

Der Einfluß der ersten Homologiegruppe
auf den Raum Neumannscher Felder

Diplomarbeit

vorgelegt von
Michel Grüneberg

Universität Bayreuth
Fakultät für Mathematik und Physik
Juli 1998

Betreuer: Professor Dr. Wolf von Wahl
Lehrstuhl für Angewandte Mathematik
Mathematisches Institut
Universität Bayreuth
95440 Bayreuth

Vorwort

“Ja, wir werden alles, alles noch einmal in Frage stellen. Und wir werden nicht mit Siebenmeilenstiefeln vorwärtsgehen, sondern im Schneckentempo. Und was wir heute finden, werden wir morgen von der Tafel streichen und erst wieder anschreiben, wenn wir es noch einmal gefunden haben. Und was wir zu finden wünschen, das werden wir, gefunden, mit besonderem Mißtrauen ansehen.”

Bertolt Brecht, *Leben des Galilei*

In dieser Arbeit wird ein Brückenschlag gewagt zwischen zwei Disziplinen der Mathematik, zwischen denen in den meisten mathematischen Instituten in der Regel schon von vornherein eine gewisse räumliche Trennung besteht, die sich dann leider allzuoft bis in die praktische Arbeit hinein fortsetzt: Gemeint sind reelle Analysis und (algebraische) Topologie. In der vermeintlichen Unvereinbarkeit dieser Gebiete, die sich gleichsam vom Start weg im Kontrast der Begriffe *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* manifestiert, bestand für mich aber gerade der besondere Reiz der Themenstellung, durfte ich doch einen thematischen Bogen spannen, dessen Breite für eine Diplomarbeit eher unüblich ist.

Die Voraussetzung dafür war jedoch die Aufgeschlossenheit, die mein Betreuer, Herr Prof. Dr. Wolf von Wahl, dieser disziplinaren Gratwanderung gegenüber an den Tag legte. Entsprechend dankbar bin ich ihm dafür, daß er mich mit seinem “mathematischen Einfühlungsvermögen” hier an genau der richtigen Stelle “gepackt” und mir dieses vielversprechende Thema gestellt hat. Die hilfreiche und produktive Zusammenarbeit ließ von meiner Seite keine Wünsche offen und war insbesondere menschlich überaus angenehm.

Ein auslösendes Moment für diese Arbeit steuerte auch Herr Prof. Dr. Hans-Christoph Grunau bei: Im gemeinsamen Hauptseminar mit Herrn von Wahl wurde mir nicht zuletzt durch seine Initiative ein mit weitestgehendem Freiraum verbundenes Vortragsthema gestellt, in dessen Ausarbeitung sich im Nachhinein betrachtet die Wurzeln dieser Arbeit finden. Und insbesondere in den letzten acht Wochen,

in denen ich die Arbeit noch einmal fast völlig neu konzipiert und umgestellt habe, hatte er immer Zeit für Diskussionen und gab mir so wertvolle Impulse.

Bill Gardiner danke ich herzlich für seine “technische Hilfe”, mit der er mich bei der Abfassung der Arbeit im Schriftsetzsystem \TeX vor allem bei der Erstellung und Einbindung der Diagramme und Figuren unterstützt hat. Darüber hinaus fand er immer wieder aufmunternde Worte für mich und gab mir insbesondere unschätzbare Hilfen im Zuge der Vorbereitung meines sich nun anschließenden Promotionsvorhabens.

Stark profitiert habe ich sowohl von der materiellen als auch “ideellen” Unterstützung, die ich von seiten der Studienstiftung des deutschen Volkes während meines Studiums erfahren durfte. Namentlich möchte ich hier meinen Vertrauensdozenten, Herrn Prof. Dr. Max Herberhold, sowie Herrn Dr. Ulf Lange, meinen Referenten aus Bonn, erwähnen. Die umgängliche und gleichzeitig verbindliche Art, mit der Herr Lange mir stets begegnet ist und die sich nicht zuletzt auch auf einer “gemeinsamen” Sommerakademie zu einer persönlichen Verbindung weiterentwickelt hat, habe ich nie als selbstverständlich empfunden.

Herrn Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer danke ich für seine mit viel Engagement durchgeführte Anfängerausbildung, die mich im Endeffekt erst zu einem Studium der Mathematik gebracht hat.

Schließlich möchte ich Angelika Weiß einfach für ihre Geduld und für das Verständnis danken, mit dem sie mich die ganze Zeit über begleitet hat. Nicht zuletzt zeigte sie mir auch immer wieder auf, wieviele andere schöne Dinge es neben der Mathematik gibt.

Einen tiefen Dank schulde ich auch Christiane Grüneberg. Indem sie in schwierigeren Zeiten stets das Größte auf sich nahm, ermöglichte sie mir im Endeffekt dieses Studium.

Bayreuth, im Juli 1998

Michel Grüneberg

Verweissystem

Eine Bemerkung zum Verweissystem: Grundsätzlich werden alle Definitionen, Sätze, Hilfssätze etc. *kapitelweise* fortlaufend durchnumeriert. Um ein schnelleres Auffinden des zitierten Sachverhalts zu ermöglichen, habe ich mich bemüht, stets auch den zugehörigen Abschnitt zu benennen.

Eine Ausnahme bezüglich der Numerierung stellt lediglich das “Grundlagen-Kapitel” 2 dar: Aufgrund der Länge der hier auftretenden Abschnitte — die im Prinzip jeweils ein eigenes Kapitel darstellen, was dem topologischen Teil aber ein unverhältnismäßig großes Gewicht in der Gliederung gegeben hätte — erfolgt die Numerierung hier jeweils *abschnittsweise*. Da klar sein dürfte, wie ein Zitat von der Form “siehe Satz 2.2.1” zu verstehen ist, sollte das zu keiner Verwirrung führen. Verweise innerhalb des Kapitels 2 werden in der Form “Definition 4.1” vorgenommen, was natürlich Definition 1 in Abschnitt 2.4 meint; innerhalb eines Abschnittes wird das Zitat direkt ohne erneute Nennung des Abschnittes angegeben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Zusammenfassung	1
1.2	Dualitätssätze	3
1.3	Bedeutung der Betti-Zahlen in der Potentialtheorie	8
2	Topologische Vorbereitungen	10
2.1	Definition zulässiger Mengen G	10
2.2	Gruppentheoretische Hilfsmittel	13
2.3	Homotopie	23
2.4	Homologie und Definition der Betti-Zahlen	29
3	Das Verschlingungsintegral	35
3.1	Die Verschlingungsform	35
3.2	Ausbau der Verschlingungsform zu einer Bilinearform	37
3.3	Eine erste Anwendung: Angabe einer unteren Schranke für die erste Betti-Zahl einer eingebetteten berandeten 3-Mannigfaltigkeit	42
3.4	Eine Notiz über das Fortsetzungsproblem und wilde 2-Sphären	44
4	Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von G und \hat{G}	47
4.1	Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von G	47
4.2	Die Fundamentalgruppe einer Verschlingung	49
4.3	Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von \hat{G}	53
5	Der Raum Neumannscher Felder in G und \hat{G}	56
5.1	Potentialtheoretische Vorbereitungen	56
5.2	Konstruktion einer Basis für den Raum Neumannscher Felder	60

6	Der allgemeine Fall	66
6.1	Ein Ansatz für eine analytische Charakterisierung der ersten Betti-Zahl	66
6.2	Erste Konsequenz: Ein analytischer Beweis für die Isomorphie der ersten Betti-Gruppen von G und \hat{G}	74
6.3	Zweite Konsequenz: Der Raum Neumannscher Felder im allgemeinen Fall.....	75
	Literaturverzeichnis	79
	Erklärung	83

1

Einführung

1.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht das Zusammenspiel reeller Analysis und Topologie am Beispiel des Raums Neumannscher Felder, einer wichtigen Klasse von Vektorfeldern aus der Potentialtheorie. Es stellt sich heraus, daß bei diesem Funktionenraum eine topologische Zusammenhangseigenschaft "höherer Ordnung" die entscheidende Rolle spielt, nämlich die Struktur der ersten Homologiegruppe des zugrundeliegenden Bereiches *und* seines Komplements. Neben den erhöhten analytischen Schwierigkeiten, die die Neumann-Felder verglichen mit den Dirichlet-Feldern mit sich bringen, tritt somit das zusätzliche Problem auf, die relevante topologische Größe, die erste Betti-Zahl, analytisch zugänglich zu machen.

