UNIVERSITÄT BAYREUTH
Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik
Lehrstuhl Mathematik VI -
Partielle Differentialgleichungen und Mathematische Physik
Prof. Dr. Wolf von Wahl

Diplomarbeit im Fach Mathematik

Verwandlung von Strudeln in Wirbel beim POINCARÉschen Zentrumproblem

Eingereicht von
Nicole Günzel-Weinkamm,
geb. Günzel
Bayreuth, den 29. Juli 2011

Danksagung
An dieser Stelle bedanke ich mich ganz herzlich bei Herrn Prof. von Wahl für seine Unterstützung während der Entstehung dieser Diplomarbeit.
Vielen Dank auch an all diejenigen, die mir bei technischen Problemen sowie beim Korrekturlesen behilflich waren, und an meine Eltern, die mir das zusätzliche Diplomstudium ermöglicht haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Grundlegendes über das POINCARÉsche Zentrumproblem

Grundlage dieser Diplomarbeit bildet das "POINCARÉsche Zentrumsproblem", welches seinen Ursprung in himmelsmechanischen Fragestellungen hat. Schon vor über 100 Jahren haben sich die damaligen Wissenschaftler mit der Frage beschäftigt, wie stabil unser Sonnensystem eigentlich sei. Seit Kepler wissen wir, dass sich unsere Planeten nicht auf Kreisen, sondern auf Ellipsen um die Sonne bewegen. Damals interessierte man sich dafür, unter welchen Umständen man allgemein auf (stabile) geschlossene Bahnen schließen könnte.

Dieses Problem lässt sich ausgehend von der Kreisgleichung $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ als Differentialgleichung 1. Ordnung formulieren

$$y' = -\frac{x + p(x,y)}{y + q(x,y)}, \tag{1.1}$$

wobei p und q Potenzreihen vom Grad ≥ 2 in x und y sind, d.h. genauer

$$p(x,y) = \sum_{i \geq 2} p_i(x,y) \text{ und } q(x,y) = \sum_{i \geq 2} q_i(x,y)$$

mit homogenen Polynomen p_i und q_i i-ten Grades in x und y.
Die Terme $p(x,y)$ und $q(x,y)$ stören also die ursprünglich konzentrischen Kreise in der Umgebung des Nullpunktes ($x = y = 0$). Dieser bildet den einzigen Gleichgewichtspunkt[1].

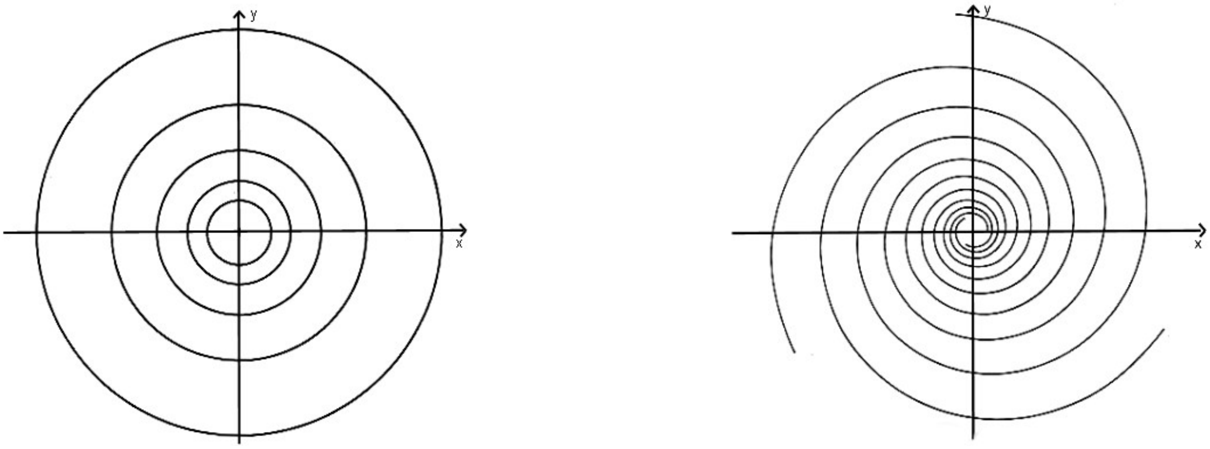
Dort ergibt sich dann als charakteristisches Verhalten der Lösungen zum Einen die stabile Variante ausschließlich geschlossener Bahnen periodischer Lösungen um den Nullpunkt (sog. *Wirbelfall*) und zum Anderen die instabile Möglichkeit, in der die Bahnen spiralig um den Ursprung verlaufen (sog. *Strudelfall*)[2].

Das POINCARÉsche Zentrumproblem besteht nun darin, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, dass der Wirbelfall eintritt, d.h. der Ursprung ein Zentrum bildet - oder in himmelsmechanischer Ausdrucksweise: der Planet weder in die Sonne stürzt, noch ins weite All abdriftet.

1.2 Frommers Beitrag zum POINCARÉschen Zentrumproblem

Max Frommer betrachtete in seiner fundamentalen Arbeit [1] gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung der Form (1.1) genauer. Er schreibt: "Nach den topologischen Untersuchungen von Brouwer können in der Umgebung einer rationalen Unbestimmtheitsstelle einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zwei "Hauptfälle" der Überdeckung mit Integralkurven vorkommen."[3]

[1] wird auch singuläre Stelle, kritischer Punkt oder Unbestimmtheitsstelle genannt
[2] siehe Abbildung 1.1, wurde [5] entnommen
[3] siehe [1] S.395



(a) Wirbelfall (b) Strudelfall

Abbildung 1.1: Wirbel-/Strudel-Unterscheidung

Den ersten Hauptfall, in dem es Integralkurven gibt, die mit bestimmter Tangentenrichtung in die singuläre Stelle einmünden, hat Frommer durch die Angabe eines Verfahrens in einer seiner früheren Arbeiten[4] abgehandelt. Im zweiten Hauptfall gibt es keine derartigen Integralkurven. Er unterscheidet folgende Möglichkeiten:[5]

1. Alle Integralkurven in der Nähe der singulären Stelle sind geschlossen *(Wirbel)*.
2. In hinreichender Nähe der singulären Stelle gibt es keine geschlossenen Integralkurven; alle Integralkurven in diesem Bereich sind Spiralen, die sich asymptotisch der singulären Stelle nähern *(Strudel)*.
3. In beliebiger Nähe der singulären Stelle gibt es geschlossene Integralkurven, denen sich andere asymptotisch nähern *(Strudel mit Grenzzykeln)*.

Bei (1.1) tritt entweder der erste oder der zweite Fall ein.
Um dies zu bestimmen, d.h., ob die Lösungen einer gegebenen Differentialgleichung vom Wirbel- oder vom Strudeltyp sind, verwendet man ein Verfahren, das auf Dehn, Frommers Doktorvater, zurückgeht[6]. Dabei vergleicht man die Feldrichtungen einer geeignet konstruierten Vergleichsdifferentialgleichung, deren Lösungen in einer Umgebung um $(0,0)$ sicher vom Wirbeltyp sind, mit denen der Ausgangsdifferentialgleichung in dieser Umgebung. Kann die Vergleichsdifferentialgleichung $\widetilde{y}' = \frac{\partial_x F}{\partial_y F}$, mit $F(x,y) = x^2 + y^2 + f_3(x,y) + f_4(x,y) + ... + f_k(x,y) + ...$, wobei die $f_i(x,y) = A_{i\,0}x^i + A_{i-1\,1}x^{i-1}y^1 + ... + A_{0\,i}y^i$ homogene Polynome vom Grad i sind, so gebildet werden, dass die betrachteten Feldrichtungen in einer gewissen Umgebung von $(0,0)$ nie übereinstimmen, so können nicht beide Differentialgleichungen vom selben Typ sein. D.h. die Ausgangsdifferentialgleichung muss zum Strudeltyp gehören, da die Vergleichsdifferentialgleichung eben als Wirbel konstruiert wurde.
Um beide Differentialgleichungen zu vergleichen, bildet man nun die Differenz.
Dabei fallen die Glieder zweiten Grades weg. Die Koeffizienten von $f_3(x,y)$ können anschließend so bestimmt werden, dass die Glieder dritten Grades in der Differenz wiederum verschwinden. Erst bei den Gliedern vierten Grades ist es im Allgemeinen nicht möglich, dass diese sich gegenseitig

[4] Frommer, Math. Ann. 99 (1928)
[5] siehe [1] S.395
[6] vgl. im Folgenden auch [1], S.398-401

wegheben. Aus den Koeffizienten von $f_4(x,y) = A_{4\,0}x^4 + A_{3\,1}x^3y^1 + ... + A_{0\,4}y^4$ kann man nun zusammen mit den Koeffizienten der $p_i(x,y)$ und $q_i(x,y)$ für $i = 2$ und $i = 3$, d.h. den Gliedern zweiten und dritten Grades, aus der Ausgangsdifferentialgleichung die sog. erste Strudelgröße D_1 bestimmen.
Ist diese Größe ungleich Null, so wissen wir, dass unsere Ausgangsdifferentialgleichung vom Strudeltyp ist. D.h. also, dass wir für einen Wirbel die notwendige Bedingung $D_1 = 0$ erfüllen müssen[7].
Dieses Verfahren wird in der vorliegenden Arbeit für den Fall, dass $p(x,y)$ und $q(x,y)$ aus (1.1) vom Grad 3 sind, von Bedeutung sein.

