Die regularisierende Wirkung der Randintegraloperatoren der klassischen Potentialtheorie in den Räumen hölderstetiger Funktionen

Diplomarbeit
von
Ute Heinemann

Universität Bayreuth, Januar 1992

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die klassische Potentialtheorie beschäftigt sich mit dem Laplace–Operator $\triangle$, genauer gesagt, mit Lösungen der Potentialgleichung in G oder dessen Außenraum $\hat{G}$, die außerdem gewisse Randbedingungen erfüllen. Nach diesen unterscheidet man das Dirichlet– und das Neumann–Problem. G sei dabei eine offene, beschränkte und glattberandete Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit äußerer Normale. ∂G sei kompakt. G und ∂G sollen höchstens endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen. Der älteste Ansatz zur Untersuchung dieser Randwertaufgaben besteht darin, daß man sie in Integralgleichungen umformt, die sogenannte Integralgleichungsmethode. Damit zeigt man sehr elegant unter anderem Existenzsätze für die Lösung obiger Probleme.

In dieser Arbeit befassen wir uns nun mit den Integraloperatoren auf dem Rand von G, die bei der Lösung des Dirichlet– und des Neumann–Problems auftreten, siehe [13, S. 15–17]. Dies sind: der Integraloperator L des Dirichlet–Problems, der Integraloperator K des Neumann–Problems und die Einschränkung der Lösung des Neumann–Problems oder des Einfachschichtpotentials auf den Rand von G, die wir mit M bezeichnen. L ist die Einschränkung des Doppelschichtpotentials auf ∂G.

Die Randintegraloperatoren K, L und M sind nicht nur in verschiedenen Räumen kompakt, sondern haben auch eine meßbar regularisierende Wirkung. Wie in [13, S. 56] gezeigt, gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} K(\mathbf{L}^\infty(\partial G) &\subset C^{1/4}(\partial G), \\ L(\mathbf{L}^\infty(\partial G) &\subset C^{1/4}(\partial G). \end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage: Wie stark verbessern K, L und M genau? Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß die Randintegraloperatoren der klassischen Potentialtheorie in den Räumen hölderstetiger Funktionen die Regularität gerade um 1 verbessern, wenn der Rand von G hinreichend glatt ist; das heißt es gilt

$$(0.1) \qquad K, L, M \in \mathcal{L}(C^{k+\alpha}(\partial G), C^{k+1+\alpha}(\partial G))), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha \in (0,1),$$

sofern ∂G von der Klasse C^{k+5} ist. Bei der Aussage für M reicht als Voraussetzung schon ∂G von der Klasse C^{k+4}. Das Thema dieser Diplomarbeit stellte Herr Professor von Wahl. Ich danke ihm für viele, wertvolle Hinweise und die Betreuung der Arbeit.

Mit den obigen Aussagen, die vermutlich das bestmögliche Ergebnis liefern, kann man unter anderem leicht Sätze über das Neumann–Problem aus Sätzen über das

Dirichlet–Problem herleiten. Man muß jedoch dazu, wie eben bemerkt, starke Voraussetzungen an den Rand von G stellen. Dies ist der allgemeine Nachteil der Integralgleichungsmethode.

Die Regularitätsverbesserungen (0.1) sind seit längerem bekannt, insbesondere für das Einfachschicht– und das Doppelschichtpotential. Lichtenstein verweist dazu in einem Enzyklopädieartikel über die Potentialtheorie [9, S. 199–206] unter anderem auf eine Arbeit von Korn aus dem Jahr 1907, siehe [7, S. 15–18]. Die Beweise sind jedoch nicht leicht nachzuvollziehen Sie scheinen nicht ganz vollständig zu sein. In [8, S. 42] zeigt Leis einen weiteren Beweis für die Aussage $L(C^\alpha(\partial G)) \subset C^{1+\alpha}(\partial G)$. Dieser Beweis ist jedoch nicht auf K und M anwendbar, weil die Eigenschaft benutzt wird, daß Lc für c konstant von vornherein bekannt ist.

Wir stellen hier eine systematische Methode vor, um die Randintegraloperatoren der klassischen Potentialtheorie bestmöglich auszuwerten. Unser Beweis von (0.1) beruht auf der endlichen Taylorentwicklung der Integralkerne und der Behandlung der dadurch entstehenden Hauptterme mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud in lokalen Koordinaten. Wir gehen dabei analog zu von Wahl vor, der in [12, S. 17-21] mit der Taylorentwicklung die regularisierende Wirkung von K und M in den Sobolev–Räumen untersucht. Statt der Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud Ungleichung benutzt von Wahl den Satz von Calderon–Zygmund. Einen Beweis der Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud zeigen Bers und Schechter in [1, S. 222–224, 244–245]. Indem wir diese Aussage verallgemeinern, bewältigen wir hier zusammen mit der Taylorentwicklung das eigentliche Problem des Beweises von (0.1), nämlich die Tatsache, daß die Ableitungen der Integralkerne von K, L und M singulär sind.

Schließlich geben wir noch einen kurzen Überblick auf die Gliederung dieser Arbeit. Nachdem wir im ersten Kapitel einige allgemeine Bezeichungen und Hilfsmittel zusammengestellt haben, beschäftigen wir uns im zweiten und dritten Kapitel mit hölderstetigen Funktionen und schwach singulären Integraloperatoren. Dabei werden die Schwierigkeiten beim Beweis von (0.1) deutlich. In den nächsten drei Kapiteln folgt dann der eigentliche Beweis von (0.1). Das vierte Kapitel beinhaltet die lokale Umformung der Kerne von K, L und M mit der endlichen Taylorentwicklung. Im fünften Kapitel zeigen wir die benötigte Verallgemeinerung der Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud. Das sechste Kapitel faßt die Ergebnisse dann zur Aussage (0.1) zusammen. Als Anwendung führen wir im letzten Kapitel an einem Beispiel vor, wie man Sätze des Dirichlet–Problems auf Sätze des Neumann–Problems überträgt.

Kapitel 1

Allgemeine Bezeichnungen und Hilfsmittel

In dieser Arbeit ist G immer eine offene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit kompaktem und glattem Rand. Der äußere Normalen–Einheitsvektor $n(\xi)$ existiere für alle $\xi \in \partial G$. G und ∂G sollen nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzen. Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen ohne 0, mit $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. $K_r(x)$ steht für die offene Kugel im $\mathbb{R}^n$ um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r > 0$. $|.|$ ist der Betrag, e_i der i–te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$. $[.,.]$ ist das Kreuzprodukt, $< .,. >$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Unter $\bar{A}$ beziehungsweise ∂A verstehen wir den Abschluß beziehungsweise den Rand einer Menge A. Konstanten werden stets durch die Buchstaben $c, \tilde{c}, c_1, c_2, \ldots$ dargestellt. Wenn sich der Wert einer Konstante im Verlauf einer Rechnung ändert, unterscheiden wir dies nicht durch eine andere Bezeichnung. Wichtig sind nämlich nur die Eigenschaften der Konstante, nicht der genaue Wert. Eine Folge a_n kennzeichnen wir durch die Schreibweise (a_n). Für Integraloperatoren und deren Kerne werden dieselben Bezeichnungen verwendet. $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ und $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_n)$ sind immer Multiindizes im $\mathbb{R}^n$. Für $\tilde{\gamma} \leq \gamma$ definieren wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\gamma}{\tilde{\gamma}} := \prod_{i=1}^{n} \binom{\gamma_i}{\tilde{\gamma}_i}.$$

Weiter setzen wir

$$\begin{aligned} |\gamma| &:= \gamma_1 + \ldots + \gamma_n, \\ D^\gamma &:= \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x_1^{\gamma_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^{\gamma_n}}{\partial x_n^{\gamma_n}} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_n^{\gamma_n}}. \end{aligned}$$

Dabei ist $\partial / \partial x_i$ die i–te partielle Ableitung und $\partial^{\gamma_i} / \partial x_i^{\gamma_i}$ die γ_i–fache Hintereinanderausführung von $\partial / \partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Hängt eine Funktion von zwei Vektoren x und z ab, sind mit $\partial / \partial x_i, D_x^\gamma, \ldots$ die partiellen Ableitungen bezüglich des ersten Vektors, mit $\partial / \partial z_i, D_z^\gamma, \ldots$ dagegen die partiellen Ableitungen bezüglich des zweiten Vektors gemeint. *supp(f)* steht für den *Träger* der Funktion f, also den Abschluß der Menge aller Punkte des Definitionsbereichs von f, deren Funktionswert $\neq 0$ ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $C^k(\Omega)$ ist die Menge der auf Ω k–mal stetig differenzierbaren Funktionen. Mit $C^k(\overline{U})$ bezeichnen wir die Menge aller auf U k–mal stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k zusätzlich stetig auf den Rand von U fortgesetzt werden können. Für $f \in C^k(\overline{U})$ ist die Norm definiert durch

$$\|f\|_{C^k(\overline{U})} := \sum_{|\gamma| \leq k} \sup_{x \in \overline{U}} |D^\gamma f(x)|$$

Der Raum $C^\infty(\Omega)$ besteht aus den beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω.

Wir stellen jetzt grundlegende Definitionen und Eigenschaften über Hyperflächen und die Integration auf Hyperflächen zusammen (für weitere Einzelheiten siehe [4, S. 128–160]). Ein wichtiges Beispiel für eine kompakte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ ist nach Definition der Rand von G ([4, S. 151]).

Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$–dimensionale *Untermannigfaltigkeit* oder *Hyperfläche*; das bedeutet: $\mathcal{M}$ läßt sich lokal als Nullstellengebilde einer differenzierbaren Funktion beschreiben, deren Gradient $\neq 0$ ist. Wenn diese Funktion k–mal stetig differenzierbar ist ($k \in \mathbb{N}$), sagt man auch: $\mathcal{M}$ ist *von der Klasse* C^k. Für Untermannigfaltigkeiten gilt die Aussage ([4, S. 134])

Satz 1.1 *$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse C^k, wenn es zu jedem Punkt $\xi \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung $V \subset \mathcal{M}$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine Abbildung $\overline{x} \in C^k(U)$ gibt, die U homöomorph auf V abbildet und deren Funktionaldeterminante maximalen Rang hat.*

Sei $\overline{x}$ eine Abbildung mit den im obigen Satz beschriebenen Eigenschaften. Man nennt $\overline{x}$ eine *Karte* oder eine *lokale Parameterdarstellung* der Hyperfläche $\mathcal{M}$. U ist die Parameterumgebung der Karte. Zu $\overline{x}$ definieren wir die Funktionen
$g_{i,j} : U \to \mathbb{R}$, $1 \leq i,j \leq n-1$, durch

$$g_{i,j}(u) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}_\nu}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial \overline{x}_\nu}{\partial u_j}(u), \qquad u \in U.$$

Die Determinante der positiv definiten Matrix $(g_{i,j})$ heißt *Gramsche Determinante* von $\mathcal{M}$ bezüglich der Karte $\overline{x} : U \to V$.

Wir definieren nun das Integral über einer kompakten $(n-1)$–dimensionalen Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$. Sei dazu $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt *integrierbar über* $\mathcal{M}$, wenn es zu jedem $\xi \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung V_ξ in $\mathcal{M}$ gibt, so daß für eine Karte $\overline{x} : U \to V_\xi$ mit Gramscher Determinante g die Funktion $f(\overline{x}(.))\sqrt{g(.)}$ über U integrierbar ist. Weil $\mathcal{M}$ kompakt ist, können wir dann aus $\{V_\xi \mid \xi \in \mathcal{M}\}$ eine endliche Überdeckung $(V_1, \ldots, V_N)$ von $\mathcal{M}$ auswählen. Seien $\overline{x}_j : U_j \to V_j$ die zu V_j gehörenden Karten mit Gramscher Determinante g_j für $j = 1, \ldots, N$. Wir nennen $(\overline{x}_j, U_j, V_j)$, $1 \leq j \leq N$ einen *Atlas* von $\mathcal{M}$. Weiter sei $(\zeta_1, \ldots \zeta_N)$ eine *dem Atlas untergeordnete Teilung der Eins*, das heißt:

$$\begin{array}{lll} & 0 \leq \zeta_j \leq 1, & \\ & \zeta_j \subset C^{\infty}(\mathcal{M}), & \\ & supp\, \zeta_j \subset V_j & \text{für } 1 \leq j \leq N, \\ \text{und} & \sum\limits_{j=1}^{N} \zeta_j(\xi) = 1 & \text{für alle } \xi \in \mathcal{M}. \end{array}$$

K auf S.

Man setzt dann

$$\int\limits_{\mathcal{M}} f(\xi)\, d\Omega := \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{U_j} f(\overline{x}_j(u))\zeta_j(\overline{x}_j(u))\sqrt{g_j(u)}\, du.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der Karten, der Überdeckung von $\mathcal{M}$ und der Teilung der Eins.

Wir erwähnen noch zwei Sätze über die Integration auf Untermannigfaltigkeiten ([4, S. , 155]).

Satz 1.2 *Sei r eine positive reelle Zahl, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche. Dann ist auch $\mathcal{M}_r := \{r \cdot \xi \mid \xi \in \mathcal{M}\}$ eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Für eine Funktion $f : \mathcal{M}_r \to \mathbb{R}$, die über $\mathcal{M}_r$ integrierbar ist, gilt*

$$\int\limits_{\mathcal{M}_r} f(\xi)\, d\Omega_\xi = \int\limits_{\mathcal{M}} f(r \cdot \eta) r^{n-1}\, d\Omega_\eta.$$

Den Satz von Gauß ([4, S. 155]) verwenden wir in der folgenden Form:

Satz 1.3 *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $A \subset U$. Für $x \in \partial A$ sei $\nu_i(x)$ die i-te Komponente des äußeren Normalen-Einheitsvektors im Punkt x. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für $i = 1, \ldots, n$*

$$\int\limits_{A} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx = \int\limits_{\partial A} f(x)\nu_i(x)\, d\Omega.$$

Wie schon bemerkt, ist ∂G ein Beispiel für eine kompakte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$. Für ∂G wählen wir in dieser Arbeit einen speziellen Atlas $(U_j, \overline{x}_j, \overline{x}_j(U_j))$, $1 \leq j \leq N$. Die Parameterumgebungen U_j seien dabei für unsere weiteren Überlegungen hinreichend kleine Kreise um 0. Die Karten $\overline{x}_j$ seien auf $\overline{U}_j$ definiert und von derselben Regularität wie ∂G. Das heißt: Es gilt $\overline{x}_j \in C^k(\overline{U}_j)$, falls ∂G von der Klasse C^k ist, $k \in \mathbb{N}$.