Daher beschränken wir uns für den Großteil dieser Arbeit auf analytische Verallgemeinerungen von Henkelkörpern, die wir in Abschnitt 2.1 präzise beschreiben. Diese "zulässigen Mengen" haben den Vorteil, daß sie eine explizite Bestimmung von Betti-Basen der ersten Homologiegruppen im Innen- als auch Außenraum ermöglichen, die zusätzlich in einer *analytisch* zu beschreibenden Weise "dual" zueinander sind, was nichts anderes als eine analytische Fassung der betreffenden Aussage aus dem Alexanderschen Dualitätssatz für die ersten Betti-Zahlen darstellt. Insofern haben sich diese Grundbereiche als die geeigneten generischen Fälle erwiesen, um die Auswirkung der ersten Homologiegruppen auf den Raum Neumannscher Felder exemplarisch zu studieren.

Um die gruppentheoretischen und topologischen Grundlagen, die unserer Meinung nach für den Bereich der Analysis relevant sind, geschlossen zur Verfügung zu haben, stellen wir diese in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 zusammen. Die ganze Darstellung ist dabei von vornherein auf Anwendungen in der Analysis ausgerichtet, was sich insbesondere darin äußert, daß wir in Abschnitt 2.4 die etwas unbekanntere *kubische* anstelle der klassischen *simplizialen* singulären Homologietheorie bringen. Es wird sich im Verlauf der Arbeit herausstellen, daß dies die geeignete Homologieversion für analytische Anwendungen darstellt.

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 führen wir das wesentliche analytische Hilfsmittel, das unserer Auffassung nach am Schnittpunkt zwischen der ersten Homologiegruppe und der Analysis steht, ein, das sog. "Verschlingungsintegral", und zeigen, daß es zu einer Bilinearform auf der ersten Homologiegruppe einer offenen Menge des \mathbb{R}^3 und ihres Komplements ausgebaut werden kann. Als erste Anwendung dieses Kalküls zeigen wir in Abschnitt 3.3, wie eine aus der Theorie berandeter 3-Mannigfaltigkeiten bekannte Aussage über die erste Betti-Zahl schnell mit Hilfe dieses Hilfsmittels gewonnen werden kann, ohne auf tieferliegende topologische Sätze zurückgreifen zu müssen. Abschnitt 3.4 ist ein Exkurs in die geometrische Topologie der Dimensionen 2 und 3 und weist auf die Probleme hin, die auftreten können, wenn in der Dimension 3 zu schwache topologische Voraussetzungen gestellt werden. Insbesondere soll dies die von uns vorgenommene Eingrenzung der Topologie zulässiger Mengen plausibel machen.

Die Abschnitte 4.1 und 4.3 haben die explizite Bestimmung der Fundamentalgruppen und ersten Homologiegruppen des Innen- und Außenraums zulässiger Mengen zum Inhalt; dabei befinden sich die zugehörigen Betti-Basen in einer schon eingangs erwähnten dualen Relation zueinander, die durch das Verschlingungsintegral ausgedrückt wird. Den Aussagen für den Außenraum liegt dabei die Fundamentalgruppe einer Verschlingung, also ein Resultat aus der elementaren Knotentheorie, zugrunde, das wir in Abschnitt 4.2 beschreiben und das auch für die Wohldefiniertheit der in 3.2 eingeführten Bilinearform benötigt wird. Dieses Hilfsmittel vermeidet insbesondere die Anwendung des Alexanderschen Dualitätssatzes für die Homologiegruppe des Außenraums und ermöglicht insofern eine elementarere Herleitung.

In Abschnitt 5.1 stellen wir die notwendigen potentialtheoretischen Grundlagen zusammen, die für die Konstruktion einer Basis für den Raum Neumannscher Felder benötigt werden. Eine solche wird schließlich in Abschnitt 5.2 auf dem Innen- und Außenraum zulässiger Mengen konstruiert, wobei sowohl die explizite Kenntnis der ersten Homologiegruppen dieser beiden Bereiche als auch die durch das Verschlingungsintegral vermittelte duale Relation der zugehörigen Betti-Basen wesentlich eingehen.

In Kapitel 6 abstrahieren wir die vorhergegangenen Betrachtungen und widmen uns dem Problem, das den Kern unserer Untersuchungen darstellt: eine analytische Charakterisierung für die erste Betti-Zahl zu finden, was ja im Falle der nullten Betti-Zahl, also bei der Zahl der Wege-Komponenten, problemlos möglich ist. In Abschnitt 6.1 schlagen wir eine entsprechende Charakterisierung vor und geben mögliche Beweisansätze, in deren Rahmen wir auch zeigen, daß jede eindimensionale Homologiekategorie durch eine Linearkombination regulärer Jordankurven der Klasse C^∞ repräsentiert werden kann. Abschnitt 6.2 rechtfertigt, wieso unser Vorschlag sinnvoll ist, denn wir zeigen, daß aus der in 6.1 angegebenen Charakterisierung die Dualitätsaussage für die ersten Betti-Zahlen aus dem Alexanderschen Dualitätssatz gefolgert werden kann, was also auch einen analytischen Beweis dieser Aussage geben würde. Schließlich zeigen wir in Abschnitt 6.3 auf, daß die Charakterisierung der ersten Betti-Zahl die gewünschte Verallgemeinerung der Basiskonstruktion aus Abschnitt 5.2 auf Innen- und Außenraum *beliebiger* offener beschränkter Mengen mit endlich vielen Wege-Komponenten und mit glattem und orientierbarem geschlosse-

nen Rand aus endlich vielen Komponenten leisten würde. Insbesondere wäre es *nicht* mehr erforderlich, die Topologie dieser Mengen zu spezifizieren, und daher scheint diese Charakterisierung in der Tat das richtige Werkzeug zu sein, das die erste Homologiegruppe mit der Analysis verknüpft.

Da unsere bisher betrachteten zulässigen Mengen aufgrund der in Kapitel 4 erfolgten Untersuchungen unsere Charakterisierung aus Abschnitt 6.1 erfüllen, ermutigen diese Ergebnisse insbesondere dazu, sie als definierende Eigenschaft einer neuen Klasse von Mengen zu verwenden, für die die Basiskonstruktion aus Abschnitt 5.2 *ebenfalls* gilt. Damit ist eine erste Verallgemeinerung des bisher betrachteten generischen Falles zulässiger Mengen erreicht.

Zunächst geben wir jedoch in den beiden nachfolgenden Abschnitten eine Übersicht über den topologischen und analytischen Kontext, in dem sich unsere gesamten Betrachtungen bewegen.

