

Algebraische Berechnung von Strudelgrößen und
graphisches Auffinden von Grenzyklen um eine
Stelle der Unbestimmtheit

Diplomarbeit
vorgelegt von
André Höhn
am Lehrstuhl Mathematik VI
der Universität Bayreuth

Bayreuth, den 20.11.2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Differentialgleichungen, Strudel und Wirbel	3
2.1	Differentialgleichungen	3
2.2	Poincarésche Wirbelbedingung	5
2.3	Vergleichsdifferentialgleichung nach Dehn	6
2.4	Rekursionsverfahren nach Frommer	8
3	Strudelgrößenberechnung mit algebraischem Löser	11
3.1	Einführung in die Problemstellung und Unterschied zu Moritzen . . .	11
3.2	Die Umsetzung im algebraischen Löser Maple	12
3.3	Beispiele mit Vergleich zu Moritzen	19
3.4	Laufzeit, Komplexität und Auslöschung	33
4	Grenzykel	34
4.1	Eigenschaften und Definition	34
4.2	Kriterium für die Existenz	37
4.3	Graphisches Auffinden	39
4.4	Beispiele und Fallstudien	41
4.5	Betrachtung des Nullstellengebildes der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$	54
A	Quellcode	i
B	Datenträger	xii
C	Gleichungssysteme	xiii
D	Beispiel zur Strudelgrößenberechnung	xvi

Kapitel 1

Einleitung

Technik, Naturwissenschaften und soziale Wissenschaften führen oft auf mathematische Probleme, die der Bestimmung einer Funktion bedürfen, welche einer Gleichung mit ein oder mehreren Ableitungen der unbekanntem Funktion genügt. Solche Gleichungen werden Differentialgleichungen genannt. Nach Wladimir Igorewitsch Arnold „bilden Differentialgleichungen die Grundlage des naturwissenschaftlich-mathematischen Weltbildes“.

Da nicht alle Differentialgleichungen mit analytischen Mitteln lösbar sind, entstanden deshalb numerische und geometrische Methoden. Weil diese teilweise sehr rechenintensiv sind, kommt ihnen die Entwicklung des Computers entgegen. Probleme die vor 50 Jahren aufgrund des Aufwandes unlösbar waren, können heutzutage zu Hause mit dem eigenen PC gelöst werden. Auch in der hier vorliegenden Arbeit war der Einsatz des Computers absolut notwendig.

Die Klassifizierung von Differentialgleichungen des Typs $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ ¹ in Wirbel und Strudel, sowie das Auffinden von Grenzyklen konnte mit Hilfe selbsterstellter Programme für die Software Maple umgesetzt werden. In der folgenden Arbeit werden die zugrundeliegende Theorie, die Ideen und Methoden, die Realisierung sowie eine Bewertung der Ergebnisse betrachtet. Der entscheidende Punkt wird in der Exaktheit der Ergebnisse zu suchen sein. Nach Poincaré und Frommer müssen für das Auftreten eines Wirbels unendlich viele charakteristische Größen der Gleichung $y' = -\frac{A}{B}$ verschwinden. Diese Größen heißen Strudelgrößen. Beruhend auf einer algebraischen statt numerischen Berechnung, wie sie in der Arbeit von Moritzen [1] Anwendung fand, ist es nun möglich, beliebig viele Strudelgrößen exakt zu berechnen. Dies wiederum ist notwendig um eine Klassifizierung in Wirbel und Strudel vornehmen zu können. Der Spezialfall des Auftretens von Grenzyklen ist leider nicht mit rein mathematisch-analytischen Methoden untersuchbar, was aber mit Hilfe graphischer Darstellungen gelingt. Dies ermöglicht es Grenzyklen numerisch beliebig genau zu lokalisieren.

¹A(x,y), B(x,y) Polynome in x, y

Kapitel 2

Differentialgleichungen, Strudel und Wirbel

2.1 Differentialgleichungen

Definition 2.1 (Differentialgleichung). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Definition 2.2 (Lösung einer Differentialgleichung). Unter einer Lösung einer Differentialgleichung von (1.1) versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$$

mit den Eigenschaften

- Der Graph φ ist in G enthalten, d.h.

$$\Gamma_\varphi = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = \varphi(x)\} \subset G$$

- Es gilt

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad \forall x \in I$$

Damit die zweite Bedingung überhaupt formuliert werden kann muß die erste gestellt werden.

Bemerkung 2.3 (Zur Eindeutigkeit). Für die Eindeutigkeit einer Lösung wird die Lipschitzbedingung benötigt. Dieser Begriff und auch der Beweis der Eindeutigkeit kann auf den Seiten 96ff in [4], Bd.II, nachgelesen werden. Im weiteren sei der Einfachheit halber stets ausreichende Glattheit vorausgesetzt, was im Falle der hier betrachteten Differentialgleichungen keine spektakuläre Forderung ist.

Definition 2.4 (r_0 , Startradius). Der Einfachheit halber werden später als Startpunkte, für die grafische Darstellung der Näherung einer expliziten Lösung, Punkte auf der x -Achse mit den Koordinaten $(x_{\text{koord}}, 0)$ gewählt. r_0 bezeichne nun die x -Koordinate des Startpunktes.

Startradius sei ein Synonym für r_0 .

Definition 2.5 (Stelle der Unbestimmtheit, Unbestimmtheitsstelle). Als Stelle der Unbestimmtheit wird bei Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A}{B}$ die Stelle an der $A = B = 0$ ist bezeichnet. Aufgrund der Betrachtung einer stark eingeschränkten Gruppe von Differentialgleichungen, soll die Unbestimmtheitsstelle in der Folge auch, Ursprung oder Null genannt werden.

Gleichgewichtspunkt oder kritischer Punkt sind weitere Bezeichnungen für diese Stelle in dem zu $y' = -\frac{A}{B}$ äquivalenten System $\dot{x} = B$, $\dot{y} = -A$.

Definition 2.6 (Intervalle). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann heißt

$[a, b] := x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b$ abgeschlossenes Intervall,

$(a, b) := x \in \mathbb{R} : a < x < b$ offenes Intervall,

$[a, b) := x \in \mathbb{R} : a \leq x < b$ (nach rechts) halboffenes Intervall,

$(a, b] := x \in \mathbb{R} : a < x \leq b$ (nach links) halboffenes Intervall.

a, b heißen hierbei Randpunkte des Intervalls I . $|I| = b - a$ sei seine Länge. Außerdem werden abgeschlossene Intervalle auch kompakte Intervalle genannt.

Definition 2.7 (Intervallschachtelung). Eine Intervallschachtelung ist eine Folge I_1, I_2, I_3, \dots kompakter Intervalle, kurz (I_n) , mit den Eigenschaften:

1. $I_{n+1} \subset I_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit einer Länge $|I_n| < \epsilon$.

Die Definitionen von Pfaffscher Form, Richtungsfeld und autonomes System können bei Bedarf in Abschnitt 2.2 „Autonome Systeme und Pfaffsche Formen“ der Arbeit „Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen der Form $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle“ von Moritzen [1] nachgelesen werden. Sie sind aber nicht unbedingt für das Verständnis der folgenden Kapitel nötig.

2.2 Poincarésche Wirbelbedingung

Gegeben seien die reell analytischen Funktionen in x und y

$$\begin{aligned} A(x, y) &:= x + p(x, y), & p(x, y) &:= \sum_{i=2}^{\infty} p_i(x, y), \\ B(x, y) &:= y + q(x, y), & q(x, y) &:= \sum_{i=2}^{\infty} q_i(x, y), \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei p_i und q_i homogene Polynome vom Grad i sind. $A(x, y)$ und $B(x, y)$ sind konvergente Potenzreihen in einer offenen Umgebung G von Null. Mit linearem Anteil werden die homogenen Polynome ersten Grades aus A und B bezeichnet, d.h. für $A(x, y)$ ist der lineare Anteil x und für $B(x, y)$ ist der lineare Anteil y . Diese linearen Anteile sind das Struktur-Merkmal dieser Klasse von Differentialgleichungen.

Definition 2.8 (Poincarésche Problem). Sei $G \subset \mathbb{R}^2$. Seien A, B wie in (2.2) konstruiert. Die Pfaffsche Form

$$\omega := A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$$

über G sei regulär in $G \setminus \{0\}$. Das Poincarésche Problem¹ besteht in der Charakterisierung der Lösungen von $\omega = 0$ in der Nähe des kritischen Punktes 0 . Nach dem vorherigen Abschnitt sind die Lösungen durch die Differentialgleichungen

$$y' := \frac{dy}{dx} = -\frac{A(x, y)}{B(x, y)}, \quad B(x, y) \neq 0 \quad (2.3)$$

bzw.

$$x' := \frac{dx}{dy} = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}, \quad A(x, y) \neq 0 \quad (2.4)$$

bestimmt.

Definition 2.9 (Wirbel, Wirbelfall). Sei das Poincarésche Problem aus Definition (2.8) betrachtet. Sind in einer gelochten Umgebung $G \setminus \{0\}$ des kritischen Punktes 0 alle in $G \setminus \{0\}$ liegenden Integralkurven geschlossen, so sei von Wirbel gesprochen oder: es läge der Wirbelfall in 0 vor.

Definition 2.10 (Strudel, Strudelfall). Wie zuvor sei das Poincarésche Problem aus Definition (2.8) betrachtet. Liegt nicht der Wirbelfall vor, so sei von einem Strudelfall gesprochen bzw. es handle sich um einen Strudel. In [16] wird aufgezeigt, daß im Strudelfall die Integralkurven Spiralen um den Nullpunkt bilden.

¹H. Poincaré, Journal de Mathematiques 1885

Es existiert keine Integralkurve in G , die in den Nullpunkt mit einer bestimmten Richtung einmündet, und eben diese Eigenschaft ist es, die auf die Klassifizierung der Strudel und Wirbel als Lösungen von $\omega = 0$ führt. Poincaré geht von der Voraussetzung aus, daß sich im Wirbelfall die Lösungskurven als Niveaulinien $F(x, y) = c$ (c eine Konstante) darstellen lassen, wobei $F(x, y)$ eine in einer Umgebung der singulären Stelle konvergente Potenzreihe ist².

Durch Vergleich der Tangentfelder zweier Differentialgleichungen, wobei mindestens eines geschlossene Integralkurven besitzt, schloß Frommer auf die Poincaréschen Bedingungen für einen Wirbel, ohne dabei das Vorhandensein einer Funktion F wie oben zu benötigen.

Daß diese Bedingungen zugleich notwendig als auch hinreichend sind, wurde in [2], §2 gerechtfertigt³ und von Moritzen im Satz 2.13 endgültig bewiesen. Dies kann weiter hinten in dieser Arbeit noch einmal nachgelesen werden.

2.3 Vergleichsdifferentialgleichung nach Dehn

Um die zur Klassifizierung in Strudel und Wirbel nötigen Bedingungen zu gewinnen, schlug Dehn 1929 ein Verfahren basierend auf einer konstruierten Vergleichsdifferentialgleichung vor. Deren Lösungen beschreiben in der Umgebung der singulären Stelle sicher geschlossene Kurven. Die Differenz zwischen gegebener und konstruierter Differentialgleichung wird dann als Entscheidungsmerkmal für das Vorliegen eines Wirbels oder Strudels verwendet.

Durch die vorgegebene Gestalt von A und B (2.2) kann von einem Nicht-Wirbelfall unmittelbar auf den Strudelfall geschlossen werden. Dann laufen alle Integralkurven von $y' = -\frac{A}{B}$, die in der Umgebung der singulären Stelle starten, als Spiralen mit positiver oder negativer Durchlaufrichtung des Polarwinkels φ in den kritischen Punkt.

Um zur konstruierten Vergleichsdifferentialgleichung zu gelangen sei zunächst

$$F(x, y) := x^2 + y^2 + \sum_{i=3}^n F_i(x, y) \quad \text{mit } n \geq 3 \quad (3.5)$$

mit F_i homogenen Polynomen in x und y vom Grad i .

Somit erhält man für die Ableitungen von $F(x, y)$ nach x bzw. nach y

$$F_x(x, y) := \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2x + \sum_{i=3}^n F_{xi}(x, y) := F_x,$$

$$F_y(x, y) := \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y + \sum_{i=3}^n F_{yi}(x, y) := F_y.$$

²Vergleiche [2] S. 397

³Die Beweislücke auf S. 405 in [2] kann nach [15] geschlossen werden.

Nach Frommer beruht nun das Verfahren⁴ auf der Konstruktion einer Vergleichsdifferentialgleichung $y'_1 := f(x, y)$, deren Lösungen in der Umgebung des Ursprungs sicher geschlossene Kurven darstellen, somit also Wirbel bilden. Gelingt es nun eine solche Vergleichsdifferentialgleichung so zu bilden, daß die Feldrichtungen der Ausgangs- und der Vergleichsdifferentialgleichung nie in einer bestimmten Umgebung des Nullpunktes übereinstimmen, so ist der Nachweis erbracht, daß nicht beide gleichzeitig vom Wirbeltyp sind. Da diese Eigenschaft jedoch von der Vergleichsdifferentialgleichung vorausgesetzt wird, muß die ursprüngliche Differentialgleichung zwingend ein Strudel sein.

Sei für die Vergleichsdifferentialgleichung die Pfaffsche Form $\omega_1 = F_x dx + F_y dy = 0$. Somit liegt der Wirbelfall vor, bei dem die Niveaulinien von F beschrieben werden. Es folgt

$$y'_1 = f(x, y) := \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}, \quad F_y \neq 0 \quad (3.6)$$

$$x'_1 = \frac{1}{f(x, y)} = \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x}, \quad F_x \neq 0. \quad (3.7)$$

Die Lösungen von x_1 bzw. y_1 bilden sicher geschlossene Kurven in einer Umgebung $G \setminus \{0\}$ ⁵. Da nun alles bereitsteht kann die Differenz aus (2.3) und (3.6) gebildet werden

$$\begin{aligned} y' - y'_1 &= -\frac{A(x, y)}{B(x, y)} - \left(-\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \right) \\ &= \frac{-A(x, y)F_y(x, y) + B(x, y)F_x(x, y)}{B(x, y)F_y(x, y)} \\ &\text{wobei } (B(x, y)F_y(x, y)) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

bzw. die Differenz aus (2.4) und (3.7)

$$\begin{aligned} x' - x'_1 &= -\frac{B(x, y)}{A(x, y)} - \left(-\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} \right) \\ &= \frac{-B(x, y)F_x(x, y) + A(x, y)F_y(x, y)}{A(x, y)F_x(x, y)} \\ &\text{wobei } (A(x, y)F_x(x, y)) \neq 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

⁴Vergleiche [2] S. 398 ff

⁵[13] S. 21 f, Satz 3.2

2.4 Rekursionsverfahren nach Frommer

Nachdem nun der Begriff der Vergleichsdifferentialgleichung eingeführt wurde, wird nun das Rekursionsverfahren nach Frommer [2] vorgestellt, das die gesuchte Vergleichsdifferentialgleichung der Form (3.5) liefert.

Im Anhang D findet man das Verfahren in einem Beispiel ausführlich vorgerechnet.

Seien wie zuvor $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ (nach 2.2) und $y'_1 = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$ (nach 3.5) gegeben.

Die Differenz aus Ausgangs- und Vergleichsdifferentialgleichung sei nach (3.8)

$$y' - y'_1 = \frac{-A(x,y)F_y(x,y) + B(x,y)F_x(x,y)}{B(x,y)F_y(x,y)} =: \frac{Z}{N}. \quad (4.10)$$

Hier stehen Z und N als Abkürzungen für Zähler bzw. Nenner. Mit Einführung von Q läßt sich der Zählerterm Z umformen zu

$$\begin{aligned} Z &= -A(x,y)F_y(x,y) + B(x,y)F_x(x,y) \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\sum_{i+j=n} Q_{ij}^{(n)} x^i y^j}_{=: Q^{(n)}(x,y)} = \sum_{n=3}^{\infty} Q^{(n)}(x,y) =: \sum_{n=3}^{\infty} Q^{(n)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nun sind die Koeffizienten des Polynoms $F(x,y)$ zu berechnen. Die Ableitungen von $F(x,y)$ nach x und y müssen zusammen mit A und B verschwinden.

Zerteilt man $F(x,y)$ in homogene Polynome $F_n(x,y)$, so soll für das n -te Polynom vom Grad n ($n \geq 0$) gelten

$$F_n(x,y) = \sum_{i+j=n} A_{ij}^{(n)} x^i y^j, \quad i, j = 0, \dots, n$$

Die Koeffizienten $A_{ij}^{(n)}$ stehen dabei in keinerlei Beziehung zum Polynom $A(x,y)$.

Die Rekursion erfolgt über den Laufparameter n .

Da nach (3.5) für $n \leq 2$ $F_0(x,y) = F_1(x,y) = 0$ und $F_2(x,y) = x^2 + y^2$ folgt, kann die Rekursion mit $n = 3$ wie in [2] beschrieben beginnen.

Wie auch bei Moritzen [1] dargestellt, zerfällt ein Rekursionsschritt im Wesentlichen in:

1. C-Schritt: Mit p_k und q_k nach (2.2) wird angesetzt:

$$Q^{(n)} = -xF_{ny} + yF_{nx} + \sum_{k=2}^{n-1} (-p_k F_{(n-k+1)y} + q_k F_{(n-k+1)x}). \quad (4.12)$$

Für F_n werden die gesuchten $A_{ij}^{(n)}$ -Koeffizienten in $(xF_{ny} + yF_{nx})$ angegeben. Um die hintere Summation auszuführen werden nur gegebene oder durch schon berechnete Koeffizienten verfügbare Ableitungen benötigt. Sie wird durchgeführt und weist jedem $C_{ij}^{(n)}$ -Koeffizienten ein Wert zu, so daß für $i, j = 0, \dots, n$ gilt:

$$\sum_{i+j=n} C_{ij}^{(n)} x^i y^j := \sum_{k=2}^{n-1} (-p_k F_{(n-k+1)y} + q_k F_{(n-k+1)x}) \quad (4.13)$$

2. A-Schritt: Mit (4.13) ergibt sich nun für $Q^{(n)}$ (4.12) die neue Darstellung:

$$\begin{aligned} Q^{(n)} &= -xF_{ny} + yF_{nx} + \sum_{i+j=n} C_{ij}^{(n)} x^i y^j \\ &= \sum_{i+j=n} A_{ij}^{(n)} x^i y^j + \sum_{i+j=n} C_{ij}^{(n)} x^i y^j, \quad i, j = 0, \dots, n \end{aligned}$$

Ist $Q^{(n)}$ Null, so lassen sich die neuen Koeffizienten von F_n ausschließlich aus den homogenen Teilpolynomen von A und B und den aus früheren Schritten bereits ermittelten $(F_i)_{(i \leq n-1)}$ berechnen.

Folgendes gilt für die $Q^{(n)}$ -Polynome:

Satz 2.11. *Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $n \geq 3$. $F_n(x, y)$ läßt sich so wählen, daß $Q_n(x, y) = 0$, also ein Nullpolynom ist.*

Der konstruktive Beweis daß man immer solche Koeffizienten finden kann, läßt sich unter 3.2 in [1] nachlesen.

Satz 2.12. *Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $n > 3$. $F_n(x, y)$ läßt sich so wählen, daß $Q^{(n)}$ bis auf die Koeffizienten von x^n und y^n immer zu einem Nullpolynom wird.*

Man findet den konstruktiven Beweis daß immer solche Koeffizienten gefunden werden können unter 3.3 in [1].

Mit Einführung einer Zusatzbedingung werden die beiden noch fehlenden Koeffizienten gleichgesetzt. Ihr gemeinsamer Wert wird Strudelgröße genannt. Wenn diese ebenfalls Null ist, macht sie $Q^{(n)}$ zu einem Nullpolynom. Andernfalls zeigt sie an, daß die Ausgangsdifferentialgleichung vom Strudeltyp ist.

Die Koeffizienten von F_n werden durch Lösen eines linearen Gleichungssystems ermittelt.

Nun kann von n auf $n+1$ übergegangen werden. Abgebrochen wird die Rekursion, wenn eine Strudelgröße verschieden von Null im A-Schritt vorliegt. Ist dies nicht der Fall, muß die Rekursion unendlich oft durchgeführt werden.

Es gibt zwar bereits Ansätze, daß bei einer Differentialgleichung des Poincaréschen Problems mit endlichen Polynomen A und B bereits nach endlich vielen Strudelgrößen entschieden werden kann, ob ein Wirbel- oder Strudelfall vorliegt, aber zum Zeitpunkt dieser Arbeit existieren noch keine bewiesenen Aussagen mit welcher Strudelgröße bei Vorliegen einer Ausgangsdifferentialgleichung abgebrochen werden darf.

Die Aussagen zur Strudelgröße formulierte Moritzen in [1] in seinem:

Satz 2.13 (Hauptsatz). *Sei $\epsilon > 0$ und hinreichend klein. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ und n gerade, gibt es homogene Polynome $F_3(x, y), \dots, F_n(x, y)$ vom Grad $3, \dots, n$, so daß mit*

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + F_3(x, y) + \dots + F_n(x, y)$$

der Ausdruck $(-AF_y + BF_x)$ eine in $|x| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$ konvergente Potenzreihe

$$-AF_y + BF_x = \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} D_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}) + (\text{Terme höherer Ordnung} \geq (n+1))$$

ist. Insbesondere gilt dann die Darstellung als Taylorpolynom mit Restglied

$$\begin{aligned} -AF_y + BF_x &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} D_j (x^{2j+2} + y^{2j+2}) + \\ &+ \sum_{k+l=n+1} \frac{n+1}{k!l!} \left(\int_0^1 \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} (0, 0) (-AF_y + BF_x)(t_x, t_y) (1-t)^n dt \right) x^k y^l. \end{aligned}$$

Bei Übergang von n zu $n+2$ bleiben F_3, \dots, F_n ungeändert. Nur F_{n+1} und F_{n+2} werden neu bestimmt. D_j heißt die j -te Strudelgröße der Differentialgleichung $y' = -\frac{A}{B}$. Das Vorzeichen von D_j ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus den Sätzen 2.11 und 2.12.

Kapitel 3

Strudelgrößenberechnung mit algebraischem Löser

3.1 Einführung in die Problemstellung und Unterschied zu Moritzen

In Kapitel 2 dieser Arbeit wurde neben dem Begriff der Strudelgröße auch die Vergleichsdifferentialgleichung nach Dehn vorgestellt. Frommer entwickelte darauf basierend einen Algorithmus [2], der durch Berechnung von Strudelgrößen feststellen kann, ob eine Differentialgleichung von strudeligem oder wirbeligem Typ vorliegt. Kurz gefaßt wird versucht eine wirbelige Vergleichsdifferentialgleichung zu dem Ausgangsproblem zu konstruieren. Dies gelingt wenn alle Strudelgrößen verschwinden. In der Praxis begnügt man sich damit nach einer hinreichenden Anzahl verschwindender Strudelgrößen abzurechnen.

Moritzen erwähnt in Kapitel 4.3 seiner Diplomarbeit [1], daß mit algebraischen Lösern, wie Maple oder Mathematica sie bieten, eine exakte Lösung beliebiger aber endlicher Iterationsschritte des Algorithmus möglich ist, das heißt endlich viele Strudelgrößen exakt berechnet werden können.