Weiter gelte noch für feste, offene $\mathcal{U}_j \subset I\!R^2$ mit $\bar{\mathcal{U}}_j \subset U_j$, $j = 1, \ldots, N$, daß auch $(\mathcal{U}_j, \bar{x}_j, \bar{x}_j(\mathcal{U}_j))$, $1 \le j \le N$ ein Atlas für ∂G ist. Die Parameterumgebungen $\mathcal{U}_j$ seien ebenfalls Kreise um 0. Diese zusätzlichen Eigenschaften können wir nach den obigen Ausführungen ohne Einschränkung voraussetzen.

Als nächstes definieren wir die Räume hölderstetiger Funktionen. Einige wichtige Eigenschaften dieser Räume findet man im zweiten Kapitel.
Seien im folgenden $\Omega \subset I\!R^n$ offen, $U \subset I\!R^n$ offen und beschränkt Weiter seien $k \in I\!N \cup \{0\}$ und $\alpha \in (0,1)$. Wir nennen $f \in C^0(\Omega)$ *hölderstetig zum Exponenten* α auf einem Kompaktum $\mathcal{K} \subset I\!R^n$, falls f der Bedingung

$$H_{\alpha,\mathcal{K}}[f] := \sup_{\substack{x,x' \in \mathcal{K} \\ x \neq x'}} \frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^\alpha} < +\infty$$

genügt. Wenn $H_{\alpha,\bar{U}}[f] < +\infty$ gilt, bezeichnen wir $f \in C^0(\bar{U})$ als *hölderstetig zum Exponenten* α. Sind keine Verwechslungen möglich, schreiben wir auch nur $H_\alpha[f]$. Mit $C^{k+\alpha}(\Omega)$ kennzeichnen wir nun die Menge der Funktionen aus $C^k(\Omega)$, deren k–te Ableitungen auf jedem Kompaktum $\mathcal{K} \subset \Omega$ hölderstetig zum Exponenten α sind. $C^{k+\alpha}(\bar{U})$ ist dagegen der Raum aller Funktionen aus $C^k(\bar{U})$, deren k–te Ableitungen hölderstetig zum Exponenten α sind. Als Norm von $C^k(\bar{U})$ setzen wir wie üblich $+\alpha$

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} := \|f\|_{C^k(\bar{U})} + \max_{|\gamma|=k} H_\alpha[D^\gamma f].$$

Der Raum $C^{k+\alpha}(\partial G)$ besteht aus den Funktionen λ auf ∂G mit $\lambda \circ \bar{x}_j \in C^{k+\alpha}(\bar{U}_j)$ für alle $j = 1, \ldots, N$. Die Größe

$$\|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)} := \sum_{j=1}^{N} \|\lambda \circ \bar{x}_j\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U}_j)}$$

führen wir als Norm von $C^{k+\alpha}(\partial G)$ ein. Die Norm hängt von der Wahl des Atlanten ab.

Abschließend kommen wir zu den wesentlichen Definitionen aus der Potentialtheorie. $\triangle$ ist der Laplace–Operator. Mit K, L und M bezeichnen wir Integraloperatoren auf dem Rand von G. Genauer ist für $\lambda, \mu \in C^0(\partial G)$ und $\xi \in \partial G$:

$$K\lambda(\xi) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r}\right) \lambda(\xi')\, d\Omega,$$

$$L\mu(\xi) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r}\right) \mu(\xi')\, d\Omega,$$

$$M\lambda(\xi) := \int_{\partial G} \left(\frac{1}{r}\right) \lambda(\xi')\, d\Omega.$$

Dabei ist $r := |\xi - \xi'|$ und $\partial/\partial n$ beziehungsweise $\partial/\partial n'$ sind die Ableitungen in Richtung der äußeren Normalen im Punkt ξ beziehungsweise ξ'. K ist also der Integraloperator des Neumann–Problems, L der Integraloperator des Dirichlet–Problems und M die Einschränkung der Lösung des Neumann–Problems mit Belegung oder Dichte λ auf den Rand von G. Dies sind die Randintegraloperatoren, die in der klassischen Potentialtheorie vorkommen.

Weiter ist für alle $\xi, \xi' \in \partial G$, $\xi \neq \xi'$

$$\begin{aligned} K(\xi,\xi') &= +\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\xi-\xi'|^3} < n(\xi), \xi - \xi' >, \\ L(\xi,\xi') &= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\xi-\xi'|^3} < n(\xi'), \xi - \xi' > \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} K(\xi,\xi') &\leq \frac{c}{|\xi-\xi'|}, \\ L(\xi,\xi') &\leq \frac{c}{|\xi-\xi'|} \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c ([13, S. 35–38]). K, L und M sind also schwach singuläre Integraloperatoren.

Kapitel 2

Die Räume hölderstetiger Funktionen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit den Räumen hölderstetiger Funktionen, soweit es für diese Arbeit von Interesse ist.

Seien im folgenden $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\alpha, \beta \in (0,1)$.

Satz 2.1 *$C^{k+\alpha}(\bar{U})$ und $C^{k+\alpha}(\partial G)$ sind Banachräume.*

Beweis: Sei f_n eine Cauchyfolge in $C^{k+\alpha}(\bar{U})$. Es ist zu zeigen, daß (f_n) in $C^{k+\alpha}(\bar{U})$ konvergiert. (f_n) ist offensichtlich auch eine Cauchyfolge in $C^k(\bar{U})$. Nach [11, S. 27] konvergiert (f_n) in $C^k(\bar{U})$ gegen ein $f \in C^k(\bar{U})$. Deshalb genügt es nach Definition der $C^{k+\alpha}(\bar{U})$–Norm zu beweisen, daß für $|\gamma| = k$

$$H_\alpha[D^\gamma(f_n - f)] \to 0, \qquad n \to \infty \tag{2.1}$$

gilt. Sei also $|\gamma| = k$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m > N(\varepsilon)$:

$$H_\alpha[D^\gamma(f_n - f_m)] \leq \|f_n - f_m\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} < \varepsilon.$$

Damit gilt für alle $x, x' \in \bar{U}, x \neq x'$ und $n, m > N(\varepsilon)$:

$$\frac{|D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f_m(x) - (D^\gamma f_n(x') - D^\gamma f_m(x'))|}{|x - x'|^\alpha} < \varepsilon.$$

Wir lassen nun $m \to \infty$ gehen und erhalten

$$\frac{|D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f(x) - (D^\gamma f_n(x') - D^\gamma f(x'))|}{|x - x'|^\alpha} < \varepsilon$$

für alle $x, x' \in \bar{U}, x \neq x'$. Daraus folgt (2.1) und $f \in C^{k+\alpha}(\bar{U})$, das heißt insgesamt, $C^{k+\alpha}(\bar{U})$ ist ein Banachraum. Daß auch $C^{k+\alpha}(\partial G)$ vollständig ist, folgt dann nach Definition von $C^{k+\alpha}(\partial G)$ direkt. □

Wir untersuchen nun die Beziehung der Räume hölderstetiger Funktionen zueinander.

Satz 2.2 *Sei $\beta < \alpha$. Dann ist*

$$C^{k+\alpha}(\bar{U}) \subset C^{k+\beta}(\bar{U}) \subset C^{k}(\bar{U}). \tag{2.2}$$

Ist U zusätzlich konvex, gilt

$$C^{k+1}(\bar{U}) \subset C^{k+\alpha}(\bar{U}). \tag{2.3}$$

Weiter gilt

$$C^{k+1}(\partial G) \subset C^{k+\alpha}(\partial G) \subset C^{k+\beta}(\partial G) \subset C^{k}(\partial G). \tag{2.4}$$

Beweis: Die zweite Inklusion von (2.2) ist klar. Sei $f \in C^{k+\alpha}(\bar{U})$. Wir brauchen nur zu zeigen, daß die k–ten Ableitungen von f hölderstetig zum Exponenten β sind. Da $\beta/\alpha > 0$ und $1-\beta/\alpha > 0$ gilt, haben wir für alle $x, x' \in \bar{U}, x \neq x'$ und $|\gamma| = k$

$$\begin{aligned}
\frac{|D^{\gamma}f(x) - D^{\gamma}f(x')|}{|x-x'|^{\beta}} &= \left(\frac{|D^{\gamma}f(x) - D^{\gamma}f(x')|}{|x-x'|^{\alpha}}\right)^{\beta/\alpha} |D^{\gamma}f(x) - D^{\gamma}f(x')|^{1-\beta/\alpha} \\
&\leq \left(\|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}\right)^{\beta/\alpha} \left(2\,\|f\|_{C^{k}(\bar{U})}\right)^{1-\beta/\alpha}.
\end{aligned}$$

Damit ist (2.2) bewiesen.

Sei jetzt U konvex und $f \in C^{k+1}(\bar{U})$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \frac{|D^{\gamma}f(x) - D^{\gamma}f(x')|}{|x-x'|} < +\infty \qquad \text{für } |\gamma| = k.$$

Indem man nun die obige Argumentation für $\beta := \alpha$ und $\alpha := 1$ durchführt, folgt $f \in C^{k+\alpha}(\bar{U})$.

(2.4) ergibt sich sofort aus (2.2) und (2.3). □

Die Räume hölderstetiger Funktionen sind multiplikativ abgeschlossen:

Satz 2.3 *Sei U konvex. Seien $f, g \in C^{k+\alpha}(\bar{U})$. Dann ist auch $f \cdot g \in C^{k+\alpha}(\bar{U})$ und mit einer positiven, von f und g unabhängigen Konstante c*

$$\|f \cdot g\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \leq c\,\|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}\,\|g\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}\,.$$

c hängt von k und n ab. Eine entsprechende Aussage gilt für die Räume $C^{k+\alpha}(\partial G)$.

Beweis: Es reicht, die Aussage des Satzes für $C^{k+\alpha}(\bar{U})$ zu beweisen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
H_{\alpha}[f \cdot g] &= \sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \frac{|f(x)g(x) - f(x)g(x') + f(x)g(x') - f(x')g(x')|}{|x-x'|^{\alpha}} \\
&\leq \sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \left(f(x)\,\frac{|g(x) - g(x')|}{|x-x'|^{\alpha}}\right) + \sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \left(g(x)\,\frac{|f(x) - f(x')|}{|x-x'|^{\alpha}}\right) \\
&\leq \|f\|_{C^{0}(\bar{U})}\,H_{\alpha}[g] + \|g\|_{C^{0}(\bar{U})}\,H_{\alpha}[f].
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung für $k = 0$:

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{C^\alpha(\bar{U})} &\leq \|f\|_{C^0(\bar{U})} \|g\|_{C^0(\bar{U})} + \|f\|_{C^0(\bar{U})} H_\alpha[g] + \|g\|_{C^0(\bar{U})} H_\alpha[f] \\ &\leq \|f\|_{C^\alpha(\bar{U})} \|g\|_{C^\alpha(\bar{U})}. \end{aligned}$$

Die Behauptung für $k \in I\!N$ leiten wir nun aus der obigen Abschätzung und der Produktregel her. Für $1 \leq |\gamma| < k$ gilt mit einer positiven Konstante c

$$\begin{aligned} \|D^\gamma(f \cdot g)\|_{C^0(\bar{U})} &\leq c \sum_{\tilde{\gamma} \leq \gamma} \|D^{\tilde{\gamma}} f\|_{C^0(\bar{U})} \|D^{\gamma-\tilde{\gamma}} g\|_{C^0(\bar{U})} \\ &\leq c \, \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \|g\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}. \end{aligned}$$

Für $|\gamma| = k$ folgt

$$\begin{aligned} \|D^\gamma(f \cdot g)\|_{C^\alpha(\bar{U})} &\leq c \sum_{\tilde{\gamma} \leq \gamma} \|D^{\tilde{\gamma}} f \cdot D^{\gamma-\tilde{\gamma}} g\|_{C^\alpha} \\ &\leq c \sum_{\tilde{\gamma} \leq \gamma} \|D^{\tilde{\gamma}} f\|_{C^\alpha(\bar{U})} \|D^{\gamma-\tilde{\gamma}} g\|_{C^\alpha(\bar{U})} \\ &\leq c \, \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \|g\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c. Die vorletzte Ungleichung ist erfüllt, weil nach Satz 2.2 $D^{\tilde{\gamma}} f, D^{\gamma-\tilde{\gamma}} g \in C^\alpha(\bar{U})$ auch für $|\tilde{\gamma}|, |\gamma - \tilde{\gamma}| < k$ gilt. Insgesamt haben wir nun die Aussage des Satzes für $k \in I\!N$ gezeigt. □

Bei dem obigen Beweis kann man besonders deutlich sehen, daß bei Aussagen über $C^{k+\alpha}$–Funktionen die Aufgabe immer im wesentlichen darin besteht, die Behauptung im Spezialfall $k = 0$ nachzuweisen.

Schließlich befassen wir uns noch mit zwei Approximationsaussagen, denn die in dieser Arbeit zu beweisenden Sätze für $C^{k+\alpha}$–Funktionen können nicht direkt hergeleitet werden.