1.3 Der Beitrag dieser Arbeit zum POINCARÉschen Zentrumproblem

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich damit, unter welchen Bedingungen an p und q wir für eine gegebene Differentialgleichung mit **Polynomen** p, q durch Addition von Termen höherer Ordnung den Wirbelfall herstellen können.
Dieses Problem wurde erstmalig von Frommer [8] untersucht, allerdings ohne eine genaue Analyse. Diese wird hier für homogene Polynome p, q vorgestellt.

Wir gehen dabei wie folgt vor:
In Kapitel 2 betrachten wir zunächst die allgemeine Situation. Anfangs versuchen wir herauszufinden, wie wir die Ausgangsdifferentialgleichung unter den Bedingungen, die für die Erzeugung eines Wirbels durch Addition von Termen höherer Ordnung notwendig sind, erreichen können. Es wird also untersucht, wie unsere Differentialgleichung grundsätzlich aufgebaut sein muss, um den Wirbelfall herstellen zu können. Bezug nehmend auf Herrn Prof. von Wahls Skript [2] betrachten wir anschließend den Zusammenhang der homogenen Polynome p und q aus unserer Ausgangsdifferentialgleichung mit den zu addierenden Zusatzgliedern höherer Ordnung, wobei wir ein lineares Gleichungssystem als Lösungsmöglichkeit erhalten. Da dieses System je nach Gradzahl von p bzw. q sehr groß werden kann, vereinfachen wir dieses in Satz 2.
Kapitel 3 beinhaltet einzelne Beispiele zur Anwendung des linearen Gleichungssystems.
Bei genauerer Betrachtung der Beispiele lässt sich eine gewisse Struktur der Matrix des Gleichungssystems erkennen. Diese wird in Kapitel 4 untersucht. Sowohl die Aussagen über die Struktur der Matrix als auch die Erkenntnisse über deren Determinante stellen das wichtigste Resultat dieser Arbeit dar.
Schließlich folgt in Kapitel 5 noch ein Beitrag zum Fall $p(x,y)$ und $q(x,y)$ vom Grad 3. Dabei betrachten wir Frommers Aussagen über die Strudelgrößen und deren Zusammenhang von der Erweiterbarkeit einer Differentialgleichung mit der Verwandlung eines Strudels in einen Wirbel. Dies liefert uns die Sätze 5 und 6, welche abschließend noch durch zwei Beispiele veranschaulicht werden.

[7] vgl. in [1], S.402
[8] siehe [1], S.396 ff

2 Hinführung

2.1 Vorgehen allgemein

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen stellt die gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + P(x,y)}{y^{2n-1} + Q(x,y)} = -\frac{\mathcal{A}(x,y)}{\mathcal{B}(x,y)} \tag{2.1}$$

dar, mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und P und Q homogene Polynome, beide vom Grad $p \geq 2n$.
$(0,0)$ bildet hier eine Stelle der Unbestimmtheit (kritischer Punkt).

Die Differentialgleichung aus (2.1) kann nun entweder vom Strudel- oder vom Wirbeltyp sein. Um dies nachzuweisen, verwendet man ein Verfahren, das auf Dehn zurückgeht. Wie schon in der Einleitung genauer beschrieben, vergleicht man dabei die Feldrichtungen einer geeignet konstruierten Vergleichsdifferentialgleichung mit denen der Ausgangsdifferentialgleichung in einer Umgebung um $(0,0)$.
Unabhängig von der Ausgangssituation interessiert es uns allerdings mehr, ob es für die gegebene Differentialgleichung überhaupt die Möglichkeit gibt, den Wirbelfall herstellen zu können.
Frommer und von Wahl haben sich mit diesem Fall genauer auseinandergesetzt und ein recht einfaches Verfahren entwickelt, um die benötigten Zusatzterme zu berechnen.

2.2 Möglicher Ansatz

Wir starten mit der Ausgangsdifferentialgleichung (2.1). Gelingt es uns, diese in die Form einer Hamilton-Gleichung mit einer Hamilton-Funktion F zu bringen, so wären wir fertig.
Diese würde im Wesentlichen mit $x^{2n} + y^{2n}$ beginnen. Von einer solchen Hamilton-Funktion weiß man, dass für diese die Niveaulinien geschlossen sind, d.h. für $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ der Wirbelfall vorliegt. F_x bezeichnet hierbei die Ableitung von F nach x und F_y dementsprechend die Ableitung von F nach y.[9]

Wir müssen im ersten Schritt somit eine geeignete Funktion finden, für die die oben genannten Überlegungen zutreffen. Diese Eigenschaften leiten wir für unsere Funktion nochmals Schritt für Schritt her.

2.2.1 Suche nach einem geeigneten F

Allgemein suchen wir Kurven $(x(t), y(t))$, für die gilt: $F(x(t), y(t)) = const$ in einer Umgebung des Nullpunktes.
Damit erhalten wir die Voraussetzungen für den Wirbelfall.

Wenn $F(x(t), y(t)) = const$, so gilt: $\frac{d}{dt}\big(F(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} = 0$.

[9] siehe hierzu Satz 1

D.h. die gesuchte Kurve ist die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0,$$

wenn wir die Schreibweise als Nullstellengebilde einer Differentialform zu Grunde legen.

Als System geschrieben ergibt sich:

$$\dot{x} = +\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dx}{dt}$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dy}{dt}$$

F nennt man dann Hamilton-Funktion und das System vom Hamiltonschen Typ. D.h., dass diese Funktion auf den Lösungskurven konstant ist. Wie es von Anfang an auch beabsichtigt war.

Möchte man x als Kurvenparameter verwenden, so kann man für $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ die vorhergehende Aussage auch schreiben als:

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Rightarrow y' = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F} \tag{2.2}$$

Unsere Ausgangsdifferentialgleichung (2.1) sollte also im Zähler die Ableitung einer Funktion F nach x und im Nenner die Ableitung der Funktion nach y besitzen.

Dabei muss für F allerdings noch einer der folgenden beiden Fälle gelten:
Entweder ist F positiv und besitzt in $(0,0)$ ein striktes lokales Minimum oder F nimmt nur negative Werte an und besitzt dann in $(0,0)$ ein striktes lokales Maximum.

Wir betrachten die erste Alternative und versuchen es mit folgender Funktion:

Satz 1. *Sei* $F(x,y) = x^{2n} + y^{2n} + \sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$ *mit* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.
Dann hat F *in* $(0,0)$ *ein striktes lokales Minimum.*

Beweis.

$$\begin{aligned}
F(x,y) &\geq x^{2n} + y^{2n} - \sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} |c_\alpha|\, |x^{\alpha_1}|\, |y^{\alpha_2}| \\
&\geq x^{2n} + y^{2n} - \sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} |c_\alpha|\, (x^2+y^2)^{\frac{\alpha_1}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{\alpha_2}{2}} \\
&\geq x^{2n} + y^{2n} - \Big(\sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} |c_\alpha| \Big) (x^2+y^2)^{\frac{2n+1}{2}} \text{ für } x^2+y^2 \leq 1 \\
&\geq C_0 (x^2+y^2)^n - \Big(\sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} |c_\alpha| \Big) (x^2+y^2)^{n+\frac{1}{2}} \text{ für } x^2+y^2 \leq 1 \text{ mit } C_0 > 0 \\
&\geq C_0 (x^2+y^2)^n \Big(1 - \Big(\sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} |c_\alpha| \Big) (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \Big) \\
&\geq C_1 (x^2+y^2)^n \text{ für } x^2+y^2 \leq \delta, \delta \text{ hinreichend klein.}
\end{aligned}$$

Also ist F positiv in $x^2 + y^2 < \delta$ und $(x,y) \neq (0,0)$. □

Mit einem solchen F gelangen wir schon sehr nahe an unsere Ausgangsdifferentialgleichung. Betrachten wir noch einmal (2.2), dann erhalten wir mit einer Funktion F wie aus Satz 1:

$$y' = -\frac{\partial_x F}{\partial_y F} = -\frac{2nx^{2n-1} + \widetilde{P}(x,y)}{2ny^{2n-1} + \widetilde{Q}(x,y)} \tag{2.3}$$

mit Polynomen $\widetilde{P}$ und $\widetilde{Q}$, wobei

$$\begin{aligned} \widetilde{P} &= \partial_x \left(\sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \right) \text{ und} \\ \widetilde{Q} &= \partial_y \left(\sum_{\alpha, N \geq |\alpha| \geq 2n+1} c_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} \right). \end{aligned}$$

Allerdings kommen die Polynome P und Q in (2.1) nicht von unserer Hamiltonfunktion F. Sie können also nicht gleich den Polynomen $\widetilde{P}$ und $\widetilde{Q}$ aus (2.3) sein. Man benutzt deshalb einen Eulerschen Multiplikator $e^{\widetilde{p}}$.
Denn: $F = F(x,y) = (x^{2n} + y^{2n} + \sum ...)e^{\widetilde{p}}$, mit $\widetilde{p}$ ein beliebiges Polynom, das im Nullpunkt verschwindet, hat ebenfalls geschlossene Niveaulinien in der Nähe des Nullpunktes.