In diesem Kapitel wird eben diese Umsetzung in Maple beschrieben, sowie ein Vergleich der Ergebnisse und des Verhaltens des Algorithmus zu der Java-Umsetzung von Moritzen [1] vollzogen. Der Unterschied der Werte wird dabei in der Exaktheit zu suchen sein, wobei der Vorteil der Exaktheit, wie später deutlich wird, zu Kosten der Laufzeit erkaufte wird.

Dank der exakten Berechnung tritt hier das Problem der Auslöschung und Konditionierung (vgl. Moritzen 4.2.2 [1]) nicht auf.

3.2 Die Umsetzung im algebraischen Löser Maple

Hier findet sich nun die Umsetzung der Rekursion, also die Realisierung des Algorithmus nach Frommer. Dabei werden einige Auszüge aus dem Quellcode aufgezeigt. Der komplette Source ist im Anhang sowohl in gedruckter Form in A als auch auf einem Datenträger unter B zu finden.

Wie in 2.4 vorgestellt wird der Algorithmus abgearbeitet. Lediglich die Anzahl der zu berechnenden Strudelgrößen ist mit `maxstrudel` auf die Endlichkeit beschränkt. Somit existiert eine endliche obere Iterationsschranke, da eine unendliche Berechnung niemanden etwas bringt.

Als Laufparameter für die Iteration wurde `aktueller_grad` verwendet. Er gibt an für welchen Grad im vorliegenden Schritt die Koeffizienten berechnet werden.

C-Schritt

Im C-Schritt werden die Terme des eben zu verrechnenden Grades zusammengefaßt. Sie sind aus der Berechnung der Vergleichsdifferentialgleichung im vorhergehenden Grad entstanden. Die Ergebnisse stellen die rechte Seite des danach zu lösenden Gleichungssystems dar.

Mit B steht ein ausreichend dimensioniertes Array zur Speicherung zur Verfügung. Der Buchstabe B wurde gewählt, weil er in der Theorie nach Frommer (vergleiche [2] Seite 400 ff) ebenfalls für die rechte Seite des linearen Gleichungssystems steht. `k,l,m` und `n` sind lokale Laufvariablen. Der in diesem Schritt zu berechnende Grad ist in `aktueller_grad` abgelegt. Die Koeffizienten des Ausgangsproblems sind in den Arrays über `p` und `q` zu finden. `dxA` und `dyA` stellen die Ableitung nach `x` bzw. `y` der Vergleichsdifferentialgleichung mit Werten aus dem vorhergehenden Schritt dar.

In $B[a_1, a_2]$ wird der Koeffizient zu $x^{a_1}y^{a_2}$ gespeichert.

```
# ***** C-Schritt *****
CSchritt:=proc()
  global B:
  local k,l,m,n:
  for k from 0 to aktueller_grad do
    for l from 0 to aktueller_grad do
      for m from 0 to (aktueller_grad-2) do
        for n from 0 to (aktueller_grad-2) do
          if k+m+l+n=aktueller_grad then
            if m+n>0 then
              B[k+m,l+n]:=p[k,l]*dyA[m,n]+q[k,l]*dxA[m,n]+B[k+m,l+n];
```

```

                fi;
            fi;
        od;
    od;
od;
end:

```

Es wird hier die rechte Seite des linearen Gleichungssystems berechnet, indem jeweils alle Terme zusammengefaßt werden, welche für x und y die gleichen Potenzen besitzen, nämlich $x^{k+m}y^{l+n}$. Die Ergebnisse werden dann der Theorie entsprechend in $B_{k+m,l+n}$ gespeichert. Mit diesen Werten kann nun die Berechnung der Koeffizienten der Vergleichsdifferentialgleichung geschehen, der A-Schritt.

A-Schritt

Für den A-Schritt müssen zwei Fälle betrachtet werden, nämlich ob der Grad, der in diesem Moment berechnet wird, gerade oder ungerade ist. Dies ist deshalb nötig, weil im ungeraden Fall ein eindeutig lösbares Gleichungssystem vorliegt, während der gerade Fall sich in ein unterbestimmtes und ein überbestimmtes System aufteilen läßt. Man hat also in einem Subgleichungssystem bei einer Variable die Möglichkeit sie mit 0 zu besetzen (frei wählbar, aber am einfachsten). Im anderen Subsystem der Gleichung dagegen bestimmt die Unlösbarkeit den Strudelfall und somit den Abbruch der Berechnungen.

Zunächst wurden die sich ergebenden Gleichungssysteme per Hand aufgelöst (bis zum 6. A-Schritt). Später für höhere Iterationen fanden die Formeln von Moritzen [1] Anwendung.

Allgemein formuliert besitzt ein Gleichungssystem des A-Schrittes folgendes Aussehen:

$$\begin{array}{rcccccl}
 -1A_{(n-1),1} & & & + & B_{(n-0),0} & = & 0 \\
 -2A_{(n-2),2} & + & (n-0)A_{(n-0),0} & + & B_{(n-1),1} & = & 0 \\
 -3A_{(n-3),3} & + & (n-1)A_{(n-1),1} & + & B_{(n-2),2} & = & 0 \\
 -4A_{(n-4),4} & + & (n-2)A_{(n-2),2} & + & B_{(n-3),3} & = & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -(n-2)A_{2,(n-2)} & + & 4A_{4,(n-4)} & + & B_{3,(n-3)} & = & 0 \\
 -(n-1)A_{1,(n-1)} & + & 3A_{3,(n-3)} & + & B_{2,(n-2)} & = & 0 \\
 -(n-0)A_{0,(n-0)} & + & 2A_{2,(n-2)} & + & B_{1,(n-1)} & = & 0 \\
 & & 1A_{1,(n-1)} & + & B_{0,(n-0)} & = & 0
 \end{array}$$

Für die ersten beiden A-Schritte sieht bedeutet dies konkret:

1. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{aligned} -A_{2,1} & & + B_{3,0} & = 0 \\ -2A_{1,2} + 3A_{3,0} & + B_{2,1} & = 0 \\ -3A_{0,3} + 2A_{2,1} & + B_{1,2} & = 0 \\ & A_{1,2} + B_{0,3} & = 0 \end{aligned}$$

Aufgelöst:

$$\begin{aligned} A_{2,1} & = B_{3,0} \\ A_{0,3} & = \frac{1}{3}B_{1,2} + \frac{2}{3}B_{3,0} \\ A_{1,2} & = -B_{3,0} \\ A_{3,0} & = -\frac{1}{3}B_{2,1} - \frac{2}{3}B_{0,3} \end{aligned}$$

2. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{aligned} -A_{3,1} & & + B_{4,0} & = 0 \\ -2A_{2,2} + 4A_{4,0} & + B_{3,1} & = 0 \\ -3A_{1,3} + 3A_{3,1} & + B_{2,2} & = 0 \\ -4A_{0,4} + 2A_{2,2} & + B_{1,3} & = 0 \\ & A_{1,3} + B_{0,4} & = 0 \end{aligned}$$

Aufgelöst:

$$\begin{aligned} A_{0,4} & = 0 \\ A_{2,2} & = -\frac{1}{2}B_{1,3} \\ A_{4,0} & = -\frac{1}{4}(B_{1,3} + B_{1,3}) \\ A_{3,1} & = \frac{1}{6}(-B_{2,2} + 3B_{4,0} - 3B_{0,4}) \\ A_{1,3} & = B_{4,0} - A_{3,1} - B_{0,4} \end{aligned}$$

Unterbestimmter Teil:

$$A_{0,4}, A_{2,2}, A_{4,0}$$

Überbestimmter Teil:

$$A_{3,1}, A_{1,3}$$

Daraus resultierende Strudelgröße:

$$D_1 = A_{1,3} + B_{0,4}$$

Unter Anhang C lassen sich die Gleichungssysteme für die A-Schritte 1-6 finden.

Ungerader A-Schritt

Zuerst wird der ungerade Fall betrachtet. Die zugrundeliegende Formel ist bei Moritzen [1] unter 3.15 auf Seite 17 mit Herleitung zu finden:

$$A_{n-l,l}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{C_{n-2i,2i}^{(n)}}{l} \prod_{j=i}^{\frac{l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1}, & \text{für } l \text{ ungerade,} \\ -\sum_{i=0}^{\frac{n-l-1}{2}} \frac{C_{2i,n-2i}^{(n)}}{n-l} \prod_{j=i}^{\frac{n-l-3}{2}} \frac{n-2j-1}{2j+1}, & \text{für } l \text{ gerade} \end{cases}$$

Bei der Umsetzung dieser in Maple, wurden die Variablen im Quellcode teilweise anders benannt. Die Laufvariable **n** heißt wie schon zuvor **aktueller_grad**. In **B** ist die rechte Seite des Gleichungssystems gespeichert, in **A** werden die zu berechnenden Koeffizienten abgelegt. **l, i, j** sind lokale Laufvariablen und **Summe** bzw. **Produkt** dienen als lokaler Zwischenspeicher für zu bildende Summen bzw. Produkte.

```
# ***** ungerader A-Schritt *****
ASchrittungerade:=proc()
  global aktueller_grad,B,A:
  local l,Summe,i,j,Produkt:
```

```

for l from 0 to aktueller_grad do
  Summe:=0;
  if l mod 2 = 0 then
    for i from 0 to (aktueller_grad-1-1)/2 do
      Produkt:=1;
      for j from i to (aktueller_grad-1-3)/2 do
        Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j-1) / (2*j+1) );
      od:
      Summe:=Summe+
        (B[2*i, aktueller_grad-2*i]*Produkt/(aktueller_grad-1));
    od:
    A[aktueller_grad - 1, l]:=-Summe;
  else
    for i from 0 to (l-1)/2 do
      Produkt:=1;
      for j from i to (l-3)/2 do
        Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j-1) / (2*j+1) );
      od:
      Summe:=Summe+( B[aktueller_grad-2*i, 2*i]*Produkt / l);
    od:
    A[aktueller_grad - 1, l]:=Summe;
  fi;
od;
end:

```

Nach Durchlauf dieses Programmabschnittes sind die $A_{i,j}$ für $i, j \geq 0$, `aktueller_grad` ungerade und $i + j = \text{aktueller_grad}$ berechnet.

Gerader A-Schritt

Hier kommt es nun zu der bereits erwähnten Aufteilung, da das Gleichungssystem in einen über- und in einen unterbestimmten Teil zerfällt.

Zunächst zum unterbestimmten System, zugrunde liegt wieder eine Formeln (3.25) von Moritzen [1], Seite 20. Im Wesentlichen kann hier die Formeldarstellung aus dem ungeraden Fall als Lösung übernommen werden, wenn berücksichtigt wird, daß der Koeffizient $A_{0,n}^{(n)}$ bereits mit Null vorbelegt wurde:

$$A_{n-l,l}^{(n)} = - \sum_{i=1}^{\frac{n-l}{2}} \frac{C_{2i-1,n-(2i-1)}^{(n)}}{n-l} \prod_{j=i}^{\frac{n-l-2}{2}} \frac{n-2j}{2j}, \quad \text{für } l > 1 \text{ gerade, } (l=2, \dots, n-2).$$

Beim überbestimmten Subgleichungssystem ist es von Vorteil vorerst eine Hilfsvariable zu definieren (vergleiche 3.26 auf Seite 20 bei Moritzen [1]):

$$a_i^{(n)} := \prod_{k=1}^i \frac{n - (2k - 1)}{2k - 1}, \quad \text{für } 0 \leq i \leq 2m.$$

Diese wird von Moritzen anschließend in 3.29 auf Seite 21 [1] folgendermaßen eingesetzt:

$$A_{n-l,l}^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a_{\min\{\frac{l-1}{2}, \frac{n-l-1}{2}\}}}{\min\{l, n-l\}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{C_{n-2i,2i}^{(n)}}{a_i} - \sum_{j=\frac{l-1}{2}+1}^{\frac{n}{2}} \frac{C_{n-2j,2j}^{(n)}}{a_j} \right),$$

für l ungerade, ($l = 1, 3, \dots, n-1$).

Diese Formeln verwenden in Maple wieder die Laufvariable `aktueller_grad` statt `n` und `B` bzw. `A` für die rechte bzw. linke Seite des Gleichungssystems. `k, l, m, i, j` sind lokale Laufvariablen und `Summe` bzw. `Produkt` dienen als lokaler Zwischenspeicher für zu bildende Summen bzw. Produkte. In dem Array `a` werden die zwischendurch berechneten Klein- a 's global gespeichert.

Nachfolgend ist die Realisierung des gesamten geraden A-Schrittes in Maple aufgelistet:

```
# ***** Klein_a Berechnung *****
aberechnen:=proc()
  global aktueller_grad,a:
  local Produkt,k,i,m:
  m:=floor(aktueller_grad/4):
  a[0]:=1:
  for i from 1 to m do
    Produkt:=1:
    for k from 1 to i do
      Produkt:=Produkt*((aktueller_grad-(2*k-1))/(2*k-1));
    od:
    a[i]:=Produkt:
  od:
  for i from m+1 to 2*m+1 do
    a[i]:=a[(aktueller_grad/2)-i];
  od:
end:
# ***** gerader A-Schritt *****
ASchrittgerade:=proc()
  global aktueller_grad,a,B,A:
```

```

local i,Produkt,Summe,j,l:
aberechnen():
A[0, aktueller_grad]:=0:
for l from 0 to aktueller_grad-1 do
  Summe:=0:
  if l mod 2 = 0 then
    for i from 1 to (aktueller_grad-1)/2 do
      Produkt:=1:
      for j from i to (aktueller_grad-1-2)/2 do
        Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j) / (2*j) );
      od:
      Summe:=Summe+
        (B[2*i-1, aktueller_grad-2*i+1]*Produkt/(aktueller_grad-1));
    od:
    A[aktueller_grad - 1, l]:=-Summe;
  else
    for i from 0 to (l-1)/2 do
      Summe:=Summe+B[aktueller_grad-2*i, 2*i]/a[i];
    od;
    for j from ((l-1)/2)+1 to aktueller_grad/2 do
      Summe:=Summe-B[aktueller_grad-2*j, 2*j]/a[j];
    od;
    Summe:=Summe/min(1, aktueller_grad - 1);
    Summe:=Summe*a[min( (l-1)/2, (aktueller_grad-1-1)/2 )];
    A[aktueller_grad - 1, l]:=Summe/2;
  fi;
od;
end:

```

Ist dieser Teil vollzogen, so sind die $A_{i,j}$ für $i, j \geq 0$, aktueller_grad gerade und $i + j = \text{aktueller_grad}$ ermittelt.

Abbruchkriterium bzw. Strudelgrößenberechnung

Im eigentlichen Grundgerüst läuft die globale Variable `strudel` von 1 bis zur angegebenen oberen Iterationsschranke `maxstrudel`. Die eingebaute Zeitmessung ist für den Algorithmus an sich uninteressant und wird nur zur Abschätzung für die Dauer zukünftiger Berechnungen verwendet. In jedem Schleifendurchlauf wird zunächst einmal die Prozedur `Frommer` aufgerufen (wird im Anschluß genauer beschrieben) und danach eine Strudelgröße berechnet. Sollte diese $\neq 0$ sein, wird sofort zur maximalen Iterationsstufe gesprungen, was den selben Effekt hat wie ein normales Erreichen dieses Status, die Schleife wird verlassen und das Programm beendet sich nach Ausgabe und Abspeicherung der Ergebnisse.

```

for strudel from 1 to maxstrudel do
  anfang:=time();
  Frommer();
  # ***** Strudelgroesse *****
  Strudelgroesse[strudel]:=A[1,aktueller_grad-1]+B[0,aktueller_grad]:
  print();
  printf('\nStrudelgroesse[%d] = %s\n', strudel,
        convert(Strudelgroesse[strudel], string) );
  if Strudelgroesse[strudel]<>0 then
    strudel:=maxstrudel:
  fi:
  printf('%f sec fuer diese Strudelgroesse benoetigt',(time()-anfang));
od:

```

Da nur in jedem zweiten Rekursionsschritt eine Strudelgrößenberechnung Sinn macht, werden in jedem Frommer-Aufruf zwei Schritte vollzogen. Wie man nachfolgend sieht wird die globale Laufvariable `aktueller_grad` erhöht, Ableitungen gebildet, der C-Schritt und dann der A-Schritt ausgeführt. Nach nochmaligem Erhöhen von `aktueller_grad` befindet man sich im geraden Fall. Auch hier werden die entsprechenden Prozeduren aufgerufen. Im Anschluß daran erfolgt ein Sprung zurück in das aufrufende Grundgerüst, um nach der Berechnung der Strudelgröße gegebenenfalls wieder diese Prozedur aufzurufen.

```

Frommer:=proc()
global aktueller_grad;
  # ***** aktuellen_grad erhöhen *****
  aktueller_grad:=aktueller_grad+1:
  # ***** Ableitungen (ungerader Grad)*****
  ableitung():
  # ***** C-Schritt (ungerader Grad)*****
  CSchritt():
  # ***** A-Schritt (ungerader Grad) *****
  ASchrittungerade():
  # ***** aktuellen_grad erhöhen *****
  aktueller_grad:=aktueller_grad+1:
  # ***** Ableitungen (gerader Grad) *****
  ableitung():
  # ***** C-Schritt (gerader Grad) *****
  CSchritt():
  # ***** A-Schritt (gerader Grad) *****
  ASchrittgerade():
end:

```

3.3 Beispiele mit Vergleich zu Moritzen

Moritzen hielt sich mit seinen Beispielen größtenteils an Frommer [2], da er hier die exakten Ergebnisse kannte und somit seine Berechnungen einfach überprüfen konnte. Im Folgenden werden die Unterschiede der JAVA-berechneten und der mit Maple berechneten Werte dargestellt.

Hierbei wurden die JAVA-Ergebnisse aus der Diplomarbeit von Moritzen [1] übernommen und nicht neu berechnet.

Beispiel $y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 36.

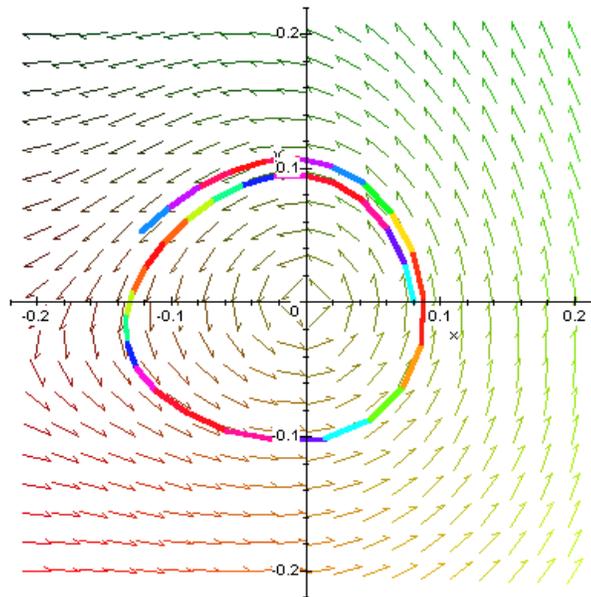


Abbildung 3.1: Startpunkt (0.08, 0)

Es handelt sich hierbei um einen Strudel.

Maple:

3. C-Schritt $+(2)*x^3*y^0+(-8)*x^2*y^1+(-4)*x^1*y^2+(-2)*x^0*y^3$

3. A-Schritt $+(4)*x^3*y^0+(2)*x^2*y^1+(2)*x^1*y^2$

4. C-Schritt $+(4)*x^4*y^0+(-12)*x^3*y^1+(-24)*x^2*y^2$
 $+(-12)*x^1*y^3+(-4)*x^0*y^4$

4. A-Schritt $+(6)*x^4*y^0+(8)*x^3*y^1+(6)*x^2*y^2$

1. Strudelgroesse = -4

JAVA:

```

3. C-Schritt: (-2.0*y^3 -4.0*x*y^2 -8.0*x^2*y +2.0*x^3 )
3. A-Schritt: (2.0*x*y^2 +2.0*x^2*y +4.0*x^3 )
4. C-Schritt: (-4.0*y^4 -12.0*x*y^3 -24.0*x^2*y^2
              -12.0*x^3*y +4.0*x^4)
4. A-Schritt: (6.0*x^2*y^2 +8.0*x^3*y +6.0*x^4 )
4.: 1. Strudelgrosse: -4.0

```

In diesem Beispiel sind die Werte noch gleich, da nur ganze Zahlen in der Berechnung auftreten und keine Brüche.

Beispiel $y' = -\frac{x+x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$

Beispiel bei Moritz von Seite 37.

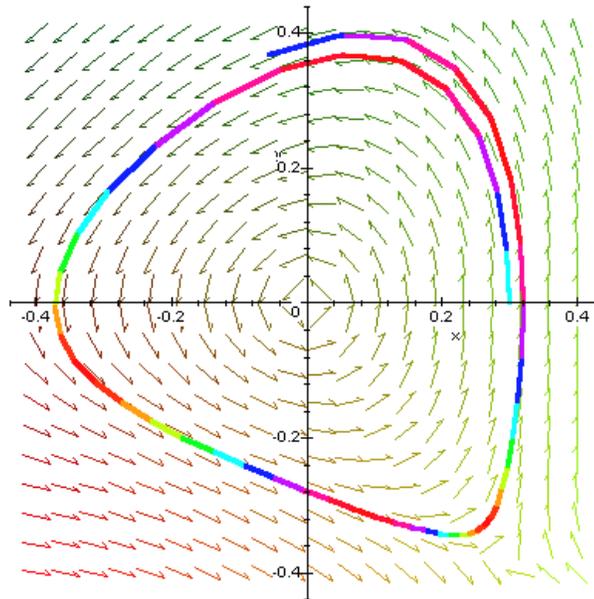


Abbildung 3.2: Startpunkt (0.3, 0)

Wie im vorhergehenden Beispiel liegt wieder ein Strudel vor.

