + K) \cap U$. Nach dem Satz 0.5. gibt es eine Basis $(\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_m)$ von $N(I + K)$ mit

$$\int_{\partial G} \tilde{\epsilon}_i \tilde{h}_k d\Omega = \delta_{ik} \quad \text{für } i, k = 1, \dots, m.$$

Sei also $\varphi = \sum_{i=1}^m \lambda_i \tilde{\epsilon}_i$ mit $\lambda_i \in \mathbf{R}$ für $i = 1, \dots, m$. Wegen $\varphi \in U$ gilt für $k = 1, \dots, m$

$$0 = \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_k d\Omega = \sum_{i=1}^m \lambda_i \int_{\partial G} \tilde{\epsilon}_i \tilde{h}_k d\Omega = \lambda_k$$

und damit $\varphi = 0$.

(b) Es ist noch $C^{1+\alpha}(\partial G) = N(I + K) + U$ zu beweisen.

Sei $\varphi \in C^{1+\alpha}(\partial G)$, seien weiter

$$E_i := \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_i d\Omega \quad \text{für } i = 1, \dots, m,$$

$$\varphi_1 := \sum_{i=1}^m E_i \tilde{\epsilon}_i,$$

und

$$\varphi_2 := \varphi - \varphi_1.$$

Dann gilt $\varphi_1 \in N(I + K)$,

$$\int_{\partial G} \varphi_1 \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega = E_i = \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega \quad \text{für } i = 1, \dots, m$$

und damit

$$\int_{\partial G} \varphi_2 \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega = \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega - \int_{\partial G} \varphi_1 \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega = 0$$

für $i = 1, \dots, m$, d.h. $\varphi_2 \in U$. □

3.2. Satz: Seien $\epsilon^*, f \in C^{1+\alpha}(\partial G)$, seien $E^{(1)}, \dots, E^{(m)} \in \mathbf{R}$, ϵ^* genüge der Integralgleichung

$$\epsilon^* + K\epsilon^* = f$$

und den Nebenbedingungen

$$\int_{\partial G} \epsilon^* \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega = E^{(i)}$$

für $i = 1, \dots, m$.

Dann existiert eine von ϵ^* , f und den $E^{(i)}$ unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$\|\epsilon^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq c \left(\sum_{i=1}^m |E^{(i)}| + \|f\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \right).$$

Beweis: (a) Die im Hilfssatz 3.1. definierte Menge U ist als abgeschlossener Unterraum von $C^{1+\alpha}(\partial G)$ selbst ein Banachraum, weil die Nullräume der stetigen Funktionale

$$C^{1+\alpha}(\partial G) \rightarrow \mathbf{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{\partial G} \varphi \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega$$

für $i = 1, \dots, m$ abgeschlossene Teilräume von $C^{1+\alpha}(\partial G)$ sind.

(b) Wir zeigen jetzt die Existenz einer Konstante $c > 0$, mit der für alle $\varphi \in U$ gilt:

$$\|(I + K)\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \geq c \|\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}.$$

Nach dem vorhergehenden Hilfssatz hat die Gleichung $(I + K)\varphi = 0$ auf U nur die triviale Lösung $\varphi = 0$. Gäbe es (o.E.) eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \in U$ und $\|\varphi_n\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (I + K)\varphi_n = 0$, hätte diese Folge aufgrund der Vollstetigkeit von K eine Teilfolge $(\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, daß $(K\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Banachraum $C^{1+\alpha}(\partial G)$ und damit konvergent wäre. Es sei dann $y := \lim_{j \rightarrow \infty} K\varphi_{n_j}$. Trivialerweise wäre $\varphi_{n_j} = (\varphi_{n_j} + K\varphi_{n_j}) - K\varphi_{n_j}$. Wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} (\varphi_{n_j} + K\varphi_{n_j}) = 0$ würde schließlich $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_{n_j} = -y$ und damit auch $y \in U$, $\|y\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = 1$ folgen. Wegen der Stetigkeit von K würde dann auch $y + Ky = 0$ gelten, was im Widerspruch zur ausschließlichen trivialen Lösbarkeit der Integralgleichung stünde.