Lemma 2.4 *Sei $f \in C^{k+\alpha}(I\!R^n)$ mit $supp(f) \subset U$.*
Dann existiert eine Folge f_n in $C^\infty(I\!R^n)$ mit $supp(f_n) \subset U$ für alle $n \in I\!N$, so daß

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{C^k(\bar{U})} &\to 0, & n &\to \infty, \\ \|f_n\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} &\leq \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}, & n &\in I\!N. \end{aligned}$$

Beweis: Eine Folge mit den Eigenschaften des Satzes konstruiert man mit Hilfe von Glättungsoperatoren.
Sei $\varrho \in C^\infty(I\!R^n)$ mit $supp(\varrho) \subset K_1(0)$, $\varrho > 0$ und $\int_{I\!R^n} \varrho(z)\, dz = 1$.
Für $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$(J_\varepsilon f)(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \varrho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy, \qquad x \in I\!R^n.$$

Damit gilt nach [15, Satz I.1.2]

$$\begin{gathered} J_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ supp(J_\varepsilon f) \subset U \text{ für } \varepsilon \text{ hinreichend klein,} \\ \|J_\varepsilon f - f\|_{C^k(\bar{U})} \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \end{gathered}$$

Weiter ist für $|\gamma| \leq k$

$$\begin{aligned} (D^\gamma J_\varepsilon f)(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_U \varrho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\gamma f(y)\, dy, \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho(z) D^\gamma f(x - \varepsilon z)\, dz, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich direkt

$$\|D^\gamma J_\varepsilon f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \leq \|D^\gamma f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}.$$

Die Folge $J_{\frac{1}{m}} f, J_{\frac{1}{m+1}} f, \ldots$ erfüllt also die Behauptung, wenn $m \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist. □

Lemma 2.5 *Sei f_n eine Folge in $C^{k+\alpha}(\bar{U})$, die in $C^0(\bar{U})$ gegen ein f konvergiert. Sei $\|f_n\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer positiven Konstante c. Dann gilt*

$$f \in C^{k+\alpha}(\bar{U}) \text{ und } \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \leq c \tag{2.5}$$

mit derselben Konstante c. Ferner gilt noch

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^{k+\beta}(\bar{U})} = 0 \qquad \text{für } \beta < \alpha. \tag{2.6}$$

Beweis: Die Ableitungen von f_n bis zur k–ten Ordnung sind gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig, da die Abschätzung

$$\|f_n\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} \leq c$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit einem $\alpha > 0$ gilt. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli (siehe [11, S. 29]) können wir ohne Einschränkung annehmen, daß (f_n) in $C^k(\bar{U})$ konvergiert, und zwar gegen $f \in C^k(\bar{U})$ wegen der Vollständigkeit von $C^k(\bar{U})$. Wir wählen eine Teilfolge f_{n_j}, so daß auch $(H_\alpha[D^\gamma f_{n_j}])$ für alle $|\gamma| = k$ konvergiert. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} &= \|f\|_{C^k(\bar{U})} + \max_{|\gamma|=k} H_\alpha[D^\gamma f] \\ &= \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^k(\bar{U})} + \max_{|\gamma|=k} \sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \lim_{n\to\infty} \frac{|D^\gamma f_n(x) - D^\gamma f_n(x')|}{|x-x'|^\alpha} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{C^k(\bar{U})} + \max_{|\gamma|=k} \lim_{n_j\to\infty} \sup_{\substack{x,x' \in \bar{U} \\ x \neq x'}} \frac{|D^\gamma f_{n_j}(x) - D^\gamma f_{n_j}(x')|}{|x-x'|^\alpha} \\ &= \lim_{n_j\to\infty} \left\|f_{n_j}\right\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}, \end{aligned}$$

womit (2.5) gezeigt ist. Weiter gilt für alle $x, x' \in \bar{U}, x \neq x'$ und $|\gamma| = k$

$$
\begin{aligned}
&\frac{|D^\gamma(f_n - f)(x) - D^\gamma(f_n - f)(x')|}{|x - x'|^\beta} \\
&= \left(\frac{|D^\gamma(f_n - f)(x) - D^\gamma(f_n - f)(x')|}{|x - x'|^\alpha}\right)^{\beta/\alpha} |D^\gamma(f_n - f)(x) - D^\gamma(f_n - f)(x')|^{1-\beta/\alpha} \\
&\leq \left(\|f_n\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})} + \|f\|_{C^{k+\alpha}(\bar{U})}\right)^{\beta/\alpha} 2 \left(\sup_{x \in \bar{U}} |D^\gamma(f_n - f)(x)|\right)^{1-\beta/\alpha} \\
&\leq c \left(\|f_n - f\|_{C^k(\bar{U})}\right)^{1-\beta/\alpha}
\end{aligned}
$$

mit einer von x, x' unabhängigen Konstante c. Also ist auch die zweite Aussage des Satzes bewiesen. □

Gemäß der Definition der Hölderstetigkeit, haben wir in den Beweisen dieses Kapitels den Quotienten

$$
\frac{|f(x) - f(x')|}{|x - x'|^\alpha}
$$

für ein $f \in C^0(\bar{U})$ immer global, also für alle $x, x' \in \bar{U}, x \neq x'$ nach oben abgeschätzt. Die Hölderstetigkeit ist jedoch eine lokale Eigenschaft. Das bedeutet: Es genügt, die Beschränktheit des Quotienten für alle $x, x' \in \bar{U}$ mit $0 < |x - x'| < \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ beliebig nachzuweisen, denn für $|x - x'| > \varepsilon$ ist der Quotient trivialerweise beschränkt. Dies werden wir beim Beweis der regularisierenden Wirkung von K, L und M auf $C^{k+\alpha}$–Funktionen ausnutzen.

Kapitel 3

Schwach singuläre Integraloperatoren

Die Randintegraloperatoren K, L und M sind schwach singulär und damit in $C^0(\partial G)$ kompakt. Dies wird für K und L in [13, S. 39] nachgewiesen. Grundlegend ist dabei die erste Aussage ([4, S. 85–86]) von

Hilfssatz 3.1 *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für Integrale im $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x|<r} \frac{1}{|x|^a}\,dx &= c_1\, r^{n-a}, \qquad \textit{falls } a < n, \\ \int\limits_{|x|>r} \frac{1}{|x|^a}\,dx &= c_2\, r^{n-a}, \qquad \textit{falls } a > n. \end{aligned}$$

Die positiven Zahlen c_1 und c_2 hängen von n und a ab.

Wir beweisen jetzt einige für diese Arbeit wichtige Aussagen über schwach singuläre Integraloperatoren. Diese sind jedoch für die gewünschte Regularitätsverbesserung von K, L und M in den Räumen hölderstetiger Funktionen noch nicht ausreichend, weil die Ableitungen der Integralkerne, wie man sich leicht überzeugen kann, singulär sind. Der obige Hilfssatz ist also nicht anwendbar.

Seien im folgenden $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex, $0 < \beta \leq n$ und die Abbildung $S \in C^0(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ein *schwach singulärer Kern zum Exponenten* $n - \beta$. Das bedeutet: Es gibt eine positive Zahl c, so daß für alle $x \in \bar{U}$ und $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$|S(x,z)| \leq \frac{c}{|z|^{n-\beta}}$$

gilt. Wir erklären den zugehörigen schwach singulären Integraloperator S als Abbildung zwischen geeigneten Funktionenräumen durch

$$Sf(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} S(x, x-y) f(y)\,dy, \qquad x \in \bar{U}.$$

Die Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ sei dabei so gewählt, daß Sf wohldefiniert ist. Dies ist zum Beispiel für eine stetige Funktion mit kompaktem Träger wegen Hilfssatz 3.1 der Fall.

Zuerst approximieren wir den Kern S durch stetige Funktionen auf $\bar{U} \times \mathbb{R}^n$. Sei η_l eine Folge in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \eta_l(t) &= 0 && \text{für } t \leq 1/2l, \\ 0 \leq \eta_l(t) &\leq 1 && \text{für } 1/2l \leq t \leq 1/l, \\ \eta_l(t) &= 1 && \text{für } t \geq 1/l. \end{aligned}$$

Für $l \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$S_l(x,z) := \begin{cases} S(x,z)\,\eta_l(|z|) & \text{falls } (x,z) \in \bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \\ 0 & \text{falls } x \in \bar{U}, z = 0. \end{cases}$$

Damit ist $S_l \in C^0(\bar{U} \times \mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt

$$S_l(x,z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |z| \leq 1/2l, \\ S(x,z) & \text{falls } |z| \geq 1/l \end{cases}$$

und wir erhalten

Lemma 3.2 *Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(f) \subset K_r(0)$, $r > 0$.
Dann ist $S_l f \in C^0(\bar{U})$ für $l \in \mathbb{N}$ und*

$$\|S_l f - Sf\|_{C^0(\bar{U})} \to 0, \qquad l \to \infty.$$

Beweis: Sei $l \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil S_l auf $\bar{U} \times \overline{K_r(0)}$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $y \in \overline{K_r(0)}$ und $x_1, x_2 \in \bar{U}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ gilt

$$|S_l(x_1, x_1 - y) - S_l(x_2, x_2 - y)| < \frac{\varepsilon}{k},$$

wobei $k := \|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \int\limits_{K_r(0)} dy$. Für $x_1, x_2 \in \bar{U}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} |S_l f(x_1) - S_l f(x_2)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |S_l(x_1, x_1 - y) - S_l(x_2, x_2 - y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq \frac{\varepsilon}{k} \|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \int\limits_{K_r(0)} dy \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Demnach gilt $S_l f \in C^0(\bar{U})$. Für $x \in \bar{U}$ haben wir weiter mit einer positiven von x unabhängigen Konstante c nach Definition von S_l

$$\begin{aligned} |S_l f(x) - Sf(x)| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |S_l(x, x-y) - S(x, x-y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq \|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \int\limits_{|x-y|<1/l} |S(x, x-y)|\,dy \\ &\leq c \int\limits_{|x-y|<1/l} \frac{1}{|x-y|^{n-\beta}}\,dy \\ &\leq c(1/l)^\beta. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|S_l f - Sf\|_{C^0(\bar{U})} \leq c\,(1/l)^\beta \to 0, \qquad l \to \infty.$$

□

Satz 3.3 *Sei $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit supp$(f) \subset K_r(0)$, $r > 0$. Dann ist $Sf \in C^0(\bar{U})$ und*

$$\|Sf\|_{C^0(\bar{U})} \leq c\,\|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})}$$

mit einer positiven, von f unabhängigen Konstante c. c hängt von n, r und S ab.

Beweis: Nach Lemma 3.2 ist Sf stetig in $\bar{U}$. Da U beschränkt ist, können wir ein $\tilde{r} \in \mathbb{R}^+$ wählen mit

$$K_r(0) \subset K_{\tilde{r}}(x)$$

für alle $x \in \bar{U}$. Damit erhalten wir für $x \in \bar{U}$

$$\begin{aligned} |Sf(x)| &\leq \int_{K_r(0)} |S(x, x-y)|\,|f(y)|\,dy \\ &\leq c \int_{|x-y|<\tilde{r}} \frac{1}{|x-y|^{n-\beta}}\,dy\,\|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \\ &\leq c\,(\tilde{r})^\beta\,\|f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \end{aligned}$$

mit einer positiven, von x und f unabhängigen Konstante c. □

Unter bestimmten Bedingungen führt S auch hölderstetige Funktionen in hölderstetige Funktionen über. Wir behandeln dabei nur den Fall $\beta \geq 1$. Nicht so weit reichende Aussagen gelten aber auch für $0 < \beta < 1$.

Satz 3.4 *Seien $\beta \geq 1$ und $\alpha \in (0,1)$. Zusätzlich gelte für alle $x, x', x'' \in \bar{U}$ und $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

$$S(x,.) \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \tag{3.1}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i} S(x,z)\right| \leq \frac{c}{|z|^{n+1-\beta}}, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.2}$$

$$|S(x',z) - S(x'',z)| \leq c\,\frac{|x'-x''|^\alpha}{|z|^{n-\beta}} \tag{3.3}$$

mit einer positiven Konstante c. Sei $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ mit supp$(f) \subset K_r(0)$, $r > 0$. Dann gilt $Sf \in C^\alpha(\bar{U})$ und

$$\|Sf\|_{C^\alpha(\bar{U})} \leq c\,\|f\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}\,. \tag{3.4}$$

Hierbei ist c eine positive, von f unabhängige Konstante. c hängt jedoch von n, α, r und S ab.

Beweis: Wegen Satz 3.3 genügt es zu zeigen, daß für alle $x', x'' \in \bar{U}$

$$|Sf(x') - Sf(x'')| \leq c\,|x' - x''|^{\alpha}\; \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{K_r(0)})}$$

mit einer positiven Konstante c gilt. Seien also $x', x'' \in \bar{U}$ beliebig. Sei $\delta := |x' - x''|$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} Sf(x') - Sf(x'') &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(S(x', x' - y) - S(x'', x' - y)\right) f(y)\, dy \\ &\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(S(x'', x' - y) - S(x'', x'' - y)\right) f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Das erste Integral schätzen wir mit Voraussetzung (3.3) ab. Beim zweiten Integral können wir uns auf Kerne der Form $S(x, .)$ mit einem $x \in \bar{U}$ beschränken und den nächsten Satz anwenden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |Sf(x') - Sf(x'')| &\leq c\,\delta^{\alpha} \int\limits_{K_r(0)} \frac{1}{|x' - y|^{n-\beta}}\, |f(y)|\, dy + c\,\delta^{\alpha}\, H_{\alpha}[f] \\ &\leq c\,\delta^{\alpha}\, \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{K_r(0)})} \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c, die die gewünschten Eigenschaften hat. □

Für $S \in C^1(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$ ergibt sich (3.3) nach Satz 2.2, wenn es eine positive Konstante c gibt, so daß

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} S(x, z)\right| \leq \frac{c}{|z|^{n-\beta}}$$

für $x \in \bar{U}$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $1 \leq i \leq n$ gilt.

Satz 3.5 *Sei $\beta \geq 1$. Sei $\tilde{S} \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Weiter gelte für alle $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit einer positiven Konstante c*

$$|\tilde{S}(z)| \leq \frac{c}{|z|^{n-\beta}}, \tag{3.5}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i} \tilde{S}(z)\right| \leq \frac{c}{|z|^{n+1-\beta}}, \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{3.6}$$

Sei $f \in C^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(f) \subset K_r(0)$, $r > 0$.
Dann ist g definiert durch

$$g(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{S}(x - y) f(y)\, dy, \qquad x \in \bar{U}, \tag{3.7}$$

aus $C^{\alpha}(\bar{U})$. Außerdem gilt

$$\|g\|_{C^{\alpha}(\bar{U})} \leq c\, \|f\|_{C^{\alpha}(\bar{U})} \tag{3.8}$$

mit einer positiven Konstante c, die von n, α, r und $\tilde{S}$ abhängt, aber nicht von f.

Beweis: Weil sich Satz 3.3 auch auf g übertragen läßt, brauchen wir uns nur mit $H_\alpha[g]$ zu befassen. Damit wir dabei die Hölderstetigkeit von f ausnutzen können, formen wir g folgendermaßen um:

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{S}(x-y)\,(f(y)-f(x))\,dy + f(x) \int_{K_r(0)} \tilde{S}(x-y)\,dy. \tag{3.9}$$

Seien nun $x', x'' \in \bar{U}$ mit $\delta := |x'-x''| < 1$ (vgl. Ende von Kapitel 2). Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{S}(x'-y)\,(f(y)-f(x'))\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{S}(x''-y)\,(f(y)-f(x''))\,dy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

mit

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{|x'-y|<2\delta} \tilde{S}(x'-y)\,(f(y)-f(x'))\,dy,\\
I_2 &:= \int_{|x'-y|<2\delta} \tilde{S}(x''-y)\,(f(x'')-f(y))\,dy,\\
I_3 &:= \int_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} \tilde{S}(x'-y)\,(f(x'')-f(x'))\,dy,\\
I_4 &:= \int_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} (\tilde{S}(x'-y)-\tilde{S}(x''-y))\,(f(y)-f(x''))\,dy.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{r} \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, daß $K_r(0) \subset K_{\tilde{r}}(x)$ für alle $x \in \bar{U}$ gegeben ist.

Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
|I_1| &\le H_\alpha[f] \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{c}{|x'-y|^{n-\beta}} |x'-y|^\alpha\,dy\\
&\le c\,\delta^{\alpha+\beta}\,H_\alpha[f]\\
&\le c\,\delta^\alpha\,H_\alpha[f].
\end{aligned}$$

Wenn man berücksichtigt, daß $|x''-y| \le |x''-x'|+|x'-y| < 3\delta$ für y mit $|x'-y| < 2\delta$ gilt, erhält man eine analoge Aussage für $|I_2|$. Weil das Integrationsgebiet beschränkt ist, läßt sich auch $|I_3|$ durch denselben Term nach oben abschätzen. Beim letzten Integral wenden wir den Mittelwertsatz und (3.6) an. Für ein $x''' = x' + t(x''-x')$ mit $t \in (0,1)$ haben wir

$$\begin{aligned}
|I_4| &\le |x'-x''|\,H_\alpha[f] \int_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} \frac{c}{|x'''-y|^{n+1-\beta}} |x''-y|^\alpha\,dy\\
&\le c\,\delta\,H_\alpha[f] \int_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} \frac{c}{|x'-y|^{n+1-\beta-\alpha}}\,dy\\
&\le c\,\delta\,H_\alpha[f] \int_{|x'-y|>2\delta} \frac{c}{|x'-y|^{n+1-\alpha}}\,dy\\
&\le c\,\delta^\alpha\,H_\alpha[f].
\end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung beruht darauf, daß wir für y mit $|x' - y| > 2\delta$ folgende Ungleichungen erhalten:

$$\begin{aligned}
2|x''' - y| &\geq 2|x' - y| - 2|x' - x'''| \\
&\geq |x' - y| + 2\delta - 2|x' - x'''| \\
&\geq |x' - y| + 2\delta - 2|x' - x''| \\
&= |x' - y|, \\
|x'' - y| &\leq |x' - x''| + |x' - y| \\
&\leq 2\delta + |x' - y| \\
&\leq 2|x' - y|.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß der erste Summand von (3.9) als Funktion von x aus $C^\alpha(\bar{U})$ ist. Können wir dies auch für das Integral des zweiten Summanden beweisen, folgt mit Satz 2.3, daß g aus $C^\alpha(\bar{U})$ ist.

Wir behandeln dabei ohne Einschränkung den Fall $\beta = 1$, denn für ein $\beta' > 1$ gilt

$$\frac{1}{|x - y|^{n-\beta'}} = \frac{1}{|x - y|^{n-1}} |x - y|^{\beta' - 1} \leq \frac{c}{|x - y|^{n-1}}$$

für alle $x \in \bar{U}$ und $y \in K_r(0)$ mit einer positiven Konstante c. Weiter verwenden wir Schlußfolgerungen wie bei den Abschätzungen von I_1, I_2 und I_4, ohne ausdrücklich darauf hinzuweisen.

Seien $x', x'' \in \bar{U}$. Sei $\delta := |x' - x''|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{K_r(0)} (\tilde{S}(x' - y) - \tilde{S}(x'' - y))\, dy \right| \\
\leq\ & \int\limits_{|x'-y|<2\delta} |\tilde{S}(x' - y) - \tilde{S}(x'' - y)|\, dy + \int\limits_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} |\tilde{S}(x' - y) - \tilde{S}(x'' - y)|\, dy \\
\leq\ & c\,\delta^\alpha + \int\limits_{\tilde{r}>|x'-y|>2\delta} \frac{c\,\delta}{|x' - y|^2}\, dy \\
\leq\ & c\,\delta^\alpha + c\,\delta\, \ln(\frac{\tilde{r}}{2\delta}) \\
\leq\ & c\,\delta^\alpha,
\end{aligned}$$

denn der Logarithmus wächst schwächer als jede Potenz.

Neben $g \in C^\alpha(\bar{U})$ erhalten wir insgesamt auch (3.8). □

Wir beenden dieses Kapitel mit einer einfachen Approximationsaussage.

Lemma 3.6 *Sei f_n eine Folge in $C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(f_n) \subset K_r(0)$ für $n \in \mathbb{N}$, die gleichmäßig gegen ein $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(f) \subset K_r(0)$ konvergiert, $r > 0$.*
Dann konvergiert auch (Sf_n) in $\bar{U}$ gleichmäßig gegen Sf.

Beweis: Wir wählen wieder ein $\tilde{r} \in I\!R^+$, so daß $K_r(0) \subset K_{\tilde{r}}(x)$ für alle $x \in \overline{U}$ gilt. Dies liefert für $x \in \overline{U}$

$$
\begin{aligned}
|Sf_n(x) - Sf(x)| &\leq \int\limits_{K_r(0)} |S(x, x-y)|\,|f_n(y) - f(y)|\,dy \\
&\leq c \int\limits_{|x-y|<\tilde{r}} \frac{1}{|x-y|^{n-\beta}}\,dy\,\|f_n - f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \\
&\leq c\,\|f_n - f\|_{C^0(\overline{K_r(0)})}
\end{aligned}
$$

mit einer positiven, von x unabhängigen Konstante c. Daraus folgt die Behauptung.
□

Kapitel 4

Umformung der Kerne von K, L und M

Wir haben im vorigen Kapitel festgestellt, daß die Kerne von K, L und M zwar schwach singulär, ihre Ableitungen jedoch singulär sind. Es ist natürlich nicht möglich, diese Singularität zu verringern. Man kann aber durch Umformungen erreichen, daß man lokal eine zusätzliche Eigenschaft, nämlich positive Homogenität, erhält. Wenn eine stetige Funktion positiv homogen vom Grad $-m$ ist, besitzt sie eine Singularität vom Grad m, $m > 0$. Dabei ist eine Funktion f nach Definition *positiv homogen vom Grad* $-m$, wenn für alle x aus dem Definitionsbereich von f die Aussage

$$f(\lambda x) = \lambda^{-m} f(x) \qquad \text{für } \lambda > 0$$

gilt. Mit dieser Eigenschaft kann man die Singularität in den Griff bekommen. Darauf gehen wir im 5. Kapitel ein. Dort zeigen wir auch genauer, daß die positive Homogenität eine zusätzliche Eigenschaft ist.

Wie erreicht man nun, daß die Kerne von K, L und M positiv homogen vom Grad -1 werden? Weil wir dies nur lokal, also in der Nähe der Singularität, benötigen, steht uns der Satz von Taylor zur Verfügung.

Satz 4.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Weiter sei $f \in C^k(U)$. Dann gilt für $y, y' \in U$:*

$$\begin{aligned} f(y') - f(y) &= \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m!} \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}, \ldots, \partial x_{i_1}}(y)(y'_{i_1} - y_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (y'_{i_m} - y_{i_m}) \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_{k+1}=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}}, \ldots, \partial x_{i_1}}(y + t(y - y'))(1-t)^k \, dt \\ &\quad (y'_{i_1} - y_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (y'_{i_{k+1}} - y_{i_{k+1}}). \end{aligned}$$

Man spricht von der Taylorentwicklung von f an der Stelle y' um y bis zur k. Ordnung.

Beweis: Wir führen die Aussage des Satzes auf die Taylor–Formel für Funktionen einer Veränderlichen zurück. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} &g : [0,1] \to I\!R \\ &g(t) := f(y + t(y' - y)). \end{aligned}$$

Weil f $(k+1)$–mal stetig differenzierbar ist, ergibt sich mit vollständiger Induktion und der Kettenregel, daß g $(k+1)$–mal stetig differenzierbar ist.
Genauer gilt für $t \in [0,1]$ und $m = 1, \dots, k+1$:

$$\begin{aligned} g^{(m)}(t) &:= \frac{d^m g}{dt^m}(t) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_m}, \dots, \partial x_{i_1}}(y + t(y'-y))(y'_{i_1} - y_{i_1}) \cdot \dots \cdot (y'_{i_m} - y_{i_m}). \end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von g um 0 an der Stelle 1 lautet nun

$$g(1) - g(0) = \sum_{k=1}^{k} \frac{g^{(m)}(0)}{m!}(1-0)^m + \frac{1}{k!}\int_0^1 g^{(k+1)}(t)(1-t)^k \, dt.$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. □

Wir werden jetzt die Kerne von K, L und M mit dem Satz von Taylor lokal in eine Summe umformen (vergleiche [13, S. 17–21]), worin der erste Summand bezüglich der zweiten Variable positiv homogen vom Grad -1 ist, der zweite Summand dagegen mit seinen ersten partiellen Ableitungen bezüglich der zweiten Variable schwach singulär. Dieser bereitet also nach dem vorigen Kapitel keine weiteren Probleme.

Sei im folgenden $\overline{x} : U \to \partial G$ eine lokale Karte des im ersten Kapitel eingeführten Atlanten von ∂G. Dies besagt zusätzlich: $U \subset I\!R^2$ ist konvex und hinreichend klein. Falls ∂G von der Klasse C^k ist, gilt $\overline{x} \in C^k(\overline{U})$. Weiter können wir $\overline{x}$ zu einer $C^k(I\!R^2)$–Funktion mit kompaktem Träger fortsetzen.

Zuerst betrachten wir einen in K, L und M vorkommenden Term und formen ihn lokal so in eine Summe um, daß ein Summand positiv homogen ist.

Lemma 4.2 *Sei ∂G von der Klasse C^2. Dann gilt für $u, u' \in \overline{U}$:*

$$(4.1) \qquad |\overline{x}(u) - \overline{x}(u')| = (\Sigma_1(u, u-u') + \Sigma_2(u, u-u'))^{1/2},$$

wobei

$$\begin{aligned} \Sigma_1(u, u-u') &:= \sum_{i,j=1}^{2} < \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_j}(u) > (u'_i - u_i)(u'_j - u_j), \\ \Sigma_2(u, u-u') &:= 2 \sum_{i,j,k=1}^{2} < \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_i}(u), \int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_j \partial u_k}(u + t(u'-u))(1-t)\, dt > \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(u_i' - u_i)(u_j' - u_j)(u_k' - u_k) \\
&+ \sum_{i,j,k,l=1}^{2} < \int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_i \partial u_j}(u + t(u' - u))(1-t)\,dt, \\
&\qquad \int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_k \partial u_l}(u + t(u' - u))(1-t)\,dt > \\
&(u_i' - u_i)(u_j' - u_j)(u_k' - u_k)(u_l' - u_l).
\end{aligned}
$$

Weiter gilt für alle $u, u' \in \overline{U}$ und $\lambda > 0$:

$$
\begin{aligned}
&(4.2) \qquad \Sigma_1(u, \lambda(u - u')) = \lambda^2\, \Sigma_1(u, u - u'), \\
&(4.3) \qquad \frac{1}{c_1}|u - u'|^2 \le |\Sigma_1(u, u - u')| \le c_1 |u - u'|^2, \\
&(4.4) \qquad |\Sigma_2(u, u - u')| \le c_2 |u - u'|^3, \\
&(4.5) \qquad \frac{1}{c_3}|u - u'|^2 \le |\Sigma_1(u, u - u') + \Sigma_2(u, u - u')| \le c_3 |u - u'|^2,
\end{aligned}
$$

mit positiven, von $\overline{x}$ abhängigen Konstanten c_1, c_2 und c_3.

Beweis: Seien $u, u' \in \overline{U}$. Wir haben

$$|\overline{x}(u) - \overline{x}(u')| = (< \overline{x}(u') - \overline{x}(u), \overline{x}(u') - \overline{x}(u) >)^{1/2}.$$

(4.1) folgt nun aus der Taylorentwicklung von $\overline{x} \in C^2(V)$ bis zur 1. Ordnung und den Eigenschaften des Skalarprodukts wie Additivität und Symmetrie. $V \subset \mathbb{R}^2$ sei dabei offen, konvex und beschränkt mit $\overline{U} \subset V$.
Die Aussage (4.2) ist klar.
Weil die Matrix

$$(g_{i,j}) = (< \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_i}(u), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_j}(u) >)$$

positiv definit ist, gilt die erste Ungleichung von (4.3). Die zweite Ungleichung von (4.3) ist erfüllt, da die partiellen Ableitungen von $\overline{x}$ stetig sind.
Wir erhalten für alle $u, u' \in \overline{U}$ mit positiven Konstanten c und $\tilde{c}$:

$$
\begin{aligned}
|\Sigma_2(u, u - u')| &\le c\,|u - u'|^3 + \tilde{c}\,|u - u'|^4 \\
&\le (c + \tilde{c}d)\,|u - u'|^3.
\end{aligned}
$$

Dabei ist d der Durchmesser der Parameterumgebung U. Entsprechend ergibt sich der zweite Teil von Aussage (4.5).
Aus (4.3) und (4.4) folgt für alle $u, u' \in \overline{U}$ mit positiven Konstanten c und $\tilde{c}$:

$$
\begin{aligned}
|\Sigma_1(u, u - u') + \Sigma_2(u, u - u')| &\ge c\,|u - u'|^2 - \tilde{c}\,|u - u'|^3 \\
&\ge (c - \tilde{c}d)\,|u - u'|^2 \\
&\ge \frac{1}{2}c\,|u - u'|^2,
\end{aligned}
$$

wenn wir die Parameterumgebung U so klein wählen, daß für den Durchmesser d die Abschätzung $\tilde{c}d \leq \frac{1}{2}c$ gilt. Man sagt dazu auch: U wird so klein gewählt, daß Σ_1 stets Σ_2 überwiegt. □

Als nächstes behandeln wir den Kern M.

Satz 4.3 *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ∂G von der Klasse C^{k+4}. Dann gilt für alle $u, u' \in \bar{U}, u \neq u'$*

$$M(\bar{x}(u), \bar{x}(u')) = H_M(u, u-u') + R_M(u, u-u'), \tag{4.6}$$

so daß für $|\gamma| \leq k$ (beachte für die Schreibweise S. 4 unten)

$$D_x^\gamma H_M \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})), \tag{4.7}$$

$$D_x^\gamma R_M \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})). \tag{4.8}$$

Außerdem gilt für alle $u \in \bar{U}$, $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|\gamma| \leq k$ und $i, j = 1, 2$

$$D_x^\gamma H_M(u, \lambda z) = \lambda^{-1} D_x^\gamma H_M(u, z) \qquad \text{für } \lambda > 0, \tag{4.9}$$

$$|D_x^\gamma R_M(u, z)| \leq c, \tag{4.10}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} D_x^\gamma R_M(u, z)\right| \leq c, \tag{4.11}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial x_j} D_x^\gamma R_M(u, z)\right| \leq \frac{c}{|z|}, \tag{4.12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i} D_x^\gamma R_M(u, z)\right| \leq \frac{c}{|z|}, \tag{4.13}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_x^\gamma R_M(u, z)\right| \leq \frac{c}{|z|^2} \tag{4.14}$$

mit einer positiven, von M und $\bar{x}$ abhängigen Konstante c.