Maple:

```

3. C-Schritt :+(-6)*x^2*y^1+(-2)*x^1*y^2+(2)*x^0*y^3
3. A-Schritt :+(2/3)*x^3*y^0+(-2)*x^1*y^2+(-2/3)*x^0*y^3

```

4. C-Schritt $:(0)x^3y^1+(12)x^2y^2+(4)x^1y^3+(-4)x^0y^4$
 4. A-Schritt $:(-1)x^4y^0+(-2)x^2y^2+(4)x^1y^3$
 1. Strudelgroesse = 0
 5. C-Schritt $:(12)x^4y^1+(-8)x^3y^2+(-20)x^2y^3$
 $+(0)x^1y^4+(4)x^0y^5$
 5. A-Schritt $:(-28/15)x^5y^0+(4/3)x^3y^2+(-8/3)x^2y^3$
 $+(-4)x^1y^4+(-16/15)x^0y^5$
 6. C-Schritt $:(16)x^5y^1+(-20/3)x^4y^2+(80/3)x^3y^3$
 $+(44)x^2y^4+(-8/3)x^1y^5+(-28/3)x^0y^6$
 6. A-Schritt $:(-40/9)x^6y^0+(14/15)x^5y^1+(-16/3)x^4y^2$
 $+(-2/3)x^3y^3+(4/3)x^2y^4+(42/5)x^1y^5$
 2. Strudelgroesse = $-14/15$

JAVA:

3. C-Schritt: $(2.0*y^3 -2.0*x*y^2 -6.0*x^2*y)$
 3. A-Schritt: $(-0.6666666666666666*y^3 -2.0*x*y^2$
 $+0.6666666666666666*x^3)$
 4. C-Schritt: $(-4.0*y^4 +4.0*x*y^3 +12.0*x^2*y^2)$
 4. A-Schritt: $(4.0*x*y^3 -2.0*x^2*y^2 -1.0*x^4)$
 4.: 1. Strudelgroesse: 0.0
 5. C-Schritt: $(4.0*y^5-20.0*x^2*y^3-8.0*x^3*y^2 +12.0*x^4*y)$
 5. A-Schritt: $(-1.0666666666666667*y^5 -4.0*x*y^4$
 $-2.6666666666666665*x^2*y^3+1.3333333333333333*x^3*y^2$
 $-1.8666666666666667*x^5)$
 6. C-Schritt: $(-9.333333333333332*y^6 -2.6666666666666667*x*y^5$
 $+44.0*x^2*y^4+26.666666666666664*x^3*y^3$
 $-6.6666666666666667*x^4*y^2 +16.0*x^5*y)$
 6. A-Schritt: $(+8.399999999999999*x*y^5$
 $+1.3333333333333335*x^2*y^4-0.6666666666666667*x^3*y^3$
 $-5.333333333333332*x^4*y^2+0.9333333333333327*x^5*y$
 $-4.4444444444444444*x^6)$
 6.: 2. Strudelgroesse: -0.9333333333333327

Hier liegen schon unterschiedliche Werte vor. Aber die Differenz ist noch sehr gering, da die Berechnung wegen dem Strudelfall relativ früh abbrach. Im nächsten Beispiel wird dies nicht mehr der Fall sein.

Beispiel $y' = -\frac{x+4x^2+y^2+2x^3-2y^3}{y+x^2-2y^2+2x^3-2y^3}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 38.

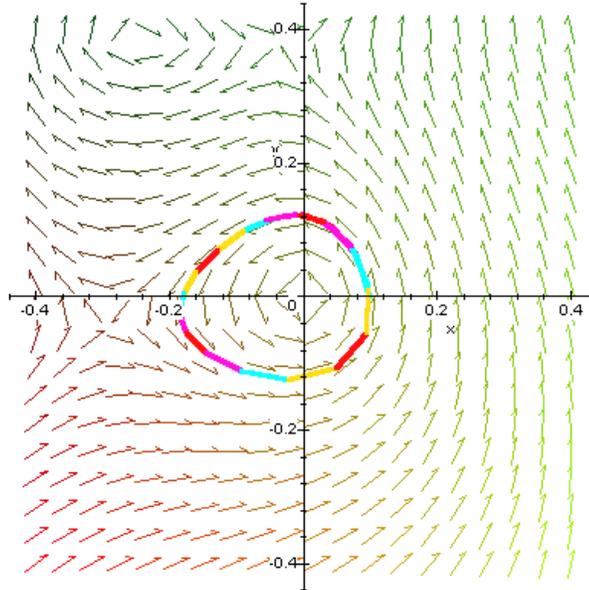


Abbildung 3.3: Startpunkt (0.085, 0)

Zum ersten Mal wird durch dieses Beispiel der Wirbelfall vertreten.

Der Übersichtlichkeit wegen, werden in diesem Beispiel nur die ersten und der letzte A- und C-Schritt angegeben. Dies gilt sowohl für die Maple- als auch für die JAVA-Werte, da der Vergleich sonst zu umfangreich würde.

Maple:

- 3. C-Schritt $:(2)*x^3*y^0+(-8)*x^2*y^1+(-4)*x^1*y^2+(-2)*x^0*y^3$
- 3. A-Schritt $:(4)*x^3*y^0+(2)*x^2*y^1+(2)*x^1*y^2$
- 4. C-Schritt $:(8)*x^4*y^0+(-16)*x^3*y^1+(-24)*x^2*y^2$
 $+(-16)*x^1*y^3+(0)*x^0*y^4$
- 4. A-Schritt $:(8)*x^4*y^0+(8)*x^3*y^1+(8)*x^2*y^2$
- 1. Strudelgroesse = 0
- 5. C-Schritt $:(20)*x^5*y^0+(-40)*x^4*y^1+(-52)*x^3*y^2$
 $+(-84)*x^2*y^3+(-32)*x^1*y^4+(-4)*x^0*y^5$
- 5. A-Schritt $:(64/3)*x^5*y^0+(20)*x^4*y^1+(100/3)*x^3*y^2$
 $+(28/3)*x^2*y^3+(4)*x^1*y^4+(-8/3)*x^0*y^5$
- 6. C-Schritt $:(224/3)*x^6*y^0+(-512/3)*x^5*y^1+(-640/3)*x^4*y^2$
 $+(-320)*x^3*y^3+(-560/3)*x^2*y^4+(-256/3)*x^1*y^5$
 $+(16/3)*x^0*y^6$
- 6. A-Schritt $:(208/3)*x^6*y^0+(224/3)*x^5*y^1+(368/3)*x^4*y^2$

- $$+(160/3)*x^3*y^3+(128/3)*x^2*y^4+(-16/3)*x^1*y^5$$
2. Strudelgroesse = 0
 3. Strudelgroesse = 0
 4. Strudelgroesse = 0
 5. Strudelgroesse = 0
 6. Strudelgroesse = 0
 7. Strudelgroesse = 0
 18. C-Schritt : $+(33552373140844544/13030875)*x^{18}*y^0$
 $+(-64228049761567232/91216125)*x^{17}*y^1$
 $+(-679846834318291456/91216125)*x^{16}*y^2$
 $+(-3749044189534158848/91216125)*x^{15}*y^3$
 $+(-10725365690054144/135135)*x^{14}*y^4$
 $+(-90403244357012992/675675)*x^{13}*y^5$
 $+(-218340519331351552/1403325)*x^{12}*y^6$
 $+(-1569429841697567744/9823275)*x^{11}*y^7$
 $+(-1217469366340331008/9823275)*x^{10}*y^8$
 $+(-55649465804812288/654885)*x^9*y^9$
 $+(-424709731542015488/9823275)*x^8*y^{10}$
 $+(-26884019038907392/1403325)*x^7*y^{11}$
 $+(-7278436489590272/1403325)*x^6*y^{12}$
 $+(-419789602958848/405405)*x^5*y^{13}$
 $+(474702102157312/2027025)*x^4*y^{14}$
 $+(11188305655236608/91216125)*x^3*y^{15}$
 $+(4910453480432128/91216125)*x^2*y^{16}$
 $+(569087953170944/91216125)*x^1*y^{17}$
 $+(23285288937472/91216125)*x^0*y^{18}$
 18. A-Schritt : $+(76239437659273216/91216125)*x^{18}*y^0$
 $+(33552373140844544/13030875)*x^{17}*y^1$
 $+(654040914052675328/91216125)*x^{16}*y^2$
 $+(1887684085152256/155925)*x^{15}*y^3$
 $+(22385368117695488/1216215)*x^{14}*y^4$
 $+(13814527416925184/675675)*x^{13}*y^5$
 $+(376673284512783616/18243225)*x^{12}*y^6$
 $+(3156157569910784/200475)*x^{11}*y^7$
 $+(1404745994625680384/127702575)*x^{10}*y^8$
 $+(53744395982397952/9823275)*x^9*y^9$
 $+(45654487347405824/18243225)*x^8*y^{10}$
 $+(1072542405446656/1964655)*x^7*y^{11}$
 $+(39756695134976/552825)*x^6*y^{12}$
 $+(-91224974397952/868725)*x^5*y^{13}$
 $+(-4164288169472/96525)*x^4*y^{14}$
 $+(-1768767797456384/91216125)*x^3*y^{15}$
 $+(-284543976585472/91216125)*x^2*y^{16}$
 $+(-23285288937472/91216125)*x^1*y^{17}$

8. Strudelgroesse = 0

JAVA:

```

3. C-Schritt: (-2.0*x^0*y^3-4.0*x^1*y^2-8.0*x^2*y^1 +2.0*x^3*y^0 )
3. A-Schritt: ( +2.0*x^1*y^2 +2.0*x^2*y^1 +4.0*x^3*y^0 )
4. C-Schritt: (-16.0*x^1*y^3-24.0*x^2*y^2-16.0*x^3*y^1 +8.0*x^4*y^0 )
4. A-Schritt: ( +8.0*x^2*y^2 +8.0*x^3*y^1 +8.0*x^4*y^0 )
4.: 1.Strudelgroesse: 0.0
5. C-Schritt: (-4.0*x^0*y^5-32.0*x^1*y^4-84.0*x^2*y^3
-52.0*x^3*y^2-40.0*x^4*y^1+20.0*x^5*y^0 )
5. A-Schritt: (-2.666666666666667*x^0*y^5 +4.0*x^1*y^4
+9.333333333333334*x^2*y^3+33.333333333333336*x^3*y^2
+20.0*x^4*y^1+21.333333333333336*x^5*y^0 )
6. C-Schritt: (5.333333333333336*x^0*y^6 -85.333333333333334*x^1*y^5
-186.66666666666666*x^2*y^4-320.0*x^3*y^3
-213.33333333333337*x^4*y^2-170.66666666666669*x^5*y^1
+74.66666666666669*x^6*y^0 )
6. A-Schritt: (-5.3333333333333325*x^1*y^5 +42.66666666666667*x^2*y^4
+53.333333333333336*x^3*y^3+122.66666666666667*x^4*y^2
+74.66666666666667*x^5*y^1+69.333333333333334*x^6*y^0 )
6.: 2.Strudelgroesse: 1.0658141036401503E-14
8.: 3.Strudelgroesse: -4.654054919228656E-13
10.: 4. Strudelgroesse: 1.6825651982799172E-11
12.: 5. Strudelgroesse: -1.011130734696053E-9
14.: 6. Strudelgroesse: 6.101254257373512E-8
16.: 7. Strudelgroesse: -2.4188339011743665E-6
18. C-Schritt: (+255276.01527684732*x^0*y^18
+6238896.391817856*x^1*y^17+5.383317346873322E7*x^2*y^16
+1.2265710317261745E8*x^3*y^15+2.3418660457831025E8*x^4*y^14
-1.0354820561133813E9*x^5*y^13-5.18656511471368E9*x^6*y^12
-1.9157371983608627E10*x^7*y^11-4.323504447774773E10*x^8*y^10
-8.497593593501836E10*x^9*y^9-1.2393721710330211E11*x^10*y^8
-1.5976645687894174E11*x^11*y^7-1.555879923263383E11*x^12*y^6
-1.3379693544531308E11*x^13*y^5-7.936778547418646E10*x^14*y^4
-4.110067369704906E10*x^15*y^3-7.453143118261568E9*x^16*y^2
-7.041304348501549E8*x^17*y^1+2.574836543274774E9*x^18*y^0 )
18. A-Schritt: (-255276.01547755598*x^1*y^17
-3119448.195908928*x^2*y^16-1.9390955243950557E7*x^3*y^15
-4.314206857679007E7*x^4*y^14-1.0501018664751372E8*x^5*y^13
+7.19155160063867E7*x^6*y^12+5.459189554708574E8*x^7*y^11
+2.5025447719606586E9*x^8*y^10+5.471128109769684E9*x^9*y^9
+1.1000138365462494E10*x^10*y^8+1.5743397281020845E10*x^11*y^7
+2.0647296983553474E10*x^12*y^6+2.0445521022575706E10*x^13*y^5
+1.8405765524759567E10*x^14*y^4+1.2106359372471E10*x^15*y^3

```

```

+7.170233487255458E9*x^16*y^2+2.5748365432749753E9*x^17*y^1
+8.35810967186726E8*x^18*y^0 )
18.: 8. Strudelgroesse: -2.007086732191965E-4

```

Hier sieht man sofort den Vorteil der algebraischen Berechnung. Während die achte Strudelgröße aus dem JAVA-Programm deutlich ungleich Null ist, berechnet Maple immer noch exakt den Wert Null. Da das vorliegende Beispiel einen Wirbelfall repräsentiert müssen alle Strudelgrößen Null sein.

Beispiel $y' = -\frac{x+2x^3+y^3}{y+x^2y+y^3}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 41.

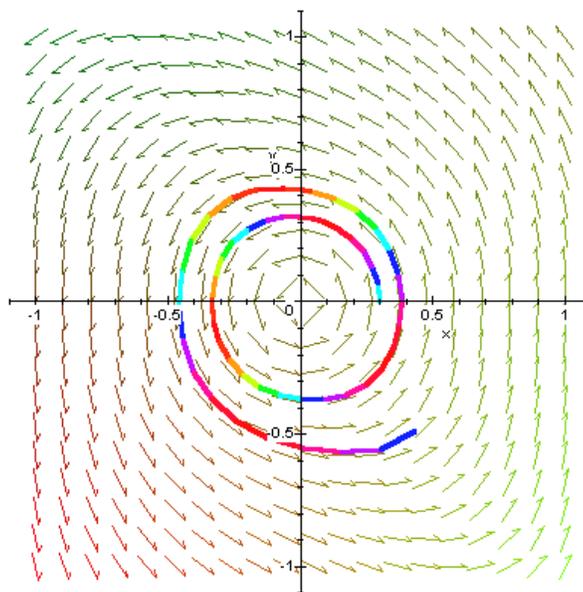


Abbildung 3.4: Startpunkt (0.3, 0)

Sehr schön erkennt man wieder den vorliegenden Strudelfall.

Maple:

```

3. C-Schritt :+(0)*x^2*y^1+(0)*x^0*y^3
3. A-Schritt :
4. C-Schritt :+(-2)*x^3*y^1+(2)*x^1*y^3+(-2)*x^0*y^4
4. A-Schritt :+(1)*x^3*y^1+(-1)*x^2*y^2+(1)*x^1*y^3
1. Strudelgroesse = -1

```

JAVA:

```

3. C-Schritt: ( )
3. A-Schritt: ( )
4. C-Schritt: (-2.0*y^4 +2.0*x*y^3-2.0*x^3*y )
4. A-Schritt: (1.0*x*y^3-1.0*x^2*y^2 +1.0*x^3*y )
4.: 1. Strudelgroesse: -1.0

```

In diesem Beispiel sind die Werte wieder gleich. Da in der ersten Berechnung alles Null ist (es sind ja keine quadratischen Terme vorhanden), liegen in der darauffolgenden nur ganze Zahlen und keine Brüche vor. Mit dem anschließenden Abbruch ist noch keine Rundung nötig und die Werte sind für beide Berechnungen gleich.

Beispiel $y' = -\frac{x+4x^2y+y^3}{y+2x^3+xy^2}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 42.

Achtung! In der Arbeit von Moritzen [1] befindet sich in der Angabe ein Tippfehler. Der Faktor 2 vor x^3 im Nenner wurde unterschlagen.

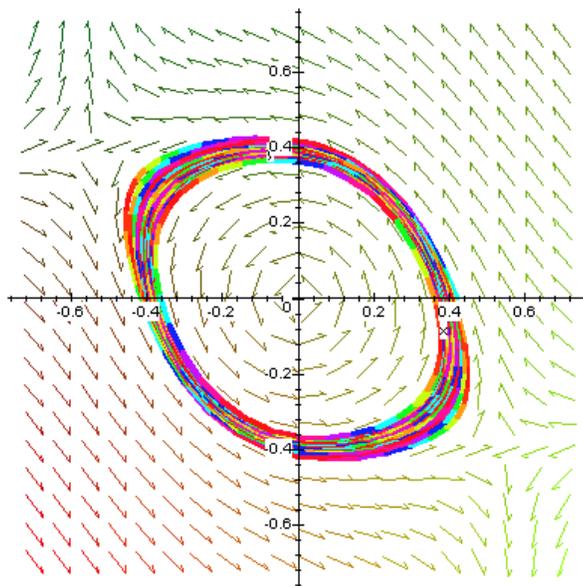


Abbildung 3.5: Startpunkt (0.42, 0)

Auch hier handelt es sich wieder um einen Strudel. Allerdings ist die Abweichung so gering, daß die Linien eng beisammen liegen.

Maple:

```

3. C-Schritt :+(0)*x^3*y^0+(0)*x^1*y^2
3. A-Schritt :
4. C-Schritt :+(4)*x^4*y^0+(-6)*x^2*y^2+(-2)*x^0*y^4
4. A-Schritt :+(4)*x^3*y^1+(2)*x^1*y^3
1. Strudelgroesse = 0
5. C-Schritt :+(0)*x^5*y^0+(0)*x^3*y^2+(0)*x^1*y^4
5. A-Schritt :
6. C-Schritt :+(0)*x^6*y^0+(0)*x^4*y^2+(0)*x^2*y^4+(0)*x^0*y^6
6. A-Schritt :+(1/3)*x^6*y^0+(5)*x^4*y^2+(2)*x^2*y^4
2. Strudelgroesse = 0
7. C-Schritt :+(0)*x^7*y^0+(0)*x^5*y^2+(0)*x^3*y^4+(0)*x^1*y^6
7. A-Schritt :
8. C-Schritt :+(4)*x^8*y^0+(2)*x^6*y^2+(-14)*x^4*y^4+(-4)*x^2*y^6
8. A-Schritt :+(96/35)*x^7*y^1+(106/15)*x^5*y^3+(64/15)*x^3*y^5
                +(44/35)*x^1*y^7
3. Strudelgroesse = 44/35

```

JAVA:

```

3. C-Schritt: ( )
3. A-Schritt: ( )
4. C-Schritt: (-2.0*y^4-6.0*x^2*y^2 +4.0*x^4 )
4. A-Schritt: (2.0*x*y^3 +4.0*x^3*y )
4.: 1. Strudelgroesse: 0.0
5. C-Schritt: ( )
5. A-Schritt: ( )
6. C-Schritt: (-4.0*x*y^5-12.0*x^3*y^3 +8.0*x^5*y )
6. A-Schritt: (2.0*x^2*y^4 +5.0*x^4*y^2 +0.33333333333333326*x^6 )
6.: 2. Strudelgroesse: 0.0
7. C-Schritt: ( )
7. A-Schritt: ( )
8. C-Schritt: (-4.0*x^2*y^6-14.0*x^4*y^4 +2.0*x^6*y^2
                +3.999999999999999*x^8 )
8. A-Schritt: (1.2571428571428567*x*y^7 +4.266666666666665*x^3*y^5
                +7.0666666666666655*x^5*y^3 +2.7428571428571424*x^7*y )
8.: 3. Strudelgroesse: 1.2571428571428567

```

Da auch hier relativ früh der Abbruch durch eine nichtverschwindende Strudelgröße ausgelöst wird, sind keine allzu großen Unterschiede in den Werten festzustellen.

Beispiel $y' = -\frac{x+4x^2y+y^3+2x^3y^2}{y+2x^3+xy^2+2x^4y}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 43.

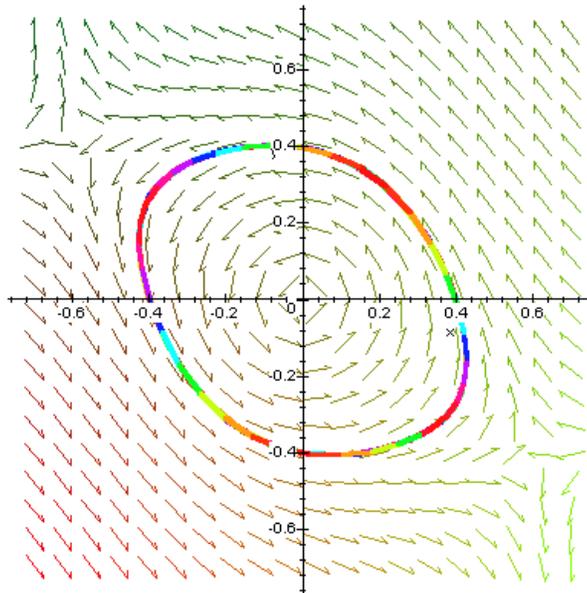


Abbildung 3.6: Startpunkt (0.4, 0)

In diesem Beispiel findet sich zur Abwechslung wieder ein Wirbelfall.

Wie schon zuvor wird auch hier zugunsten der Übersichtlichkeit auf Zwischenergebnisse verzichtet.

Maple:

```

3. C-Schritt :
3. A-Schritt :
4. C-Schritt :
4. A-Schritt : +(4)*x^3*y^1+(2)*x^1*y^3
1. Strudelgroesse = 0
2. Strudelgroesse = 0
3. Strudelgroesse = 0
4. Strudelgroesse = 0
5. Strudelgroesse = 0
6. Strudelgroesse = 0
7. Strudelgroesse = 0
8. Strudelgroesse = 0
9. Strudelgroesse = 0
10. Strudelgroesse = 0
11. Strudelgroesse = 0

```

12. Strudelgroesse = 0
 13. Strudelgroesse = 0
 14. Strudelgroesse = 0
 15. Strudelgroesse = 0
 16. Strudelgroesse = 0
 17. Strudelgroesse = 0
 18. Strudelgroesse = 0
 19. Strudelgroesse = 0
 20. Strudelgroesse = 0
 21. Strudelgroesse = 0
 22. Strudelgroesse = 0
 47. C-Schritt : $+(0)*x^{25}*y^{22}+(0)*x^{23}*y^{24}+(0)*x^{21}*y^{26}$
 47. A-Schritt :
 48. C-Schritt : $+(128/714620417135625)*x^{26}*y^{22}$
 $+(-16/85754450056275)*x^{24}*y^{24}$
 $+(-16/2143861251406875)*x^{22}*y^{26}$
 48. A-Schritt : $+(128/16436269594119375)*x^{25}*y^{23}$
 $+(16/49308808782358125)*x^{23}*y^{25}$
 23. Strudelgroesse = 0

JAVA:

3. C-Schritt: ()
 3. A-Schritt: ()
 4. C-Schritt: $(-2.0*x^0*y^4-6.0*x^2*y^2 +4.0*x^4*y^0)$
 4. A-Schritt: $(2.0*x^1*y^3 +4.0*x^3*y^1)$
 4.: 1. Strudelgroesse: 0.0
 6.: 2. Strudelgroesse: 0.0
 8.: 3. Strudelgroesse: -1.1102230246251565E-16
 10.: 4. Strudelgroesse: 0.0
 12.: 5. Strudelgroesse: -2.5979849584765384E-15
 14.: 6. Strudelgroesse: 0.0
 16.: 7. Strudelgroesse: -1.516359194062639E-14
 18.: 8. Strudelgroesse: 0.0
 20.: 9. Strudelgroesse: 8.544126330536161E-15
 22.: 10. Strudelgroesse: 0.0
 24.: 11. Strudelgroesse: 1.4519389952746118E-12
 26.: 12. Strudelgroesse: 0.0
 28.: 13. Strudelgroesse: 1.3101097901904932E-11
 30.: 14. Strudelgroesse: 0.0
 32.: 15. Strudelgroesse: -1.278980059765441E-10
 34.: 16. Strudelgroesse: 0.0
 36.: 17. Strudelgroesse: -4.227684185053371E-9
 38.: 18. Strudelgroesse: 0.0
 40.: 19. Strudelgroesse: -2.432166333046484E-9

```

42.: 20. Strudelgroesse: 0.0
44.: 21. Strudelgroesse: 1.509389448302279E-6
46.: 22. Strudelgroesse: 0.0
47. C-Schritt: ( )
47. A-Schritt: ( )
48. C-Schritt:
(-0.00133128149340261*x^2*y^46-0.028864563840003594*x^4*y^44
-0.28713379504057046*x^6*y^42-1.6968933051262551*x^8*y^40
-6.265007461952673*x^10*y^38-12.592849770758939*x^12*y^36
+3.489531128148757*x^14*y^34 +120.54748148879348*x^16*y^32
+465.1343703261745*x^18*y^30 +1094.0540295221565*x^20*y^28
+1815.3872733122967*x^22*y^26 +2195.0996407122816*x^24*y^24
+1900.4017581190478*x^26*y^22 +1069.7831053986677*x^28*y^20
+224.31665343722847*x^30*y^18-220.9471234990557*x^32*y^16
-261.54425382420237*x^34*y^14-140.4697054022555*x^36*y^12
-43.65674114995073*x^38*y^10-7.04966645696048*x^40*y^8
-0.187710799678834*x^42*y^6+0.09635274250230215*x^44*y^4
+0.00813412581876777*x^46*y^2 +5.2684386519516154E-5*x^48*y^0 )
48. A-Schritt:
(1.5077066577490255E-5*x^1*y^47 +6.799678741815506E-4*x^3*y^45
+0.011892623635634675*x^5*y^43 +0.1140738016246945*x^7*y^41
+0.7082132413043034*x^9*y^39 +3.080483988438228*x^11*y^37
+9.736212103305643*x^13*y^35 +22.485192832503248*x^15*y^33
+36.55669894022434*x^17*y^31+35.164384043198936*x^19*y^29
-3.5374710604470003*x^21*y^27-83.08256486714632*x^23*y^25
-170.88655049563758*x^25*y^23-215.95527479698944*x^27*y^21
-193.2704784874291*x^29*y^19-125.69212079672198*x^31*y^17
-58.05511909227935*x^33*y^15-17.408072358856796*x^35*y^13
-2.3198712233211576*x^37*y^11+0.4650809664978977*x^39*y^9
+0.27403402818150135*x^41*y^7+0.04897555806858939*x^43*y^5
+0.0033005566186809967*x^45*y^3+3.760731994202589E-5*x^47*y^1 )
48.: 23. Strudelgroesse: 1.5077066577490255E-5

```

An diesem Beispiel sieht man, daß einige Summanden im C- und A-Schritt in der JAVA-Realisierung aufgrund der ungenauen Berechnung nicht verschwinden, die Vergleichsdifferentialgleichung also länger erscheint. In der weiteren Berechnung führen diese dann auch zum falschen Schluß, es läge ein Strudel vor.