(c) Sei nun ϵ^* wie oben angegeben. Sei $(\tilde{\epsilon}_1, \dots, \tilde{\epsilon}_m)$ die im Beweis des Hilfssatzes 3.1. verwendete Basis von $N(I + K)$. Sei $\epsilon_1^* := \sum_{i=1}^m E^{(i)} \tilde{\epsilon}_i$, $\epsilon_2^* := \epsilon^* - \epsilon_1^*$. Dann gilt¹ $\epsilon_1^* \in N(I + K)$, $\epsilon_2^* \in U$ und $\epsilon^* = \epsilon_1^* + \epsilon_2^*$. Für ϵ_1^* erhalten wir sofort die Abschätzung

$$\|\epsilon_1^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq \max_{i=1, \dots, m} \|\tilde{\epsilon}_i\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \cdot \sum_{i=1}^m |E^{(i)}|.$$

Wegen $\epsilon_2^* + K\epsilon_2^* = f$ folgt dann aus (b):

$$\|\epsilon_2^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq c^{-1} \cdot \|f\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}$$

Insgesamt folgt also die Existenz einer von ϵ^* , f und den $E^{(i)}$ unabhängigen Konstanten $c > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|\epsilon^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} &\leq \|\epsilon_1^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} + \|\epsilon_2^*\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \\ &\leq c \left(\sum_{i=1}^m |E^{(i)}| + \|f\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \right). \end{aligned} \quad \square$$

Nach Satz I.3.3. in [3] genügt die Normalkomponente $c^* = -\langle \nu, u \rangle$ der Lösung u des Dirichlet-Problems $D(G, \epsilon, \gamma, \gamma^*, E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ auf ∂G der Integralgleichung

$$c^*(\xi) + Kc^*(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \partial G,$$

wobei

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \langle \nu(\xi), (\text{grad} \int_G \frac{1}{r} \text{div}' u dx')(\xi) - (\text{rot} \{ \int_G \frac{1}{r} \text{rot}' u dx' + \int_{\partial G} \frac{\gamma^*}{r} d\Omega' \})(\xi) \rangle. \quad ^2$$

¹vgl. Beweis von 3.1.

²Bezeichnungen wie in Kapitel 2 mit ξ statt x

Mit den Abschätzungen (1),(2) und (4) aus Kapitel 2 folgt dann

$$\| f \|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq c (\| \operatorname{div} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \operatorname{rot} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \gamma^* \|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}).$$

Zusammen mit dem Resultat des Satzes 3.2. erhalten wir die Abschätzung

$$\| \epsilon^* \|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \leq c \left(\sum_{i=1}^m | E^{(i)} | + \| \operatorname{div} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \operatorname{rot} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \gamma^* \|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \right).$$

Setzen wir diese Ungleichung in die Abschätzung des Satzes 2.2. ein, erhalten wir schließlich

3.3. Satz: Für die Lösung u von $D(G, \epsilon, \gamma, \gamma^*, E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ gilt:

$$\| u \|_{C^{1+\alpha}(\overline{G})} \leq c (\| \operatorname{div} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \operatorname{rot} u \|_{C^\alpha(\overline{G})} + \| \gamma^* \|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} + \sum_{i=1}^k | E^{(i)} |).$$

□

Ist andererseits $u \in C^{1+\alpha}(\overline{G})$ ein beliebiges Vektorfeld, ist $\gamma^* = u \times \nu$ auf ∂G und sind $E^{(i)} = \int_{\partial G} -\langle u, \nu \rangle \tilde{h}_i |_{\partial G} d\Omega$ die Ergiebigkeiten von u auf dem Rand, dann ist u Lösung von $D(G, \epsilon, \gamma, \gamma^*, E^{(1)}, \dots, E^{(m)})$ und erfüllt die Abschätzung des Satzes 3.3.

Literaturverzeichnis

- [1] Bers, John, Schechter
Partial Differential Equations,
New York, 1964
- [2] Ute Heinemann
Die regularisierende Wirkung
der Randintegraloperatoren der
klassischen Potentialtheorie
in den Räumen hölderstetiger
Funktionen, Diplomarbeit,
Universität Bayreuth, 1992
- [3] Wolf von Wahl
Das Außenraumproblem für die
instationären Gleichungen
von Navier-Stokes,
Rudolf-Lipschitz-Vorlesung,
Bonn, 1989
- [4] Wolf von Wahl
Funktionalanalysis I, Vorlesung,
Universität Bayreuth,
Wintersemester 1993/94
- [5] Michael Wiegner
Schauder Estimates for
Boundary Layer Potentials,
in: Mathematical Methods in the
Applied Sciences, Vol.16, 1993

Erklärung

Ich versichere, daß ich diese Diplomarbeit selbständig angefertigt habe. Die verwendete Literatur habe ich vollständig angegeben.

Bayreuth, im November 1995

Michael Neude