1.2 Dualitätssätze

“Topologie ist Stetigkeitsgeometrie; sie handelt von denjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde, welche bei ‘*topologischen*’, d.h. eindeutigen und in beiden Richtungen stetigen, Abbildungen erhalten bleiben — von Eigenschaften also, welche jedenfalls nichts mit Größenverhältnissen zu tun haben —, und sie handelt auch von den stetigen Abbildungen selbst.”¹ “[Sie hat sich] nicht nur zu einer bedeutenden, sondern auch zu einer außerordentlich umfangreichen mathematischen Disziplin entwickelt; die wichtigsten Resultate dieser Entwicklung harren einer Darstellung, die gleichzeitig in die Vergangenheit und in die Zukunft weist...”²

Mit dieser Beschreibung der Topologie eröffnen P. Alexandroff und H. Hopf ihr heute als Klassiker geltendes Werk über die bis zu seinem Erscheinungsdatum (1935) bekannten topologischen Resultate. Auch wenn die Darstellung für heutige Maßstäbe etwas schwerfällig anmutet, sagt ein modernes Buch über algebraische Topologie — zumindest dann, wenn es nicht am Adjektiv des Titels ersticken will — nichts anderes als Alexandroff und Hopf über das Hauptproblem der Topologie aus: Im Zentrum steht das *Homöomorphieproblem*. Vorgelegt seien zwei topologische Räume X und Y ; man entscheide, ob diese homöomorph sind, in Zeichen $X \cong Y$. Eine Variante davon ist das *Klassifikationsproblem*: Gegeben sei eine gewisse Klasse topologischer Räume (z.B. die der geschlossenen Flächen). Man klassifiziere diese Räume nach Homöomorphie.

Um diese Probleme angehen zu können, benötigt man somit möglichst “feine” Unterscheidungsmerkmale in der Kategorie der topologischen Räume, also Eigenschaften, die einer möglichst kleinen Klasse von topologischen Räumen zukommen und die sich unter Homöomorphismen nicht ändern, sog. *Homöomorphieinvarianten*. Die vielleicht intuitivste und elementarste derartige Invariante ist die Anzahl der

¹ Alexandroff/Hopf [2], Einleitung S. 1.

² A.a.O., Vorwort S. VII.

Zusammenhangskomponenten, in die ein topologischer Raum zerfällt. Dies ist jedoch offenbar eine sehr grobe Invariante. Angestoßen durch Riemann, Betti und vor allem dann Poincaré, wurden daher zum Ende des letzten und Beginn dieses Jahrhunderts neue algebraische Objekte eingeführt: die *Homologiegruppen* $H_k(X)$ eines topologischen Raumes X zu den Dimensionen $k \geq 0$. Diese sind per Konstruktion homöomorphieinvariant und haben die Eigenschaft, daß die 0-dimensionale Homologiegruppe $H_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe darstellt, deren Rang gerade gleich der Zahl der Weg-Zusammenhangskomponenten von X ist (vgl. Abschnitt 2.4). In "vernünftigen" topologischen Räumen, in denen Zusammenhangs- und Weg-Zusammenhangskomponenten zusammenfallen, stellen die Ränge der höheren Homologiegruppen somit gewissermaßen höherdimensionale Analoga zu der obigen elementarsten topologischen Invariante dar: Sie präzisieren, was man unter "Zusammenhangseigenschaften höherer Ordnung" verstehen könnte.

Dies soll an einem klassischen Beispiel demonstriert werden, dem Problem der Wohldefiniertheit der Dimension einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ("Invarianz der Dimension"): Für $n \neq m$ gilt $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$. Wir benötigen dazu die "höheren Zusammenhangseigenschaften" einer n -Sphäre, wie sie sich in ihren Homologiegruppen ausdrücken. Diese rechnet man zum Beispiel mit Hilfe einer Mayer-Vietoris-Sequenz im Falle $n > 0$ zu $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ und $H_k(S^n) = 0$ für $k \neq 0, n$ aus; siehe etwa Stöcker/Zieschang [28], Beispiel 9.4.12 (d) S. 232. Sei nun o.E. $m > 0$, denn für $m = 0$ ist die Aussage klar. Wäre $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, so folgte durch Übergang zur Einpunktkompaktifizierung $S^n \cong S^m$. Mit der Homöomorphieinvarianz der Homologiegruppen erhielten wir also $H_k(S^n) \cong H_k(S^m)$ für alle k . Im Falle $n \neq m$ führt dies jedoch auf einen Widerspruch.

Wir sehen hier exemplarisch, wie erst die volle Homologie, also "subtilere" topologische Eigenschaften, zum gewünschten Resultat verholfen haben. In manchen Situationen ist jedoch auch die Homologie noch nicht fein genug. In der zweiten Hälfte der 30'er Jahre wurde daher die Cohomologie-Theorie entwickelt, deren Ursprünge üblicherweise Alexander, Whitney, Čech und Kolmogoroff zugeschrieben werden. Auch hier ordnet man, wie im Zuge der Homologietheorie, topologischen Räumen abelsche Gruppen zu, die k -dimensionalen *Cohomologiegruppen* $H^k(X)$. Hierfür gibt es verschiedene Zugänge, die in geringfügig anderen Eigenschaften resultieren, sich jedoch auf "vernünftigen" Räumen (zum Beispiel parakompakten Hausdorffräumen, die lokal kontrahierbar sind) als isomorph erweisen. Für eine Diskussion dieser Details vgl. Spanier [27], Sec. 6.9 S. 338 ff., dort insbesondere die Korollare 5 und 7.

Der große Vorteil der Cohomologie ist, daß sie die Einführung zusätzlicher Strukturelemente in Form von Operatoren wie etwa des "cup"-Produkts erlaubt, die zu noch feineren Invarianten führen (siehe für ein Beispiel Stöcker/Zieschang [28], Beispiel 15.3.6 (c) S. 389). Ihr Nachteil ist eine größere geometrische Unanschaulichkeit (vgl. Massey [19], Sec. XII.5 S. 316 ff. für den Versuch einer geometrischen Interpretation von Coketten), weswegen wir auf sie im folgenden nicht zurückgreifen. Von besonderer Bedeutung ist die Cohomologie-Theorie jedoch auch deswegen, weil sie vermöge des Satzes von de Rham eine Verbindung zur Analysis und theoretischen Physik herstellt (siehe Bott/Tu [4], Introduction, S.8 für ein Beispiel). Da wir im Rahmen unserer Betrachtungen ein besonderes Augenmerk auf Zusammenhänge

zwischen Analysis und Topologie legen, wollen wir dieses Resultat kurz angeben.

Bezeichne dazu M eine (im Sinne der C^∞ -Eigenschaft) differenzierbare Mannigfaltigkeit und $H_{\text{dR}}^k(M)$ deren aus der Analysis bekannte k -dimensionale de Rham'sche Cohomologiegruppe; siehe etwa Forster [8], S. 230 und Bott/Tu [4], S. 21 für die Verallgemeinerung auf eine Mannigfaltigkeit. $H^k(M; \mathbb{R})$ ist die k -te Cohomologiegruppe mit Koeffizienten in \mathbb{R} ; vgl. Massey [19], Chap. XII für dieses Konzept. De Rham's Satz lautet dann:

Satz (De Rham): *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

$$H_{\text{dR}}^k(M) \cong H^k(M; \mathbb{R}). \quad \square$$

Einen Beweis findet man zum Beispiel in Massey [19], Appendix A S. 407 ff. Wir bemerken an dieser Stelle, daß Mannigfaltigkeiten nach der hier verwendeten Definition dem Zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügen und somit automatisch parakompakt sind, worauf auch in Jänich [16], Abschnitt 8.5 S. 153 hingewiesen wird. Nach Spanier [27], loc.cit. kommt es also nicht darauf an, welche Cohomologietheorie (mit Koeffizienten in \mathbb{R}) verwendet wurde, so daß wir im Kontext differenzierbarer Mannigfaltigkeiten die de Rham-Cohomologie als generischen Typ für "Cohomologie" ansehen dürfen. Dieser Standpunkt wird beispielsweise auch in Bott/Tu [4] eingenommen.

Homologie und Cohomologie stellen die wichtigsten Konstruktionen der algebraischen Topologie dar und liefern eine große Zahl an Invarianten. Die Bedeutung von *Dualitätssätzen* liegt nun darin, daß sie Aussagen über Zusammenhänge innerhalb der Homologie und Cohomologie kompakter, orientierbarer Mannigfaltigkeiten in den "dualen" Dimensionen n und $n-k$ aussprechen. Dadurch werden tiefliegende, die geometrisch-topologische Struktur dieser Mannigfaltigkeiten betreffende Eigenschaften aufgedeckt, nämlich Restriktionen enthüllt, denen die fundamentalen topologischen Invarianten Homologie und Cohomologie unterworfen sind.