Beispiel $y' = -\frac{x+x^7+2x^8y-y^{11}}{y-2x^{10}y+y^{11}}$

Beispiel bei Moritzen von Seite 44.

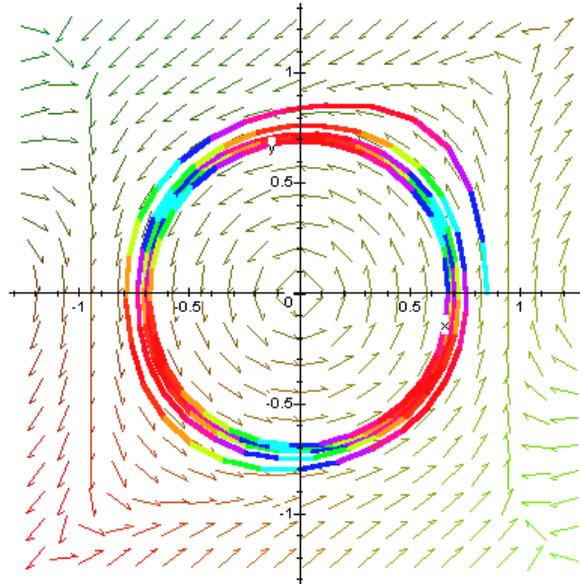


Abbildung 3.7: Startpunkt (0.85, 0)

Einen sehr schön nach innen drehenden Strudel findet man in diesem Beispiel.

Maple:

```

3. C-Schritt :+(0)*x^1*y^2
3. A-Schritt :
4. C-Schritt :+(0)*x^2*y^2
4. A-Schritt :
1. Strudelgroesse = 0
5. C-Schritt :+(0)*x^3*y^2
5. A-Schritt :
6. C-Schritt :+(0)*x^4*y^2
6. A-Schritt :
2. Strudelgroesse = 0
7. C-Schritt :+(0)*x^5*y^2
7. A-Schritt :
8. C-Schritt :+(0)*x^6*y^2
8. A-Schritt :+(1/4)*x^8*y^0
3. Strudelgroesse = 0
9. C-Schritt :+(0)*x^7*y^2
9. A-Schritt :
10. C-Schritt :+(-4)*x^8*y^2

```

10. A-Schritt : $+(2/9)*x^9*y^1+(-2/3)*x^7*y^3+(-14/15)*x^5*y^5$
 $+(-2/3)*x^3*y^7+(-2/9)*x^1*y^9$
 4. Strudelgroesse = $-2/9$

JAVA:

```

3. C-Schritt: ( )
3. A-Schritt: ( )
4. C-Schritt: ( )
4. A-Schritt: ( )
4.: 1. Strudelgroesse: 0.0
5. C-Schritt: ( )
5. A-Schritt: ( )
6. C-Schritt: ( )
6. A-Schritt: ( )
6.: 2. Strudelgroesse: 0.0
7. C-Schritt: ( )
7. A-Schritt: ( )
8. C-Schritt: (-2.0*x^7*y^1 )
8. A-Schritt: ( +0.25*x^8*y^0 )
8.: 3. Strudelgroesse: 0.0
9. C-Schritt: ( )
9. A-Schritt: ( )
10. C-Schritt: (-4.0*x^8*y^2 )
10. A-Schritt: (-0.2222222222222222*x^1*y^9
-0.6666666666666666*x^3*y^7-0.9333333333333332*x^5*y^5
-0.6666666666666666*x^7*y^3+0.2222222222222222*x^9*y^1 )
10.: 4. Strudelgroesse: -0.2222222222222222

```

Wieder einmal sind die Unterschiede nur gering, da relativ früh eine Strudelgröße $\neq 0$ auftritt.

Entgegen der Aussage im Ausblick 5.3 bei Moritzen [1] kann das letzte Beispiel (ohne linearen Anteil) $y' = -\frac{x^5+xy^6+x^4y^3}{y^5+3x^6y+6xy^6}$ nicht ohne weiteres mit dem Programm berechnet werden. Hierzu sind neue Formeln für den A-Schritt nötig. Die Entwicklung dieser, ihre Implementierung und Verwendung an einigen Beispielen ist Teil der Diplomarbeit von Jürgen Opel [12].

3.4 Laufzeit, Komplexität und Auslöschung

Die Komplexität bleibt eigentlich unverändert, da der Algorithmus nur an die Programmiersprache angepaßt wurde. Die Anzahl der Schleifen in Abhängigkeit von der Iterationsstufe ist annähernd gleich. Lediglich die Initialisierung fiel etwas ausführlicher aus, dafür bietet die Realisierung aber auch mehr Wahlmöglichkeiten, sogar die Eingabe von Differentialgleichungen ist möglich. Für weitere Betrachtungen sei auf Kapitel 4.2 in der Arbeit von Moritzen [1] verwiesen.

Die Laufzeit ist, wie schon zu Beginn des Kapitels erwähnt, um einiges höher im Vergleich zu der Realisierung unter JAVA. Dies liegt einfach an den komplexeren Berechnungen die in Maple stattfinden, da jede Zahl exakt behandelt wird. Brüche bleiben erhalten und werden nicht in Dezimalbrüche umgewandelt. Dadurch ist in jedem Schritt mit wachsendem Aufwand eine Überprüfung auf Verrechenbarkeit der neuen Ergebnisse nötig. Dies führt letztendlich zu der deutlich höheren Laufzeit. Es soll aber nochmals darauf hingewiesen werden, daß dies nicht auf eine höhere Anzahl von Rechenschritten zurückzuführen ist - diese blieb unverändert - sondern lediglich durch die langsamere, aber exakte Berechnung in Maple verursacht wird.

Das große Problem der Numerik, die Auslöschung, wurde hier umgangen. Durch die algebraische Berechnung gibt es keine Fehler, die sich fortpflanzen können. Deshalb können im Wirbelfall auch so viele exakte Nullen berechnet werden, wie gewünscht sind.

Allerdings ist hier Vorsicht geboten. Man sollte sich langsam an die gewünschte Größenordnung herantasten. Zur Zeit der Erstellung dieser Diplomarbeit dauerte die Berechnung bis zu einer 100ten Strudelgröße mehrere Tage. Es treten mitunter große Datenmengen auf, weil jeder Koeffizient aus einem Bruch zweier möglicherweise hundertstelliger Zahlen besteht. Um unnötige Berechnungen von Strudelgrößen zu vermeiden, wäre es nun interessant zu wissen, wieviele für ein bestimmtes Problem¹ berechnet werden müssen, um sicher auf den Wirbelfall schließen zu können. An einem Ansatz, eine derartige Aussage treffen zu können, arbeitet zur Zeit Dr. Hans-Christian von Bothmer².

¹rein quadratisch, kubisch, biquadratisch oder beliebig

²Lehrstuhl Mathematik VIII, Fakultät I, Universität Bayreuth

Kapitel 4

Grenzykel

4.1 Eigenschaften und Definition

Was ist ein Grenzykel?

Läuft man in einer Differentialgleichung mit Strudelcharakter¹ bei zwei verschiedenen Startpunkten los (z.B. zwei benachbarte Punkte auf der x-Achse), so erwartet man eigentlich, daß man in beiden Fällen in die selbe 'Richtung' strudelt, d.h. sich relativ dem Ursprung nähert oder von diesem entfernt. Nun kann es aber auch sein, daß die beiden Teillösungen² aufeinander zulaufen (vergleiche Abbildung 4.1), bzw. voneinander weg (vergleiche Abbildung 4.2). Zu zwei unterschiedlichen Startpunkten nähert sich also eine Umlaufbahn dem Ursprung und die andere entfernt sich von diesem. Tritt dieses Phänomen auf, so gibt es in einer Umgebung des Ursprungs zwei Bereiche mit unterschiedlichem Verhalten. Die Grenze zwischen diesen Beiden wird von einem Grenzykel dargestellt, der keines der beiden Verhalten annimmt, sondern sich exakt auf dieser Grenze bewegt und diese nicht verläßt. Es handelt sich hierbei also um eine geschlossene Kurve. Je nachdem, welches Verhalten auf inneren Seite des Grenzykels, bzw. der äußeren vorliegt, liegt ein anziehender³ bzw. abstoßender⁴ Grenzykel vor.

Auf der nächsten Seite findet sich je eine Grafik für jeden Typ. Die Grenzykel werden durch dickere Linien dargestellt, und Pfeilspitzen markieren die Strudelrichtung der Spuren. Der einfacheren Darstellbarkeit wegen, wurde ein Kreis für die Form des Grenzykels gewählt. Dies ist allerdings nicht allgemein der Fall, wie man später in den Beispielen 4.4 sieht.

¹das Richtungsfeld erzeugt in einer begrenzten Umgebung um die Unbestimmtheitsstelle ausschließlich Strudel, wobei hier als Unbestimmtheitsstelle nur der Ursprung betrachtet werden soll

²der Weg, den man zurücklegt, wenn man im Richtungsfeld einer Differentialgleichung bei einem beliebigen Startpunkt losläuft, ist Teil der Lösung für eben diesen Startpunkt. Auch Spur genannt

³die beiden Teillösungen laufen auf den Grenzykel zu

⁴die beiden Teillösungen laufen vom Grenzykel weg

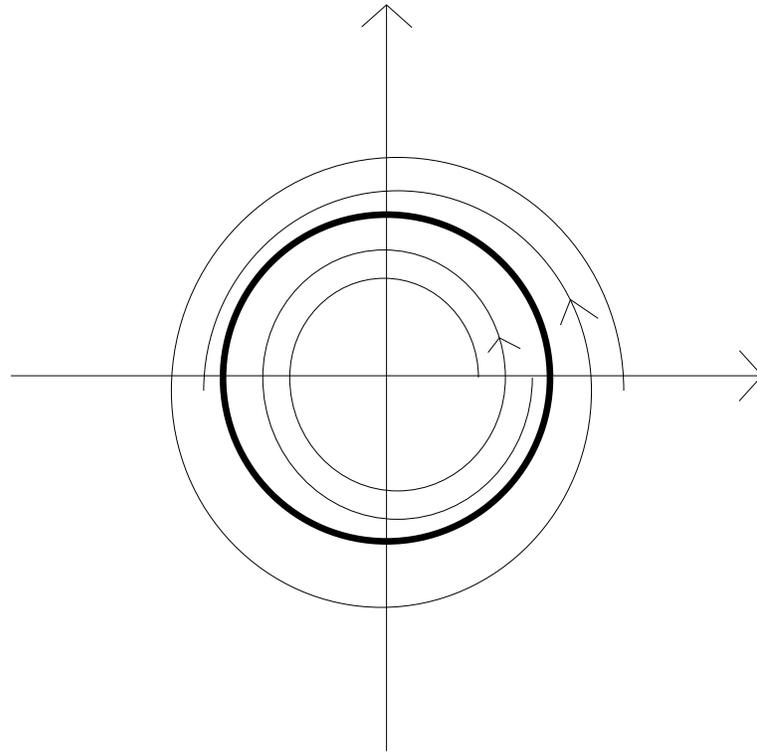


Abbildung 4.1: Anziehender Grenzykel

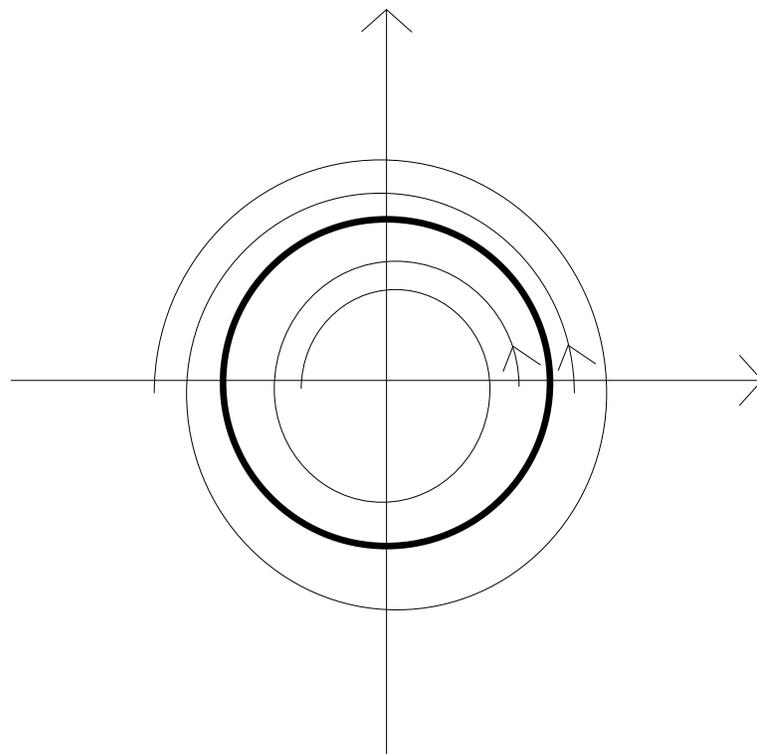


Abbildung 4.2: Abstoßender Grenzykel

Mathematischer formuliert, sieht das so aus:

Sei

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)} = \frac{Z(x, y)}{N(x, y)}$$

eine Differentialgleichung mit Strudelcharakter, d.h. $\exists i : i \geq 0 : D_i^5 \neq 0$. Mittels der Formel von Seite 404 bei Frommer [2] - die Einführung von Polarkoordinaten - erhält man eine Differentialgleichung der folgenden Form

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi} = r \frac{Z(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \sin \varphi + N(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cos \varphi}{Z(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cos \varphi - N(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \sin \varphi}$$

oder in gekürzte Schreibweise: $r' = r \frac{Z \sin \varphi + N \cos \varphi}{Z \cos \varphi - N \sin \varphi}$.

Sei $\varrho(\varphi)_{\text{exakt}}$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Nun kann man die stetige Funktion⁶ $\psi(r_0)_{\text{exakt}} = r_0 - \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$ einführen, die den Abstand zwischen dem Startpunkt $(r_0, \varphi = 0)$ und dem Endpunkt $(r_1, \varphi = 2\pi)$ auf der x-Achse angibt.

Für positive Werte der Funktion, also $\psi(r_0)_{\text{exakt}} > 0$ oder $r_0 > \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$, strudelt man offensichtlich zum Ursprung hin, im Gegensatz dazu für $\psi(r_0)_{\text{exakt}} < 0$ von diesem weg.

Jede Nullstelle von $\psi(r_0)_{\text{exakt}}$ stellt somit eine geschlossene Kurve dar. Diese wird nun Grenzykel genannt.

Definition 4.1 (Grenzykel). Sei r' eine auf Polarkoordinaten transformierte Differentialgleichung mit Strudelcharakter und $\varrho(\varphi)_{\text{exakt}}$ eine dazugehörige Lösung. Dann werden die zu den Nullstellen der Funktion $\psi(r_0)_{\text{exakt}} = r_0 - \varrho(2\pi)_{\text{exakt}}$ gehörigen geschlossenen Kurven als Grenzykel bezeichnet.

Bemerkung 4.2 (Grenzykelradius). Ab sofort wird der Schnittpunkt eines Grenzykels mit dem positiven Teil der x-Achse als Grenzykelradius bezeichnet entsprechend dem bisherigen Startradius r_0 . Es ist aber zu beachten, daß trotz der Verwendung des Begriffs Radius, es sich bei einem Grenzykel nicht zwingend um einen Kreis handelt!

⁵Strudelgrößen D_i nach Kapitel 2, Seite 10

⁶da ϱ stetig ist, weil es Lösung einer Differentialgleichung ist, ist auch ψ stetig.

4.2 Kriterium für die Existenz

Folgende Situation liegt hier vor:

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

mit einem Parameter $\epsilon \in \mathbb{R}$ und analytischer Abhängigkeit in $|x| < \epsilon_0, |y| < \epsilon_0, |\epsilon| < \epsilon_0$, d.h.

$$p(x, y, \epsilon) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} p_{\nu\mu}(\epsilon)x^\nu y^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2, \lambda \geq 0} p_{\nu\mu\lambda} x^\nu y^\mu \epsilon^\lambda$$

$$q(x, y, \epsilon) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} q_{\nu\mu}(\epsilon)x^\nu y^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2, \lambda \geq 0} q_{\nu\mu\lambda} x^\nu y^\mu \epsilon^\lambda$$

mit in $|x| < \epsilon_0, |y| < \epsilon_0, |\epsilon| < \epsilon_0$ kompakt gleichmäßig absolut konvergenten Potenzreihen. Dann können wir die Strudelgrößen $D_n(\epsilon)$ ($n \geq 1$) berechnen, die in $|\epsilon| < \epsilon_0$ analytisch von ϵ abhängen. Sei $n_0 = n_0(\epsilon)$ der minimale Index mit $D_{n_0}(\epsilon) \neq 0$, wobei $n_0(\epsilon) = +\infty$ zugelassen ist.

Satz 4.3 (Existenz von Grenzykeln). *Es gebe ein endliches minimales $n_0(0)$ mit $D_{n_0(0)}(0) \neq 0$. Es gebe ein $\tilde{\epsilon} \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) - \{0\}$ und ein endliches minimales $n_0(\tilde{\epsilon})$, $n_0(\tilde{\epsilon}) < n_0(0)$ mit $D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) \neq 0$. Es sei*

$$D_{n_0(0)}(0)D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) < 0.$$

Dann existiert für die auf Polarkoordinaten transformierte Gleichung $y' = \frac{-x+p(x,y,\epsilon)}{(y+q(x,y,\epsilon))}$, nämlich

$$r' = r \frac{g_1(\varphi, \epsilon) + g_2(\varphi, \epsilon) + \dots}{1 + h_1(\varphi, \epsilon)r + h_2(\varphi, \epsilon)r^2 + \dots},$$

eine 2π - periodische Lösung, der Grenzykel.

Beweis

Ohne Einschränkung sei

$D_{n_0}(0) < 0$, die Spirale dreht sich heraus,

$D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) > 0$, die Spirale dreht sich herein.

Für $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, $(\epsilon_0, \kappa_1, \eta) = \{|\epsilon| < \epsilon_0, 0 < r_0 < \kappa_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi + \eta\}$ gilt die dort kompakt gleichmäßig absolutkonvergente Entwicklung

$$r(\varphi, r_0, \epsilon) = \sum_{\lambda, \mu \geq 0, \nu \geq 1} a_{\lambda\mu\nu} \epsilon^\lambda \varphi^\mu r_0^\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(\varphi, \epsilon) r_0^\nu.$$

Es ist $r(0, r_0, \epsilon) = r_0$. Sei

$$\varrho(r_0, \epsilon) = r(2\pi, r_0, \epsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(2\pi, \epsilon) r_0^\nu.$$

$$\psi(r_0, \epsilon) = r_0 - \varrho(r_0, \epsilon),$$

so daß

$$\psi(r_0, 0) < 0, \psi(r_0, \tilde{\epsilon}) > 0, 0 < r_0 < \kappa_1,$$

ist. Insbesondere gibt es dann, aufgrund der Stetigkeit von $\psi(r_0, \epsilon)$ in r_0 einen Punkt $(r_0^*, \tilde{\epsilon})$ mit $\psi(r_0^*, \tilde{\epsilon}) = 0$ und $0 < |r_0^*| < \kappa_1$.

□

4.3 Graphisches Auffinden

Bevor man einen Grenzykel sucht, sollte man einen Anhaltspunkt zur möglichen Existenz haben. Die folgenden Voraussetzungen sind hierbei hilfreich.

Für eine Schar von Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

existiert für $\epsilon = 0$ ein endliches, minimales $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß gilt $D_{n_0(\epsilon)}(\epsilon) = D_{n_0(0)}(0) \neq 0$. Desweiteren gebe es ein geeignet kleines⁷ $\tilde{\epsilon}$, ebenfalls ein minimales $n_0(\tilde{\epsilon}) \in \mathbb{N}$ mit $D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) \neq 0$ und $n_0(\tilde{\epsilon}) < n_0(\epsilon) = n_0(0)$. Nun wird nur noch ein Vorzeichenwechsel der ersten nichtverschwindenden Strudelgrößen benötigt, also $D_{n_0(\epsilon)}(\tilde{\epsilon})D_{n_0(\tilde{\epsilon})}(\tilde{\epsilon}) < 0$.

Nun führt man nach [2] Seite 404 eine Approximation der Lösung der Differentialgleichung in der Funktion

$$r(\varphi, r_0, \epsilon) = r_0\omega_1(\varphi) + r_0^2\omega_2(\varphi) + \dots$$

ein. Diese wird nun gleich in einer weiteren Funktion verwertet. $\psi(r_0)$ mit

$$\psi(r_0) = r_0 - r(2\pi, r_0, \epsilon) = C_1r_0 + C_2r_0^2 + \dots$$

gibt den Abstand zwischen einem Startpunkt S auf der x-Achse mit den Polarkoordinaten $(r_0, \varphi = 0)$ und einem Endpunkt E auf der x-Achse mit den Polarkoordinaten $(r_1, \varphi = 2\pi)$ an.