Beweis: Seien $u, u' \in \bar{U}, u \neq u'$. Mit Lemma 4.2 gilt

$$\begin{aligned} M(\bar{x}(u), \bar{x}(u')) &= (|\bar{x}(u) - \bar{x}(u')|)^{-1} \\ &= (\Sigma_1(u, u-u') + \Sigma_2(u, u-u'))^{-1/2}. \end{aligned}$$

Um (4.9) und (4.6) zu erreichen, setzen wir wegen (4.2)

$$\begin{aligned} H_M(u, u-u') &:= \frac{1}{(\Sigma_1(u, u-u'))^{1/2}}, \\ R_M(u, u-u') &:= \frac{1}{(\Sigma_1(u, u-u') + \Sigma_2(u, u-u'))^{1/2}} - \frac{1}{(\Sigma_1(u, u-u'))^{1/2}} \\ &= \frac{\Sigma_1^{1/2} - (\Sigma_1 + \Sigma_2)^{1/2}}{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{1/2}\, \Sigma_1^{1/2}} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\Sigma_2 \int_0^1 (\Sigma_1 + t\Sigma_2)^{-1/2}\, dt}{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{1/2}\, \Sigma_1^{1/2}}. \end{aligned}$$

Dabei steht Σ_1 bzw. Σ_2 für $\Sigma_1(u, u' - u')$ bzw. $\Sigma_2(u, u - u')$. Die letzte Umformung ergibt sich nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

Mit den Ableitungsregeln erhalten wir sofort die gewünschten Regularitätseigenschaften von H_M und R_M, weil ∂G von der Klasse C^{k+4} ist. In H_M kommen nämlich nur die ersten partiellen Ableitungen von $\overline{x}$ vor, in R_M die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $\overline{x}$. Auch (4.9) ist erfüllt, denn Ableitungen von H_M nach der ersten Variable ändern nichts an den Eigenschaften der zweiten.

Wir wenden uns nun der Abschätzung von R_M und seinen Ableitungen zu. Das Problem dabei ist die Singularität in der zweiten Variable. In Lemma 4.2 haben wir schon einige Terme nach oben bzw. nach unten abgeschätzt. (4.5) gilt natürlich auch für $\Sigma_1 + t\Sigma_2$, $t \in [0, 1]$. Also existiert eine positive, von $\overline{x}$ und M abhängige Konstante c, so daß für alle $u \in \overline{U}$ und $z \in I\!R^2 \setminus \{0\}$

$$|R_M(u,z)| \leq c\frac{|z|^3(|z|^2)^{-\frac{1}{2}}}{(|z|^2)^{\frac{1}{2}}(|z|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|z|^{3+2(-\frac{1}{2})}}{|z|^{2\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}} = c.$$

Anhand der obigen Rechnung sieht man, wie der Exponent von $|z|$ mit Hilfe von Lemma 4.2 ausgerechnet wird. Gemäß den Rechenregeln für Potenzen erniedrigen sich dabei die Rechenstufen. Potenzieren wird zu Multiplizieren, Multiplizieren zu Addieren, Dividieren zu Subtrahieren. Weiter halten wir fest: Addieren und Subtrahieren, auch im Nenner eines Bruches, wird zu Minimieren, sofern U so klein gewählt wird, daß der Term mit dem kleinsten Exponenten bei der Abschätzung den oder die anderen überwiegt. Dies zeigt man wie im Beweis von Lemma 4.2.

Wir befassen uns jetzt mit der Ableitung von R_M nach der zweiten Variable. Es ist klar, daß für alle $u \in \overline{U}$, $z \in I\!R^n \setminus \{0\}$ und $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial z_i}\Sigma_1(u,z)\right| &\leq \cancel{\frac{c}{|z|}}\, c|z|, \\
\left|\frac{\partial}{\partial z_i}\Sigma_2(u,z)\right| &\leq \cancel{\frac{c}{|z|^2}}\, c|z|^2
\end{aligned}$$

gilt. Der Exponent von $|z|$ bei der Abschätzung von Σ_1 und Σ_2 nach oben verringert sich also nach einer Ableitung bzgl. der zweiten Variable um 1. Mit den Ableitungsregeln und den obigen Bemerkungen kann man leicht allgemein zeigen, daß sich dies letztlich auch für R_M ergeben muß, weil R_M nur aus Termen der Form Σ_1 und Σ_2 besteht. Die Ableitung des Zählers bzw. Nenners von R_M nach der zweiten Variable können wir durch $c|z|^a$ bzw. durch $c|z|^b$ nach oben abschätzen, indem wir die Kettenregel und die Produktregel benutzen. Dabei ist

$$\begin{aligned}
a &= \min\{2 + 2(-1/2), 3 + 2(-3/2) + 1\} = 1, \\
b &= \min\{2(-1/2) + 1 + 2 \cdot 1/2, 2 \cdot 1/2 + 2(-1/2) + 1\} = 1.
\end{aligned}$$

Dies ist gegenüber dem Exponenten bei der Abschätzung des Zählers bzw. Nenners eine Verringerung um 1. Das Minimum, eine Folge der Produktregel, ist nicht nötig, denn auch die Exponenten der jeweiligen Faktoren werden nach einer Ableitung bzgl. der zweiten Variable um 1 kleiner. Dasselbe Verhalten zeigt sich bei der Ableitung der Potenzen. Damit haben wir als Exponent bei der Abschätzung von $\partial/\partial z_i R_M$, $i = 1, 2$, mit der Quotientenregel die Zahl

$$\min\{1+2, 2+1\} - 2 \cdot 2 \;=\; 3 - 4 \;= -1.$$

Analog kann man alle im Satz angegebenen Abschätzungen von R_M und seinen Ableitungen nachweisen. □

Die im obigen Satz aufgeführten Eigenschaften sind natürlich nicht vollständig, für unsere Zwecke aber ausreichend. Insbesondere müssen wir für H_M und seine Ableitungen keine Abschätzungen angeben, denn diese ergeben sich aus der positiven Homogenität und den Regularitätsbedingungen einfacher (vergleiche dazu Lemma 5.1 und Lemma 5.2).

Zur Behandlung von K und L ist eine höhere Regularität von ∂G erforderlich.

Satz 4.4 *Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und ∂G von der Klasse C^{k+5}.*
Dann gilt für alle $u, u' \in \bar{U}, u \neq u'$

$$K(\bar{x}(u), \bar{x}(u')) = H_K(u, u-u') + R_K(u, u-u'), \tag{4.15}$$

$$L(\bar{x}(u), \bar{x}(u')) = H_L(u, u-u') + R_L(u, u-u'), \tag{4.16}$$

wobei für $|\gamma| \leq k$

$$D_x^\gamma H_K, D_x^\gamma H_L \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})), \tag{4.17}$$

$$D_x^\gamma R_K, D_x^\gamma R_L \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})). \tag{4.18}$$

Außerdem gilt für alle $u \in \bar{U}$, $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|\gamma| \leq k$ und $i, j = 1, 2$

$$D_x^\gamma H_K(u, \lambda z) \;=\; \lambda^{-1} D_x^\gamma H_K(u, z) \qquad \text{für } \lambda > 0, \tag{4.19}$$

$$|D_x^\gamma R_K(u, z)| \;\leq\; c, \tag{4.20}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} D_x^\gamma R_K(u, z)\right| \;\leq\; c, \tag{4.21}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial x_j} D_x^\gamma R_K(u, z)\right| \;\leq\; \frac{c}{|z|}, \tag{4.22}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_i} D_x^\gamma R_K(u, z)\right| \;\leq\; \frac{c}{|z|}, \tag{4.23}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} D_x^\gamma R_K(u, z)\right| \;\leq\; \frac{c}{|z|^2} \tag{4.24}$$

mit einer positiven, von K und $\bar{x}$ abhängigen Konstante c. Analoge Aussagen gelten für H_L und R_L.

Beweis: Seien $u, u' \in \overline{U}, u \neq u'$. Wir setzen wieder Lemma 4.2 ein und verwenden die Abkürzungen $\Sigma_1 := \Sigma_1(u, u-u')$, $\Sigma_2 := \Sigma_2(u, u-u')$.

Zuerst befassen wir uns mit dem Kern von K. Es gilt

$$K(\overline{x}(u), \overline{x}(u')) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\overline{x}(u) - \overline{x}(u')|^3} < n(\overline{x}(u)), \overline{x}(u') - \overline{x}(u) > .$$

Für den ersten Faktor können wir Lemma 4.2 benutzen. Um im zweiten Faktor einen Summanden zu erhalten, der bezüglich $u - u'$ positiv homogen ist, entwickeln wir $\overline{x}$ nach Taylor bis zur 2. Ordnung. Der erste Summand der Taylorentwicklung steht nämlich senkrecht zu

$$n(\overline{x}(u)) = \pm \frac{[\frac{\partial \overline{x}}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_2}(u)]}{\left|[\frac{\partial \overline{x}}{\partial u_1}(u), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_2}(u)]\right|},$$

dem Normalenvektor in $\overline{x}(u)$.

Wir definieren jetzt H_K und R_K so, daß (4.15) und (4.19) gültig sind:

$$\begin{aligned} H_K(u, u-u') &:= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\Sigma_1^{3/2}} \sum_{i,j=1}^{2} < n(\overline{x}(u)), \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_i \partial u_j}(u) > (u_i' - u_i)(u_j' - u_j), \\ R_K(u, u-u') &:= R_1(u, u-u') + R_2(u, u-u') \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R_1(u, u-u') &:= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{3/2}} - \frac{1}{\Sigma_1^{3/2}} \right) \\ &\quad \left(\sum_{i,j=1}^{2} < n(\overline{x}(u)), \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_i \partial u_j}(u) > (u_i' - u_i)(u_j' - u_j) \right), \\ R_2(u, u-u') &:= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{3/2}} \\ &\quad \left(\sum_{i,j,k=1}^{2} \int_0^1 < n(\overline{x}(u)), \frac{\partial^3 \overline{x}}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}(u + t(u' - u)) > (1-t)^2 \, dt \right. \\ &\quad \left. (u_i' - u_i)(u_j' - u_j)(u_k' - u_k) \right). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß H_K und R_K die Behauptung erfüllen, müssen wir nach den Erklärungen im Beweis des letzten Satzes nur noch die Abschätzung (4.20) mit Hilfe von Lemma 4.2 nachweisen. Nach (4.5) ist offensichtlich für alle $u \in \overline{U}, z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$|R_2(u, z)| \leq c$$

mit einer positiven Konstante c. Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}} - \frac{1}{(\Sigma_1)^{3/2}} &= \frac{\Sigma_1^{3/2} - (\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}\,\Sigma_1^{3/2}} \\
&= \frac{-\frac{3}{2}\Sigma_2 \int\limits_0^1 (\Sigma_1 + t\Sigma_2)^{1/2}\,dt}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}\,\Sigma_1^{3/2}}.
\end{aligned}
$$

Es gilt nun insgesamt (4.20), denn für R_1 ergibt sich mit obiger Rechnung als Exponent von $|z|$ die Zahl $(3+2\frac{1}{2}) - (2\frac{3}{2}+2\frac{3}{2}) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$.

Nun betrachten wir den Kern von L.

$$
\begin{aligned}
L(\overline{x}(u),\overline{x}(u')) &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\overline{x}(u)-\overline{x}(u')|^3} < n(\overline{x}(u')), \overline{x}(u') - \overline{x}(u) > \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{|\overline{x}(u)-\overline{x}(u')|^3} < n(\overline{x}(u')) - n(\overline{x}(u)), \overline{x}(u') - \overline{x}(u) > \\
&\quad - K(\overline{x}(u),\overline{x}(u'))
\end{aligned}
$$

Wir entwickeln die Funktionen im obigen Skalarprodukt bis zur 1. Ordnung und setzen

$$
\begin{aligned}
H_L(u,u-u') &:= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Sigma_1^{3/2}}\left(\sum_{i,j=1}^{2} < \frac{\partial}{\partial u_i} n(\overline{x}(u)), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_j}(u) > (u_i'-u_i)(u_j'-u_j)\right) \\
&\quad - H_K(u,u-u') \\
R_L(u,u-u') &:= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}} - \frac{1}{\Sigma_1^{3/2}}\right) \\
&\quad \left(\sum_{i,j=1}^{2} < \frac{\partial}{\partial u_i} n(\overline{x}(u)), \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_j}(u) > (u_i'-u_i)(u_j'-u_j)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(\Sigma_1+\Sigma_2)^{3/2}} \\
&\quad \left(\sum_{i,j,k=1}^{2} < \int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} n(\overline{x}(u+t(u'-u)))(1-t)\,dt, \frac{\partial \overline{x}}{\partial u_k}(u) > \right. \\
&\quad (u_i'-u_i)(u_j'-u_j)(u_k'-u_k) \\
&\quad + \sum_{i,j,k=1}^{2} < \frac{\partial}{\partial u_i} n(\overline{x}(u)), \int\limits_0^1 \frac{\partial^2 \overline{x}}{\partial u_j \partial u_k}(u+t(u'-u))(1-t)\,dt > \\
&\quad (u_i'-u_i)(u_j'-u_j)(u_k'-u_k) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{2} < \int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} n(\overline{x}(u+t(u'-u)))(1-t)\,dt, \\
&\qquad \int\limits_0^1 \frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_l} n(\overline{x}(u+t(u'-u)))(1-t)\,dt >
\end{aligned}
$$

$$(u_i' - u_i)(u_j' - u_j)(u_k' - u_k)(u_l' - u_l)\Big)$$
$$- R_K(u, u - u').$$

Weil in der Normalen schon eine Ableitung vorkommt, besitzt L dieselbe Struktur und damit dieselben Eigenschaften wie K. $\square$

Kapitel 5

Eine Verallgemeinerung der Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud

Wir verallgemeinern in diesem Kapitel eine in [1, S. 222–224, 244-245] bewiesene Abschätzung, die unter dem Namen Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud bekannt ist. Diese Verallgemeinerung können wir auf die im vierten Kapitel bei der Umformung entstandenen homogenen Terme anwenden.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und konvex. Sei $\alpha \in (0,1)$. Sei $\hat{H}$ eine Abbildung auf $\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$.

Als erstes präzisieren wir die Voraussetzungen, die wir an $\hat{H}$ stellen müssen.

Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$: *Für $x \in \bar{U}$ und $1 \leq i,j \leq n$ gelte*

(5.1) $$\hat{H} \in C^1(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})),$$

(5.2) $$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,.) \in C^1(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}),$$

(5.3) $$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i} \in C^0(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})),$$

(5.4) $$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial x_j} \in C^0(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})),$$

(5.5) $$\hat{H}(x,.) \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}),$$

(5.6) $$\frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i} \in C^0(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})),$$

(5.7) $$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial z_j} \in C^0(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})),$$

$\hat{H}(x,.)$ sei positiv homogen vom Grad $-(n-1)$, das heißt

(5.8) $$\hat{H}(x,\lambda z) = \lambda^{-(n-1)}\hat{H}(x,z) \qquad \textit{für alle } \lambda > 0 \textit{ und } z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Weiter gelte für $x, x+h \in \bar{U}$, $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $1 \leq i \leq n$

$$\left|\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x+h,z) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,z)\right| \leq c\,\frac{|h|^\alpha}{|z|^{n-1}}, \tag{5.9}$$

$$\left|\frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x+h,z) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\right| \leq c\,\frac{|h|^\alpha}{|z|^{n}} \tag{5.10}$$

mit einer positiven Konstante c.

Zunächst ziehen wir einige einfache Folgerungen aus den Eigenschaften (5.1) – (5.8).