Als zentraler Dualitätssatz, von dem aus alle weiteren derartigen Sätze abgeleitet werden, wird heute der *Dualitätssatz von Poincaré* angesehen. Eine Begründung hierfür mag Bott/Tu [4] liefern, wo dieser Satz als Dreh- und Angelpunkt der gesamten Darstellung fungiert. Ferner ist in der Situation differenzierbarer Mannigfaltigkeiten der zentrale Mechanismus dieser Dualität die vertraute Operation der Integration, was für die Verbindung zu anderen Gebieten der Mathematik von Bedeutung ist. Der Satz lautet:

Satz (Poincaré-Dualität): *Sei M eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann gilt für alle k :*

$$H^k(M; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M; \mathbb{R}). \quad \square$$

Hierbei haben wir die klassische topologische Formulierung gewählt, bei der der Isomorphismus durch das sog. "cap"-Produkt der algebraischen Topologie (Massey [19], Sec. XIII.3 S. 328–329) vermittelt wird. Um die Bedeutung der Integration bei

dieser Dualität herauszustellen, bietet es sich an, den Satz geringfügig anders zu formulieren; siehe dazu (5.4) in Sec. I.5 (S. 44) von Bott/Tu [4]. Ferner sei betont, daß "Mannigfaltigkeit" ohne Zusatz offene Mengen des \mathbb{R}^n als Parameterbereiche unterstellt, also eine unberandete Mannigfaltigkeit bedeutet.

Natürlich war das nicht die Form, in der Poincaré dieses Resultat ursprünglich formuliert hat. Vielmehr schrieb er 1895 in seiner "Analysis Situs" (siehe Poincaré [23]): "*Pour une variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.*" Dies wurde auch in Seifert/Threlfall [26], § 69 S. 245 so übernommen: "Die k -te Bettische Zahl einer orientierbaren geschlossenen Mannigfaltigkeit stimmt mit der $(n - k)$ -ten überein ($k = 0, 1, \dots, n$); die Torsionskoeffizienten der Dimension k sind gleich denen der Dimension $n - k - 1$ ($k = 0, 1, \dots, n - 1$)."

Bis etwa 1930 waren nämlich nicht die Homologie- und Cohomologie-Gruppen, sondern die daraus gewonnenen Invarianten, die *Betti-Zahlen* und *Torsionskoeffizienten* (vgl. Abschnitt 2.2), die Objekte vorrangigen Interesses (das änderte sich erst unter dem Einfluß Emmy Noethers Ende der 20'er Jahre). Und nicht die Poincaré-Dualität, sondern ein anderer Satz wurde als "einer der schönsten und folgenreichsten Sätze der Topologie"³ und als eine der "wichtigsten topologischen Entdeckungen der letzten Jahrzehnte"⁴ bezeichnet, die "die Kenntnisse von den Lageeigenschaften eines (krummen) Polyeders im n -dimensionalen Raume in einer überraschenden und bis heute nicht übertroffenen Weise bereichert"⁵ hat: der 1922 vom Amerikaner James W. Alexander publizierte und später nach ihm benannte *Alexandersche Dualitätssatz*.

Ganz grob gesprochen, setzt der Alexandersche Dualitätssatz in seiner für Anwendungen wichtigsten Version Homologiegruppen einer kompakten oder triangulierbaren Teilmenge A des \mathbb{R}^n mit Cohomologiegruppen des Komplements $\mathbb{R}^n \setminus A$ in dualen Dimensionen zueinander in Beziehung. In seiner Originalarbeit [1] betrachtete Alexander die Einpunkt-Kompaktifizierung S^n von \mathbb{R}^n und darin einen Polyeder, d.h. eine triangulierbare Teilmenge A (was für uns immer die Existenz einer endlichen Triangulierung bedeutet). In heutiger Terminologie sagte sein Hauptsatz, Theorem Y in Nr. 11 seiner Veröffentlichung, dann aus:

Satz (Alexander-Dualität; "Ur-Form"): Sei $A \subset S^n$ ein Polyeder. Dann stimmen für alle $0 \leq k \leq n - 1$ die Ränge der folgenden Homologiegruppen, die in dieser Situation gleich ihren Dimensionen als \mathbb{Z}_2 -Vektorräume sind, überein:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(A; \mathbb{Z}_2) \text{ und } H_{n-1}(S^n \setminus A; \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2, \\ H_k(A; \mathbb{Z}_2) \text{ und } H_{n-k-1}(S^n \setminus A; \mathbb{Z}_2) \text{ für } k \neq 0, n-1, \text{ sowie} \\ H_{n-1}(A; \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_2 \text{ und } H_0(S^n \setminus A; \mathbb{Z}_2). \end{array} \right. \quad \square$$

Dabei erklärt sich die Fallunterscheidung dadurch, daß wir den Begriff der sog. *reduzierten Homologiegruppe* vermeiden wollten, der alle drei Fälle beinhaltet.

³ Seifert/Threlfall [28], Fußnote 47 S. 325.

⁴ Alexandroff/Hopf [2], Kapitel XI.4 Nr. 7 S. 449.

⁵ A.a.O., Einleitung S. 10.

Überträgt man diesen Satz von der S^n in den \mathbb{R}^n , gelangt man zu der "klassischen" Form des Alexanderschen Dualitätssatzes, wie sie Eingang in den Grundlehren-Band Alexandroff/Hopf [2] gefunden hat; siehe S. 440 loc.cit. Dieser Version wird unser vorrangiges Interesse gelten:

Satz (Alexander-Dualität; "klassische Form"): Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ triangulierbar. Es bezeichne $p_k(A) := \text{Rang}(H_k(A)/\text{Tor } H_k(A))$ die k -te Betti-Zahl von A ; vgl. hierzu Abschnitt 2.2. Für alle $0 \leq k \leq n-1$ gilt dann:

$$\begin{cases} p_k(A) = p_{n-k-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) & \text{für } k \neq n-1 \text{ und} \\ p_{n-1}(A) = p_0(\mathbb{R}^n \setminus A) - 1. \end{cases} \quad \square$$

Um nun den Satz in moderner Fassung formulieren zu können, benötigt man entweder den Begriff der relativen Homologie oder eine der weiter oben angesprochenen Versionen von Cohomologie, nämlich Alexander-Spanier-Cohomologie. Wir ziehen den ersten Begriff vor und bemerken, ohne eine genaue Definition relativer Homologie zu geben, daß man mit Hilfe einer zu einem Raumpaare (M, A) gehörigen langen exakten Homologiesequenz (siehe z.B. Massey [19], Sec. VII.5 S. 169–172) die Aussagen bezüglich der Betti-Zahlen, wie sie im "klassischen" Alexanderschen Satz auftreten, leicht erhält; vgl. Stöcker/Zieschang [28], Beispiel 14.8.7 S. 380. Bezeichnet $H_q(M, A)$ die q -te relative Homologiegruppe des Raumpaares (M, A) , können wir formulieren:

Satz (Alexander-Dualität; "moderne Form"): Sei M eine zusammenhängende orientierbare und triangulierbare Mannigfaltigkeit der Dimension n und $A \subset M$ ein Teilpolyeder. Dann gilt für alle k :

$$H^k(M \setminus A) \cong H_{n-k}(M, A). \quad \square$$

Für einen Beweis dieser Version von Alexander-Dualität siehe Abschnitt 14.8 S. 376 ff. aus Stöcker/Zieschang [28]. Die spezielle Wahl $M = S^n$ führt dann auf die eingangs angesprochene Variante für Anwendungen im \mathbb{R}^n . Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß man auf die Voraussetzung der Triangulierbarkeit von A auch verzichten und den Satz für eine kompakte, zusammenhängende und orientierbare Mannigfaltigkeit M und eine kompakte Teilmenge $A \subset M$ formulieren kann; insbesondere braucht A kein Teilpolyeder von M zu sein. Für eine derartige Verallgemeinerung vgl. Massey [19], Sec. XIV.6 S. 370–375.