2.2.2 Umformung zur Ausgangsdifferentialgleichung

Nun können wir von der Hamilton-Funktion F ausgehend durch geeignete Umformungen auf die Ausgangsdifferentialgleichung schließen.[10]
Mit $F = (x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})e^{\widetilde{p}}$ und $\mu = 2ne^{\widetilde{p}}$ der Eulersche Multiplikator, gilt also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x F}{\partial_y F} &= \frac{\partial_x[(x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})e^{\widetilde{p}}]}{\partial_y[(x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})e^{\widetilde{p}}]} \\ &= \frac{(2nx^{2n-1} + \widetilde{q}_x)e^{\widetilde{p}} + (x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})\widetilde{p}_x e^{\widetilde{p}}}{(2ny^{2n-1} + \widetilde{q}_y)e^{\widetilde{p}} + (x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})\widetilde{p}_y e^{\widetilde{p}}} \\ &= \frac{(2nx^{2n-1} + \widetilde{q}_x) + (x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})\widetilde{p}_x}{(2ny^{2n-1} + \widetilde{q}_y) + (x^{2n} + y^{2n} + \widetilde{q})\widetilde{p}_y} \end{aligned}$$

Mit $2nP = \widetilde{q}_x + (x^{2n} + y^{2n})\widetilde{p}_x$ und $2nQ = \widetilde{q}_y + (x^{2n} + y^{2n})\widetilde{p}_y$ folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial_x F}{\partial_y F} &= \frac{2n(x^{2n-1} + P + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x)}{2n(y^{2n-1} + Q + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y)} \\ &= \frac{x^{2n-1} + P + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x}{y^{2n-1} + Q + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei P und Q die homogenen Polynome vom Grad $p \geq 2n$ der Ausgangsdifferentialgleichung sind. Die Polynome $\widetilde{q}$ und $\widetilde{p}$ sind noch unbekannt.

[10] vgl. im Folgenden auch [2] S.1 f

2.2.3 Vergleich der Grade

Wir haben nun folgende Situation:

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + P + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x}{y^{2n-1} + Q + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y}$$

Gilt $\deg \widetilde{q} \geq 2n + 1$, so sind die Niveaulinien von F geschlossen und der Ursprung bildet das Zentrum für

$$y' = -\frac{\mathcal{A}(x,y) + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x}{\mathcal{B}(x,y) + \frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y}$$

unter der Voraussetzung, dass

$$2nP = \widetilde{q}_x + (x^{2n} + y^{2n})\widetilde{p}_x, \tag{2.5}$$

$$2nQ = \widetilde{q}_y + (x^{2n} + y^{2n})\widetilde{p}_y. \tag{2.6}$$

Im Zähler der Differentialgleichung wird also der Term $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x$ addiert, im Nenner der Term $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y$.
Wenn wir nun die Grade vergleichen, erhalten wir folgenden Zusammenhang:
Wir setzen

$$\deg P = \deg Q = p \geq 2n,$$

dann folgt mit (2.5) und (2.6)

$$\deg \widetilde{q} = p + 1,$$

$$2n - 1 + \deg \widetilde{p} = p \text{ , also } \deg \widetilde{p} = p - (2n - 1).$$

2.3 Aufstellen des Gleichungssystems $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$

Für die gegebenen $2(p+1)$ Koeffizienten von P und Q stehen uns nun $2p+2+2-2n = 2p+4-2n$ Koeffizienten von $\widetilde{q}$ und $\widetilde{p}$ zur Verfügung.
Dies kann als folgendes lineares Gleichungssystem geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Hierbei stehen die Vektorkomponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ für die Koeffizienten von P und Q sowie $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ für die Koeffizienten von $\widetilde{q}$ und $\widetilde{p}$.
$\mathcal{C}$ besteht also aus $2(p + 1)$ Zeilen und $2(p + 1) + 2 - 2n$ Spalten, denn:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{pmatrix} \text{ besitzt } 2(p + 1) \text{ Zeilen,}$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} \end{pmatrix} \text{ besitzt } p + 2 + p - (2n - 1) + 1 = 2(p + 1) + 2 - 2n \text{ Zeilen.}$$

Werten wir die Bedingungen (2.5) und (2.6) genauer aus, erhalten wir folgende Vereinfachung:

Satz 2. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und P, Q homogene Polynome in x und y vom Grad $p \geq 2n$. Sei $\widetilde{p}$ ein homogenes Polynom vom Grad $p - (2n - 1)$.*
Sei

$$y^{2n-1}\widetilde{p}_x - x^{2n-1}\widetilde{p}_y = P_y - Q_x. \tag{2.8}$$

Dann gibt es ein homogenes Polynom $\widetilde{q}$ *vom Grad* $p+1$*, s.d.* (2.5) *und* (2.6) *erfüllt sind. D.h. also*

$$\left.\begin{aligned} 2nP &= \widetilde{q}_x + (x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_x, \\ 2nQ &= \widetilde{q}_y + (x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_y. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Beweis. (2.8) impliziert, dass $(2nP-(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_x, 2nQ-(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_y)$ ein Gradient ist. Wir setzen beispielsweise

$$\partial_x f = \sum_{\nu+\mu=p} \widehat{p}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 2nP - (x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_x,$$
$$\partial_y f = \sum_{\nu+\mu=p} \widehat{q}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 2nQ - (x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_y.$$

Da auf der rechten Seite die Taylor-Entwicklung für $\partial_x f, \partial_y f$ um den Ursprung steht, erhalten wir für f ein Polynom vom Grad $p+1$. Durch die Integration nach x bzw. y erhält man

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum^{I}_{\substack{\nu+\mu=p+1,\\ \mu\geq 1,\nu\geq 1}} \widehat{p}_{\mu-1\ \nu}\frac{1}{\mu} x^\mu y^\nu + \widehat{p}_{p\ 0}\frac{1}{p+1}x^{p+1} + \varphi(y) \text{ bzw.} \\ f_2 &= \sum^{II}_{\substack{\nu+\mu=p+1,\\ \mu\geq 1,\nu\geq 1}} \widehat{q}_{\mu\ \nu-1}\frac{1}{\nu} x^\mu y^\nu + \widehat{q}_{0\ p}\frac{1}{p+1}y^{p+1} + \psi(x) \end{aligned}$$

mit $\varphi(y)$ ein Term, der nur von y abhängt, und $\psi(x)$, nur von x abhängig.
Nun vergleichen wir $\partial_y f$ mit der Ableitung von f_1 nach y.

$$\begin{aligned} \partial_y f_1 &= \sum_{\substack{\nu+\mu=p,\\ \mu\geq 1,\nu\geq 1}} \widehat{p}_{\mu-1\ \nu}\frac{\nu}{\mu} x^\mu y^{\nu-1} + \partial_y\varphi(y) \\ \partial_y f &= \sum_{\nu+\mu=p} \widehat{q}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \end{aligned}$$

Damit $\partial_y f_1 = \partial_y f$ ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} \widehat{p}_{\mu-1\ \nu}\frac{\nu}{\mu} &\overset{!}{=} \widehat{q}_{\mu\ \nu-1}\ \text{, also} \\ \nu\,\widehat{p}_{\mu-1\ \nu} &= \mu\,\widehat{q}_{\mu\ \nu-1} \end{aligned}$$

für $\mu+\nu = p+1, \mu\geq 1, \nu\geq 1$.