Lemma 5.1 *$\hat{H}$ genüge der Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$.*
Dann sind für $x \in \bar{U}$ und $1 \leq i,j \leq n$:

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,.) \text{ positiv homogen vom Grad } -(n-1),$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,.) \text{ und } \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial x_j} \text{ positiv homogen vom Grad } n,$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial z_j}(x,.) \text{ positiv homogen vom Grad } -(n+1).$$

Beweis: Die obigen partiellen Ableitungen von $\hat{H}$ sind nach Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$ wohldefiniert.
Sei $x \in U, z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, und $\lambda > 0$. Nach Definition der partiellen Ableitung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,\lambda z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\hat{H}(x+he_i,\lambda z) - \hat{H}(x,\lambda z)}{h} \\
&\overset{(5.8)}{=} \lambda^{-(n-1)} \lim_{h\to 0} \frac{\hat{H}(x+he_i,z) - \hat{H}(x,z)}{h} \\
&= \lambda^{-(n-1)} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,z).
\end{aligned}$$

Dadurch ist die erste Aussage des Lemmas für $x \in \bar{U}$ bewiesen, da $\partial \hat{H}/\partial x_i$ nach (5.3) stetig auf $\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ ist.
Weiter gilt für $x \in \bar{U}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,\lambda z) &= \lim_{h\to 0} \frac{\hat{H}(x,\lambda z+he_i) - \hat{H}(x,\lambda z)}{h} \\
&\overset{(5.8)}{=} \lambda^{-(n-1)} \frac{1}{\lambda} \lim_{h\to 0} \frac{\hat{H}(x,z+\frac{h}{\lambda}e_i) - \hat{H}(x,z)}{\frac{h}{\lambda}} \\
&= \lambda^{-n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z).
\end{aligned}$$

Allgemein kann man entsprechend beweisen, daß die partielle Ableitung einer Funktion, sofern sie existiert, positiv homogen vom Grad $-(k+1)$ ist, falls die Funktion selbst positiv homogen vom Grad $-k$ ist. Damit folgen auch die restlichen Aussagen des Lemmas für $x \in \bar{U}$. □

Mit Hilfe von Lemma 5.1 untersuchen wir das Singularitätenverhalten von $\hat{H}$ und seinen Ableitungen.

Lemma 5.2 *$\hat{H}$ genüge der Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$.*
Dann gilt für alle $x \in \bar{U}$ und $z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\left|\hat{H}(x,z)\right| &\leq \frac{c}{|z|^{n-1}}, \\
\left|\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x,z)\right| &\leq \frac{c}{|z|^{n-1}}, \\
\left|\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial x_j}(x,z)\right| &\leq \frac{c}{|z|^{n}}, \\
\left|\frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\right| &\leq \frac{c}{|z|^{n}}, \\
\left|\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial z_i \partial z_j}(x,z)\right| &\leq \frac{c}{|z|^{n+1}}, \qquad 1 \leq i,j \leq n,
\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\hat{H}(x,z)\right| &= \left|\hat{H}(x,|z|\frac{z}{|z|})\right| \\
&\overset{(5.8)}{=} |z|^{-(n-1)} \left|\hat{H}(x,\frac{z}{|z|})\right| \\
&\leq \frac{c}{|z|^{n-1}} \qquad \text{für alle } x \in \bar{U} \text{ und } z \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},
\end{aligned}$$

da $\hat{H}$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\bar{U} \times \{z \in \mathbb{R}^n \,|\, |z| = 1\}$ beschränkt ist.
Mit Lemma 5.1, (5.3), (5.4), (5.6) und (5.7) zeigt man analog die restlichen Aussagen des Lemmas. □

Gilt zum Beispiel $\hat{H} \in C^2(\bar{U} \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))$, so sind nach Satz 2.2 und Lemma 5.2 die Voraussetzungen (5.9) und (5.10) erfüllt.

Eine entscheidende Folgerung aus der Homogenität von $\hat{H}$ ist:

Lemma 5.3 *Es gelte die Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$.*
Sei $x \in \bar{U}$ und $r \geq \delta > 0$. Dann gilt:

$$\int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Damit folgt insbesondere:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz &:= \lim_{r \to \infty} \int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = 0,\\
\int\limits_{r \geq |z|} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz &:= \lim_{\delta \to 0} \int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = 0,\\
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz &:= \lim_{\substack{r \to \infty\\ \delta \to 0}} \int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Die Integrale für $\delta \to 0$ existieren im Hauptwert.

Beweis: Sei $1 \leq i \leq n$. Weil $\partial \hat{H}/\partial z_i$ stetig auf $\bar{U} \times \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ist, erhält man nach dem Satz von Gauß für $x \in \bar{U}$ und $r \geq \delta > 0$:

$$\int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = \int\limits_{\partial K_r(0)} \hat{H}(x,\xi)\,\frac{\xi_i}{r}\,d\Omega - \int\limits_{\partial K_\delta(0)} \hat{H}(x,\xi)\,\frac{\xi_i}{\delta}\,d\Omega.$$

Dabei sind ξ/r für $|\xi| = r$ und $-\xi/\delta$ für $|\xi| = \delta$ die äußeren Normalen–Einheitsvektoren der Menge $\{\xi \in \mathbb{R}^n \,|\, r \geq |\xi| \geq \delta\}$. Da die Sphären um 0 im $\mathbb{R}^n$ $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind, ergibt sich mit Satz 1.2:

$$\int\limits_{r \geq |z| \geq \delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x,z)\,dz = r^{n-1} \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(x,r\eta)\,\eta_i\,d\Omega - \delta^{n-1} \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(x,\delta\eta)\,\eta_i\,d\Omega.$$

Daraus folgt wegen (5.8), d. h. wegen der Homogenität von $\hat{H}$, die Behauptung. □

Nun kommen wir zum Hauptergebnis dieses Kapitels, zu einer Verallgemeinerung der Ungleichung von Hölder–Korn–Lichtenstein–Giraud.

Satz 5.4 *Sei $\phi \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}\phi \subset K_r(0)$, $r > 0$. $\hat{H}$ erfülle die Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$.*
Dann ist die durch

(5.11)
$$\Psi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\,\phi(y)\,dy, \qquad x \in \bar{U},$$

definierte Funktion Ψ aus $C^{1+\alpha}(\bar{U})$, und es gilt die Abschätzung:

(5.12)
$$\|\Psi\|_{C^{1+\alpha}(\bar{U})} \leq c\, \|\phi\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}$$

mit einer von ϕ unabhängigen und von $\hat{H}$, r, n, α abhängigen, positiven Konstante c.

Beweis: Um die Behauptung zu beweisen, müssen wir Ψ partiell differenzieren, beziehungsweise zuerst zeigen, daß Ψ partiell differenzierbar ist. Dies ist direkt nicht möglich, weil der Integralkern schwach singulär zum Exponenten $n-1$ ist. Wie wir im weiteren Verlauf des Beweises sehen werden, erweist sich auch eine Approximation von ϕ durch stetig partiell differenzierbare Funktionen als wichtig.

Deshalb betrachten wir zunächst für $m, l \in I\!N$ die Funktionen $\Psi_{m,l}$ definiert durch

$$\Psi_{m,l}(x) := \int_{I\!R^n} \hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|)\, \phi_m(y)\, dy, \qquad x \in \bar{U}. \tag{5.13}$$

Dabei sei die Folge η_l wie in Kapitel 3 definiert und ϕ_m sei eine Folge aus $C^\infty(I\!R^n)$ mit kompaktem Träger in $K_r(0)$, die gleichmäßig in $\overline{K_r(0)}$ gegen ϕ konvergiert. Außerdem gelte:

$$\|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \le \|\phi\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \qquad \text{für alle } m \in I\!N. \tag{5.14}$$

Eine solche Folge existiert nach Lemma 2.4.

Aus Voraussetzung (5.1) und der Definition von η_l folgt mit der Kettenregel: Der Integrand von $\Psi_{m,l}$ ist eine nach x stetig partiell differenzierbare Funktion auf $\bar{U} \times I\!R^n$. (Die Funktionswerte für $z = 0$ spielen als Nullmenge keine Rolle.) Ferner hat der Integrand durch den Faktor ϕ_m kompakten Träger. Indem man den Mittelwertsatz und den Satz von Lebesgue anwendet, ergibt sich, daß $\Psi_{m,l}$ partiell differenzierbar ist. Genauer gilt für $x \in \bar{U}$ und $1 \le i \le n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_{m,l}}{\partial x_i}(x) &= \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|) \right) \phi_m(y)\, dy \\
&= \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|)\, \phi_m(y)\, dy \\
&\quad + \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|) \right) \phi_m(y)\, dy \\
&= \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|)\, \phi_m(y)\, dy \\
&\quad - \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|) \right) \phi_m(y)\, dy \\
&= \int_{I\!R^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|)\, \phi_m(y)\, dy \\
&\quad + \int_{I\!R^n} \hat{H}(x, x-y)\, \eta_l(|x-y|)\, \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i}(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Kettenregel und bei der letzten Umformung (ϕ_m ist stetig partiell differenzierbar) der Satz von Gauß verwendet. Ein Randintegral tritt hierbei nicht auf, weil der Integrand kompakten Träger hat.

Nach Lemma 5.2 sind $\hat{H}$ und $\partial \hat{H} / \partial x_i$ schwach singuläre Kerne. Lemma 3.2 besagt daher: die auf $\bar{U}$ stetigen Funktionen $\Psi_{m,l}$ und $\partial \Psi_{m,l} / \partial x_i$ konvergieren für $l \to \infty$

gleichmäßig in $\bar{U}$; d. h. $\Psi_{m,l}$ konvergiert in der $C^1(\bar{U})$–Norm gegen ein $\Psi_m \in C^1(\bar{U})$, weil $C^1(\bar{U})$ vollständig ist. Damit gilt nun für $x \in \bar{U}$ wieder mit Lemma 3.2

$$\begin{aligned}\Psi_m(x) &= \lim_{l\to\infty} \Psi_{m,l}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy,\\ \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x) &= \lim_{l\to\infty} \frac{\partial \Psi_{m,l}}{\partial x_i}(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\, \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i}(y)\, dy.\end{aligned}$$

Ψ_m konvergiert nach Lemma 3.6 gleichmäßig gegen Ψ. Können wir Ψ_m in der $C^{1+\alpha}(\bar{U})$–Norm nach oben durch $c\, \|\phi\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}$ abschätzen, ist die Behauptung wegen Lemma 2.5 nachgewiesen, sofern c den Bedingungen des Satzes genügt.

Aus Satz 3.3 erhalten wir direkt

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy \right\|_{C^0(\bar{U})} \le c\, \|\phi_m\|_{C^0(\overline{K_r(0)})}$$

und aus Satz 3.4 mit (5.2), (5.9) und Lemma 5.2

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial x_i}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy \right\|_{C^\alpha(\bar{U})} \le c\, \|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

c ist dabei eine positive Konstante. Auf Grund von (5.14) bleibt also noch

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\, \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i}(y)\, dy \right\|_{C^\alpha(\bar{U})} \le c\, \|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.15}$$

zu zeigen. Auch die Aussage des Satzes über die Konstante ist erfüllt, wie man aus Satz 3.3, Satz 3.4 und dem folgenden sofort entnimmt.

Um (5.15) herzuleiten, schließen wir bei der Integration die Singularität erst einmal aus. Seien $x \in \bar{U}$, $1 \le i \le n$ und $l \in \mathbb{N}$. Aus dem Satz von Gauß folgt:

$$\begin{aligned}&\int_{|x-y|\ge 1/l} \hat{H}(x, x-y)\, \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i}(y)\, dy \qquad (5.16)\\ &= \int_{|x-y|\ge 1/l} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy + \int_{|x-y|=1/l} \hat{H}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, \frac{x_i - y_i}{1/l}\, d\Omega\\ &= \int_{|x-y|\ge 1/l} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\, \phi_m(y)\, dy + \int_{|x-y|=1/l} \hat{H}(x, x-y)\, (\phi_m(y) - \phi_m(x))\, \frac{x_i - y_i}{1/l}\, d\Omega\\ &\quad + \phi_m(x) \int_{|x-y|=1/l} \hat{H}(x, x-y)\, \frac{x_i - y_i}{1/l}\, d\Omega.\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|x-y|=1/l} \hat{H}(x, x-y)\,(\phi_m(y) - \phi_m(x))\,\frac{x_i - y_i}{1/l}\,d\Omega_y \\
&= \int\limits_{|\xi|=1/l} \hat{H}(x, \xi)\,(\phi_m(x-\xi) - \phi_m(x))\,\frac{\xi_i}{1/l}\,d\Omega_\xi \\
&= \int\limits_{|\eta|=1} \hat{H}(x, \frac{\eta}{l})\,(\phi_m(x-\frac{\eta}{l}) - \phi_m(x))\,\eta_i\,(1/l)^{n-1}\,d\Omega_\eta \\
&\overset{(5.8)}{=} \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(x, \eta)\,(\phi_m(x-\frac{\eta}{l}) - \phi_m(x))\,\eta_i\,d\Omega_\eta .
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue konvergiert das letzte Integral für $l \to \infty$ gegen Null, da der Integrand wegen der Stetigkeit von $\hat{H}$ und ϕ_m nach oben beschränkt ist und für $l \to \infty$ punktweise gegen Null konvergiert.

Wie oben ergibt sich

$$\int\limits_{|x-y|=1/l} \hat{H}(x, x-y)\,\frac{x_i - y_i}{1/l}\,d\Omega = \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(x, \eta)\,\eta_i\,d\Omega,$$

so daß dieses Integral unabhängig von l ist.

Obwohl $\partial\hat{H}/\partial z_i$ gemäß Lemma 5.2 singulär ist, existiert nach (5.16) und den obigen Rechnungen

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\,\phi_m(y)\,dy \tag{5.17}$$

im Hauptwert, und es gilt insgesamt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\,\frac{\partial \phi_m}{\partial y_i}(y)\,dy &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\,\phi_m(y)\,dy \\
&\quad + \phi_m(x) \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(x, \eta)\,\eta_i\,d\Omega .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Mit (5.1) folgt sofort aus Satz 2.3

$$\left\| \phi_m(.) \int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(., \eta)\,\eta_i\,d\Omega \right\|_{C^\alpha(\bar{U})} \leq c\,\|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})},$$

denn es ist sogar

$$\int\limits_{\partial K_1(0)} \hat{H}(., \eta)\,\eta_i\,d\Omega \in C^1(\bar{U}),$$

weil die Singularität keine Rolle spielt.

Nun wenden wir uns dem ersten Summanden in (5.18) zu. Er ist wegen (5.18) als Funktion von x in $\bar{U}$ stetig. Wir schätzen ihn jetzt in der $C^\alpha(\bar{U})$–Norm nach oben ab (vergleiche dazu auch die Beweise von Satz 3.4 und Satz 3.5). Bei den folgenden Rechnungen werden wir Lemma 5.3, die letzten zwei Aussagen von Lemma 5.2 und Hilfssatz 3.1 verwenden, ohne dies im einzelnen immer anzugeben. Lemma 5.3 dient hauptsächlich dazu, die zu betrachtenden Integrale auf Integrale mit geringerer Singularität zurückzuführen, um Hilfssatz 3.1 anwenden zu können. Dabei gehen dann n und α in die Konstante ein.