In dieser Arbeit soll das Augenmerk jedoch auf die "klassische Form" des Alexanderschen Dualitätssatzes gelegt werden, da die Betti-Zahlen selbst — und damit der Dualitätssatz in seiner "klassischen Form" — unmittelbaren Einfluß auf ein anderes Gebiet der Mathematik haben: die Potentialtheorie. Dies soll im folgenden Abschnitt kurz angedeutet werden; den Einfluß der ersten Betti-Zahl auf den Raum Neumannscher Felder werden wir in Kapitel 5 studieren.

1.3 Bedeutung der Betti-Zahlen in der Potentialtheorie

Ein wichtiges Problem, das die Physik an die Theorie partieller Differentialgleichungen heranträgt — man denke etwa an die Teilgebiete Elektrodynamik mit den Maxwell-Gleichungen oder die Hydrodynamik —, ist das folgende: Es seien die Quellen ε und Wirbel γ eines Vektorfeldes v sowie gewisse Randbedingungen vorgegeben. Die Aufgabe ist es, aus diesen Daten das Vektorfeld v zu rekonstruieren.

Wir wollen diese Aufgabe präzisieren. Dazu bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 und $\cdot \times \cdot$ das Vektorprodukt, d.h. zu $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist $a \times b$ der eindeutig bestimmte Vektor, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\langle a \times b, x \rangle = \det(a, b, x)$.

G sei eine beschränkte zulässige Menge, wie sie in Abschnitt 2.1 definiert wird. ε sei eine Hölder-stetige Funktion, γ ein Hölder-stetiges Vektorfeld auf \overline{G} zum jeweils gleichen Exponenten $\alpha \in]0, 1[$. Als Randdaten fordern wir ein ebenfalls Hölder-stetiges Tangentialfeld γ^* auf ∂G (d.h. ist n die äußere Normale bezüglich G , so gelte $\langle n, \gamma^* \rangle \equiv 0$ auf ∂G) bzw. eine Hölder-stetige Funktion ε^* auf ∂G , nach wie vor bezüglich des obigen Exponenten α . Dann lautet das *Dirichletsche Problem* (D) bzw. *Neumannsches Problem* (N) für inhomogen-harmonische Vektorfelder:

Gesucht ist ein $v \in C^\alpha(\overline{G}, \mathbb{R}^3) \cap C^{1,\alpha}(G, \mathbb{R}^3)$ mit:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} v = \varepsilon \quad \text{in } G, \\ \operatorname{rot} v = \gamma \quad \text{in } G, \\ -(n \times v) = \gamma^* \quad \text{auf } \partial G, \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad (N) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} v = \varepsilon \quad \text{in } G, \\ \operatorname{rot} v = \gamma \quad \text{in } G, \\ -\langle n, v \rangle = \varepsilon^* \quad \text{auf } \partial G. \end{array} \right.$$

Offenbar spielen bei diesen Problemen die folgenden beiden Funktionenräume eine analoge Rolle wie der Kern einer Matrix bei einem inhomogenen Gleichungssystem in dem Sinne, daß sie die Nichteindeutigkeit der Lösungsmengen von (D) bzw. (N) regieren: Wir definieren den reellen Vektorraum der *Dirichletschen Felder in G* als

$$Y(G) := \{ y \mid y \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^3), \operatorname{div} y = 0, \operatorname{rot} y = 0, n \times y = 0 \}$$

und den reellen Vektorraum der *Neumannschen Felder in G* als

$$Z(G) := \{ z \mid z \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\overline{G}, \mathbb{R}^3) \text{ für ein } \rho \in]0, 1[, \\ \operatorname{div} z = 0, \operatorname{rot} z = 0, \langle n, z \rangle = 0 \}.$$

Dann gilt offensichtlich, wenn wir auf die Frage der Regularität der Lösung zu diesem Zeitpunkt keinen Wert legen: v ist eine Lösung von (D) genau dann, wenn dies $v + y$ für alle $y \in Y(G)$ ist, und analog löst v das Problem (N) genau dann, wenn das für alle $z \in Z(G)$ mit $v + z$ der Fall ist. Um Eindeutigkeit bei den Lösungen dieser Probleme erwarten zu können, muß man sich also $\dim_{\mathbb{R}} Y(G)$ bzw. $\dim_{\mathbb{R}} Z(G)$ zusätzliche Bedingungen vorgeben. In der Tat gilt: Falls die rechten Seiten der Probleme (D) bzw. (N) gewissen Integrabilitätsbedingungen genügen, darf man im Falle des Dirichlet-Problems $\dim_{\mathbb{R}} Y(G)$ Ergiebigkeiten und beim Neumann-Problem

$\dim_{\mathbb{R}} Z(G)$ Zirkulationen vorschreiben (in die jeweils die Lösung v involviert ist) und erhält daraus Existenz- und Eindeigkeitssätze. Für Einzelheiten siehe die Sätze I.3.2 (S. 111), I.3.4 (S. 121) und I.3.8 (S. 143) in von Wahl [29].

Uns interessiert jedoch in erster Linie die Tatsache, daß die Dimensionen der Räume $Y(G)$ und $Z(G)$ allein von der Topologie der zulässigen Menge G abhängen: Man kann zeigen (von Wahl [29], Satz I.3.5 S. 124), daß

$$\dim_{\mathbb{R}} Y(G) = p_2(\overline{G})$$

gilt, wobei $p_2(\overline{G})$ wie oben die zweite Betti-Zahl von \overline{G} bezeichnet und nach dem Alexanderschen Dualitätssatz $p_2(\overline{G}) = p_0(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}) - 1$ gilt. Es sei betont, daß G für dieses Resultat lediglich als beschränkte offene Menge des \mathbb{R}^3 mit orientierbarem und geschlossenem stetig gekrümmten Rand vorausgesetzt zu werden braucht, also *keine* zusätzlichen topologischen Forderungen an G gestellt werden müssen (außer der Standardvoraussetzung natürlich, daß G und ∂G aus jeweils endlich vielen Wege-Komponenten bestehen sollen). Der technische Grund ist, daß bei der Behandlung des Dirichletschen Problems (D) — mit dessen Hilfe eine Basis für $Y(G)$ konstruiert werden kann — zusätzliche Integrabilitätsbedingungen für die Normalkomponente einer Lösung von (D) zur Verfügung stehen, also zusätzliche *analytische* Information, die für eine Konstruktion von Lösungen ausreicht; siehe von Wahl [29], Satz I.3.3 S. 113. Der tieferliegende Grund mag darin gesehen werden, daß die topologische Eigenschaft, die bei der Konstruktion dieser Lösungen eingeht, im wesentlichen die Zahl der (beschränkten) Zusammenhangskomponenten des Komplements von G ist, also lediglich "Zusammenhang 0-ter Ordnung" — und damit eine Eigenschaft, die analytisch erfaßt werden kann in Form der Dimension des reellen Vektorraums

$$\hat{H}(\hat{G}) := \{ \hat{h} \mid \hat{h} \in C^1(\overline{\hat{G}}), \text{grad } \hat{h} = 0 \text{ in } \overline{\hat{G}}, \hat{h}(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty \},$$

wobei wir $\hat{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ gesetzt haben.

Um im Falle des Raumes Neumannscher Felder ein analoges Resultat zu gewinnen, muß man dagegen etwas vorsichtiger sein und die Topologie der Menge G präzisieren. Dies ist eines der Hauptanliegen dieser Arbeit und erfolgt, wie oben angekündigt, in Abschnitt 2.1. Dann läßt sich beweisen (siehe Kapitel 5), daß

$$\dim_{\mathbb{R}} Z(G) = p_1(G)$$

gilt, und wir sehen, daß im Falle der Neumannschen Felder eine "Zusammenhangseigenschaft höherer Ordnung" in Form der Größe $p_1(G) = \text{Rang}(H_1(G)/\text{Tor } H_1(G))$ eingeht, die (vorläufig) analytisch nicht ausgedrückt werden kann. Dies erklärt die Notwendigkeit zusätzlicher Voraussetzungen an die Topologie des Gebiets, um in der Lage zu sein, eine explizite Basis von $Z(G)$ zu konstruieren.