Mit der Gleichwertigkeit von $D_i = 0$ und $C_i = 0 \ \forall i$ - wird in Kapitel 3 bei [14] gezeigt - liegt also für $\tilde{\epsilon}$, ein Vorzeichenwechsel der Funktion $\psi(r_0)$ vor.

Aufgrund der vorliegenden Stetigkeit hat $\psi(r_0)$ eine Nullstelle. Dies bedeutet aber für die Differentialgleichung, daß für das r_0 der Nullstelle eine geschlossene Kurve - der Grenzykel - existiert.

⁷geeignet klein, weil sonst der mögliche Grenzykelradius außerhalb des Bereiches mit bestimmtem Verhalten der Differentialgleichung liegt

Um nun einen Grenzzzykel zu finden sucht man eben diese Nullstelle, die die Grenze zwischen zwei Bereichen unterschiedlichen Verhaltens darstellt. Auf der einen Seite strudelt man für $\psi(r_0) > 0$ nach außen und auf der anderen für $\psi(r_0) < 0$ nach innen.

Will man nun die Suche mathematisch lösen, so ergibt sich das Problem eine Approximation einer Lösung explizit anzugeben. Auch bei Frommer findet sich hier kein weiterer Ansatz, nur eine Beschreibung der äußeren Form einer durch sukzessive Approximation gewonnenen Näherung

$$r = r_0\omega_1 + r_0^2\omega_2 + r_0^3\omega_3 + \dots$$

ohne aber weiteres über die Abhängigkeit der ω 's von der eigentlichen Differentialgleichung zu sagen.

So verbleibt als Möglichkeit zur Suche nach der Nullstelle noch die Intervallschachtelung. Mit der Modifikation lediglich nach endlicher Zeit, wenn man mit der Genauigkeit des Ergebnisses zufrieden ist, abzurechnen, entsteht ein brauchbarer Algorithmus.

Zu Beginn der Suche wählt man sich Startpunkte auf der x-Achse und vollzieht von diesen ausgehend genau einen Umlauf bis man sich wieder auf der x-Achse befindet. Sollte man für einen Startpunkt genau auf diesen wieder zurückgelangen, so hat man den Grenzzzykel gefunden und andere Startpunkte geben Aufschluß über den Typ (anziehend oder abstoßend). Sehr wahrscheinlich findet man aber den Grenzzzykel nicht auf Anhieb. In diesem Fall nimmt man zwei Startpunkte mit unterschiedlichem Verhalten⁸. Sollte nur der gleiche Typ gefunden worden sein, versucht man es näher am Ursprung und weiter weg, solange bis zwei geeignete gefunden wurden. Hat man das gewünschte Startpunktpaar (unterschiedliches Strudelverhalten) beginnt die Intervallschachtelung. Man ermittelt für einen Punkt, der in der Mitte der beiden liegt, das Verhalten, und ist so in der Lage ein Intervall, das nur halb so groß ist, zu bilden, wobei die beiden Intervallgrenzen immer unterschiedliches Verhalten aufweisen müssen. Rekursives Anwenden läßt die Intervallgrenzen beliebig nahe zueinander laufen, und somit den Startpunkt des Grenzzykels in gewünschter Exaktheit ermitteln.

In dem Fall der vorliegenden Diplomarbeit wurde versucht, das Ganze mit Maple zu lösen. Jedoch stellte sich das Problem, daß Maple in diesem Zusammenhang keine Polarkoordinaten erlaubt. Ein Verzicht auf diese, bedeutet aber auch, daß man anstatt eines Phasenwinkels von 2π nun einen Zeitpunkt t benötigt, der wieder exakt

⁸d.h. für einen nähert man sich dem Ursprung nach Umlaufen und für den anderen entfernt man sich von diesem

zur x-Achse zurückführt. Dieses t wiederum könnte nur näherungsweise mit den in Maple integrierten Algorithmen⁹ berechnet werden. Leider ist keines dieser Verfahren in der Praxis zu gebrauchen, da keine (mir bekannte) Methode exakt einen Umlauf vollzieht, also wieder auf der x-Achse landet. Deshalb wurde die Idee derart modifiziert, daß man einfach mehrmals (hinreichend oft) den Ursprung umläuft und sich den Verlauf der Teillösung plotten läßt. Bei ausreichender Anzahl der Umläufe ist das Verhalten für den Startpunkt sehr leicht zu erkennen und offensichtlich. Man sollte ohne weiteres erkennen können, ob eine Bewegung nach innen, also zum Ursprung hin, oder nach außen vorliegt. Der Rest des Verfahrens, also die Intervallschachtelung mit mehreren Punkten, bleibt wie gehabt, und die Intervallgrenzen konvergieren von beiden Seiten an den rechten Schnittpunkt des Grenzzykels mit der x-Achse.

Die Genauigkeit hängt eigentlich nur von der vorhandenen Rechenzeit bzw. -kapazität ab. Je näher man an den Grenzzykel herankommt, umso mehr Umläufe sind nötig, daß das Verhalten ohne weiteres noch erkennbar ist, da sich in einer kleinen Umgebung des Grenzzykels die Umlaufbahnen sehr viel langsamer bewegen. Dadurch kann sich die Bestimmung eines Grenzzykelradius auf 3 Nachkommastellen auf einem aktuellen Rechnersystem (700 MHz) durchaus über eine Stunde bis hin zu einigen Stunden erstrecken.

4.4 Beispiele und Fallstudien

Man kann zwei Typen von Grenzzykel unterscheiden, Anziehende und Abstoßende. Diese Unterteilung gibt es bei Frommer noch nicht. Im Folgenden wird zunächst das Beispiel aus seiner Arbeit[2] genauer untersucht und im Anschluß daran einige selbst erstellte Beispiele für beide Typen vorgestellt.

Um das Strudelverhalten eines Graphen in einer Abbildung zu erkennen, sucht man den angegebenen Startpunkt im Koordinatensystem und betrachtet dann die weitere Entwicklung. Bei einigen Beispielen ist die Geschwindigkeit der Radiusänderung jedoch so gering, daß der Startpunkt nicht auf den linken oder rechten Rand der Kurve festgelegt werden kann. Hier findet man dann eher den Endpunkt, denn der von Maple zuletzt gezeichnete Teil ist auch der Deutlichste. Das Ende des Graphen ist also die Linie mit den klar erkennbaren Farben, während der Startpunkt aufgrund der Überlagerungen kaum sichtbar ist.

Derart gerüstet sollte es kein Problem sein in den folgenden Abbildungen die Grenzzykel zu finden und auch deren Typ zu bestimmen.

⁹z.B. rkf45 (Fehlbergs 45ter Ordnung-Runge-Kutta-Verfahren), Gear-Methode oder klassisch (Punkt-zu-Punkt)

Abstoßende Grenzykel

Beispiel von Frommer

Frommer geht in seiner Arbeit [2] bei der Betrachtung von Grenzykeln nur auf die folgende Differentialgleichung ein:

$$y' = -\frac{x+x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$$

Diese Differentialgleichung besitzt keinen Grenzykel. Aus den Abbildungen 4.3 und 4.4 kann man erkennen, daß das Verhalten um die Unbestimmtheitsstelle gleich ist. Die Differentialgleichung 'strudelt' nach außen, bis sie bei einem Radius von ca. 0,36 im Chaos ihre Gleichmäßigkeit verliert (vgl. 4.4).

Strudelgröße $D_1 = 0$

Strudelgröße $D_2 = -\frac{7}{15}$

Durch Einführung eines ϵ erhält die Differentialgleichung die erweiterte Form:

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2+2xy-y^2}{y-2xy+y^2}$$

Hier ist Strudelgröße $D_1 = \frac{\epsilon}{3}$

Für verschiedene positive ϵ treten hier dann aufgrund des vorliegenden Vorzeichenwechsels der ersten nicht-verschwindenden Strudelgröße nun Grenzykel an verschiedenen Stellen auf. Diese werden im Folgenden betrachtet.

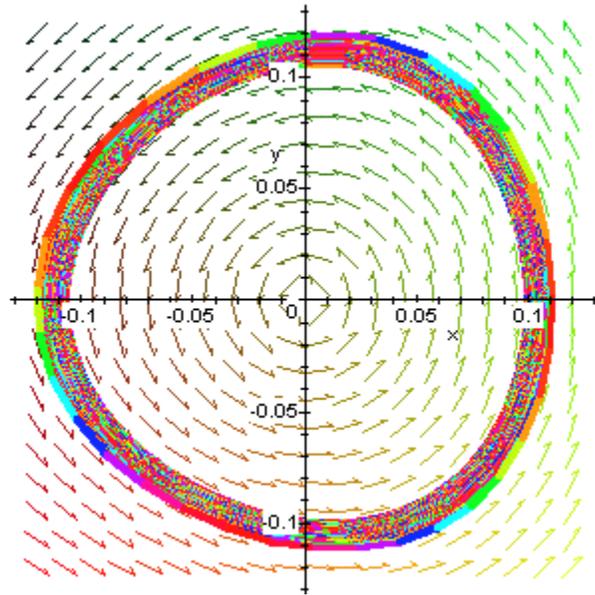


Abbildung 4.3: Startpunkt (0.1 / 0)

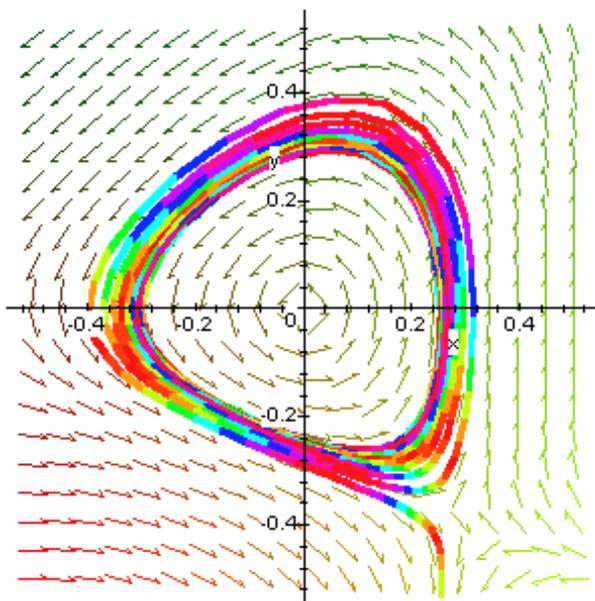


Abbildung 4.4: Startpunkt (0.25 / 0)

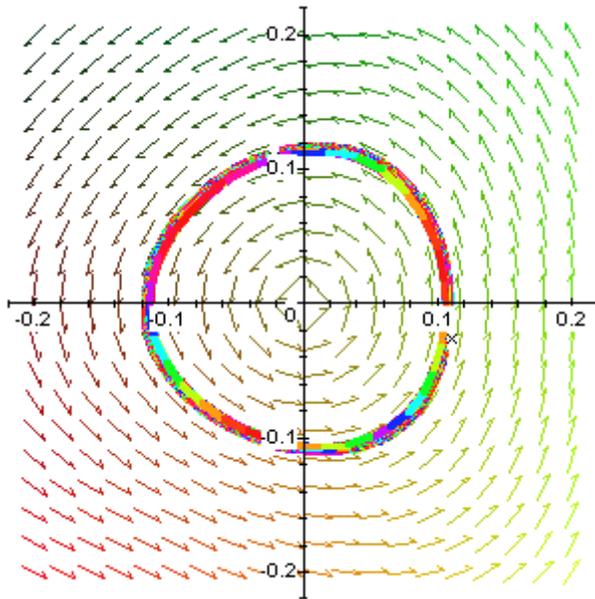


Abbildung 4.5: Startpunkt (0.11 / 0)

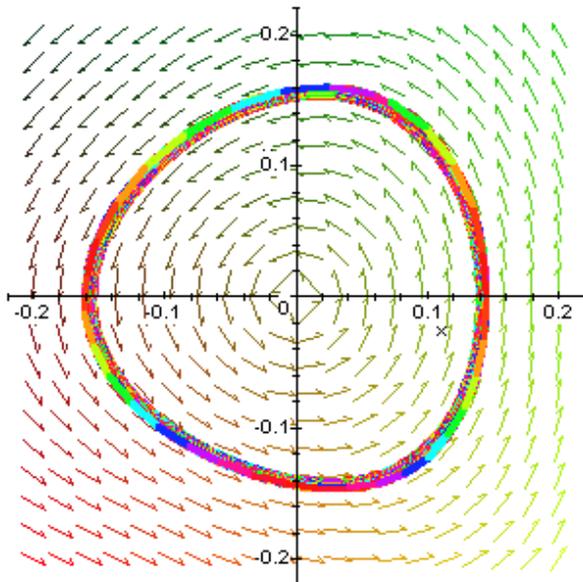


Abbildung 4.6: Startpunkt (0.14 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{50}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{150}.$$

In der Grafik 4.5 sieht man, daß sich der Strudel dem Ursprung für Startradien $r_0 \leq 0.11$ nähert. Dieses Verhalten liegt auch noch für $r_0 = 0.12$ vor, doch ist es in der Grafik auch mit stark erhöhtem Rechenaufwand kaum zu erkennen.

Dagegen läßt Bild 4.6 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle $(0,0)$ für Startradien $r_0 \geq 0.14$ entfernt.

Somit liegt der Startradius des Grenzzykels bei $r_0 \approx 0.13$.

Für

$$\epsilon = \frac{1}{20}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{60}.$$

Gegenüber dem vorhergehenden Beispiel kann man in Darstellung 4.7 um einiges deutlicher erkennen, daß sich der Strudel für Startradien $r_0 \leq 0.18$ zusammenzieht.

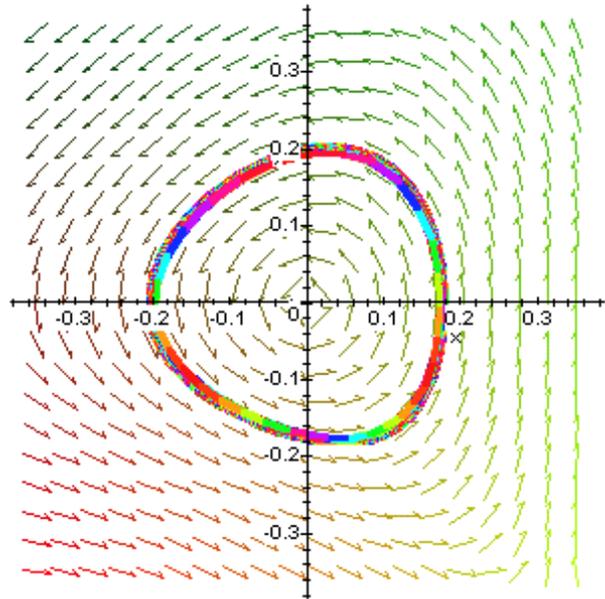


Abbildung 4.7: Startpunkt (0.18 / 0)

Wohingegen in Abbildung 4.8 der Strudel sich für Startradien $r_0 \geq 0.20$ ausdehnt.

Der Grenzykelradius beträgt also $r_0 \approx 0.19$.

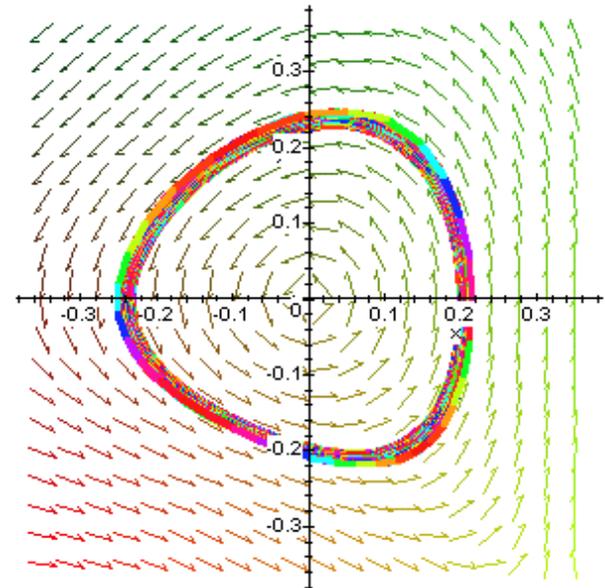


Abbildung 4.8: Startpunkt (0.20 / 0)

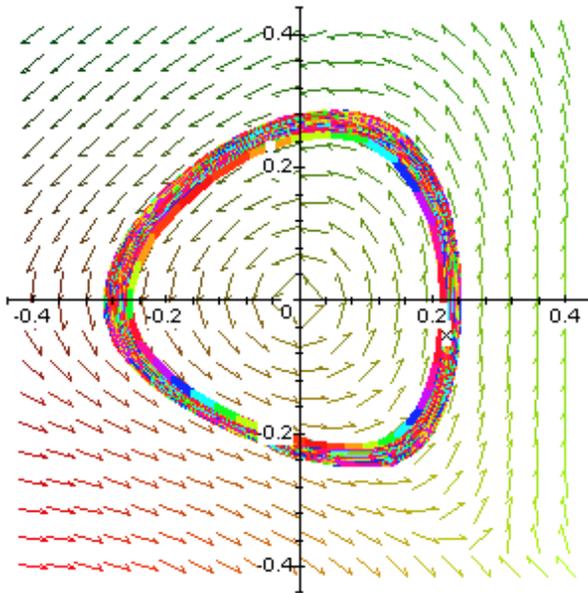


Abbildung 4.9: Startpunkt (0.24 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{10}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{30}.$$

Wieder kann man in Bild 4.9 deutlich erkennen, daß sich der Strudel dem Ursprung für Startradien $r_0 \leq 0.24$ nähert ...

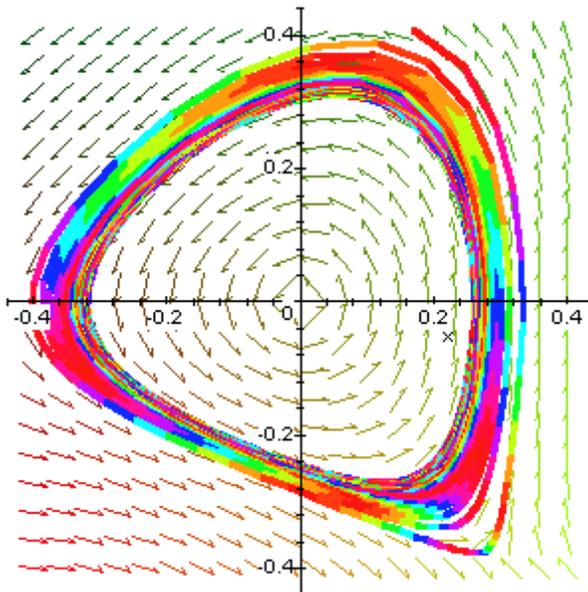


Abbildung 4.10: Startpunkt (0.26 / 0)

... und für Startradien $r_0 \geq 0.26$ das entgegengesetzte Verhalten aufweist (vgl. Abb. 4.10).

Bei $r_0 \approx 0.25$ befindet sich der Startradius des Grenzykels.

Für

$$\epsilon = \frac{1}{5}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{15}.$$

Sehr schön kann man in Abbildung 4.11 diesmal die Bewegung des Strudels in Richtung des Nullpunktes für Startstrahlen $r_0 \leq 0.3102$ erkennen.

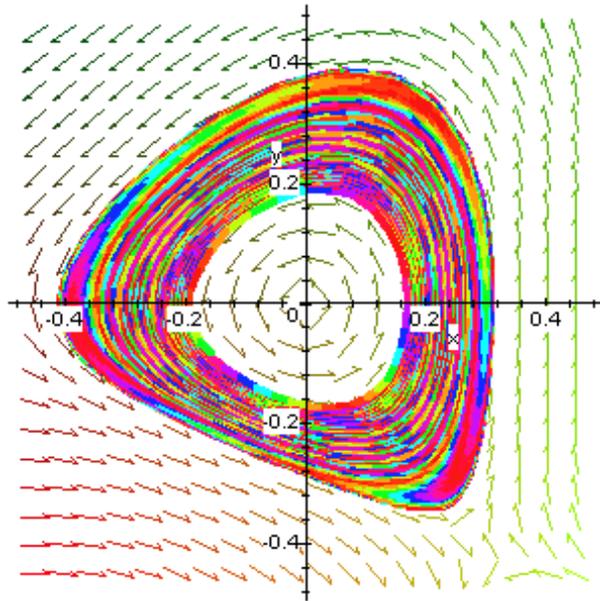


Abbildung 4.11: Startpunkt (0.3102 / 0)

Für Startstrahlen $r_0 \geq 0.3103$ sieht man in der Grafik 4.12 sogar das Ende des strudeligen Verhaltens. Nach mehreren Umläufen verliert der Graph die Gleichmäßigkeit und verschwindet im 'Chaos'.

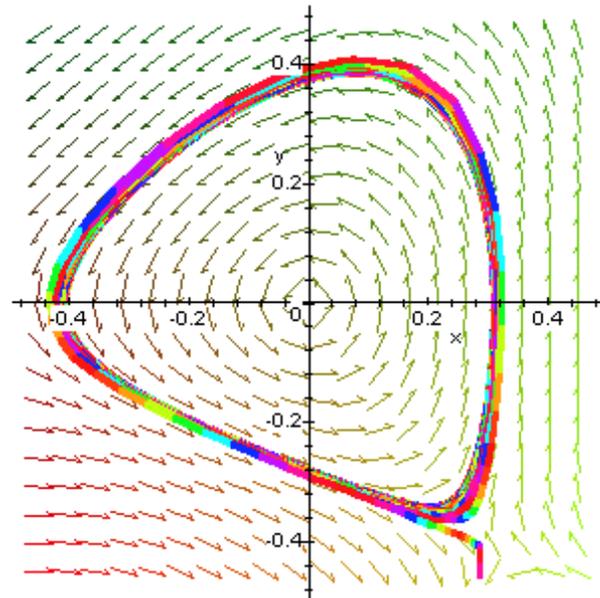


Abbildung 4.12: Startpunkt (0.3103 / 0)

Man kann den Schnittpunkt des Grenzykels mit dem positiven Teil der x-Achse also bei $r_0 \approx 0.31025$ finden.