Als erstes beschäftigen wir uns mit der Abschätzung des Betrages. Wir spalten den Integrationsbereich auf und integrieren zuerst über eine Kugel um $x \in \bar{U}$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{|x-y|<1} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\phi_m(y)\,dy \right| &= \left| \int\limits_{|x-y|<1} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)(\phi_m(y) - \phi_m(x))\,dy \right| \\
&\leq \int\limits_{|x-y|<1} \frac{c}{|x-y|^n} |\phi_m(y) - \phi_m(x)|\,dy \\
&\leq c\,H_\alpha[\phi_m] \int\limits_{|x-y|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\leq c\,H_\alpha[\phi_m].
\end{aligned}$$

Bei der Integration über den Außenbereich der Kugel um $x \in \bar{U}$ nutzen wir aus, daß ϕ_m kompakten Träger hat. Hier erkennt man auch, daß die Konstante abhängig von r ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{|x-y|>1} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\,\phi_m(y)\,dy \right| &\leq c \int\limits_{|x-y|>1} \frac{1}{|x-y|^n} |\phi_m(y)|\,dy \\
&\leq c \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\phi_m(y)|\,dy \\
&\leq c\,\|\phi_m\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \int\limits_{K_r(0)} dy \\
&\leq c\,\|\phi_m\|_{C^0(\overline{K_r(0)})}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x, x-y)\,\phi_m(y)\,dy \right\|_{C^0(\bar{U})} \leq c\,\|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \tag{5.19}$$

gezeigt, weil die obigen Abschätzungen für alle $x \in \bar{U}$ gelten.

Schließlich zeigen wir noch

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x', x'-y)\,\phi_m(y)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x''-y)\,\phi_m(y)\,dy \right| \\
&\leq c\,|x'-x''|^\alpha\,\|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \qquad \text{für alle } x', x'' \in \bar{U}.
\end{aligned}$$

Seien also x' und x'' zwei beliebige Punkte in $\bar{U}$, sei $\delta := |x' - x''|$. Dann gilt nach Lemma 5.3

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x', x' - y)\, \phi_m(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x'' - y)\, \phi_m(y)\, dy \tag{5.20}
$$
$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x', x' - y)\, \phi_m(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x' - y)\, \phi_m(y)\, dy \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x' - y)\, \phi_m(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x'' - y)\, (\phi_m(y) - \phi_m(x''))\, dy.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten die ersten beiden und die letzten beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichung (5.20) getrennt.

Die beiden ersten Integrale unterscheiden sich nur in der ersten Variablen von $\partial\hat{H}/\partial z_i$. Wir können Voraussetzung (5.10) einsetzen. Dadurch entstehen die Faktoren δ^α und $c/|x' - y|^n$. Indem wir weiter vorgehen wie bei der Behandlung des Betrages, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x', x' - y)\phi_m(y)\, dy - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x' - y)\phi_m(y)\, dy \right| \\
&\leq \delta^\alpha \Big(\int_{\cancel{\mathbb{R}^n}} \frac{c}{|x' - y|^n} |\phi_m(y)|\, dy + H_\alpha[\phi_m] \Big) \qquad / |x-y| \\
&\leq c\, \delta^\alpha\, \|\phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})}.
\end{aligned}
$$

Wir befassen uns nun mit den beiden letzten Integralen in Gleichung (5.20). Um bei ihrer Abschätzung den Faktor δ^α zu erhalten, verwenden wir diesmal bei der Aufspaltung des Integrationsgebietes $\mathbb{R}^n$ eine Kugel um x' mit Radius 2δ.

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x' - y)\, \phi_m(y)\, dy - \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x'' - y)\, (\phi_m(y) - \phi_m(x''))\, dy \right| \\
&\leq \int_{|x'-y|<2\delta} \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x' - y)\, (\phi_m(y) - \phi_m(x')) \right| dy \\
&\quad + \int_{|x'-y|<2\delta} \left| \frac{\partial \hat{H}}{\partial z_i}(x'', x'' - y)\, (\phi_m(y) - \phi_m(x'')) \right| dy \\
&\leq H_\alpha[\phi_m] \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{c}{|x' - y|^n}\, |x' - y|^\alpha\, dy + H_\alpha[\phi_m] \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{c}{|x'' - y|^n}\, |x'' - y|^\alpha\, dy \\
&\leq c\, H_\alpha[\phi_m] \int_{|x'-y|<2\delta} \frac{1}{|x' - y|^{n-\alpha}}\, dy + c\, H_\alpha[\phi_m] \int_{|x''-y|<3\delta} \frac{1}{|x'' - y|^{n-\alpha}}\, dy \\
&\leq c\, \delta^\alpha\, H_\alpha[\phi_m].
\end{aligned}
$$

Bei der vorletzten Umformung haben wir den Integrationsbereich des zweiten Integrals vergrößert, denn für y mit $|x'-y|<2\delta$ gilt $|x''-y|\le|x''-x'|+|x'-y|<3\delta$.

Bei der Integration über den Außenraum der Kugel kommt es wegen Hilfssatz 3.1 zusätzlich darauf an, die Integrale auf ein Integral mit größerer Singularität zurückzuführen. Dies ist auch der Grund, weshalb wir die Integrale zusammen betrachten. Nach dem Mittelwertsatz gilt nämlich

$$\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x'-y)-\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x''-y)\right|\le\frac{c}{|x'''-y|^{n+1}}|x'-x''|$$

für ein $x'''=x'+t(x''-x')$ mit $t\in(0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}2|x'''-y| &\ge 2|x'-y|-2|x'-x'''|\\ &\ge |x'-y|+2\delta-2|x'-x''|\\ &= |x'-y|, \qquad \text{falls } |x'-y|>2\delta.\end{aligned}$$

Also folgt für y mit $|x'-y|>2\delta$

$$\left|\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x'-y)-\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x''-y)\right|\le\frac{c\,\delta}{|x'-y|^{n+1}},$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x'-y)\,\phi_m(y)\,dy-\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x''-y)\,(\phi_m(y)-\phi_m(x''))\,dy\right|\\ &=\left|\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x'-y)-\frac{\partial\hat{H}}{\partial z_i}(x'',x''-y)\right)(\phi_m(y)-\phi_m(x''))\,dy\right|\\ &\le c\,\delta\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\frac{1}{|x'-y|^{n+1}}\,|\phi_m(x'')-\phi_m(y)|\,dy\\ &\le c\,\delta\,H_\alpha[\phi_m]\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\frac{1}{|x'-y|^{n+1}}|x''-y|^\alpha\,dy\\ &\le c\,\delta\,H_\alpha[\phi_m]\int\limits_{|x'-y|>2\delta}\frac{1}{|x'-y|^{n+1-\alpha}}\,dy\\ &\le c\,\delta\,\delta^{n-(n+1-\alpha)}H_\alpha[\phi_m]\\ &= c\,\delta^\alpha H_\alpha[\phi_m].\end{aligned}$$

Für y mit $|x'-y|>2\delta$ haben wir $|x''-y|\le\delta+|x'-y|\le 2|x'-y|$, womit die vorletzte Abschätzung erklärt ist.

Insgesamt haben wir jetzt nach (5.18) die Aussage (5.15). Daraus folgt die Behauptung. □

Wir übertragen noch Satz 5.4 auf $C^{k+\alpha}$–Funktionen, $k\in\mathbb{N}$.

Satz 5.5 *Sei $\phi \in C^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ mit $supp\,\phi \subset K_r(0)$, $r > 0$. Die Abbildungen $D_x^\gamma \hat{H}$ genügen der Voraussetzung H_α, $|\gamma| \le k$.*
Dann ist die durch

$$\Psi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\,\phi(y)\,dy, \qquad x \in \bar{U}, \tag{5.21}$$

definierte Funktion Ψ aus $C^{k+1+\alpha}(\bar{U})$, und es gilt die Abschätzung:

$$\|\Psi\|_{C^{k+1+\alpha}(\bar{U})} \le c\,\|\phi\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})} \tag{5.22}$$

mit einer von ϕ unabhängigen und von $\hat{H}$, r, n, k, α abhängigen, positiven Konstante c.

Beweis: Wir benutzen den Beweis von Satz 5.4, das heißt die dort beschriebenen Schlußweisen.

Gemäß Lemma 2.4 wählen wir eine Folge ϕ_m aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger in $K_r(0)$, die in $C^k(\overline{K_r(0)})$ gegen ϕ konvergiert und die Bedingung

$$\|\phi_m\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})} \le \|\phi\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})}, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{5.23}$$

erfüllt. Mit der Folge η_l aus Kapitel 3 definieren wir für $m, l \in \mathbb{N}$ die Funktion $\Psi_{m,l}$ wie folgt

$$\Psi_{m,l}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\,\eta_l(|x-y|)\,\phi_m(y)\,dy, \qquad x \in \bar{U}.$$

Sei $|\gamma| \le k+1$ und $x \in \bar{U}$. Nach Voraussetzung folgt aus dem Beweis des letzten Satzes und der Produktregel, daß $\Psi_{m,l} \in C^{k+1}(\bar{U})$ und

$$D^\gamma \Psi_{m,l}(x) = \sum_{\tilde{\gamma} \le \gamma} \binom{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\tilde{\gamma}} \hat{H}(x, x-y)\,\eta_l(|x-y|)\,D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\,\phi_m(y)\,dy$$

gelten. Dabei ist für $|\tilde{\gamma}| \le k+1$ nach Voraussetzung und Lemma 5.2 $D_x^{\tilde{\gamma}}$ schwach singulär. Lemma 3.2 und die Vollständigkeit von $C^k(\bar{U})$ liefern nun, daß $\Psi_{m,l}$ in $C^k(\bar{U})$ gegen ein Ψ_m konvergiert. Es gilt genauer

$$D^\gamma \Psi_m(x) = \sum_{\tilde{\gamma} \le \gamma} \binom{\gamma}{\tilde{\gamma}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} D_x^{\tilde{\gamma}} \hat{H}(x, x-y)\,D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\,\phi_m(y)\,dy.$$

Ist $|\gamma - \tilde{\gamma}| \le k$ und $|\tilde{\gamma}| = 0$, folgt aus Satz 3.3

$$\begin{aligned}\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\,D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\,\phi_m(y)\,dy \right\|_{C^0(\bar{U})} &\le c\,\|D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\,\phi_m\|_{C^0(\overline{K_r(0)})} \\ &\le c\,\|\phi_m\|_{C^0(\overline{K_r(0)})}\end{aligned}$$

mit einer positiven Konstante c.

Für $|\gamma - \tilde{\gamma}| \le k$ und $|\tilde{\gamma}| \ge 1$ können wir, weil $D_x^{\tilde{\gamma}-e_i}\hat{H}$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$ die Voraussetzung $\hat{H}_\alpha$ erfüllt, Satz 3.4 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} D_x^{\tilde{\gamma}}\, \hat{H}(x, x-y)\, D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\, \phi_m(y)\, dy \right\|_{C^\alpha(\bar{U})} &\le c\, \|D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\, \phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \\ &\le c\, \|\phi_m\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})}. \end{aligned}$$

Falls $|\gamma - \tilde{\gamma}| = k + 1$ mit $\gamma_i - \tilde{\gamma}_i > 0$ für ein $i \in \{1,\dots,n\}$ gilt, schließen wir analog zum Beweis von (5.15) mit einer Anwendung des Satzes von Gauß. Es folgt

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{H}(x, x-y)\, D^{\gamma-\tilde{\gamma}}\, \phi_m(y)\, dy \right\|_{C^\alpha(\bar{U})} &\le c\, \|D^{\gamma-\tilde{\gamma}-e_i}\, \phi_m\|_{C^\alpha(\overline{K_r(0)})} \\ &\le c\, \|\phi_m\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})}. \end{aligned}$$

Indem wir die Abschätzungen zusammenfassen, haben wir insbesondere

$$\begin{aligned} \|\Psi_m\|_{C^{k+1+\alpha}(\bar{U})} &\le c\, \|\phi_m\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})} \\ &\overset{(5.23)}{\le} c\, \|\phi\|_{C^{k+\alpha}(\overline{K_r(0)})}. \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, daß c außer von den in Satz 5.4 angegebenen Größen noch von k abhängt. Satz 3.4 und der Beweis von (5.15) besagen zusätzlich, daß $\Psi_m \in C^{k+1+\alpha}(\bar{U})$ ist. Weil Ψ_m nach Lemma 3.6 in $\bar{U}$ gleichmäßig gegen Ψ konvergiert, ergibt sich mit Lemma 2.5 die Behauptung. □

Kapitel 6

Die regularisierende Wirkung von K, L und M

Die bisherigen Ergebnisse ermöglichen uns jetzt zu beweisen, daß K, L und M in den Räumen hölderstetiger Funktionen die Regularität um 1 verbessern, falls der Rand von G hinreichend glatt ist.

Satz 6.1 *Seien $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \alpha \in (0,1)$ und ∂G von der Klasse C^{k+4}. Dann gilt für alle $\lambda \in C^{k+\alpha}(\partial G)$:*

$$M\lambda \in C^{k+1+\alpha}(\partial G), \tag{6.1}$$

$$\|M\lambda\|_{C^{k+1+\alpha}(\partial G)} \leq c\ \|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)} \tag{6.2}$$

mit einer positiven von λ unabhängigen Konstante c. Die Konstante hängt jedoch von M, k, α und dem zugrundeliegenden Atlas von ∂G ab.

Beweis: Seien $(U_j, \overline{x}_j, \overline{x}_j(U_j))$, $1 \leq j \leq N$ und $(\mathcal{U}_j, \overline{x}_j, \overline{x}_j(\mathcal{U}_j))$, $1 \leq j \leq N$ die im ersten Kapitel eingeführten Atlanten von ∂G. Sei $(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$ eine dem zweiten Atlas untergeordnete Teilung der Eins. Sei g_j die Gramsche Determinante von $\overline{x}_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Es gilt für $\lambda \in C^{k+\alpha}(\partial G)$

$$\begin{aligned} M\lambda &= \int_{\partial G} M(.,\xi')\,\lambda(\xi')\,d\Omega \\ &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathcal{U}_j} M(.,\overline{x}_j(u'))\,\lambda(\overline{x}_j(u'))\,\zeta_j(\overline{x}_j(u'))\,\sqrt{g_j(u')}\,du'. \end{aligned}$$

Wir zeigen von jedem Summanden einzeln, daß er aus $C^{k+1+\alpha}(\partial G)$ ist und schätzen ihn, wie im Satz beschrieben, in der $C^{k+1+\alpha}(\partial G)$-Norm nach oben ab. Daraus folgt dann die Behauptung.