Dasselbe überprüfen wir für $\partial_x f$ und die Ableitung von f_2 nach x.

$$\begin{aligned} \partial_x f_2 &= \sum_{\substack{\nu+\mu=p,\\ \mu\geq 1,\nu\geq 1}} \widehat{q}_{\mu\ \nu-1}\frac{\mu}{\nu} x^{\mu-1} y^{\nu} + \partial_x\psi(x) \\ \partial_x f &= \sum_{\nu+\mu=p} \widehat{p}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \end{aligned}$$

Damit $\partial_x f_2 = \partial_x f$ ist, muss gelten:

$$\begin{aligned} \widehat{q}_{\mu\ \nu-1}\frac{\mu}{\nu} &\overset{!}{=} \widehat{p}_{\mu-1\ \nu}\ \text{, also} \\ \mu\,\widehat{q}_{\mu\ \nu-1} &= \nu\,\widehat{p}_{\mu-1\ \nu}\ . \end{aligned}$$

für $\mu+\nu=p+1, \mu\geq 1, \nu\geq 1$.
Also dieselben Bedingungen wie im ersten Fall.
Setzt man nun $\varphi=\sum^{III}, \psi=\sum^{IV}$, dann erhalten wir

$$\widetilde{q}=f=\sum^{I}+\sum^{III}+\sum^{IV}$$

als das gewünschte homogene Polynom vom Grad $p+1$. □

Offensichtlich impliziert (2.9) die Gleichung (2.8). Denn:
Leiten wir $2nP=\widetilde{q}_x+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_x$ nach y und $2nQ=\widetilde{q}_y+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_y$ nach x ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
2nP_y &= \widetilde{q}_{xy}+2ny^{2n-1}\widetilde{p}_x+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{xy} \text{ und}\\
2nQ_x &= \widetilde{q}_{yx}+2nx^{2n-1}\widetilde{p}_y+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{yx}\ .
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Differenz der beiden Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned}
2nP_y-2nQ_x &= \widetilde{q}_{xy}+2ny^{2n-1}\widetilde{p}_x+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{xy}-(\widetilde{q}_{yx}+2nx^{2n-1}\widetilde{p}_y+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{yx})\\
&= \widetilde{q}_{xy}-\widetilde{q}_{yx}+2ny^{2n-1}\widetilde{p}_x-2nx^{2n-1}\widetilde{p}_y+(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{xy}-(x^{2n}+y^{2n})\widetilde{p}_{yx}\\
&= 2ny^{2n-1}\widetilde{p}_x-2nx^{2n-1}\widetilde{p}_y\ .
\end{aligned}$$

Also gilt: $P_y-Q_x=y^{2n-1}\widetilde{p}_x-x^{2n-1}\widetilde{p}_y$ (2.8).

Diese Gleichung liefert uns ein lineares System für die $p+2-2n$ Koeffizienten von $\widetilde{p}$. Die rechte Seite $\mathfrak{h}$ des Systems enthält die p Koeffizienten von P_y-Q_x. Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\mathcal{D}\mathfrak{d}=\mathfrak{h}. \tag{2.10}$$

$\mathfrak{h}$ ist ein Spaltenvektor mit p Zeilen, $\mathcal{D}$ ist eine Matrix mit p Zeilen und $p+2-2n$ Spalten. $\mathcal{D}$ besitzt nur ganzzahlige Einträge.
Man erkennt, dass mit (2.10) die Matrix $\mathcal{C}$ aus (2.5) verkleinert wurde.

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $n=1$. Damit erhalten wir für $\mathcal{D}$ eine quadratische Matrix. Denn: $\mathcal{D}$ besitzt dann p Zeilen und $p+2-2\cdot 1=p+2-2=p$ Spalten.
Als Ausgangsdifferentialgleichung erhalten wir nun

$$y'=-\frac{x+P(x,y)}{y+Q(x,y)}\ .$$

In diesem Fall ist unser Gleichungssystem dann nicht mehr unterbestimmt, wie in den Fällen für $n\geq 2$, womit eine eindeutige Lösung möglich sein könnte.

3 Beispiele für den Fall $n = 1$

3.1 Allgemeines Beispiel für $p = 4$

[11] Zunächst betrachten wir den Fall $p = 4$. Der Grad von $\widetilde{p}$ ist damit 3.
Wir setzen allgemein an:

$$\widetilde{p}(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

Dann gilt mit Satz 2

$$\begin{aligned} y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y &= y(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)_x - x(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)_y \\ &= y(3ax^2 + 2bxy + cy^2) - x(bx^2 + 2cxy + 3dy^2) \\ &= 3ayx^2 + 2bxy^2 + cy^3 - bx^3 - 2cx^2y - 3dxy^2 \\ &= -bx^3 + (3a - 2c)x^2y + (2b - 3d)xy^2 + cy^3. \end{aligned}$$

Nun können wir die Gleichung "$P_y - Q_x = y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y$" aus Satz 2 ganz einfach erfüllen. Dafür benötigen wir ein passendes $\widetilde{p}$, sodass für jeden Spaltenvektor $\mathfrak{h} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$ das System

$$\begin{array}{rcl} 0 - b + 0 + 0 &=& \alpha, \\ 3a + 0 - 2c + 0 &=& \beta, \\ 0 + 2b + 0 - 3d &=& \gamma, \\ 0 + 0 + c + 0 &=& \delta, \end{array}$$

in den Unbekannten $\mathfrak{d} = (a, b, c, d)^T$ lösbar ist. Dies entspricht genau der Lösbarkeit des Gleichungssystems $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$.
Da

$$\det \mathcal{D} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2}(-1) \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} 3 \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot (0 - (-3)) = 9,$$

also ungleich 0 ist, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

[11] vgl. auch [2], S.3

3.2 Spezielles Beispiel für $p = 4$

Wie im allgemeinen Beispiel schon gesehen, ist unser Gleichungssystem für die oben genannten Bedingungen eindeutig lösbar. D.h. für jeden beliebigen Vektor $\mathfrak{h} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$ gibt es genau eine Lösung für die Unbekannten $(a, b, c, d)^T = \mathfrak{d}$.
Sei also z.B. $\mathfrak{h} = (4, -2, 10, 3)^T$.
Dann erhalten wir durch unser System:

$$\begin{aligned} 0 - b + 0 + 0 &= 4 \\ 3a + 0 - 2c + 0 &= -2, \\ 0 + 2b + 0 - 3d &= 10, \\ 0 + 0 + c + 0 &= 3, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} b &= -4 \\ 3a &= -2 + 2c, \\ -3d &= 10 - 2b, \\ c &= 3, \end{aligned}$$

womit folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{-2 + 2c}{3} = \frac{4}{3}, \\ b &= -4, \\ c &= 3, \\ d &= \frac{10 - 2b}{-3} = -\frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $\mathfrak{d} = (\frac{4}{3}, -4, 3, -\frac{14}{3})^T$.
D.h. unser gesuchtes $\widetilde{p}(x, y) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - \frac{14}{3}y^3$.

3.3 Allgemeines Beispiel für $p = 5$

Sei nun $p = 5$. Damit gilt für den Grad von $\widetilde{p}$: $\deg \widetilde{p} = 4$.
Setzen wir wieder allgemein $\widetilde{p}(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$, so folgt für

$$\begin{aligned} y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y &= y(ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4)_x - x(ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4)_y \\ &= y(4ax^3 + 3bx^2y + 2cxy^2 + dy^3) - x(bx^3 + 2cx^2y + 3dxy^2 + 4ey^3) \\ &= 4ax^3y + 3bx^2y^2 + 2cxy^3 + dy^4 - bx^4 - 2cx^3y - 3dx^2y^2 - 4exy^3 \\ &= -bx^4 + (4a - 2c)x^3y + (3b - 3d)x^2y^2 + (2c - 4e)y^3 + dy^4. \end{aligned}$$

Wir erhalten für beliebige $\mathfrak{h} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)^T$ das Gleichungssystem $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$, also

$$\begin{aligned} 0 - b + 0 + 0 + 0 &= \alpha, \\ 4a + 0 - 2c + 0 + 0 &= \beta, \\ 0 + 3b + 0 - 3d + 0 &= \gamma, \\ 0 + 0 + 2c + 0 - 4e &= \delta, \\ 0 + 0 + 0 + d + 0 &= \epsilon, \end{aligned}$$

in den Variablen $\mathfrak{d} = (a, b, c, d, e)^T$.
Die Determinante der so entstandenen Matrix

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

verschwindet, da "$-\frac{1}{2}$(erste Spalte von $\mathcal{D}$) $- \frac{1}{2}$(fünfte Spalte von $\mathcal{D}$) $=$ dritte Spalte von $\mathcal{D}$ " gilt.

Für den Fall $p = 5$ kann das Gleichungssystem also auch unendlich viele Lösungen besitzen oder sogar unlösbar sein.

4 Betrachtung der Matrix $\mathcal{D}$

Mit Hilfe des Gleichungssystems $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ lässt sich also unter Umständen ein passendes $\widetilde{p}(x, y)$ finden. Allerdings gelingt dies nur dann eindeutig, wenn die Determinante von $\mathcal{D}$ ungleich Null ist ($\det \mathcal{D} \neq 0$).

Im folgenden Kapitel geht es nun darum, herauszufinden, wann das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist und wann nicht.

4.1 Die Struktur der Matrix $\mathcal{D}$

In den vorhergehenden Beispielen fällt auf, dass die beiden Matrizen für den Fall $p = 4$ und $p = 5$ eine sehr ähnliche Struktur aufweisen.
Betrachtet man noch den Fall $p = 3$, so erhält man $\widetilde{p}(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$. Damit also für $y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = y(2ax + by) - x(bx + 2cy) = -bx^2 + (2a - 2c)xy + by^2$.
Es ergibt sich folgende Matrix $\mathcal{D}_3$:

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Vergleich dazu die beiden Matrizen für $p = 4$ und $p = 5$:

$$\mathcal{D}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit liegt die Vermutung nahe, dass alle Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-3} & 0 & b_{p-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{p-2} & 0 & b_{p-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{p-1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ mit } a_i, b_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

sind.