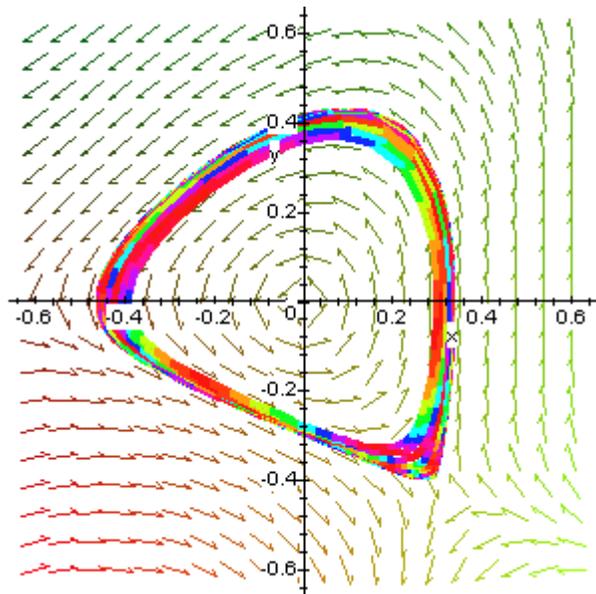


Abbildung 4.13: Startpunkt (0.3335397747 / 0)

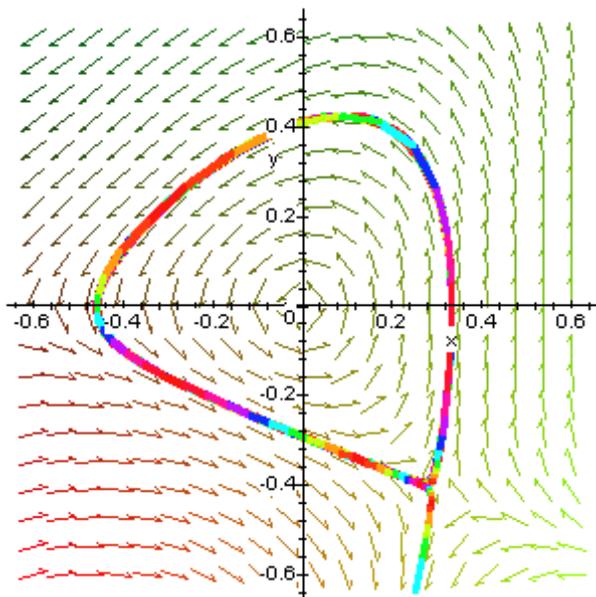


Abbildung 4.14: Startpunkt (0.3335397748 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{13}{48}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{15}.$$

In der Darstellung 4.13 zieht sich der Graph für Startradien $r_0 \leq 0.3335397747$ zusammen.

In Abbildung 4.14 für Startradien $r_0 \geq 0.3335397748$ kann man gerade noch einen Umlauf erkennen, ehe das gleichmäßige Verhalten verloren geht.

Der Startradius des Grenzzykels liegt somit bei $r_0 \approx 0.33353977475$. Dies ist auch der äußerste gefundene Grenzzykel. Für größere ϵ konnte keine geschlossene Integralkurve mehr gefunden werden.

Für

$$\epsilon = \frac{9}{24}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{3}{24}.$$

Unverändert erkennt man in Bild 4.15 für Startradien $r_0 \leq 0.36006$ das dem Ursprung zustrebende Verhalten.

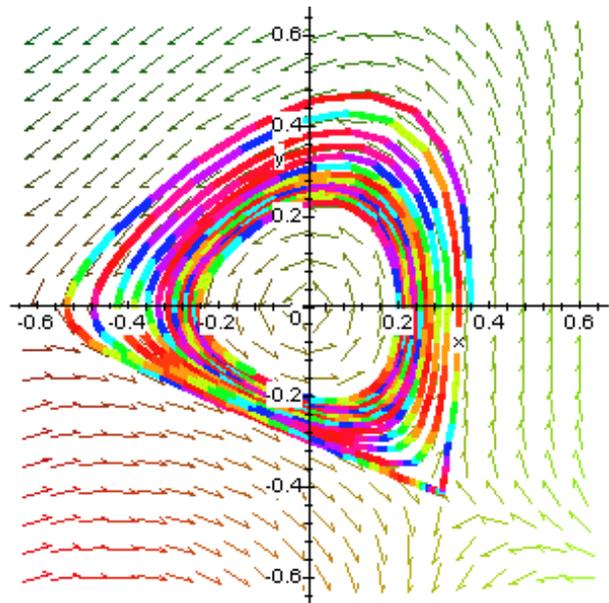


Abbildung 4.15: Startpunkt (0.36006 / 0)

Dagegen kann aus der Grafik 4.16 für Startradien $r_0 \geq 0.36007$ leider keine Aussage mehr getroffen werden. Der Graph erreicht keinen ganzen Umlauf mehr, er verläßt schon zuvor die Strudelbahn.

Da das Verhalten für Startradien $r_0 \geq 0.36007$ nicht dem benötigtem Strudeln entspricht, kann in diesem Beispiel und auch für $\epsilon \geq \frac{9}{24}$ keine Aussage bezüglich Grenzyklen gemacht werden.

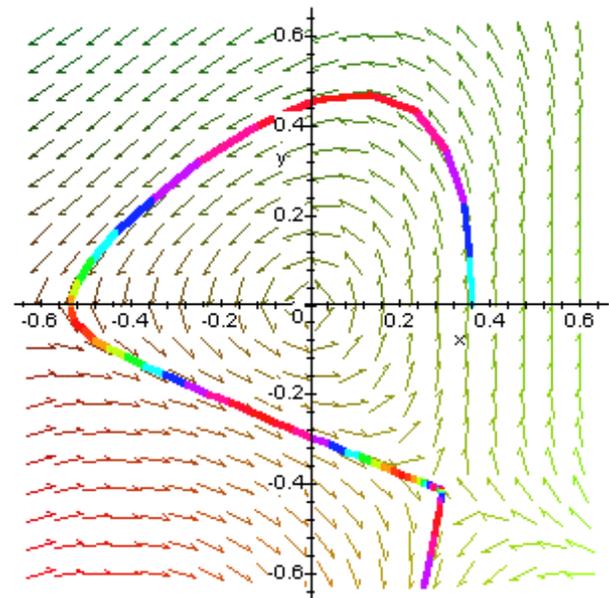


Abbildung 4.16: Startpunkt (0.36007 / 0)

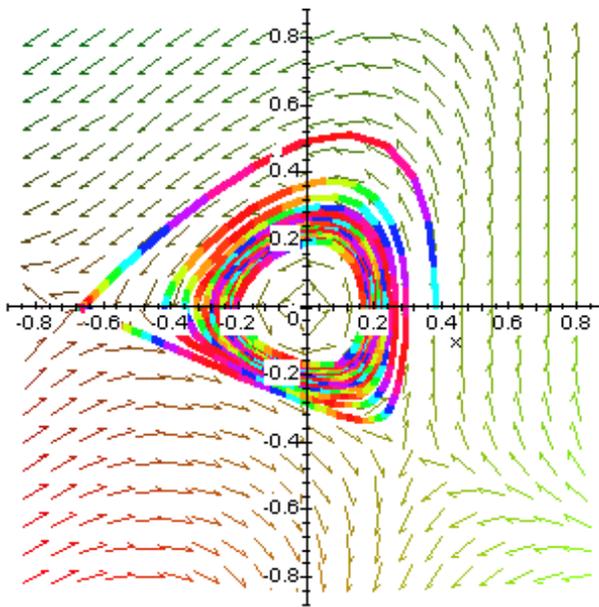


Abbildung 4.17: Startpunkt (0.3826 / 0)

Für

$$\epsilon = \frac{1}{2}$$

erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = \frac{1}{6}.$$

In Abbildung 4.17 strudelt der Graph für Startradien $r_0 \leq 0.3826$ wie erwartet zur Unbestimmtheitsstelle hin.

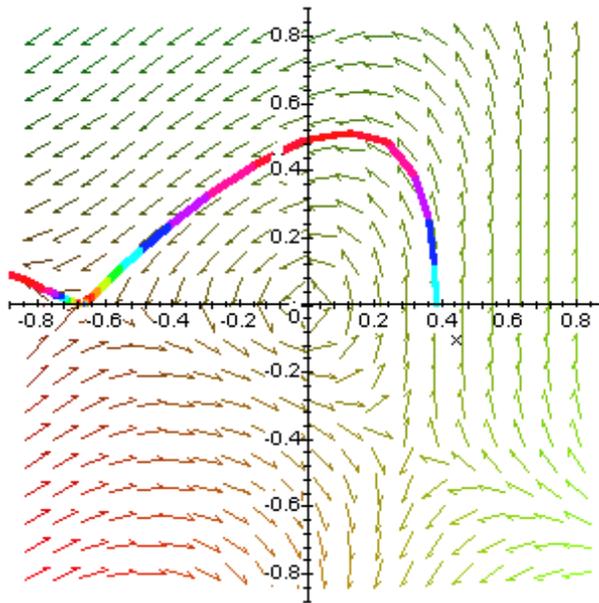


Abbildung 4.18: Startpunkt (0.3827 / 0)

Wie schon am Ende des vorhergehenden Beispiels festgestellt wurde, kann man in der Darstellung 4.18 für Startradien $r_0 \geq 0.3827$ nichts über Grenzykel aussagen.

Eigene Beispiele für abstoßende Grenzzykel

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y+x^6y}{y+xy^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = -\frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_2 = -\frac{\epsilon}{5}.$$

Für $\epsilon = -\frac{1}{4}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße, und es kann ein Grenzzykel existieren.

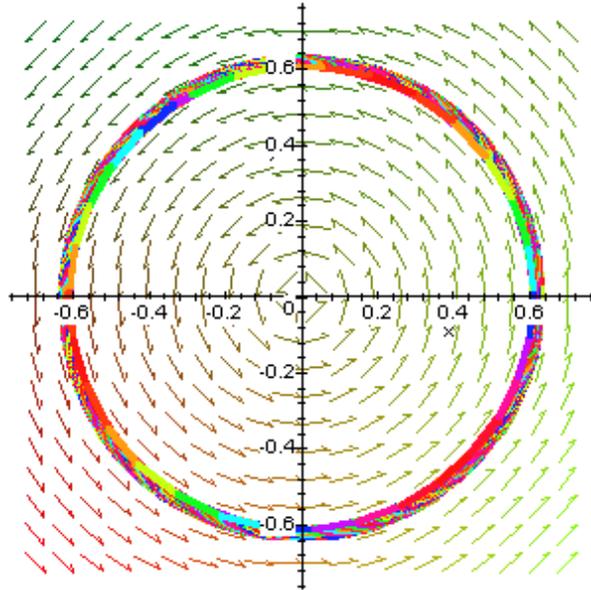


Abbildung 4.19: Startpunkt (0.632 / 0)

In der Grafik 4.19 sieht man, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.632$ nähert.

Dagegen läßt Bild 4.20 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.633$ entfernt.

Somit liegt der Startradius des Grenzzykels bei $r_0 \approx 0.6325$.

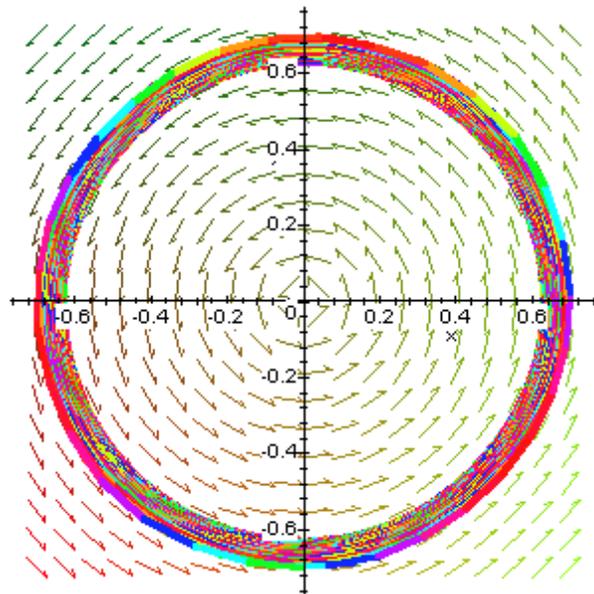


Abbildung 4.20: Startpunkt (0.633 / 0)

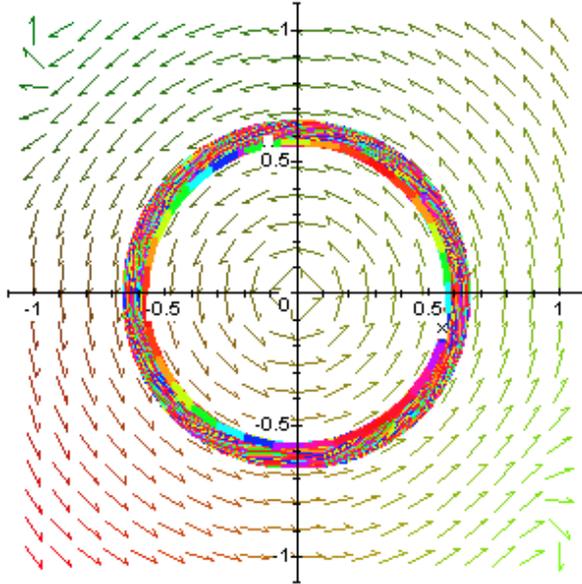


Abbildung 4.21: Startpunkt (0.65 / 0)

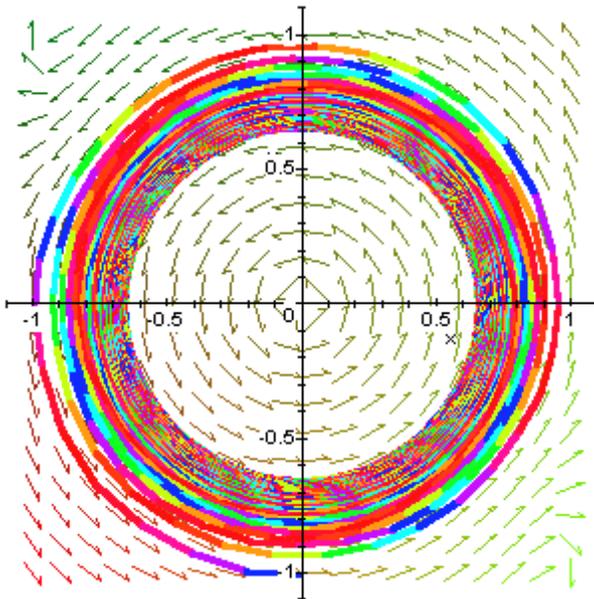


Abbildung 4.22: Startpunkt (0.66 / 0)

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y^3+x^8y}{y+x^3y^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $D_3 = 0$ und $D_4 = -\frac{1}{9}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_3 = -\frac{3\epsilon}{35}.$$

Für $\epsilon = -\frac{1}{2}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße, und es existiert möglicherweise ein Grenzykel.

In Abbildung 4.21 sieht man, daß sich der Strudel der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \leq 0.65$ nähert. Dagegen läßt 4.22 einen Strudel erkennen, der sich von der Unbestimmtheitsstelle für Startradien $r_0 \geq 0.66$ entfernt.

Deshalb beträgt der Grenzykelradius $r_0 \approx 0.655$.

Anziehende Grenzykel

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^4y-x^6y}{y+xy^4}$$

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = \frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_2 = -\frac{\epsilon}{5}.$$

Für $\epsilon = \frac{1}{4}$ kommt es also zum benötigten Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße, und es kann ein Grenzykel existieren.

In den Darstellungen 4.23 und 4.24 kann man sehr schön erkennen, daß sich der Strudel von beiden Seiten einer geschlossenen Kurve nähert, dem Grenzykel.

Der Grenzykel hat also einen Startradius von $r_0 \approx 0.63$.

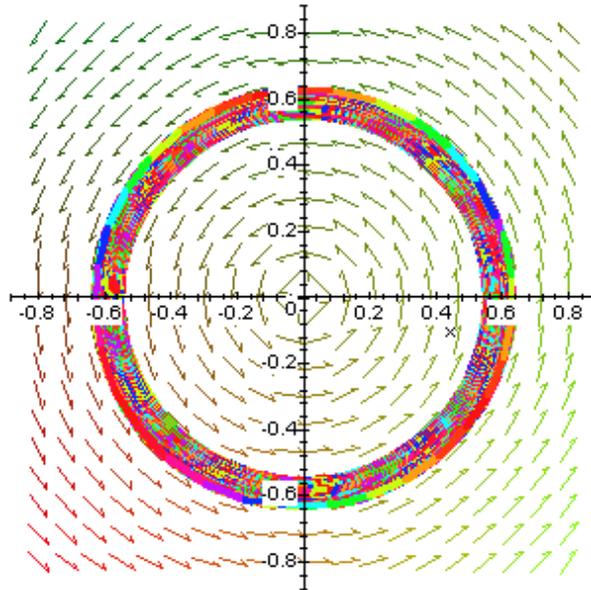


Abbildung 4.23: Startpunkt (0.55 / 0)

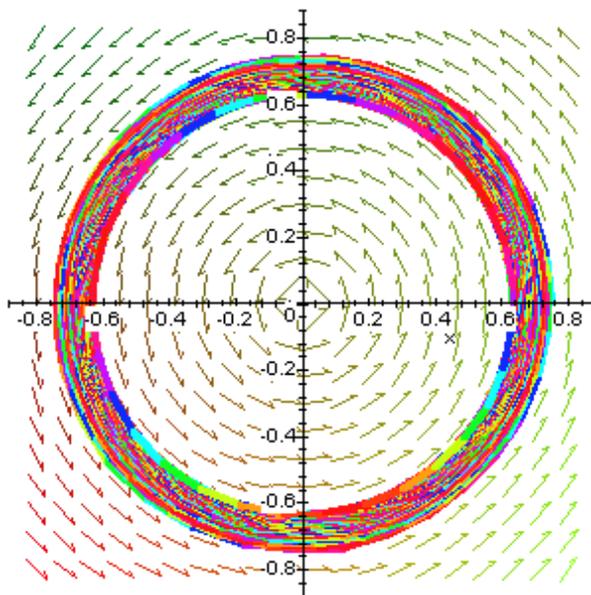


Abbildung 4.24: Startpunkt (0.75 / 0)

$$y' = -\frac{x+(1+\epsilon)x^2y-x^6y}{y+xy^2}$$

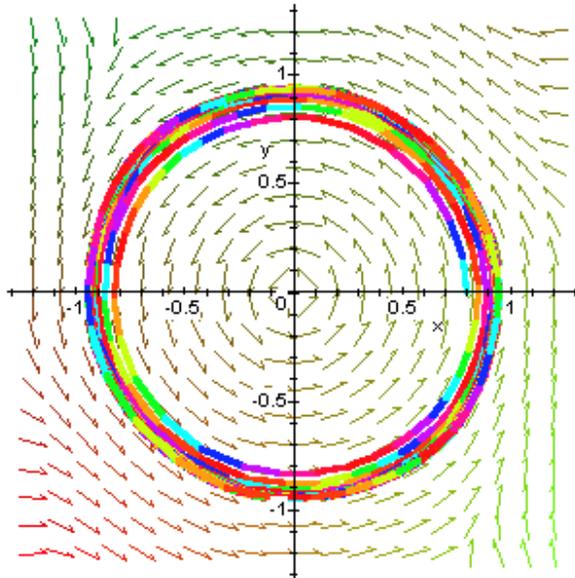


Abbildung 4.25: Startpunkt (0.8 / 0)

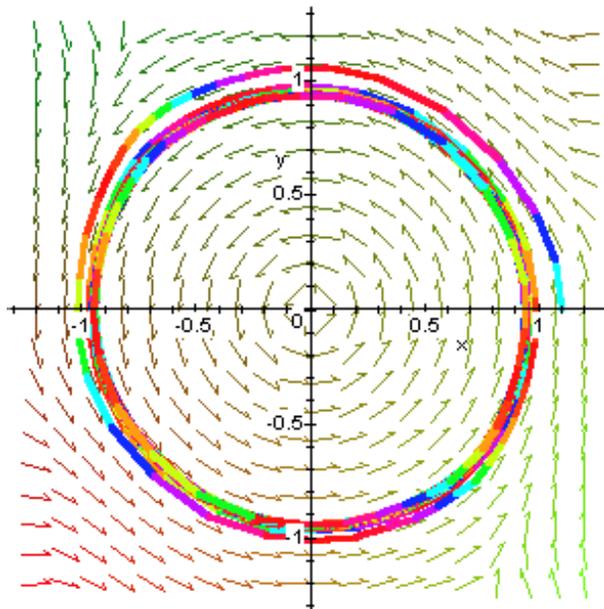


Abbildung 4.26: Startpunkt (1.1 / 0)

Für $\epsilon = 0$ erhält man $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ und $D_3 = \frac{1}{7}$.

Für $\epsilon \neq 0$ erhält man als erste nicht verschwindende Strudelgröße

$$D_1 = -\frac{\epsilon}{3}.$$

Dieses Beispiel besitzt die Besonderheit, daß durch die Einführung des ϵ nicht eine Strudelgröße früher, sondern gar zwei Iterationen eher abgebrochen wird. Trotzdem der Vorzeichenwechsel zwischen der ersten und dritten Strudelgröße vorliegt, existiert ein Grenzzykel.

Mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ wird der benötigte Vorzeichenwechsel der ersten nicht verschwindenden Strudelgröße erreicht.

Wie zuvor kann man auch in den Abbildungen 4.25 und 4.26 gut sehen, daß sich der Strudel von beiden Seiten einer geschlossenen Kurve nähert, dem Grenzzykel.

Dieser schneidet die x-Achse bei ungefähr bei $x = 0.95$.

4.5 Betrachtung des Nullstellengebildes der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$

Im Folgenden wird nun das Nullstellengebilde der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$ betrachtet. Im Gegensatz zur praktischen Methode der Suche nach einem Grenzykel wird hierzu nicht auf ein einziges ϵ eingeschränkt, sondern eine kontinuierliche Menge untersucht. Das heißt, man sucht zu einer Schar von Differentialgleichungen der Form

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

die entsprechende Menge Grenzykel. Jedem dieser Grenzykel kann vermutlich genau ein Wertepaar (r_0, ϵ) zugeordnet werden. Diese Tupel erlauben eine Veranschaulichung des Nullstellengebildes der Funktion $\psi(r_0, \epsilon)$.

Hier wird nun aus dem Beispiel zu Grenzykeln in Frommers Arbeit [2] die Schar von Differentialgleichungen gebildet:

$$y' = -\frac{x + (1 + \epsilon)x^2 + 2xy - y^2}{y - 2xy + y^2}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

welche dann zur Betrachtung herangezogen werden. Die folgenden diskreten Wertepaare wurden in 4.4 ermittelt.