Sei also $1 \leq j \leq N$ beliebig. Weiter sei

$$\phi_j(u') := \lambda(\overline{x}_j(u'))\,\zeta_j(\overline{x}_j(u'))\,\sqrt{g_j(u')}, \qquad u' \in \mathcal{U}_j. \tag{6.3}$$

Nach Definition von $C^{k+1+\alpha}(\partial G)$ betrachten wir für $i = 1, \ldots, N$ die Funktionen

$$\int_{\mathcal{U}_j} M(\overline{x}_i(.), \overline{x}_j(u'))\,\phi_j(u')\,du' \tag{6.4}$$

auf $\overline{U}_i$.

Ist $i = j$, wenden wir Satz 4.3, die lokale Darstellung von M, an. Nach Wahl des Atlanten von ∂G ist U_j hinreichend klein. Wir haben damit für $u \in \overline{U}_j$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{U}_j} M(\overline{x}_j(u), \overline{x}_j(u'))\,\phi_j(u')\,du' \\ &\quad = \int_{\mathcal{U}_j} H_M(u, u-u')\,\phi_j(u')\,du' + \int_{\mathcal{U}_j} R_M(u, u-u')\,\phi_j(u')\,du'. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Es ist $\zeta_j \in C^\infty(\partial G)$ und $supp(\zeta_j) \subset \overline{x}_j(\mathcal{U}_j)$. Wir setzen $\overline{x}_j \in C^{k+4}(\overline{U}_j)$ zu einer $C^{k+4}(\mathbb{R}^2)$–Funktion mit kompaktem Träger fort. Dann gilt nicht nur $supp(\phi_j) \subset \mathcal{U}_j$, sondern nach den Eigenschaften hölderstetiger Funktionen auch $\phi_j \in C^{k+4}(\mathbb{R}^2)$. Aus den im Satz 4.3 angegebenen Eigenschaften folgt, daß H_M die Voraussetzungen von Satz 5.4 bzw. von Satz 5.5 erfüllt. Demnach ist das erste Integral auf der rechten Seite von (6.5) aus $C^{k+1+\alpha}(\overline{U}_j)$ und wir erhalten mit einer positiven Konstante c

$$\left\| \int_{\mathcal{U}_j} H_M(u, u-u')\,\phi_j(u')\,du' \right\|_{C^{k+1+\alpha}(\overline{U}_j)} \leq c\,\|\phi_j\|_{C^{k+\alpha}(\mathcal{U}_j)}.$$

Die in Satz 4.3 genannten Eigenschaften besagen außerdem, daß eine analoge Aussage für R_M gilt. Dies leitet man mit Satz 3.4 einfach her. Approximationen, wie bei den Beweisen der Sätze 5.4 und 5.5, sind nicht nötig. Nach dem Satz von Lebesgue kann man Ableitung und Integration vertauschen, weil die bei der Ableitung entstehenden Integralkerne nach Satz 4.3 schwach singulär sind. Damit ergibt sich, daß (6.4) für $i = j$ aus $C^{k+1+\alpha}(\overline{U}_j)$ ist. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathcal{U}_j} M(\overline{x}_j(.), \overline{x}_j(u'))\,\phi_j(u')\,du' \right\|_{C^{k+1+\alpha}(\overline{U}_j)} &\leq c\,\|\phi_j\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\mathcal{U}}_j)} \\ &\leq c\,\|\lambda \circ \overline{x}_j\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\mathcal{U}}_j)} \\ &\leq c\,\|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

weil die Faktoren $\zeta_j(\overline{x}_j(.))\,\sqrt{g_j(.)}$ von ϕ_j nach oben beschränkt sind.

Sei nun $i \neq j$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß

$$dist(\overline{x}_i(\overline{U}_i), \overline{x}_j(\overline{\mathcal{U}}_j)) := \delta_i > 0$$

gilt, denn für $i = j$ ist die Aussage schon bewiesen, und wegen $\bar{\mathcal{U}}_j \subset U_j$ haben wir $dist(\bar{x}_j(\bar{\mathcal{U}}_j), \bar{x}_j(\partial U_j)) > 0$. Weil M schwach singulär ist, folgt

$$
\begin{aligned}
(6.7) \quad \left\| \int\limits_{\mathcal{U}_j} M(\bar{x}_i(.), \bar{x}_j(u'))\, \phi_j(u')\, du' \right\|_{C^{k+1+\alpha}(\bar{U}_i)} &\leq \frac{c}{\delta_i} \left\| \int\limits_{\mathcal{U}_j} |\phi_j(u')|\, du' \right\|_{C^{k+1+\alpha}(\bar{U}_i)} \\
&\leq c\, \|\phi_j\|_{C^0(\bar{\mathcal{U}}_j)} \\
&\leq c\, \|\lambda\|_{C^0(\partial G)}.
\end{aligned}
$$

Wir haben jetzt für $i = 1, \ldots, n$ gezeigt, daß (6.4) aus $C^{k+1+\alpha}(\bar{U}_i)$ ist. Mit den Abschätzungen (6.6) und (6.7) ist damit, wie am Anfang des Beweises erklärt, die Behauptung nachgewiesen. □

Ein entsprechender Satz gilt auch für K und L. Allerdings unter der Voraussetzung, daß die Regularität des Randes von G um 1 höher ist.

Satz 6.2 *Sei $k \in I\!N \cup \{0\}, \alpha \in (0,1)$ und ∂G von der Klasse C^{k+5}. Dann gilt für alle $\lambda, \mu \in C^{k+\alpha}(\partial G)$:*

$$(6.8) \qquad K\lambda, L\mu \in C^{k+1+\alpha}(\partial G),$$

$$(6.9) \qquad \|K\lambda\|_{C^{k+1+\alpha}(\partial G)} \leq c\, \|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)},$$

$$(6.10) \qquad \|L\mu\|_{C^{k+1+\alpha}(\partial G)} \leq c\, \|\lambda\|_{C^{k+\alpha}(\partial G)}$$

mit einer positiven von λ und μ unabhängigen Konstante c. Die Konstante hängt jedoch von K, L, k, α und dem zugrundeliegenden Atlas von ∂G ab.

Beweis: Wir schließen analog zum Beweis von Satz 6.1. Statt Satz 4.3 setzen wir Satz 4.4 ein. Dies ist nach der Voraussetzung über ∂G möglich. □

Kapitel 7

Anwendungen

Mit den in dieser Arbeit gezeigten Regularitätseigenschaften der Randintegraloperatoren der klassischen Potentialtheorie kann man Aussagen über das Dirichlet– und das Neumann–Problem beweisen, muß aber starke Voraussetzungen an den Rand von G stellen. Ein Beispiel dafür ist die Arbeit [5].

Außerdem kann man Aussagen über das Neumann–Problem auf Aussagen über das Dirichlet–Problem zurückführen. Wir zeigen an einem Beispiel, wie man dabei vorgeht.

Für das Dirichlet–Problem ist folgender Satz bekannt (siehe [1, S. 236]):

Satz 7.1 *Sei ∂G von der Klasse $C^{2+\alpha}$. Sei $u \in C^{2+\alpha}(\bar{G})$ eine Lösung des Dirichlet–Problems*

$$(D) \qquad \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } G, \\ u &= f && \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

für $f \in C^{\alpha}(\partial G)$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c

$$\|D^2 u\|_{C^{\alpha}(\bar{G})} \leq c\, \|f\|_{C^{2+\alpha}(\partial G)}\,.$$

Ein ähnlicher Satz gilt für das Neumann–Problem:

Satz 7.2 *Sei ∂G von der Klasse C^5. Sei $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ eine Lösung des Neumann–Problems*

$$(N) \qquad \begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } G, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g && \text{auf } \partial G \end{aligned}$$

mit einem zulässigen $g \in C^{1+\alpha}(\partial G)$. Dann gilt mit einer positiven Konstante c

$$\|D^2 u\|_{C^{\alpha}(\bar{G})} \leq c\, \|g\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}\,.$$

Beweis: Die für diesen Beweis nötigen Sätze aus der Potentialtheorie findet man zusammengefaßt in [13, S. 15–17], eine ausführlichere Darstellung mit Beweisen zum Beispiel in [16, S. 104–107, 111–118] oder [11, §16].

Das Einfachschichtpotential

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} \frac{1}{|x-\xi'|} \lambda(\xi')\, d\Omega, \qquad x \in \bar{G},$$

mit Dichte $\lambda \in C^\alpha(\partial G)$ löst das Neumann–Problem (N) genau dann, wenn λ der Integralgleichung

$$\lambda - K\lambda = \frac{1}{2\pi} g \tag{7.1}$$

in $C^\alpha(\partial G)$ genügt. In diesem Fall gilt nach Satz 6.2

$$K\lambda \in C^{1+\alpha}(\partial G).$$

Aus (7.1) folgt dann

$$\lambda \in C^{1+\alpha}(\partial G),$$

da $g \in C^{1+\alpha}(\partial G)$ vorausgesetzt ist. Außerdem haben wir $u|\partial G = M\lambda$, denn M ist definiert als Einschränkung der Lösung des Neumann–Problems auf den Rand von G. Wir können daher Satz 6.1 auf λ anwenden. Es gilt

$$u|\partial G \in C^{2+\alpha}(\partial G)$$

und

$$\|u|\partial G\|_{C^{2+\alpha}(\partial G)} \le c\ \|\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \tag{7.2}$$

mit einer positiven Konstante c. Als Lösung von (N) ist u natürlich auch Lösung von (D) mit Vorgabe $f = u|\partial G$. Also gilt $u \in C^{2+\alpha}(\bar{G})$. Nach Satz 7.1 und (7.2) ergibt sich daher:

$$\|D^2 u\|_{C^\alpha(\bar{G})} \le c\ \|\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}\,. \tag{7.3}$$

Wir müssen nun noch λ nach oben durch g abschätzen, und zwar in der $C^{1+\alpha}$–Norm. λ ist Lösung der Integralgleichung (7.1). Da K im Banachraum $C^{1+\alpha}(\partial G)$ kompakt ist, können wir die Riesz–Schauder–Theorie und insbesondere die Fredholmsche Alternative im Banachraum benutzen (siehe [2, S. 183]).
Sei $\mathcal{N}$ der Nullraum des Operators $I - K$ in $C^{1+\alpha}(\partial G)$. $\mathcal{N}$ ist ein endlichdimensionaler Banachraum.
Falls $\mathcal{N} = \{0\}$ ist, erhalten wir nach [14, Hilfssatz III.3.4] sofort die gewünschte Abschätzung und mit (7.3) die Aussage des Satzes, denn es gilt

$$\|\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \le c\ \|\lambda - K\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = c\ \|g\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}$$

mit einer positiven Konstante c.
Sei nun $\mathcal{N} \neq \{0\}$. Dann haben wir nach [2, S. 183]

$$\inf_{h\in\mathcal{N}} \|\lambda + h\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \le c\ \|\lambda - K\lambda\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = c\ \|g\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \tag{7.4}$$

mit einer positiven Konstante c. Sei (h_ν) eine Folge in $\mathcal{N}$ mit

$$\|\lambda + h_\nu\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \to \inf_{h\in\mathcal{N}} \|\lambda + h\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}, \qquad \nu \to \infty.$$

Insbesondere ist dann $(\|\lambda + h_\nu\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)})$ und damit auch $(\|h_\nu\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)})$ beschränkt. Ohne Einschränkung können wir deshalb annehmen, daß (h_ν) in $\mathcal{N}$ gegen ein h_0 konvergiert, weil $\mathcal{N}$ ein endlichdimensionaler Banachraum ist. Es gilt demnach

$$(7.5) \qquad \|\lambda + h_0\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} = \inf_{h\in\mathcal{N}} \|\lambda + h\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)} \overset{(7.4)}{\leq} c\, \|g\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}\,.$$

Mit u löst auch $\tilde{u}$ definiert durch

$$\tilde{u}(x) := \int\limits_{\partial G} \frac{1}{|x-\xi'|}\,(\lambda(\xi') + h_0(\xi'))\, d\Omega, \qquad x \in \bar{G},$$

das Problem (N), da die Dichte von $\tilde{u}$ die Integralgleichung (7.1) erfüllt. Die Argumentation wie am Anfang des Beweises für u liefert für $\tilde{u}$ entsprechend

$$(7.6) \qquad \|D^2\tilde{u}\|_{C^\alpha(\bar{G})} \leq \|\lambda + h_0\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}\,.$$

Weil u und $\tilde{u}$ sich als Lösungen des Neumann–Problems (N) auf jeder Zusammenhangskomponente von G nur durch eine Konstante unterscheiden (siehe [13, S. 81]), ergibt sich insgesamt mit (7.6) und (7.5)

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_{C^\alpha(\bar{G})} &= \|D^2\tilde{u}\|_{C^\alpha(\bar{G})} \\ &\leq c\, \|g\|_{C^{1+\alpha}(\partial G)}\,. \end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

[1] L. Bers, F. John, M. Schechter: *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Providence, Rhode Island (1964).

[2] P. Deuring, W. von Wahl, P. Weidemaier: *Das lineare Stokes-System in $\mathbb{R}^3$. I. Vorlesungen über das Innenraumproblem.* Bayreuther Mathematische Schriften 27: Bayreuth (1988).

[3] O. Forster: *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Vieweg: Braunschweig (1984).

[4] O. Forster: *Analysis 3. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen.* Vieweg: Braunschweig (1984).

[5] A. Gmeiner: *Die maximale Regularität der Lösung des Neumann-Problems bei einer hölderstetigen Neumann-Vorgabe.* Diplomarbeit: Bayreuth (1992).

[6] K. Jörgens: *Lineare Integraloperatoren.* B.G. Teubner: Stuttgart (1970).

[7] A. Korn: *Sur les équations de l'élasticité.* Ann. École Normale Supérieure, 9–75 (1907).

[8] R. Leis: *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Bibliographisches Institut: Mannheim (1967).

[9] L. Lichtenstein: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II.3.1.* B.G. Teubner: Leipzig (1909-1921).

[10] W.I. Smirnov: *Lehrgang der Höheren Mathematik IV.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin (1958).

[11] H. Triebel: *Höhere Analysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin (1972).

[12] W. von Wahl: *Abschätzungen für das Neumann-Problem und die Helmholtz-Zerlegung von L^p.* Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch–Physikalische Klasse, 9–37. Göttingen (1990).

[13] W. von Wahl: *Das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes.* Rudolf–Lipschitz–Vorlesung: Sonderforschungsbereich 256, Bonn (1989).

[14] W. von Wahl: *Funktionalanalysis I.* Universität Bayreuth (Wintersemester 1989/90).

[15] W. von Wahl: *Sobolev–Räume, Elliptische Systeme, Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen I.* Universität Bayreuth (Wintersemester 1990/91).

[16] W. Walter: *Einführung in die Potentialtheorie.* Bibliographisches Institut: Mannheim (1971).