Um die Richtigkeit dieser Vermutung zu überprüfen, müssen wir die Bedingung (2.8) aus Satz 2 näher untersuchen.
Mit der Gleichung "$y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = P_y - Q_x$" lässt sich für die gegebenen Polynome P und Q das gesuchte $\widetilde{p}$ bzw. ein mögliches $\widetilde{p}$ bestimmen.
Wir gehen dabei immer vom allgemeinen Fall aus, d.h. wir setzen ein allgemeines Polynom $\widetilde{p}(x,y) = a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2}y + ... + a_{p-1}xy^{p-2} + a_py^{p-1}$ vom Grad $p-1$ an, wobei p der Grad von P bzw. Q ist.

Satz 3. *Sei $p \geq 2$. Seien P und Q homogene Polynome vom Grad p. Sei $\widetilde{p}$ ein homogenes Polynom vom Grad $p-1$, also $\widetilde{p}(x,y) = a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2}y + ... + a_{p-1}xy^{p-2} + a_py^{p-1}$.*
Dann gilt mit Satz 2 die Gleichung $y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = P_y - Q_x$. Die Matrix $\mathcal{D}$ aus dem linearen System $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ besitzt damit folgende Form:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ p-1 & 0 & -2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & p-2 & 0 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & -p+2 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 2 & 0 & -p+1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Für $p > 2$ erhält man $\widetilde{p}(x,y) = a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2}y + ... + a_{p-1}xy^{p-2} + a_py^{p-1}$.
$y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = y(a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2}y + ... + a_{p-1}xy^{p-2} + a_py^{p-1})_x - x(a_1x^{p-1} + a_2x^{p-2}y + ... + a_{p-1}xy^{p-2} + a_py^{p-1})_y$
$P_y - Q_x$ ist ein homogenes Polynom vom Grad $p-1$, also gibt es hierfür p Koeffizienten $\alpha_1, ...\alpha_p$.
$\alpha_1 =$ Koeffizient von x^{p-1}, $\alpha_2 =$ Koeffizient von $x^{p-2}y$, usw. bis $\alpha_p =$ Koeffizient von y^{p-1}.
Betrachten wir die Beiträge für die einzelnen Monome:

Zu x^{p-1}: Es gibt genau einen Beitrag, nämlich
$0 \cdot a_1 - a_2 + 0 \cdot a_3 + ... + 0 \cdot a_p = \alpha_1$

Zu $x^{p-2}y$: Genau zwei Beiträge
$(p-1)a_1 + 0 \cdot a_2 - 2a_3 + 0 \cdot a_4 + ... + 0 \cdot a_p = \alpha_2$

...

Zu $x^{p-1-j}y^j$: Genau zwei Beiträge
1. Beitrag kommt von
$y(a_jx^{p-j}y^{j-1})_x = a_j(p-j)x^{p-1-j}y^j$
2. Beitrag kommt von
$-x(a_{j+2}x^{p-2-j}y^{j+1})_y = -a_{j+2}(j+1)x^{p-1-j}y^j$
Damit also: $0 \cdot a_1 + ... + 0 \cdot a_{j-1} + (p-j)a_j + 0 \cdot a_{j+1} - (j+1)a_{j+2} + 0 \cdot a_{j+3} + ... + 0 \cdot a_p = \alpha_{j+1}$

...

Zu y^{p-1}: Genau ein Beitrag
$0 \cdot a_1 + ... + 0 \cdot a_{p-2} + a_{p-1} + 0 \cdot a_p = \alpha_p$

Damit ist das System klar:

$$\begin{aligned} 0 - a_2 + 0 + ... + 0 &= \alpha_1, \\ (p-1)a_1 + 0 - 2a_3 + 0 + ... + 0 &= \alpha_2, \\ 0 + (p-2)a_2 + 0 - 3a_4 + 0 + ... + 0 &= \alpha_3, \\ ... \\ 0 + ... + 0 + 2a_{p-2} + 0 - (p-1)a_p &= \alpha_{p-1}, \\ 0 + ... + 0 + a_{p-1} + 0 &= \alpha_p. \end{aligned}$$

□

4.2 Die Determinante von $\mathcal{D}$

Wir wissen nun, dass die Matrix $\mathcal{D}$ immer von derselben Struktur ist. Als Nächstes sind wir daran interessiert, wann die Determinante von $\mathcal{D}$ ungleich Null ist und somit ein eindeutiges $\widetilde{p}$ bestimmt werden kann.
Wie schon bei der Struktur von $\mathcal{D}$ vorgegangen, betrachten wir im Folgenden zuerst wieder die Determinanten für vorgegebene p.

Im Fall $p = 2$ erhalten wir

$$\mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ergibt sich für $\det \mathcal{D}_2 = 0 - (-1) = 1$. Für $\widetilde{p}(x, y) = ax + by$ gibt es also eine eindeutige Lösung, d.h. $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ ist für alle rechten Seiten $\mathfrak{h}$ eindeutig lösbar.

Der Fall $p = 3$,

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

liefert mit der Regel von Sarrus für $\det \mathcal{D}_3 = 0 + (0 \cdot (-1) \cdot (-2)) + (0 \cdot 2 \cdot 1) - [0 + (1 \cdot (-2) \cdot 0) + (0 \cdot 2 \cdot (-1))] = 0$.

Wie in 3.1 beim allgemeinen Beispiel für den Fall $p = 4$ schon gesehen erhält man für

$$\det \mathcal{D}_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot (0 - (-3)) = 9.$$

Mit $p = 5$ ergibt sich die Matrix

$$\mathcal{D}_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Determinante wieder verschwindet [12].
Die Determinante für $p = 6$ nimmt einen Wert $x \neq 0$ an.
Es lässt sich also vermuten, dass die Determinanten für die $p \cdot p$-Matrizen mit p ungerade verschwinden, die mit p gerade einen Wert $x \neq 0$ besitzen und somit eine eindeutige Lösung für $\widetilde{p}(x, y)$ liefern.
Diese Vermutung bestätigt

Satz 4. *Sei $p \in \mathbb{N}, p \geq 2, a_i, b_i \neq 0, 1 \leq i \leq p-1$. Sei $\mathcal{D}$ die folgende $p \cdot p$-Matrix*

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-3} & 0 & b_{p-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{p-2} & 0 & b_{p-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$det\mathcal{D} = \begin{cases} (-1)^{\frac{p}{2}} a_1 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} \cdot b_1 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{p-1}, & \textit{wenn } p \textit{ gerade,} \\ 0, & \textit{wenn } p \textit{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Wir starten mit der Matrix

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & & & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-3} & 0 & b_{p-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{p-2} & 0 & b_{p-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ziehen wir nun zuerst ein geeignetes Vielfaches der ersten Zeile von der dritten Zeile ab und anschließend ebenfalls ein geeignetes Vielfaches der ersten Spalte von der dritten Spalte, so erhalten

[12] vgl. 3.3

wir folgende Matrix

$$\mathcal{D}' = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 & & & & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & b_4 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{p-3} & 0 & b_{p-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{p-2} & 0 & b_{p-1} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & a_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir nur ein Vielfaches einer Zeile bzw. Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte addiert haben, gilt für die Determinanten von $\mathcal{D}$ und $\mathcal{D}'$: $\det \mathcal{D} = \det \mathcal{D}'$.
Man erkennt, dass $\mathcal{D}'$ im Prinzip aus zwei Matrizen auf der Diagonalen zusammengesetzt ist. Nämlich zum Einen aus einer $2 \cdot 2$-Matrix (im Folgenden mit I bezeichnet) und zum Anderen aus einer $(p-3)\cdot(p-3)$-Matrix (im Folgenden II):

$$I := \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } II := \begin{pmatrix} 0 & b_3 & 0 & & & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & b_4 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{p-3} & 0 & b_{p-2} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & a_{p-2} & 0 & b_{p-1} \\ 0 & \cdots & & & 0 & a_{p-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei besitzt II wieder dieselbe Struktur wie $\mathcal{D}$. Die restlichen Einträge in $\mathcal{D}'$ sind 0.
$\mathcal{D}'$ kann also geschrieben werden als:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & II \end{pmatrix}$$

Nach Laplace gilt nun für die Determinante von $\mathcal{D}'$:

$$\det \mathcal{D}' = \det I \cdot \det II$$

Da II dieselbe Struktur aufweist wie $\mathcal{D}$, können wir hier wieder wie am Anfang vorgehen.
Wir beweisen per Induktion über $k, k \in \mathbb{N}$:

1. Fall: $p = 2k$
   $k = 1$ ist klar. Damit ist $\det \mathcal{D}_1 = \det I = (-1)^{\frac{2\cdot 1}{2}} a_1 \cdot b_1 = -a_1 \cdot b_1 \neq 0$.
   Induktionsvoraussetzung(IV): Sei $k > 1$. $p = 2k'$ mit $1 \leq k' \leq k$ schon bewiesen.
   Sei $p = 2k + 2 = 2(k+1)$, dann gilt:

   $$\det \mathcal{D}_{2(k+1)} = \det I \cdot \det II \ ,$$

   wobei II wieder vom selben Typ ist, also nach IV $\neq 0$.
   Es ist

   $$\begin{aligned} \det II &= (-1)^{\frac{2k}{2}} \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k+2-1} \cdot b_{2k+2-1} \ , \\ \det I &= -a_1 \cdot b_1 \ . \end{aligned}$$

   Also

   $$\begin{aligned} \det \mathcal{D}_{2(k+1)} &= \det I \cdot \det II = (-a_1 \cdot b_1)(-1)^{\frac{2k}{2}} \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k+2-1} \cdot b_{2k+2-1} \\ &= (-1)^{\frac{2k}{2}} \cdot (-1)^{\frac{2}{2}} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k+2-1} \cdot b_{2k+2-1} \\ &= (-1)^{\frac{2k+2}{2}} \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot a_3 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot a_{2k+2-1} \cdot b_{2k+2-1} \ . \end{aligned}$$

Mit $p = 2k + 2$ folgt die Behauptung.