ϵ	r_0
0	# Grenzykel, also vermutlich 0
$\frac{1}{50}$	0.13
$\frac{1}{20}$	0.19
$\frac{1}{10}$	0.26
$\frac{1}{5}$	0.31
$\frac{13}{48} \approx 0.27$	0.33
$\frac{9}{24} = 0.375$	# Grenzykel, vermutlich r_0 so groß, daß höhere Terme stören

Diese Tupel lassen eindeutig auf die Form des Nullstellengebildes schließen, und man erhält folgende Grafik:

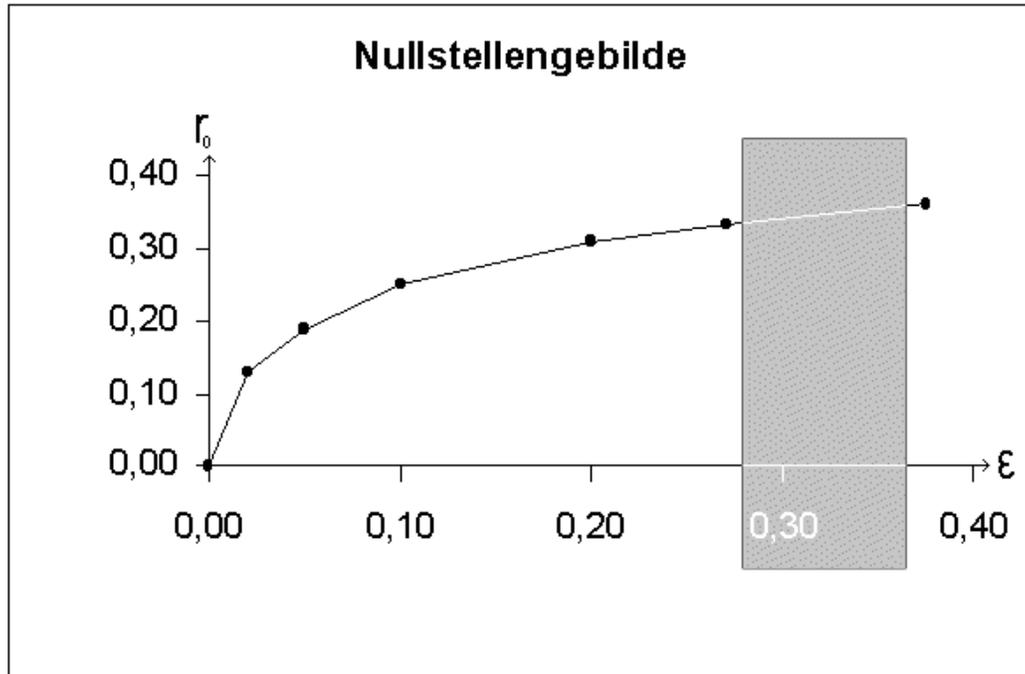


Abbildung 4.27:

In der Abbildung 4.27 werden zwei Aspekte deutlich:

1. Die Grafik erweckt den Anschein, daß bei einer Annäherung von ϵ an 0, auch r_0 0 entgegenstrebt, das heißt der Grenzzykel zieht sich im Ursprung zusammen, oder

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0.$$

Dies würde auch mit der Aussage Frommers über Grenzzykel in [2] übereinstimmen. Näher an dem Ursprung gelegene Punkte als für $\epsilon = \frac{1}{50}$ konnten zum Zeitpunkt der Erstellung der Diplomarbeit nicht berechnet werden, da der damit verbundene Zeitaufwand zu groß würde. Die Rechenzeit für eine Grafik in dieser Nähe beträgt auf einem aktuellen Computer¹⁰ über eine Stunde. Nicht nur aus den Tupeln kann die Aussage über die äußere Form des Nullstellengebildes abgeleitet werden, sondern auch in den Grafiken zu 4.4 wird dies deutlich. Man kann erkennen, daß das Verhalten für $\epsilon = 0$, dem außerhalb eines Grenzzykels für $\epsilon \neq 0$ entspricht.

¹⁰wenn Maple auf einer mit 700 Mhz getakteten CPU läuft

2. Bei einer ausreichenden Entfernung ϵ vom Ursprung kann kein Grenzzzykel mehr gefunden werden, das Verhalten der Differentialgleichung wird unbestimmbar noch bevor die Strudelbahnen einen Grenzzzykel erreichen.

Sei $\epsilon > 0$:

$$\exists \epsilon_{max} \in \mathbb{R} : \begin{cases} \forall \epsilon \leq \epsilon_{max} : \exists \text{ Grenzzzykel} \\ \forall \epsilon > \epsilon_{max} : \nexists \text{ Grenzzzykel} \end{cases}$$

Im hier untersuchten Beispiel kann unter Berücksichtigung der Rechen- und Zeichengenauigkeit davon ausgegangen werden daß bei einer Wahl von $\epsilon \geq \frac{9}{24}$ kein Grenzzzykel mehr existiert. Für $0 \leq \epsilon \leq \frac{13}{48}$ dagegen existiert für jedes ϵ ein Grenzzzykel. Nun bleibt noch das Intervall $[\frac{13}{48}, \frac{9}{24})$ (in Abbildung 4.27 der grau unterlegte Bereich) zu betrachten. Hier findet sich dann das obige ϵ_{max} , welches das letzte ϵ darstellt für das ein Grenzzzykel existiert.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussagen über das Nullstellengebilde von $\psi(r_0, \epsilon)$ für eine beliebige Schar der Form

$$y' = -\frac{x + p(x, y, \epsilon)}{y + q(x, y, \epsilon)}$$

könnte noch einmal eingehender untersucht werden. Es wird sich wahrscheinlich am qualitativen Aussehen des Nullstellengebildes im Vergleich zu dem hier vorgestellten nicht viel ändern, lediglich eine Stauchung oder Streckung des vorliegenden Graphen wird auftreten.

Man kann vermuten, daß auch für jede derartige Schar von Differentialgleichungen $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} r_0(\epsilon) = 0$ gilt und ein ϵ_{max} existiert. Nun wäre es zum Beispiel mittels impliziter Funktionen¹¹ möglich dies zu zeigen. Dazu werden die Voraussetzungen des Beweises zum Satz aus 4.3 benötigt:

$$\varrho(r_0, \epsilon) = r(2\pi, r_0, \epsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_{\nu}(2\pi, \epsilon) r_0^{\nu}.$$

$$\psi(r_0, \epsilon) = r_0 - \varrho(r_0, \epsilon) = 1 - \omega_1(2\pi, \epsilon) r_0 - \omega_2(2\pi, \epsilon) r_0^2 - \dots$$

Desweiteren sei $\tilde{r}_0(\epsilon)$ eine Abbildung, die jedem ϵ den entsprechenden Grenzzzykelradius r_0 ¹² zuordnet, quasi eine Funktion über die Nullstellen von $\psi(r_0, \epsilon)$.

¹¹siehe hierzu Kapitel 8 in [4] Band 2

¹²für jedes dieser Paare gilt $\psi(r_0, \epsilon) = 0$

Um nun zu zeigen, daß $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{r}_0(\epsilon) = 0$ gilt, ist es nach dem Satz über implizite Funktionen ausreichend, wenn $\frac{\partial \psi}{\partial r_0} \Big|_{r_0=0, \epsilon=0} \neq 0$ gilt.

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon) = 1 - \frac{\partial \varrho(r_0, \epsilon)}{\partial r_0}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon) = 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu w_{\nu}(2\pi, \epsilon) r_0^{\nu-1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(r_0, \epsilon) = 1 - \omega_1(2\pi, \epsilon) - 2\omega_2(2\pi, \epsilon)r_0 - \dots$$

Für $r_0 = 0$ und $\epsilon = 0$ ergibt sich somit

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0}(0, 0) = 1 - \omega_1(2\pi, 0).$$

Mit der Forderung

$$\frac{\partial \psi}{\partial r_0} \Big|_{r_0=0, \epsilon=0} \neq 0$$

erhält man die neue Bedingung

$$\omega_1(2\pi, 0) \neq 1.$$

Nun kann dies nach [8] auf dem komplexen Polyzylinder

$$Q_{\mathbb{C}} = Q_{\mathbb{C}}(\epsilon_0, \kappa_1, \eta) = \{|\epsilon| < \epsilon_0, |r_0| < \kappa_1, |\varphi| \leq 2\pi + \eta\}$$

mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel durch

$$|\omega_1(2\pi, 0)| \leq (\kappa_1 - \delta)^{-1} (M(2\pi + \eta)\kappa_1^2 + \kappa_1 - \delta)$$

bzw. für $\delta \rightarrow 0$ durch

$$|\omega_1(2\pi, 0)| \leq M(2\pi + \eta)\kappa_1 + 1$$

mit einer Konstanten M abgeschätzt werden, womit das gewünschte Ziel aber nicht erreicht wird und daher mit diesem Beweisansatz kein Ergebnis erzielt werden kann.

Die oben getroffene Vermutung bleibt also als solche bestehen, ein geeigneter Beweisansatz muß noch gefunden werden.

Anhang A

Quellcode

```
# ***** Diffgl. einlesen *****
Einlesen:=proc()
  global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel;
  local i, j, Hilfs_A_, Hilfs_B_;
  printf('\nMaximale Strudelgroesse eingeben\n \n');
  if expertmode=0 then
    printf('(Zuerst mit einem Wert <10 testen)\n ');
  fi;
  maxstrudel:=parse(readline(terminal));
  init();
  printf('\nDifferentialgleichung der Form -A/B\n');
  printf('\nA eingeben\n');
  if expertmode=0 then
    printf('zB:  x+2*x^2*y+(1/3)*x^2*y^2+3^(1/2)*x^2*y^3\n ');
  fi;
  Poly_A:=simplify(parse(readline(terminal)));
  Poly_A:=-Poly_A;
  printf('\nB eingeben\n');
  if expertmode=0 then
    printf('zB:  y+2*x^2*y+(1/3)*x^2*y^2+3^(1/2)*x^2*y^3\n ');
  fi;
  Poly_B:=simplify(parse(readline(terminal)));
  for i from 1 to degree(Poly_A) do
    p[i,0]:=coeff(Poly_A, x^i);
    p[i,0]:=subs(y=0, p[i,0]);
    p[0,i]:=coeff(Poly_A, y^i);
    p[0,i]:=subs(x=0, p[0,i]);
  od:
  for i from 1 to degree(Poly_B) do
    q[i,0]:=coeff(Poly_B, x^i);
    q[i,0]:=subs(y=0, q[i,0]);
```

```

    q[0,i]:=coeff(Poly_B, y^i);
    q[0,i]:=subs(x=0, q[0,i]);
od:
for i from 1 to degree(Poly_A) do
  Hilfs_A_:=coeff(Poly_A, x^i);
  for j from 1 to degree(Poly_A) do
    p[i,j]:=coeff(Hilfs_A_, y^j);
  od:
od:
for i from 1 to degree(Poly_B) do
  Hilfs_B_:=coeff(Poly_B, x^i);
  for j from 1 to degree(Poly_B) do
    q[i,j]:=coeff(Hilfs_B_, y^j);
  od:
od:
q[0,0]:=0;
p[0,0]:=0;
end:

# ***** Speicherprozedur *****
Speichern:=proc()
  global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel, dateiname, grad_A, grad_B;
  local i, j, fp;
  grad_A:=degree(Poly_A);
  grad_B:=degree(Poly_B);
  printf('\nDateinamen zum Abspeichern angeben :\n ');
  dateiname:=readline(terminal);
  dateiname:='dgl's/'.dateiname;
  fp:=fopen(dateiname, WRITE, TEXT):
  fprintf(fp, 'maxstrudel:=%d;',maxstrudel):
  fprintf(fp, '\ngrad_A:=%d;',grad_A):
  fprintf(fp, '\ngrad_B:=%d;',grad_B):
  for j from 0 to degree(Poly_A) do
    for i from 0 to degree(Poly_A) do
      fprintf(fp, '\np[%d,%d]:=%s;',i,j, convert(p[i,j],string)):
    od:
  od:
  for j from 0 to degree(Poly_B) do
    for i from 0 to degree(Poly_B) do
      fprintf(fp, '\nq[%d,%d]:=%s;',i,j, convert(q[i,j],string)):
    od:
  od:
  fclose(fp);
end:

```

```

# ***** Datei laden *****
Lade:=proc()
  global dateiname;
  local dgls;
  printf(' \n');
  if expertmode=0 then
    printf('Folgende Dateien aus dem Unterverzeichnis "dgls" koennen
           geladen werden:\n \n');
  fi;
  dgls:=ssystem('dir dgls /b /on');
  printf('%s',dgls[2]);
  printf('\nDateinamen zum Laden angeben :\n ');
  dateiname:=readline(terminal);
  dateiname:='dgls/' + dateiname;
  # ***** quasi nur Strudelgroesse einlesen *****
  read(dateiname);
  # ***** Startinitialisierung *****
  init():
  # ***** p's und q's erneut einlesen da ueberschrieben !!! *****
  read(dateiname):
  Poly_bau();
end:

# ***** Initialisierungen *****
init:=proc()
  global p, q, A, B, aktueller_grad, dxA, dyA, maxstrudel:
  local i,j:
  for i from 0 to 2*maxstrudel+3 do
    for j from 0 to 2*maxstrudel+3 do
      p[i,j]:=0;
      q[i,j]:=0;
    od:
  od:
  A[2,0]:=1:
  A[1,1]:=0:
  A[0,2]:=1:
  aktueller_grad:=2:
  for i from 0 to 2*maxstrudel+3 do
    for j from 0 to 2*maxstrudel+3 do
      B[i,j]:=0;
    od;
  od;
  for i from 0 to 2*maxstrudel+3 do
    for j from 0 to 2*maxstrudel+3 do

```

```

        dyA[i, j]:=0;
        dxA[i, j]:=0;
    od:
od:
end:

# ***** Ableitungen von Gross_F *****
ableitung:=proc()
    global dyA,dxA:
    local i:
    for i from 0 to (aktueller_grad-2) do
        dyA[i, aktueller_grad-2-i]:=
            (aktueller_grad-1-i)*A[i, aktueller_grad-1-i];
        dxA[i, aktueller_grad-2-i]:=(i+1)*A[i+1, aktueller_grad-2-i];
    od:
end:

# ***** C-Schritt *****
CSchritt:=proc()
    global B:
    local k,l,m,n:
    for k from 0 to aktueller_grad do
        for l from 0 to aktueller_grad do
            for m from 0 to (aktueller_grad-2) do
                for n from 0 to (aktueller_grad-2) do
                    if k+m+l+n=aktueller_grad then
                        if m+n>0 then
                            B[k+m,l+n]:=p[k,l]*dyA[m,n]+q[k,l]*dxA[m,n]+B[k+m,l+n];
                        fi;
                    fi;
                od;
            od;
        od;
    od;
end:

# ***** ungerader A-Schritt *****
ASchrittungerade:=proc()
    global aktueller_grad,B,A:
    local l,Summe,i,j,Produkt:
    for l from 0 to aktueller_grad do
        Summe:=0;
        if l mod 2 = 0 then
            for i from 0 to (aktueller_grad-1-1)/2 do

```

```

        Produkt:=1;
        for j from i to (aktueller_grad-1-3)/2 do
            Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j-1) / (2*j+1) );
        od;
        Summe:=Summe+
            (B[2*i,aktueller_grad-2*i]*Produkt/(aktueller_grad-1));
    od;
    A[aktueller_grad - 1, 1]:=-Summe;
else
    for i from 0 to (1-1)/2 do
        Produkt:=1;
        for j from i to (1-3)/2 do
            Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j-1) / (2*j+1) );
        od;
        Summe:=Summe+( B[aktueller_grad-2*i, 2*i]*Produkt / 1);
    od;
    A[aktueller_grad - 1, 1]:=Summe;
fi;
od;
end:

# ***** Klein_a Berechnung *****
aberechnen:=proc()
    global aktueller_grad,a;
    local Produkt,k,i,m;
    m:=floor(aktueller_grad/4);
    a[0]:=1;
    for i from 1 to m do
        Produkt:=1;
        for k from 1 to i do
            Produkt:=Produkt*((aktueller_grad-(2*k-1))/(2*k-1));
        od;
        a[i]:=Produkt;
    od;
    for i from m+1 to 2*m+1 do
        a[i]:=a[(aktueller_grad/2)-i];
    od;
end:

# ***** gerader A-Schritt *****
ASchrittgerade:=proc()
    global aktueller_grad,a,B,A;
    local i,Produkt,Summe,j,l;
    aberechnen();

```

```

A[0, aktueller_grad]:=0:
for l from 0 to aktueller_grad-1 do
  Summe:=0;
  if l mod 2 = 0 then
    for i from 1 to (aktueller_grad-1)/2 do
      Produkt:=1;
      for j from i to (aktueller_grad-1-2)/2 do
        Produkt:=Produkt*( (aktueller_grad-2*j) / (2*j) );
      od:
      Summe:=Summe+
        (B[2*i-1,aktueller_grad-2*i+1]*Produkt/(aktueller_grad-1));
    od:
    A[aktueller_grad - 1, 1]:=-Summe;
  else
    for i from 0 to (l-1)/2 do
      Summe:=Summe+B[aktueller_grad-2*i, 2*i]/a[i];
    od;
    for j from ((l-1)/2)+1 to aktueller_grad/2 do
      Summe:=Summe-B[aktueller_grad-2*j, 2*j]/a[j];
    od;
    Summe:=Summe/min(1, aktueller_grad - 1);
    Summe:=Summe*a[min( (l-1)/2, (aktueller_grad-1-1)/2 )];
    A[aktueller_grad - 1, 1]:=Summe/2;
  fi;
od;
end:

# ***** Ergebnisausgabe in Datei *****
ausgabeindatei:=proc()
  global aktueller_grad, A, B, Strudelgroesse:
  local i,j,fp, erg_datei:
  printf('\n\nDateinamen zum Speichern der Ergebnisse angeben :\n \n');
  if expertmode=0 then
    printf('(Diese werden im Unterverzeichnis "ergs" gespeichert)\n ');
  fi;
  erg_datei:=readline(terminal);
  erg_datei:='ergs/'..erg_datei;
  fp:=fopen(erg_datei, WRITE, TEXT):
  fprintf(fp, 'Aktueller Grad = ');
  fprintf(fp, convert(aktueller_grad,string) ):
  for j from 3 to aktueller_grad do
    for i from 0 to j do
      fprintf(fp, '\nA[%d][%d] = ',i,j-i):
      fprintf(fp, convert(A[i,j-i],string) ):
    od;
  od;
end:

```

```

    od:
  od:
  for j from 3 to aktueller_grad do
    for i from 0 to j do
      fprintf(fp, '\nB[%d][%d] = ',i,j-i):
      fprintf(fp, convert(B[i,j-i],string) ):
    od:
  od:
  for j from 1 to (aktueller_grad/2)-1 do
    fprintf(fp, '\nStrudelgroesse[%d] = ',j):
    fprintf(fp, convert(Strudelgroesse[j],string)):
  od:
  fprintf(fp, '\n\n ***** \n\n'):
  for i from 3 to aktueller_grad do
    fprintf(fp, '\n%d. C-Schritt :',i):
    for j from 0 to i do
      if B[aktueller_grad-j,j]<>0 then
        fprintf(fp, '+(%s)*x^%d*y^%d', convert((B[i-j,j]),string),i-j,j):
      fi:
    od:
    fprintf(fp, '\n%d. A-Schritt :',i):
    for j from 0 to i do
      if A[i-j,j]<>0 then
        fprintf(fp, '+(%s)*x^%d*y^%d', convert((A[i-j,j]),string),i-j,j):
      fi:
    od:
    if (i mod 2 = 0) then
      fprintf(fp, '\n%d. Strudelgroesse = ',(i/2)-1):
      fprintf(fp, convert(Strudelgroesse[(i/2)-1],string)):
    fi:
  od:
  fclose(fp):
end:

# ***** Frommer Algorithmus *****
Frommer:=proc()
global aktueller_grad;
# ***** aktuellen_grad erhöhen *****
aktueller_grad:=aktueller_grad+1:
# ***** Ableitungen (ungerader Grad)*****
ableitung():
# ***** C-Schritt (ungerader Grad)*****
CSchritt():
# ***** A-Schritt (ungerader Grad) *****

```

```

ASchrittungerade():
# ***** aktuellen_grad erhöhen *****
aktueller_grad:=aktueller_grad+1:
# ***** Ableitungen (gerader Grad) *****
ableitung():
# ***** C-Schritt (gerader Grad) *****
CSchritt():
# ***** A-Schritt (gerader Grad) *****
ASchrittgerade():
end:

# ***** Testausgabe *****
Testausgabe:=proc()
  global p, q, maxstrudel, grad_A, grad_B:
  local i,j:
  printf('\nMaximale Anzahl Strudelgroessen : %d', maxstrudel):
  printf('\nA = '):
  for j from 0 to grad_A do
    for i from 0 to grad_A do
      if p[i,j]<>0 then
        printf('+(%s)*x^%d*y^%d', convert((-p[i,j]),string),i,j):
        fi:
      od:
    od:
  printf('\nB = '):
  for j from 0 to grad_B do
    for i from 0 to grad_B do
      if q[i,j]<>0 then
        printf('+(%s)*x^%d*y^%d', convert(q[i,j],string),i,j):
        fi:
      od:
    od:
  printf('\n '):
end:

# ***** Polynom zusammenbauen *****
Poly_bau:=proc()
  global Poly_A, Poly_B, p, q, maxstrudel, grad_A, grad_B:
  local i,j:
  Poly_A:=0:
  Poly_B:=0:
  for j from 0 to grad_A do
    for i from 0 to grad_A do
      Poly_A:=Poly_A+p[i,j]*x^i*y^j;

```

```

    od:
  od:
  for j from 0 to grad_B do
    for i from 0 to grad_B do
      Poly_B:=Poly_B+q[i,j]*x^i*y^j;
    od:
  od:
end:

# ***** grafische Ausgabe *****
Grafik:=proc()
global Poly_A, Poly_B;
local Fkt_A, Fkt_B, Diagramm, max_t, achse, \
  x_achse, y_achse, x_start, y_start, xy_start, schrittweite;
printf('\nMaximales t angeben\n \n');
if expertmode=0 then
  printf('(Zunaechst ein kleines t (<10) waehlen,
          da Berechnung schneller!)\n ');
fi;
max_t:=readline(terminal);
printf('\nAchsenlaenge angeben\n \n');
if expertmode=0 then
  printf('(Hier waere 1 ein Vorschlag)\n ');
fi;
achse:=readline(terminal);
printf('\nx(0) angeben\n \n');
if expertmode=0 then
  printf('(X-Koordinate des Startpunktes - innerhalb
          der Achsenlaenge waehlen !)\n ');
fi;
x_start:=readline(terminal);
printf('\ny(0) angeben\n \n');
if expertmode=0 then
  printf('(Y-Koordinate des Startpunktes - innerhalb
          der Achsenlaenge waehlen !)\n ');
fi;
y_start:=readline(terminal);
printf('\nSchrittweite angeben\n ');
if expertmode=0 then
  printf('(Schrittweite zunaechst 0.4 waehlen, spaeter
          evtl. verfeinern)\n ');
fi;
schrittweite:=readline(terminal);
max_t:='t=0..'max_t;

```

```

x_achse:='x=-'.achse..''.achse;
y_achse:='y=-'.achse..''.achse;
xy_start:='[[x(0)='.x_start.',y(0)='.y_start.']]';
schrittweite:='stepsize='.schrittweite;
max_t:=parse(max_t);
x_achse:=parse(x_achse);
y_achse:=parse(y_achse);
xy_start:=parse(xy_start);
schrittweite:=parse(schrittweite);
Fkt_A:=unapply(Poly_A,x,y);
Fkt_B:=unapply(Poly_B,x,y);
with(DEtools):
Diagramm:=DEplot([diff(x(t),t)=-Fkt_B(x,y), \
                  diff(y(t),t)=-Fkt_A(x,y)], [x(t),y(t)], \
                  max_t, x_achse, y_achse, xy_start, schrittweite, \
                  linecolour=sin(t*Pi/2), \
                  color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),.1]);
print(Diagramm);
end:

# ***** Hier beginnt quasi das main Programm *****
Digits:=100:
menu:=0:
while menu=0 do
  menu:=1:
  while menu=1 do
    printf('\n1 fuer Eingabe');
    printf('\n2 fuer Laden\n \n');
    menu_wahl:=readline(terminal);
    if menu_wahl = '1' then
      Einlesen();
      Speichern();
      Testausgabe();
      menu:=2;
    elif menu_wahl = '2' then
      Lade();
      Testausgabe();
      menu:=2;
    else
      printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n');
    fi;
  od:
  while menu=2 do
    printf('\n1 fuer Berechnung');

```

```

printf('\n2 fuer Grafische Ausgabe\n ');
menu_wahl:=readline(terminal);
if menu_wahl = '1' then
  for strudel from 1 to maxstrudel do
    anfang:=time();
    Frommer();
    # ***** Strudelgroesse *****
    Strudelgroesse[strudel]:=
      A[1,aktueller_grad-1]+B[0,aktueller_grad]:

    print();
    printf('\nStrudelgroesse[%d] =
      %s\n',strudel,convert(Strudelgroesse[strudel],string));

    if Strudelgroesse[strudel]<>0 then
      strudel:=maxstrudel:
      fi:
      printf('%f sec fuer diese Strudelgroesse benoetigt',
        (time()-anfang));
    od:
    # ***** Ausgabe in Datei *****
    ausgabeindatei():
    menu:=3;
  elif menu_wahl = '2' then
    Grafik();
    menu:=3;
  else
    printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n ');
    fi;
od:
while menu=3 do
  printf('\n1 das Ganze nochmal');
  printf('\n2 Ende\n ');
  menu_wahl:=readline(terminal);
  if menu_wahl = '1' then
    menu:=0;
  elif menu_wahl = '2' then
    menu:=4;
  else
    printf('\nFalsche Eingabe - nochmal !\n ');
    fi;
od:
od:

```

Anhang B

Datenträger

Auf dieser CD-ROM befinden sich der Quellcode für die Strudelgrößenberechnung in Maple, die Eingabedateien für die Beispiele und die zugehörigen Ergebnisse, sowie die gesamte Diplomarbeit im PDF-Format und ein PDF-Viewer.