Zusammenfassend ersehen wir also aus diesen Resultaten: *Das Maß der Nichteindeutigkeit der Probleme (N) und (D) wird bestimmt durch die erste und zweite Betti-Zahl von G , jene topologischen Größen also, über die der Alexandersche Dualitätssatz in seiner "klassischen Form" Aussagen ausspricht.* Diese Beobachtung eines Zusammenspiels von reeller Analysis und Topologie war der Auslöser für die vorliegende Arbeit.

2

Topologische Vorbereitungen

2.1 Definition zulässiger Mengen G

Wir haben in Abschnitt 1.3 der Einleitung gesehen, daß die einfachste topologische Invariante, die Zahl der Zusammenhangskomponenten (die bekanntlich für offene Teilmengen des \mathbb{R}^n mit den Weg-Zusammenhangskomponenten übereinstimmen), analytisch erfaßt werden kann als die Dimension eines Unterraums des Raums stetig differenzierbarer Funktionen. Dies hatte zur Konsequenz, daß sowohl Lösungen des Problems (D) als auch, davon ausgehend, eine Basis für den Raum Dirichletscher Felder konstruiert werden kann, ohne mehr als die Zahl der Komponenten über die Topologie des zugrundeliegenden Bereichs zu kennen.

Für Zusammenhangseigenschaften von "erster Ordnung" verfügen wir nicht über eine vergleichbare analytische Charakterisierung (vgl. jedoch Kapitel 6). Daher sind zu diesem Zeitpunkt neben analytischen auch topologische Voraussetzungen an den betrachteten Bereich zu stellen, um zu Resultaten über den Raum Neumannscher Felder zu kommen. Diese formulieren wir in diesem Abschnitt.

Als Vorbereitung dazu führen wir die benötigten topologischen Konstruktionen ein; eine Referenz liefert Kapitel 3 in Jänich [16] oder Abschnitt 1.2–1.4 in Stöcker/Zieschang [28].

Quotiententopologie

Zunächst zum Begriff der Quotiententopologie: Wir betrachten eine Äquivalenzrelation \sim auf einem topologischen Raum X . Wie üblich bezeichne $[x] \subset X$ die Äquivalenzklasse des Punktes $x \in X$ und X/\sim den zugehörigen Quotientenraum aller Äquivalenzklassen auf X . Mit Hilfe der kanonischen Projektion $\pi: X \rightarrow X/\sim$, $x \mapsto \pi(x) := [x]$ versehen wir ihn mit der Struktur eines topologischen Raumes, der sog. *Quotiententopologie*, indem wir $U \subset X/\sim$ genau dann offen nennen, wenn $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

Die Quotiententopologie ist also die feinste Topologie (d.h. die mit den meisten offenen Mengen) auf X/\sim , bezüglich der π stetig ist.

Topologische Summe von Räumen

Als nächstes präzisieren wir, was es heißt, die disjunkte Vereinigung zweier topologischer Räume zu bilden. Sei dazu Y ein weiterer topologischer Raum. Die *disjunkte Vereinigung* oder *Summe* von X und Y wird gebildet durch die formale Konstruktion

$$X + Y := X \times \{0\} \cup Y \times \{1\},$$

wobei wir X und Y in der offensichtlichen Weise als Teilmengen auffassen können. Jedes $U \subset X + Y$ ist also von der Form $U = A + B$ mit $A \subset X$ und $B \subset Y$, und wir nennen U genau dann offen, wenn A offen in X und B offen in Y ist. Insbesondere stimmen dann die durch $X + Y$ auf den Teilräumen X und Y induzierten Teilraumtopologien mit den ursprünglichen Topologien dieser Räume überein.

Der entstehende topologische Raum ist die *topologische Summe* von X und Y . Offenbar stimmt sie für disjunkte X und Y mit dem Raum $X \cup Y$, versehen mit der Topologie von X auf X und der Topologie von Y auf Y , überein.

Verkleben von topologischen Räumen

Eine der wichtigsten Anwendungen des Quotientenraumbegriffs stellt das Zusammenkleben topologischer Räume mit Hilfe von Klebeabbildungen dar: X und Y seien wie oben topologische Räume, $X_0 \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum und $\varphi: X_0 \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Wir betrachten die durch $x \sim \varphi(x)$ für alle $x \in X_0$ gegebene Relation auf $X + Y$ und setzen sie zu einer Äquivalenzrelation \sim auf $X + Y$ fort. Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind dann also entweder einpunktig (nämlich in dem Fall, daß $z \in X + Y$ weder in X_0 noch in $\varphi(X_0)$ liegt) oder von der Form $\varphi^{-1}(\{y\}) + \{y\} \subset X + Y$ für alle $y \in \varphi(X_0)$. Mit

$$Y \cup_{\varphi} X := (X + Y) / \sim$$

bezeichnen wir den zugehörigen Quotientenraum. Da in diesem alle $x \in X_0$ mit ihrem Bildpunkt $\varphi(x)$ identifiziert sind, ist die Sprechweise üblich, daß $Y \cup_{\varphi} X$ durch *Verkleben* des Raumes X mit Y mittels der *Klebeabbildung* φ entsteht. Da unter \sim keine zwei verschiedenen Punkte von Y miteinander identifiziert werden können, ist die kanonische Abbildung $Y \hookrightarrow X + Y \xrightarrow{\pi} Y \cup_{\varphi} X$ injektiv, und weil für alle $V \subset Y$ die Beziehung $\pi(V) = \pi(Y) \cap \pi(A + V)$ mit beliebigem offenen $A \subset X$ gilt, wobei wegen der Stetigkeit von φ die Menge $\pi^{-1}(\pi(V)) = \varphi^{-1}(V) + V$ offen in $X_0 + Y$ für offenes V ist, sehen wir, daß die durch $Y \cup_{\varphi} X$ auf $\pi(Y)$ induzierte Teilraumtopologie gerade aus allen $\pi(V)$ mit $V \subset Y$ offen besteht. Also gilt:

Bemerkung 1: $\pi|_Y: Y \rightarrow Y \cup_{\varphi} X$ ist eine Einbettung. □

Uns interessiert vor allem die Situation, in der φ Homöomorphismus von X_0 auf $Y_0 := \varphi(X_0)$ ist. Sei dann $\psi: Y_0 \rightarrow X_0$ dessen Umkehrung. Dann werden durch “ $x \sim \varphi(x)$ für alle $x \in X_0$ ” und “ $y \sim \psi(y)$ für alle $y \in Y_0$ ” offenbar die gleichen Äquivalenzrelationen auf $X + Y$ erzeugt, so daß also $Y \cup_{\varphi} X = X \cup_{\psi} Y$ gilt. Bemerkung 1 zeigt somit:

Bemerkung 2: Ist φ Homöomorphismus, so sind X und Y vermöge $\pi|_X$ und $\pi|_Y$ in $Y \cup_{\varphi} X$ eingebettet. Wir dürfen in dieser Situation also X und Y als Teilräume des verklebten Raums auffassen und $X, Y \subset Y \cup_{\varphi} X$ schreiben, wobei wir X und Y mit ihren Bildern $\pi|_X(X)$ bzw. $\pi|_Y(Y)$ unter der Einbettung identifizieren. \square

Ankleben eines Henkels

Wir verwenden im folgenden die üblichen Notationen $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ für den n -dimensionalen Einheitsball und $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\} = \partial D^n$ für die $(n-1)$ -dimensionale Einheitssphäre. I bezeichne stets das Intervall $[0, 1]$. Aus technischen Gründen benötigen wir ferner noch den "leicht vergrößerten" Einheitsball

$$D_{\varepsilon}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1 + \varepsilon\},$$

wobei $\varepsilon > 0$ eine beliebige, festgewählte reelle Zahl nahe 0 sei. Dadurch werden wir präzisieren können, was unter dem anschaulich klaren Begriff einer abgeschlossenen Umgebung eines Henkels an einem Henkelkörper zu verstehen ist.