2. Fall: $p = 2k + 1$
$k = 1$:
$$\det \mathcal{D}_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$
IV: Sei $k > 1$. $p = 2k' + 1$ für $1 \leq k' \leq k$ schon bewiesen.
Sei $p = 2(k + 1) + 1$.
Mit der Aufteilung in I und II wie oben gilt:
II hat gerade $2k + 1$ Zeilen und Spalten und ist vom selben Typ. Nach IV verschwindet die Determinante von II wieder.
Somit folgt nach Laplace die Behauptung.

□

Damit ist uns ein weitreichender Schritt gelungen. Für die Fälle, dass wir homogene Polynome P und Q von geradem Grad besitzen, gelingt es uns immer, aus einem Strudel einen Wirbel durch das einfache Hinzufügen von Termen höherer Ordnung herzustellen.
Nur im Fall "p ungerade" kann es möglicherweise keine Lösung geben. Allerdings gibt es für "$p = 3$" dennoch eine Möglichkeit, Aussagen über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems zu geben. Diesen Fall betrachten wir in Kapitel 5 genauer.

4.3 Beispiel für $p = 2$

Da wir nun wissen, dass für "p gerade" ein Strudel immer in einen Wirbel überführbar ist, wollen wir für $p = 2$ das Verfahren an einer Differentialgleichung durchführen.
Wir betrachten dazu folgende Differentialgleichung[13]:

$$y' = -\frac{x + 4x^2 + y^2}{y + x^2 - 2y^2}$$

Laut Frommer ist diese vom Strudeltyp.[14] Siehe dazu Abbildung 4.1[15].

Mit Hilfe unseres Verfahrens können wir nun durch Addition von Termen höherer Ordnung diesen Strudel in einen Wirbel verwandeln.
Zuerst bestimmen wir $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ durch einfaches Ablesen aus der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= 4x^2 + y^2 \\ Q(x, y) &= x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

Da $p = 2$ gilt, wissen wir, dass der Grad von $\widetilde{p}(x, y)$ gleich 1 sein muss. Wir setzen also allgemein an: $\widetilde{p}(x, y) = ax + by$.
Nach (2.8) gilt nun: $y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = P_y - Q_x$.
Somit muss $ya - xb \stackrel{!}{=} 2y - 2x$ gelten, also $a = 2, b = 2$ und damit folgt $\widetilde{p}(x, y) = 2x + 2y$.
Im nächsten Schritt muss nun noch das $\widetilde{q}(x, y)$ bestimmt werden.

[13] siehe auch [1] S. 406
[14] vgl. auch Beispiele in [3] und [4]
[15] Diese sowie alle folgenden Abbildungen vom Strudel- bzw. Wirbeltyp der jeweils betrachteten Differentialgleichungen wurden [3] entnommen.

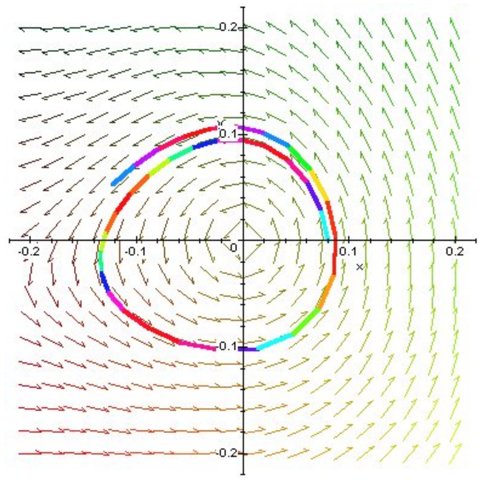


Abbildung 4.1: Strudel $y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2}$

Mit Satz 2 können wir nun aus den Bedingungen (2.9) ein mögliches $\widetilde{q}(x,y)$ bestimmen.
Nach (2.9) gilt für $n = 1$

$$\begin{aligned} 2P &= \widetilde{q}_x + (x^2+y^2)\widetilde{p}_x, \\ 2Q &= \widetilde{q}_y + (x^2+y^2)\widetilde{p}_y, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_x &= 2P - (x^2+y^2)\widetilde{p}_x, \\ \widetilde{q}_y &= 2Q - (x^2+y^2)\widetilde{p}_y. \end{aligned}$$

Wir setzen unsere oben bestimmten Polynome P und Q sowie $\widetilde{p}(x,y) = 2x - 2y$ in die letzten beiden Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_x &= 2(4x^2+y^2) - (x^2+y^2)\cdot 2 \\ &= 8x^2 + 2y^2 - 2x^2 - 2y^2 = 6x^2 \\ \widetilde{q}_y &= 2(x^2-2y^2) - (x^2+y^2)\cdot 2 \\ &= 2x^2 - 4y^2 - 2x^2 - 2y^2 = -6y^2 \end{aligned}$$

Man sieht also, dass $\widetilde{q}(x,y) = 2x^3 - 2y^3$ gelten muss.
Mit Hilfe der Methode aus (2.4) können wir unsere Differentialgleichung $y' = -\frac{x+4x^2+y^2}{y+x^2-2y^2}$ durch Addition der Terme $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x$ und $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y$ (wobei $n = 1$) in einen Wirbel verwandeln.
Es ergeben sich für die Zusatzterme $\frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_x$ und $\frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_y$ folgende Polynome:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_x &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2x^3-2y^3) = 2x^3 - 2y^3 \\ \frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_y &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2x^3-2y^3) = 2x^3 - 2y^3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich die folgende Differentialgleichung, welche nun vom Wirbeltyp ist:

$$y' = -\frac{x+4x^2+y^2+2x^3-2y^3}{y+x^2-2y^2+2x^3-2y^3}$$

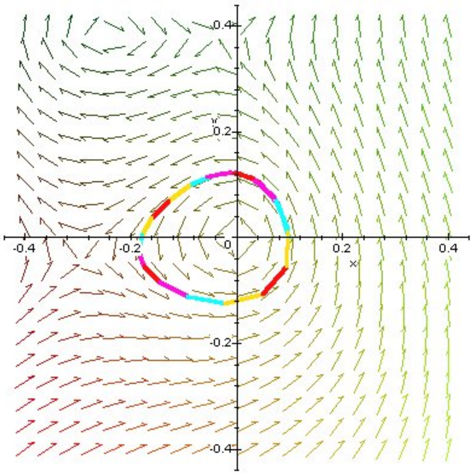


Abbildung 4.2: Wirbel $y' = -\frac{x+4x^2+y^2+2x^3-2y^3}{y+x^2-2y^2+2x^3-2y^3}$

5 Der Fall "P und Q homogen vom Grad 3"

In diesem Kapitel behandeln wir abschließend den Spezialfall "P und Q homogen vom Grad 3". Wir setzen $P(x,y) = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3$ und $Q(x,y) = b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3$. Damit erhalten wir folgende Ausgangsdifferentialgleichung:

$$y' = -\frac{x + P(x,y)}{y + Q(x,y)} = -\frac{x + a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3}{y + b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3} \tag{5.1}$$

Wie wir in Kapitel 3 und Kapitel 4 schon festgestellt haben, können wir für den Fall $p = 3$ grundsätzlich nicht mit einer eindeutigen Lösung für das gesuchte $\widetilde{p}$ rechnen. Die Determinante von $\mathcal{D}$ besitzt den Wert 0, womit für die Lösungen des linearen Gleichungssystems auch unendlich viele Lösungen oder sogar keine Lösungsmöglichkeiten in Betracht kommen.

5.1 Frommers Strudelgrößen

Frommer hat in [1] mit Hilfe der Strudelgrößen eine Möglichkeit gefunden, Aussagen über die Verwandlung von Strudeln in Wirbel machen zu können. Dabei stellt die sog. erste Strudelgröße, wie in Kapitel 1 schon erklärt, ein wichtiges Hilfsmittel dar.
Wir erinnern kurz daran, dass diese Strudelgrößen mit Hilfe einer Vergleichsdifferentialgleichung, deren Lösungen in einer Umgebung um $(0,0)$ sicher geschlossene Bahnen darstellen, aufgestellt werden können.[16]

Im Folgenden verwenden wir zuerst die Bezeichnungen aus Frommers Arbeit und verknüpfen sie anschließend mit den oben gewählten[17].