In der Datei `readme.txt` findet sich eine Anleitung um das Programm in Maple laufen zu lassen.

Anhang C

Gleichungssysteme

1. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{array}{rclcl} -A_{2,1} & & + & B_{3,0} & = & 0 \\ -2A_{1,2} & + & 3A_{3,0} & + & B_{2,1} & = & 0 \\ -3A_{0,3} & + & 2A_{2,1} & + & B_{1,2} & = & 0 \\ & & A_{1,2} & + & B_{0,3} & = & 0 \end{array}$$

Aufgelöst:

$$\begin{array}{l} A_{2,1} = B_{3,0} \\ A_{0,3} = \frac{1}{3}B_{1,2} + \frac{2}{3}B_{3,0} \\ A_{1,2} = -B_{3,0} \\ A_{3,0} = -\frac{1}{3}B_{2,1} - \frac{2}{3}B_{0,3} \end{array}$$

2 eindeutige Systeme:

$A_{2,1}, A_{0,3}$ und
 $A_{1,2}, A_{3,0}$

2. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{array}{rclcl} -A_{3,1} & & + & B_{4,0} & = & 0 \\ -2A_{2,2} & + & 4A_{4,0} & + & B_{3,1} & = & 0 \\ -3A_{1,3} & + & 3A_{3,1} & + & B_{2,2} & = & 0 \\ -4A_{0,4} & + & 2A_{2,2} & + & B_{1,3} & = & 0 \\ & & A_{1,3} & + & B_{0,4} & = & 0 \end{array}$$

Aufgelöst:

$$\begin{array}{l} A_{0,4} = 0 \\ A_{2,2} = -\frac{1}{2}B_{1,3} \\ A_{4,0} = -\frac{1}{4}(B_{1,3} + B_{3,1}) \\ A_{3,1} = \frac{1}{6}(-B_{2,2} + 3B_{4,0} - 3B_{0,4}) \\ A_{1,3} = B_{4,0} - A_{3,1} - B_{0,4} \end{array}$$

Unterbestimmter Teil:

$A_{0,4}, A_{2,2}, A_{4,0}$

Überbestimmter Teil:

$A_{3,1}, A_{1,3}$

Daraus resultierende Strudelgröße:

$D_1 = A_{1,3} + B_{0,4}$

3. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{aligned} -A_{4,1} &+ B_{5,0} = 0 \\ -2A_{3,2} + 5A_{5,0} + B_{4,1} &= 0 \\ -3A_{2,3} + 4A_{4,1} + B_{3,2} &= 0 \\ -4A_{1,4} + 3A_{3,2} + B_{2,3} &= 0 \\ -5A_{0,5} + 2A_{2,3} + B_{1,4} &= 0 \\ &A_{1,4} + B_{0,5} = 0 \end{aligned}$$

Aufgelöst:

$$\begin{aligned} A_{4,1} &= B_{5,0} \\ A_{2,3} &= \frac{1}{3}(4A_{4,1} + B_{3,2}) \\ A_{0,5} &= \frac{1}{5}(2A_{2,3} + B_{1,4}) \\ A_{1,4} &= -B_{0,5} \\ A_{3,2} &= \frac{1}{3}(4A_{1,4} - B_{2,3}) \\ A_{5,0} &= \frac{1}{5}(2A_{3,2} - B_{4,1}) \end{aligned}$$

2 eindeutige Systeme:

$A_{4,1}, A_{2,3}, A_{0,5}$ und
 $A_{1,4}, A_{3,2}, A_{5,0}$

4. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{aligned} -A_{5,1} &+ B_{6,0} = 0 \\ -2A_{4,2} + 6A_{6,0} + B_{5,1} &= 0 \\ -3A_{3,3} + 5A_{5,1} + B_{4,2} &= 0 \\ -4A_{2,4} + 4A_{4,2} + B_{3,3} &= 0 \\ -5A_{1,5} + 3A_{3,3} + B_{2,4} &= 0 \\ -6A_{0,6} + 2A_{2,4} + B_{1,5} &= 0 \\ &A_{1,5} + B_{0,6} = 0 \end{aligned}$$

Aufgelöst:

$$\begin{aligned} A_{0,6} &= 0 \\ A_{2,4} &= \frac{1}{2}(-B_{1,5}) \\ A_{4,2} &= \frac{1}{4}(4A_{2,4} - B_{3,3}) \\ A_{6,0} &= \frac{1}{6}(2A_{4,2} - B_{5,1}) \\ A_{5,1} &= -\frac{1}{10}(-5B_{6,0} + B_{4,2} + B_{2,4} + 5B_{0,6}) \\ A_{3,3} &= \frac{1}{3}(5A_{5,1} + B_{4,2}) \\ A_{1,5} &= -A_{5,1} + B_{6,0} - B_{0,6} \end{aligned}$$

Unterbestimmter Teil:

$A_{0,6}, A_{2,4}, A_{4,2}, A_{6,0}$

Überbestimmter Teil:

$A_{5,1}, A_{3,3}, A_{1,5}$

Daraus resultierende Strudelgröße:

$D_2 = A_{1,5} + B_{0,6}$

5. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{aligned} -A_{6,1} &+ B_{7,0} = 0 \\ -2A_{5,2} + 7A_{7,0} + B_{6,1} &= 0 \\ -3A_{4,3} + 6A_{6,1} + B_{5,2} &= 0 \\ -4A_{3,4} + 5A_{5,2} + B_{4,3} &= 0 \\ -5A_{2,5} + 4A_{4,3} + B_{3,4} &= 0 \\ -6A_{1,6} + 3A_{3,4} + B_{2,5} &= 0 \\ -7A_{0,7} + 2A_{2,5} + B_{1,6} &= 0 \\ &A_{1,6} + B_{0,7} = 0 \end{aligned}$$

Aufgelöst:

$$\begin{aligned} A_{6,1} &= B_{7,0} \\ A_{4,3} &= \frac{1}{3}(B_{5,2} + 6A_{6,1}) \\ A_{2,5} &= \frac{1}{5}(B_{3,4} + 4A_{4,3}) \\ A_{0,7} &= \frac{1}{7}(B_{1,6} + 2A_{2,5}) \\ A_{1,6} &= -B_{0,7} \\ A_{3,4} &= \frac{1}{3}(-B_{2,5} + 6A_{1,6}) \\ A_{5,2} &= \frac{1}{5}(-B_{4,3} + 4A_{3,4}) \\ A_{7,0} &= \frac{1}{7}(-B_{6,1} + 2A_{5,2}) \end{aligned}$$

2 eindeutige Systeme:

$A_{6,1}, A_{4,3}, A_{2,5}, A_{0,7}$ und
 $A_{1,6}, A_{3,4}, A_{5,2}, A_{7,0}$

6. A-Schritt

Gegeben:

$$\begin{array}{rclcl}
 -A_{7,1} & & + & B_{8,0} & = & 0 \\
 -2A_{6,2} & + & 8A_{8,0} & + & B_{7,1} & = & 0 \\
 -3A_{5,3} & + & 7A_{7,1} & + & B_{6,2} & = & 0 \\
 -4A_{4,4} & + & 6A_{6,2} & + & B_{5,3} & = & 0 \\
 -5A_{3,5} & + & 5A_{5,3} & + & B_{4,4} & = & 0 \\
 -6A_{2,6} & + & 4A_{4,4} & + & B_{3,5} & = & 0 \\
 -7A_{1,7} & + & 3A_{3,5} & + & B_{2,6} & = & 0 \\
 -8A_{0,8} & + & 2A_{2,6} & + & B_{1,7} & = & 0 \\
 & & A_{1,7} & + & B_{0,8} & = & 0
 \end{array}$$

Aufgelöst:

$$\begin{array}{l}
 A_{0,8} = 0 \\
 A_{2,6} = \frac{1}{2}(-B_{1,7}) \\
 A_{4,4} = \frac{1}{4}(-B_{3,5} + 6A_{2,6}) \\
 A_{6,2} = \frac{1}{6}(-B_{5,3} + 4A_{4,4}) \\
 A_{8,0} = \frac{1}{8}(-B_{7,1} + 2A_{6,2}) \\
 A_{3,5} = \frac{1}{30}(35B_{8,0} - 35B_{0,8} - 5B_{2,6} + 3B_{4,4} + 5B_{6,2}) \\
 A_{5,3} = \frac{1}{3}(7B_{8,0} - 7B_{0,8} - 3A_{3,5} - B_{2,6} + B_{6,2}) \\
 A_{7,1} = \frac{1}{7}(7B_{8,0} - 7B_{0,8} - 3A_{3,5} - B_{2,6}) \\
 A_{1,7} = -A_{7,1} + B_{8,0} - B_{0,8}
 \end{array}$$

Unterbestimmter Teil: $A_{0,8}, A_{2,6}, A_{4,4}, A_{6,2}, A_{8,0}$
 Überbestimmter Teil: $A_{3,5}, A_{5,3}, A_{7,1}, A_{1,7}$
 Daraus resultierende Strudelgröße: $D_3 = A_{7,1} - B_{8,0}$

Allgemeines A-Gleichungssystem

$$\begin{array}{rclcl}
 -1A_{(n-1),1} & & + & B_{(n-0),0} & = & 0 \\
 -2A_{(n-2),2} & + & (n-0)A_{(n-0),0} & + & B_{(n-1),1} & = & 0 \\
 -3A_{(n-3),3} & + & (n-1)A_{(n-1),1} & + & B_{(n-2),2} & = & 0 \\
 -4A_{(n-4),4} & + & (n-2)A_{(n-2),2} & + & B_{(n-3),3} & = & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -(n-2)A_{2,(n-2)} & + & 4A_{4,(n-4)} & + & B_{3,(n-3)} & = & 0 \\
 -(n-1)A_{1,(n-1)} & + & 3A_{3,(n-3)} & + & B_{2,(n-2)} & = & 0 \\
 -(n-0)A_{0,(n-0)} & + & 2A_{2,(n-2)} & + & B_{1,(n-1)} & = & 0 \\
 & & 1A_{1,(n-1)} & + & B_{0,(n-0)} & = & 0
 \end{array}$$

Anhang D

Beispiel zur Strudelgrößenberechnung

Frommers erstes Beispiel, Seite 406 [2]

Ausgangsproblem:

$$y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2} = -\frac{A}{B}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = -(x + 4x^2 + y^2) = -A$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = (y + x^2 - 2y^2) = B$$

Ansetzen der Vergleichsdifferentialgleichung

$$F = A_{0,0} + A_{1,0}x + A_{0,1}y + A_{2,0}x^2 + A_{1,1}xy + A_{0,2}y^2 + A_{3,0}x^3 + A_{2,1}x^2y \dots$$

$$y'_1 = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{dt} = -F_x = -(2x + \sum_{i=3}^n F_{x_i}(x, y))$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = F_y = 2y + \sum_{i=3}^n F_{y_i}(x, y)$$

Mit der Notation der autonomen Systeme liegt Gleichheit der beiden Differentialgleichungen vor, wenn die Determinante 0 ist

$$\det \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{x}_1 \\ \dot{y} & \dot{y}_1 \end{pmatrix} = \dot{x}y_1 - \dot{x}_1y = -\dot{y}x_1 + \dot{y}_1x = 0$$

$$-AF_y + F_xB = 0$$

$$-(x + 4x^2 + y^2)F_y + (y + x^2 - 2y^2)F_x = 0$$

$$-(x + 4x^2 + y^2)(2y + \sum_{i=3}^n F_{y_i}(x, y)) + (y + x^2 - 2y^2)(2x + \sum_{i=3}^n F_{x_i}(x, y)) = 0$$

$$-(2xy + 8x^2y + 2y^3 + xF_{y_3} + 4x^2F_{y_3} + y^2F_{y_3} + xF_{y_{grad>3}} + 4x^2F_{y_{grad>3}} + y^2F_{y_{grad>3}}) + 2xy + 2x^3 - 4xy^2 + yF_{x_3} + x^2F_{x_3} - 2y^2F_{x_3} + yF_{x_{grad>3}} + x^2F_{x_{grad>3}} - 2y^2F_{x_{grad>3}} = 0$$

Zunächst verschwinden die xy-Terme. Um nun weiterhin die Gleichung zu erfüllen sollen alle Terme deren Summe der Exponenten gleich 3 ist verschwinden.

1. C-Schritt

Im ersten C-Schritt kann bei diesem Problem nichts zusammengefaßt werden.

C-Schritt: $-8x^2y - 2y^3 + 2x^3 - 4xy^2$

1. A-Schritt

Jetzt kommen noch die Terme mit den Ableitungen von F hinzu:

$$-8x^2y - 2y^3 - xF_{y_3} + 2x^3 - 4xy^2 + yF_{x_3}$$

Und so erhält man als einen Teil der obigen Gleichung:

$$-8x^2y - 2y^3 - x(A_{2,1}x^2 + 2A_{1,2}xy + 3A_{0,3}y^2) + 2x^3 - 4xy^2 + y(A_{1,2}y^2 + 2A_{2,1}xy + 3A_{3,0}x^2) = 0$$

Man entwickelt das folgende Gleichungssystem und erhält so die A's:

I	x^3	:	$2 - A_{2,1} = 0$	$\rightarrow A_{2,1} = 2$
II	x^2y	:	$-8 - 2A_{1,2} + 3A_{3,0} = 0$	mit IV $\rightarrow A_{3,0} = 4$
III	xy^2	:	$-4 - 3A_{0,3} + 2A_{2,1} = 0$	mit I $\rightarrow A_{0,3} = 0$
IV	y^3	:	$-2 + A_{1,2} = 0$	$\rightarrow A_{1,2} = 2$

2. C-Schritt

Nun werden die eben berechneten Koeffizienten von F eingesetzt und die Terme mit den Summen der Exponenten gleich 4 verrechnet.

$$-4x^2F_{y_3} - y^2F_{y_3} + x^2F_{x_3} - 2y^2F_{x_3} = (-4x^2 - y^2)(A_{2,1}x^2 + 2A_{1,2}xy + 3A_{0,3}y^2) + (x^2 - 2y^2)(A_{1,2}y^2 + 2A_{2,1}xy + 3A_{3,0}x^2) = (-4x^2 - y^2)(2x^2 + 4xy) + (x^2 - 2y^2)(2y^2 + 4xy + 12x^2)$$

C-Schritt: $4x^4 - 12x^3y - 24x^2y^2 - 12xy^3 - 4y^4$

2. A-Schritt

Zu dem C-Schritt kommen nun noch die Ableitungsterme von F:

$$\begin{aligned} xF_{y_4} &= -x(A_{3,1}x^3 + 2A_{2,2}x^2y + 3A_{1,3}xy^2 + 4A_{0,4}y^3) \\ yF_{x_4} &= y(A_{1,3}y^3 + 2A_{2,2}xy^2 + 3A_{3,1}x^2y + 4A_{4,0}x^3) \end{aligned}$$

und so erhält man:

$$4x^4 - 12x^3y - 24x^2y^2 - 12xy^3 - 4y^4 + xF_{y_4} + yF_{x_4} = 0$$

$$4x^4 - 12x^3y - 24x^2y^2 - 12xy^3 - 4y^4 - x(A_{3,1}x^3 + 2A_{2,2}x^2y + 3A_{1,3}xy^2 + 4A_{0,4}y^3) + y(A_{1,3}y^3 + 2A_{2,2}xy^2 + 3A_{3,1}x^2y + 4A_{4,0}x^3) = 0$$

Und wieder entsteht ein Gleichungssystem. Diesmal läßt es sich aber in einen unter- (II, IV) und einen überbestimmten (I, III, V) Teil trennen.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x^4 \quad : \quad -A_{3,1} + 4 = 0 \\ \text{II} & x^3y \quad : \quad -2A_{2,2} - 12 + 4A_{4,0} = 0 \\ \text{III} & x^2y^2 \quad : \quad -24 - 3A_{1,3} + 3A_{3,1} = 0 \\ \text{IV} & xy^3 \quad : \quad -12 - 4A_{0,4} + 2A_{2,2} = 0 \\ \text{V} & y^4 \quad : \quad -4 + A_{1,3} = 0 \end{array}$$

Der überbestimmte Teil ist nicht erfüllbar!

Gleichsetzen von I und V liefert: $A_{1,3} = 8 + A_{3,1}$.

Eingesetzt in III ergibt sich: $A_{3,1} = 8$.

Dies wiederum in I eingesetzt liefert die erste Strudelgröße $D_1 = -4$.

→ Es liegt also der Strudelfall vor!

Abbildungsverzeichnis

3.1	$y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2}$ mit Startpunkt (0.08, 0)	19
3.2	$y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2}$ mit Startpunkt (0.3, 0)	20
3.3	$y' = -\frac{x+4x^2+y^2+2x^3-2y^3}{y+x^2-2y^2+2x^3-2y^3}$ mit Startpunkt (0.085, 0)	22
3.4	$y' = -\frac{x+2x^3+y^3}{y+x^2y+y^3}$ mit Startpunkt (0.3, 0)	25
3.5	$y' = -\frac{x+4x^2y+y^3}{y+2x^3+xy^2}$ mit Startpunkt (0.42, 0)	26
3.6	$y' = -\frac{x+4x^2y+y^3+2x^3y^2}{y+2x^3+xy^2+2x^4y}$ mit Startpunkt (0.4, 0)	28
3.7	$y' = -\frac{x+x^7+2x^8y-y^{11}}{y-2x^{10}y+y^{11}}$ mit Startpunkt (0.85, 0)	31
4.1	Anziehender Grenzzykel	35
4.2	Abstoßender Grenzzykel	35
4.3	Frommerbsp. mit $\epsilon = 0$ und $r_0 = 0.1$	42
4.4	Frommerbsp. mit $\epsilon = 0$ und $r_0 = 0.25$	42
4.5	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{50}$ und $r_0 = 0.11$	43
4.6	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{50}$ und $r_0 = 0.14$	43
4.7	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{20}$ und $r_0 = 0.18$	44
4.8	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{20}$ und $r_0 = 0.20$	44
4.9	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{10}$ und $r_0 = 0.24$	45
4.10	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{10}$ und $r_0 = 0.26$	45
4.11	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{5}$ und $r_0 = 0.3102$	46
4.12	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{5}$ und $r_0 = 0.3103$	46
4.13	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{13}{48}$ und $r_0 = 0.3335397747$	47
4.14	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{13}{48}$ und $r_0 = 0.3335397748$	47
4.15	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{9}{24}$ und $r_0 = 0.36006$	48
4.16	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{9}{24}$ und $r_0 = 0.36007$	48
4.17	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.3826$	49

4.18	Frommerbsp. mit $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.3827$	49
4.19	Eigenes Bsp. 1 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.632$	50
4.20	Eigenes Bsp. 1 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.633$	50
4.21	Eigenes Bsp. 2 mit $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.65$	51
4.22	Eigenes Bsp. 2 mit $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $r_0 = 0.66$	51
4.23	Eigenes Bsp. 3 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.55$	52
4.24	Eigenes Bsp. 3 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.75$	52
4.25	Eigenes Bsp. 4 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.55$	53
4.26	Eigenes Bsp. 4 mit $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $r_0 = 0.75$	53
4.27	$r_0(\epsilon)$ zum Frommerbsp.	55

Literaturverzeichnis

- [1] Moritzen, K. [2000]: „*Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ um eine Unbestimmtheitsstelle*“, Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [2] Frommer, M. [1935]: „*in Mathematische Analen 109, S.395-424*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - NewYork - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [3] Grauert, H.; Fischer, W. [1973]: „*Differential- und Integralrechnung, Bd. II*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - NewYork - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [4] Forster, O. [1981, 1992]: „*Analysis, Bd. I, II & III*“, F. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig - Wiesbaden
- [5] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A. [1996]: „*Teubner - Taschenbuch der Mathematik*“, Teubner - Verlagsgesellschaft Leipzig - Stuttgart
- [6] Reinhardt, F.; Soeder, H. [1974]: „*dtv-Atlas zur Mathematik, Bd. I & II*“, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co KG, München
- [7] von Wahl, W. [SS 1998]: „*Gewöhnliche Differentialgleichungen*“, Vorlesung an der Universität Bayreuth
- [8] von Wahl, W. [2001]: „*Beweisansatz zum Nullstellengebilde von Grenzykeln*“, Persönliche Mitteilungen
- [9] Heal, K. M.; Rickard, K. M.; Hansen, M. L. [1996]: „*Einführung in MapleV*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - NewYork - London - Paris - Tokyo - Hong-Kong
- [10] Koffler, M. [1994]: „*MapleV, Release 3*“, Addison-Wesley, Bonn u.a.
- [11] Boyce W.E.; DiPrima R.C. [2000]: „*Gewöhnliche Differentialgleichungen*“, Spektrum-Akademischer Verlag, Heidelberg - Berlin - Oxford

- [12] Opel, J. [2001]: „Die Differentialgleichung $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$. Strudel um eine Stelle der Unbestimmtheit bei verschwindender Linearisierung. Grenzykel beim Poincaréschen Zentrumsproblem.“,
Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [13] Birnmeyer, M. [2000]: „Die Poincaréschen Wirbelbedingungen an der Stelle einer Unbestimmtheit“,
Diplomarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [14] Albrecht, T. [2001]: „Die Poincarésche Wirbelbedingung“,
Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [15] Schießl, R. [2000]: „Die Wirbelbedingungen für $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ an der Stelle einer Unbestimmtheit“,
Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [16] Teichert, A. [2000]: „Die Strudelbedingungen für $y' = -\frac{A}{B}$ an einer Stelle der Unbestimmtheit“,
Zulassungsarbeit am Mathematik-Lehrstuhl VI der Universität Bayreuth
- [17] Kopka, H. [1996]: „ \LaTeX Einführung Band1, 2. Auflage“,
Addison Wesley, Deutschland
- [18] Kopka, H. [1997]: „ \LaTeX Ergänzungen - Mit einer Einführung in METAFONT Band2, 2. Auflage“,
Addison Wesley, Deutschland

Ehrenwörtliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Bayreuth den, 20.11.2001

(André Höhn)