Nun betrachten wir den 3-dimensionalen Einheitsball D^3 und zwei disjunkte Einbettungen $f_1, f_2: D^2 \rightarrow S^2 = \partial D^3$, d.h. für deren Bilder gelte $f_1(D^2) \cap f_2(D^2) = \emptyset$. Sei dann

$$D_i := \{f_i(x) \mid |x| \leq \frac{1}{2}\},$$

wobei $i = 1, 2$. Wir wollen den Zylinder $D_{\varepsilon}^2 \times I$ über die "Klebestellen" $D_i \subset \partial D^3$ mit D^3 verkleben. Dazu seien beliebige Homöomorphismen $\varphi_1: D_{\varepsilon}^2 \times \{0\} \xrightarrow{\cong} D_1$ vom "Boden" des Zylinders auf D_1 und $\varphi_2: D_{\varepsilon}^2 \times \{1\} \xrightarrow{\cong} D_2$ vom "Deckel" des Zylinders auf D_2 gegeben, die also einen Homöomorphismus φ auf der Vereinigung von "Deckel" und "Boden" nach $D_1 \cup D_2$ definieren. Dann ist $D^3 \cup_{\varphi} (D_{\varepsilon}^2 \times I)$ definiert, und die Verklebung

$$V_1 := D^3 \cup_{\varphi} (D^2 \times I).$$

bei der wir zur Vereinfachung der Notation auch die Einschränkung der Klebeabbildung φ auf $(D^2 \times \{0\}) \cup (D^2 \times \{1\})$ mit dem Symbol φ bezeichnet haben, heißt *Henkelkörper mit einem Henkel*. V_1 ist in natürlicher Weise Teilraum vom Raum $D^3 \cup_{\varphi} (D_{\varepsilon}^2 \times I)$, den wir mit $V_{1,\varepsilon}$ bezeichnen wollen und der als ein Henkelkörper aufgefaßt werden kann, dessen Henkel eine abgeschlossene Umgebung des Henkels von V_1 darstellt.

Indem man weitere disjunkte Einbettungen f_3, f_4 nach $D^3 \setminus (D_1 \cup D_2) \subset V_{1,\varepsilon}$ betrachtet, kann man in analoger Weise einen nächsten Henkel ankleben und erhält einen Henkelkörper V_2 mit zwei Henkeln; induktiv fortfahrend liefert das nach g Schritten einen *Henkelkörper V_g mit g Henkeln*, der Teilraum des Raumes $V_{g,\varepsilon}$ ist. $V_{g,\varepsilon}$ werden wir manchmal auch den zu V_g gehörigen Henkelkörper mit abgeschlossener Umgebung der Henkel nennen.

Damit sind alle Vorbereitungen abgeschlossen, um die folgende Definition zulässiger Mengen geben zu können als in den \mathbb{R}^3 differenzierbar eingebettete Henkelkörper, deren Rand gewisse analytische Regularitätseigenschaften erfüllt:

Definition 1 (zulässige Menge): *Es gebe eine stetig differenzierbare Einbettung $F: V_{g,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Henkelkörpers mit abgeschlossener Umgebung der Henkel in den \mathbb{R}^3 . Dann heißt*

$$G := F(V_g) \setminus \partial(F(V_g))$$

zulässige Menge des \mathbb{R}^3 , wenn die folgenden topologischen und analytischen Voraussetzungen erfüllt sind:

- (i) $\mathbb{R}^3 \setminus F(D^3)$ ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Zu jedem der g angeklebten Henkel gibt es einen Ball $B_i \subset \mathbb{R}^3$, so daß die B_i für $1 \leq i \leq g$ paarweise disjunkt sind und die homöomorphen Bilder der Henkel mit abgeschlossener Umgebung unter der Einbettung F jeweils in genau einem B_i enthalten sind.
- (iii) $\partial G = \partial(F(V_g))$ ist geschlossen (d.h. kompakt und unberandet) und orientierbar sowie von der Klasse C^2 , also stetig gekrümmt.

Mit $\hat{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ bezeichnen wir stets das Komplement vom Abschluß $\overline{G} = F(V_g)$.

Voraussetzung (iii) wird dabei benötigt, um das Neumann-Problem für die Laplace-Gleichung auf G lösen zu können (vgl. Abschn. 5.1); die Voraussetzungen (i) und (ii) erklären sich durch die Untersuchungen in Abschnitt 4.3. Schließlich bemerken wir noch, daß alle folgenden Betrachtungen auch für endliche Vereinigungen zulässiger Mengen gemäß Definition 1 durchgeführt werden könnten; da die Zahl der Zusammenhangskomponenten im Falle der Neumannschen Felder jedoch nicht die primär interessierende topologische Größe ist, würde dies lediglich einen erhöhten Schreibaufwand mit sich bringen.

Wir schließen mit einer Bemerkung bezüglich der Funktion der folgenden drei Abschnitte. Um bei den im Rahmen dieser Arbeit angestellten Betrachtungen, die sich im Grenzbereich zwischen reeller Analysis und Topologie bewegen, eine möglichst geschlossene Darstellung zu erreichen, ist der Rest des Kapitels einer überblicksartigen Zusammenstellung der wichtigsten Konzepte aus der Homotopie- und Homologietheorie gewidmet. Natürlich verzichten wir dabei nahezu ausschließlich auf Beweise und versuchen vielmehr, eine Art axiomatischen Standpunkt einzunehmen. Um dabei die Darstellung so flüssig wie möglich zu gestalten, schicken wir die benötigten Hilfsmittel und Begriffe aus der Gruppentheorie im folgenden vorweg.

2.2 Gruppentheoretische Hilfsmittel

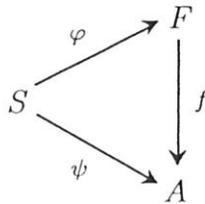
In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Konstruktionen aus der Gruppentheorie zusammengestellt, auf denen die Homologie- und Homotopietheorie basieren. Da wir vor allem an den Eigenschaften dieser Konstruktionen interessiert sind, referieren wir sie in Form der universellen Abbildungsprobleme, die sie lösen, und skizzieren jeweils nur kurz, wie man die Gruppen tatsächlich erhält. Dieser Zugang deckt sich am besten mit unserem axiomatischen Ansatz und hat zudem den Vorteil der Kürze und Eleganz.