Um die Strudelgrößen zu berechnen, betrachtet Frommer für die Glieder vierten Grades schließlich folgenden Ausdruck:

$$(-xf_{4y} + yf_{4x}) + (-p_2f_{3y} - 2yp_3 + q_2f_{3x} + 2xq_3)^{18},$$

wobei $f_i(x,y) = A_{i0}x^i + A_{(i-1)1}x^{i-1}y^1 + ... + A_{0i}y^i$, p_i und q_i sind Polynome i-ten Grades in x und y.

Der zweite Klammerausdruck stellt ein Polynom vierten Grades dar und wird von Frommer mit $B_{40}x^4 + B_{31}x^3y + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{04}y^4$ bezeichnet.

Da wir den Fall P und Q vom Grad 3 betrachten, fallen in der zweiten Klammer die Summanden $-p_2f_{3y}$ und q_2f_{3x} weg und wir erhalten zusammen mit der Beziehung "$p_3 = P$ und $q_3 = Q$" aus (5.1) folgende Gleichung:

$$-2yP + 2xQ = B_{40}x^4 + B_{31}x^3y + B_{22}x^2y^2 + B_{13}xy^3 + B_{04}y^4 \tag{5.2}$$

[16] vgl. Einleitung
[17] vgl. [1] S.400/401
[18] p_i, q_i entsprechen für $i = 3$ genau unserem P und Q aus (5.1)

Setzen wir P und Q wie am Anfang gewählt, erhalten wir nun

$$\begin{aligned} -2yP + 2xQ &= -2y(a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3) + 2x(b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3) \\ &= -2a_1x^3y - 2a_2x^2y^2 - 2a_3xy^3 - 2a_4y^4 + 2b_1x^4 + 2b_2x^3y + 2b_3x^2y^2 + 2b_4xy^3 \quad (5.3) \\ &= 2b_1x^4 + (2b_2 - 2a_1)x^3y + (2b_3 - 2a_2)x^2y^2 + (2b_4 - 2a_3)xy^3 - 2a_4y^4 \ . \end{aligned}$$

D.h. also, die Koeffizienten aus Frommers Gleichung (5.2) entsprechen wie folgt denen aus der soeben betrachteten Gleichung (5.3):

$$B_{40} = 2b_1, B_{31} = 2b_2 - 2a_1, B_{22} = 2b_3 - 2a_2, B_{13} = 2b_4 - 2a_3, B_{04} = -2a_4$$

Frommer erhält nach weiteren Berechnungen schließlich für die erste Strudelgröße

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{6}(3B_{40} + B_{22} + 3B_{04}) \\ &= \frac{1}{6}(3 \cdot 2b_1 + 2b_3 - 2a_2 + 3 \cdot (-2a_4)) \\ &= \frac{1}{6}(6b_1 + 2b_3 - 2a_2 - 6a_4). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Für das Auftreten eines Wirbels durch Hinzufügen von Termen höherer Ordnung gibt er als notwendige Bedingung an, dass die erste Strudelgröße D_1 gleich Null sein muss ($D_1 = 0$)[19].
Ist die erste Strudelgröße ungleich Null, so wissen wir, dass unsere Ausgangsdifferentialgleichung vom Strudeltyp sein muss, da deren Feldrichtungen in einer bestimmten Umgebung um den Ursprung nie mit den Feldrichtungen der Vergleichsdifferentialgleichung übereinstimmen, letztere aber als Wirbel konstruiert wurde. In diesem Fall kann der Strudeltyp durch Hinzufügen von Termen höherer Ordnung nicht mehr verändert werden[20].

5.2 Der Zusammenhang der Strudelgröße D_1 mit dem linearen Gleichungssystem $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$

Betrachten wir nun noch einmal das lineare Gleichungssystem $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$, das sich mit Hilfe von P und Q aufstellen lässt.
Dazu benötigen wir wieder für die rechte Seite unseres Gleichungssystems nach (2.8)

$$\begin{aligned} P_y - Q_x &= (a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3)_y - (b_1x^3 + b_2x^2y + b_3xy^2 + b_4y^3)_x \\ &= a_2x^2 + 2a_3xy + 3a_4y^2 - (3b_1x^2 + 2b_2xy + b_3y^2) \\ &= a_2x^2 - 3b_1x^2 + 2a_3xy - 2b_2xy + 3a_4y^2 - b_3y^2 \\ &= (a_2 - 3b_1)x^2 + (2a_3 - 2b_2)xy + (3a_4 - b_3)y^2. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung:

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{D}_3|\mathfrak{h} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & a_2 - 3b_1 \\ 2 & 0 & -2 & 2a_3 - 2b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 3a_4 - b_3 \end{array}\right)$$

Mit diesen Ergebnissen und denen aus den vorhergehenden Kapiteln lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem linearen Gleichungssystem $\mathcal{D}\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ und dem Nullsetzen der Strudelgröße erkennen.

[19] siehe in [1] S. 401/402
[20] vgl. hierzu in [1] S. 406

Satz 5. *Sei D_1 die erste Strudelgröße und $\mathcal{D}_3\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ das lineare Gleichungssystem nach* (2.10) *für den Fall $p = 3$. Dann gilt:*

$$D_1 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}_3\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \text{ ist lösbar}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_3\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \text{ ist lösbar} &\Leftrightarrow Rang(\mathcal{D}_3) = Rang(\mathcal{D}_3|\mathfrak{h}) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{h} \text{ kann als Linearkombination von Spalten aus } \mathcal{D}_3 \text{ dargestellt werden} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{h} = (-a_2 + 3b_1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_3 - b_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow 3a_4 - b_3 = -a_2 + 3b_1 \mid \cdot (-\frac{1}{3}) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3}b_3 - a_4 = \frac{1}{3}a_2 - b_1 \\
&\Leftrightarrow b_1 + \frac{1}{3}b_3 - \frac{1}{3}a_2 - a_4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6}(6b_1 + 2b_3 - 2a_2 - 6a_4) = 0 \\
&\Leftrightarrow D_1 = 0
\end{aligned}$$

□

Diesen Satz kann man noch verschärfen zu

Satz 6. *Sei $y' = -\frac{x+P}{y+Q}$ mit P, Q wie oben homogen vom Grad 3. Dann tritt genau dann bei Addition von Polynomen höherer Ordnung in Zähler und Nenner der Wirbelfall ein, wenn D_1, die erste Strudelgröße, gleich 0 ist.*

Beweis. Ist $D_1 = 0$, so lösen wir $\mathcal{D}_3\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ gemäß Satz 5.
Ist $D_1 \neq 0$, so ist der Strudelfall durch Hinzufügen von Termen höherer Ordnung nicht mehr zu verändern. □

5.3 Beispiele für den Fall $p = 3$

Zum Abschluss betrachten wir für den Fall $p = 3$ zwei Beispiele etwas detaillierter. Im ersten Beispiel ist die erste Strudelgröße gleich Null, womit wir den Wirbelfall herstellen können. Das zweite illustriert den Fall, dass für $D_1 \neq 0$ ein Strudel nicht in einen Wirbel überführt werden kann.

5.3.1 Die erste Strudelgröße $D_1 = 0$

Als drittes Beispiel gibt Frommer in [1][21] folgende Differentialgleichung an:

$$y' = -\frac{x + 4x^2y + y^3}{y + 2x^3 + xy^2}$$

[21] vgl. in [1] S. 406 f das dritte Beispiel, sowie Beispiele in [3] und [4]

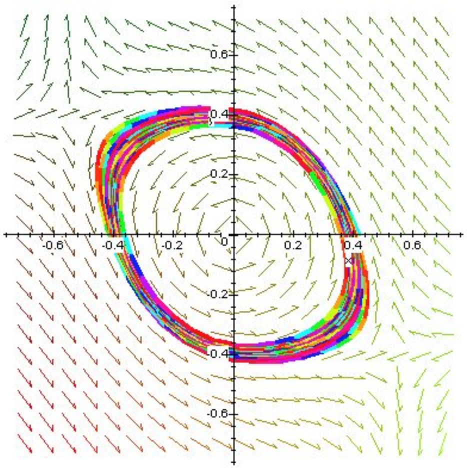


Abbildung 5.1: Strudel $y' = -\frac{x+4x^2y+y^3}{y+2x^3+xy^2}$

Unsere Polynome P und Q sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x^2y + y^3, \\ Q(x,y) &= 2x^3 + xy^2. \end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst die Strudelgröße.

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{6}(6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 6 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{6}(12 + 2 - 8 - 6) \\ &= \frac{1}{6}(14 - 14) = 0. \end{aligned}$$

Damit folgt nach Satz 5, dass unser Gleichungssystem $\mathcal{D}_3\mathfrak{d} = \mathfrak{h}$ lösbar ist. Wir können also eine Ergänzung finden, s.d. aus unserem Strudel ein Wirbel wird.
Betrachten wir dazu wieder unsere Bedingung (2.8) aus Satz 2

$$y\widetilde{p}_x - x\widetilde{p}_y = -bx^2 + (2a-2c)xy + by^2 \stackrel{!}{=} -2x^2 + 2y^2 = P_y - Q_x \ ,$$

denn $P_y - Q_x = 4x^2 + 3y^2 - 6x^2 - y^2 = -2x^2 + 2y^2$. An der Gleichung erkennt man direkt, dass $b = 2$ und $2a - 2c = 0$ erfüllt werden müssen. D.h. also, für unser gesuchtes $\widetilde{p}(x,y)$ muss $b = 2$ und $a = c$ gelten.

Damit setzen wir allgemein $\widetilde{p}(x,y) = ax^2 + 2xy + ay^2$. Mit Hilfe der Bedingungen (2.9) aus Satz 2 können wir nun wieder ein mögliches $\widetilde{q}(x,y)$ berechnen.

Nach (2.9) gilt für $n = 1$

$$\begin{aligned} 2P &= \widetilde{q}_x + (x^2+y^2)\widetilde{p}_x, \\ 2Q &= \widetilde{q}_y + (x^2+y^2)\widetilde{p}_y, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \widetilde{q}_x &= 2P - (x^2+y^2)\widetilde{p}_x, \\ \widetilde{q}_y &= 2Q - (x^2+y^2)\widetilde{p}_y. \end{aligned}$$

Setzen wir P, Q und $\widetilde{p}$ in die beiden Gleichungen ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_x(x,y) &= 2(4x^2y+y^3)-(x^2+y^2)(2ax+2y),\\ \widetilde{q}_y(x,y) &= 2(2x^3+xy^2)-(x^2+y^2)(2x+2ay).\end{aligned}$$

Wir betrachten $\widetilde{q}_x$ und $\widetilde{q}_y$ separat:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_x(x,y) &= 2(4x^2y+y^3)-(x^2+y^2)(2ax+2y)\\ &= 8x^2y+2y^3-(2ax^3+2x^2y+2axy^2+2y^3)\\ &= 8x^2y+2y^3-2ax^3-2x^2y-2axy^2-2y^3\\ &= -2ax^3+6x^2y-2axy^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_y(x,y) &= 2(2x^3+xy^2)-(x^2+y^2)(2x+2ay)\\ &= 4x^3+2xy^2-(2x^3+2ax^2y+2xy^2+2ay^3)\\ &= 4x^3+2xy^2-2x^3-2ax^2y-2xy^2-2ay^3\\ &= 2x^3-2ax^2y-2ay^3\end{aligned}$$

Nun integrieren wir jeweils $\widetilde{q}_x$ nach x und $\widetilde{q}_y$ nach y auf. Damit erhalten wir folgende beide Möglichkeiten für das gesuchte $\widetilde{q}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_1(x,y) &= -\frac{1}{2}ax^4+2x^3y-ax^2y^2 \text{ und}\\ \widetilde{q}_2(x,y) &= 2x^3y-ax^2y^2-\frac{1}{2}ay^4.\end{aligned}$$

Wir erstellen daraus

$$\widetilde{q}(x,y)=-\frac{1}{2}ax^4+2x^3y-ax^2y^2-\frac{1}{2}ay^4.$$

Nun erweitern wir die Differentialgleichung $y'=-\frac{x+4x^2y+y^3}{y+2x^3+xy^2}$ mit Hilfe der Methode aus (2.4). Dazu berechnen wir zunächst $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_x$ und $\frac{1}{2n}\widetilde{q}\widetilde{p}_y$ (wobei $n=1$):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_x &= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}ax^4+2x^3y-ax^2y^2-\frac{1}{2}ay^4)(2ax+2y)\\ &= \frac{1}{2}(-ax^5+4ax^4y-2a^2x^3y^2-a^2xy^4-ax^4y+4x^3y^2-2ax^2y^3-ay^5)\\ &= \frac{1}{2}(-ax^5+3ax^4y+(4-2a^2)x^3y^2-2ax^2y^3-a^2xy^4-ay^5)\\ \frac{1}{2}\widetilde{q}\widetilde{p}_y &= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}ax^4+2x^3y-ax^2y^2-\frac{1}{2}ay^4)(2x+2ay)\\ &= \frac{1}{2}(-ax^5+4x^4y-2ax^3y^2-axy^4-a^2x^4y+4ax^3y^2-2a^2x^2y^3-a^2y^5)\\ &= \frac{1}{2}(-ax^5+(4-a^2)x^4y+2ax^3y^2-2a^2x^2y^3-axy^4-a^2y^5)\end{aligned}$$

Da wir im Allgemeinen a beliebig wählen können, dürfen wir o.E.d.A. auch $a=0$ wählen. Damit ergibt sich schließlich

$$y'=-\frac{x+4x^2y+y^3+2x^3y^2}{y+2x^3+xy^2+2x^4y}.$$

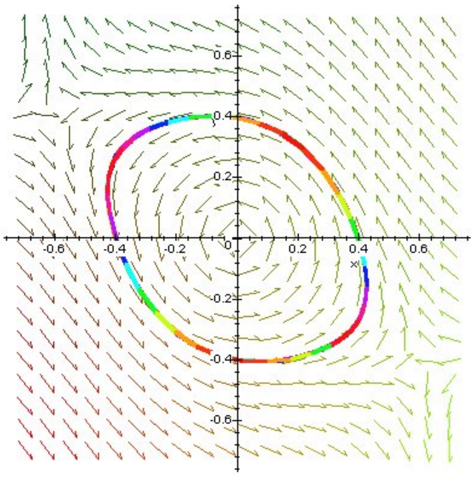


Abbildung 5.2: Wirbel $y' = -\frac{x+4x^2y+y^3+2x^3y^2}{y+2x^3+xy^2+2x^4y}$

5.3.2 Die erste Strudelgröße $D_1 \neq 0$

Frommer betrachtet auch folgenden Strudel[22]:

$$y' = -\frac{x + 2x^3 + y^3}{y + x^2y + y^3}$$

Das zugehörige Phasenportrait:

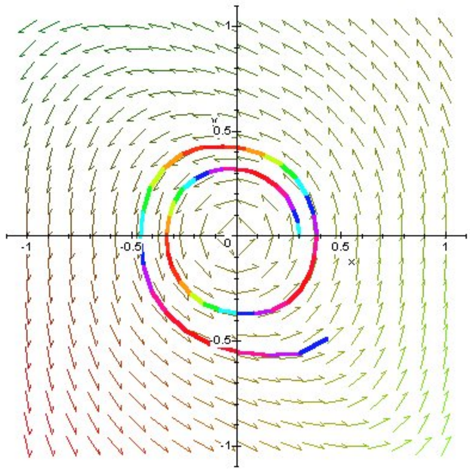


Abbildung 5.3: Strudel $y' = -\frac{x+2x^3+y^3}{y+x^2y+y^3}$

Für P und Q erhalten wir nun folgende Polynome

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2x^3 + y^3, \\ Q(x,y) &= x^2y + y^3. \end{aligned}$$

[22] vgl. [1] S. 406 unten, sowie Beispiele in [3] und [4]

Damit können wir wiederum die Strudelgröße D_1 berechnen und erhalten

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{6}(6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 6 \cdot 1) \\ &= \frac{1}{6}(-6) = -1 \neq 0 \; . \end{aligned}$$

Die erste Strudelgröße ist also ungleich Null. Somit kann dieser Strudel nicht durch das Hinzufügen von Termen höherer Ordnung in einen Wirbel verwandelt werden.

6 Literaturverzeichnis

[1] Max Frommer (1934): *Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen*, Mathematische Annalen, Band 109, S. 395 - 424

[2] Wolf von Wahl (2007): *Generation of Centres by Adding Higher Order Terms in* $y' = -\frac{x^{2n-1}+P(x,y)}{y^{2n-1}+Q(x,y)}$, Manuskript 70, *http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/wvwpublic.html* oder *http://www.diffgleichg.uni-bayreuth.de/de/team/von_Wahl_Wolf/Publikationen/index.html*

[3] André Höhn (2001): *Algebraische Berechnung von Strudelgrößen und graphisches Auffinden von Grenzzykeln um eine Stelle der Unbestimmtheit*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Dr. Wolf von Wahl, *http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/da/hoehn/diplom.html* oder *http://www.diffgleichg.uni-bayreuth.de/de/team/von_Wahl_Wolf/diploma/index.html*

[4] Kay Moritzen (2000): *Ein rekursives Verfahren zur Berechnung von Strudeln für Differentialgleichungen y'=-A(x,y)/B(x,y) um eine Unbestimmtheitsstelle*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Dr. Wolf von Wahl, *http://www.math.uni-bayreuth.de/org/mathe6/publ/da/moritzen/diplom.html* oder *http://www.diffgleichg.uni-bayreuth.de/de/team/von_Wahl_Wolf/diploma/index.html*

[5] Bertram Unger (2011): *Strudelgrößen bei dem Zentrumproblem*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Dr. Wolf von Wahl, *http://www.diffgleichg.uni-bayreuth.de/de/team/von_Wahl_Wolf/diploma/index.html*

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst, noch nicht in einem anderen Prüfungsverfahren vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Bayreuth, den 29. Juli 2011

(Nicole Günzel-Weinkamm)