Freie abelsche Gruppen

Der gesamten Homologietheorie liegt das Konzept der freien abelschen Gruppe auf einer gegebenen Menge S zugrunde. Die definierende universelle Eigenschaft ist die folgende:

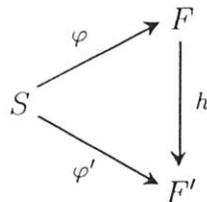
Definition 1: Sei S eine beliebige Menge. Eine freie abelsche Gruppe auf der Menge S ist eine abelsche Gruppe F zusammen mit einer Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$, so daß die folgende universelle Eigenschaft gilt:

Zu jeder abelschen Gruppe A und jeder Abbildung $\psi: S \rightarrow A$ gibt es genau einen Homomorphismus $f: F \rightarrow A$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:



Daß diese Eigenschaft eine freie abelsche Gruppe auf S in der Tat bis auf Isomorphie charakterisiert, ist die Aussage des folgenden Hilfssatzes, der eine mehr oder weniger unmittelbare Folgerung aus der Eindeutigkeit des Homomorphismus f ist, der in der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen auftritt:

Hilfssatz 1: Seien F und F' freie abelsche Gruppen auf der Menge S bezüglich der Abbildungen $\varphi: S \rightarrow F$ bzw. $\varphi': S \rightarrow F'$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $h: F \rightarrow F'$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:



□

Nun wäre noch zu zeigen, daß zu einer gegebenen Menge S in der Tat ein Paar (F, φ) existiert, das die universelle Eigenschaft in Definition 1 erfüllt und somit eine freie abelsche Gruppe auf S darstellt. Da wir vorrangig an den Eigenschaften der algebraischen Objekte interessiert sind, verweisen wir für den vollständigen Existenzbeweis auf Massey [19], Sec. III.3, und skizzieren ihn hier nur, um eine Vorstellung von den Objekten aus F zu vermitteln:

Man stelle S als (abzählbare oder überabzählbare) Familie $S = \{x_i \mid i \in I\}$ dar (z.B. über sich selbst indiziert); dann ist S disjunkte Vereinigung der Mengen $S_i := \{x_i\}$. Es bezeichne $n \cdot x_i$ die Abbildung $S_i \rightarrow \mathbb{Z}$, $x_i \mapsto n$. Nun sei F_i die von $1 \cdot x_i$ in der additiven abelschen Gruppe $\text{Abb}(S_i, \mathbb{Z})$ erzeugte zyklische Untergruppe, d.h.

$$F_i := \langle 1 \cdot x_i \rangle = \{n \cdot x_i \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dann ist klar, daß F_i die freie abelsche Gruppe auf der Menge S_i bezüglich der "Inklusionsabbildung" $\varphi_i: S_i \rightarrow F_i$, $x_i \mapsto 1 \cdot x_i$ ist. Jetzt setzt man

$$F := \bigoplus_{i \in I} F_i$$

und muß sich nur noch überlegen, daß in dieser Situation einer Partition der zugrundeliegenden Menge S die direkte Summe der freien abelschen Gruppen auf den Partitionselementen wieder eine freie abelsche Gruppe ist, und zwar auf der Menge S bezüglich der Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$ mit $\varphi|_{S_i} := \eta_i \circ \varphi_i$, wobei $\eta_i: F_i \rightarrow F$ den natürlichen Monomorphismus von einem direkten Summanden in die zugehörige direkte Summe bezeichnet.

Wir bemerken an dieser Stelle, daß die Abbildung φ aus der vorangehenden Konstruktion injektiv ist. Daher kann jedes Element $x_i \in S$ mit seinem Bild $\varphi(x_i) \in F$ identifiziert werden. Dann kann S als Teilmenge von F aufgefaßt werden. Insbesondere kann man sich jedes Element $g \in F$ eindeutig repräsentiert denken in der Form

$$g = n_1 \cdot x_{i_1} + n_2 \cdot x_{i_2} + \cdots + n_k \cdot x_{i_k}$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen Indizes $i_j \in I$, $n_j \in \mathbb{N}$, falls $g \neq 0$, wobei wegen der Einbettbarkeit von F in $\text{Abb}(S, \mathbb{Z})$ der Ausdruck als Summe von Abbildungen angesehen werden kann. Da andererseits jede solche Summe ein Element aus F repräsentiert, folgt, daß F durch die Menge $\varphi(S) = S$ erzeugt wird.

Eine besondere Situation entsteht offenbar dann, wenn die betrachtete Menge S Teilmenge einer Gruppe G ist. Falls dann nämlich die freie abelsche Gruppe F auf S isomorph zu einer Untergruppe von G ist, braucht die obige Summe nicht mehr als Summe von Abbildungen in $\text{Abb}(S, \mathbb{Z})$ aufgefaßt zu werden, sondern kann direkt in G gebildet werden. Falls sogar $F = G$ gilt, verdient das eine eigene Notation:

Definition 2: Eine Gruppe G heißt eine freie abelsche Gruppe, falls es eine Teilmenge $S \subset G$ gibt, so daß G die freie abelsche Gruppe von S bezüglich der Inklusionsabbildung $\iota: S \hookrightarrow G$ ist.

In dieser Situation heißt S eine Basis von G und erfüllt offenbar eine (und damit alle) der folgenden äquivalenten Bedingungen:

- (i) Alle $x \in S$ haben unendliche Ordnung, und G ist die (innere) direkte Summe der zyklischen Untergruppen $\langle x \rangle$ mit $x \in S$.
- (ii) Jedes von 0 verschiedene Element $g \in G$ hat eine Darstellung der Form $g = \sum_{x \in S} n_x x$, wobei $n_x \in \mathbb{Z}$ und $n_x = 0$ für alle bis auf endliche viele $x \in S$ ist. Diese Darstellung ist (bis auf die Reihenfolge der Summanden) eindeutig.
- (iii) Die Menge S erzeugt G und ist linear unabhängig, d.h.:
Aus $n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_k x_k = 0$ mit $x_1, \dots, x_k \in S$ und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ folgt $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 0$.

Die Mächtigkeit von S heißt der Rang von G , in Zeichen: $\text{Rang}(G) := |S|$.

Insbesondere ist eine freie abelsche Gruppe also isomorph zu $\mathbb{Z}^{\oplus \text{Rang}(G)}$, der direkten Summe von $\text{Rang}(G)$ Kopien von \mathbb{Z} .

Man kann zeigen, daß der Rang einer freien abelschen Gruppe unabhängig von der Auswahl der Basis und damit wohldefiniert ist, was im Falle, daß S endliche Menge ist, elementar möglich ist (Massey [19], Lemma III.3.4 und Corollary III.3.5), für beliebige S jedoch mit mehr Aufwand verbunden ist und wir daher hier auf Scheja/Storch [24], Satz 25.3 verweisen.

Die Bedeutung freier abelscher Gruppen besteht u.a. darin, daß sie sich in gewisser Hinsicht wie Vektorräume verhalten, was schon Punkt (iii) in Definition 2 angedeutet hat. Auch wenn diese Analogie nicht überstrapaziert werden darf, übertragen sich doch zwei bekannte Resultate aus der Theorie der Vektorräume wie folgt auf den Fall freier abelscher Gruppen:

Hilfssatz 2: *Es gilt:*

- a) Sei G eine freie abelsche Gruppe und $G' \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist auch G' frei abelsch, und es gilt $\text{Rang}(G') \leq \text{Rang}(G)$.
- b) Sei $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus zwischen freien abelschen Gruppen von endlichem Rang. Dann gilt:

$$\text{Rang}(G) = \text{Rang}(\text{Kern } f) + \text{Rang}(\text{Bild } f).$$

Beweis: Für Teil a) verweisen wir auf Scheja/Storch [24], Satz III.B.3, bei dessen Beweis maßgeblich das Zornsche Lemma eingeht.

Teil b) erhält man, indem man Lemma 51.10 aus Scheja/Storch [25] auf die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Kern } f \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{f} \text{Bild } f \longrightarrow 0$$

anwendet, wobei zu bemerken ist, daß abelsche Gruppen in natürlicher Weise als Moduln über \mathbb{Z} aufgefaßt werden können und somit die obige Sequenz eine exakte Sequenz von \mathbb{Z} -Moduln ist, die nach Teil a) endlichen Rang besitzen. Nach Bemerkung 25.2 aus Scheja/Storch [24] stimmt $\text{Rang}_{\mathbb{Z}}(G)$ aus dem benutzten Lemma 51.10 gerade mit dem Begriff des Ranges einer freien abelschen Gruppe überein, so daß die Behauptung folgt. \square

Struktur von endlich erzeugten abelschen Gruppen

Homologiegruppen sind in den wichtigsten Anwendungen in aller Regel endlich erzeugte abelsche Gruppen. Für diese Gruppen liegt ein umfassendes Klassifikationsresultat vor, das wir im folgenden anführen wollen; insbesondere definieren sich durch dieses Resultat die Begriffe *Betti-Zahl* und *Torsionskoeffizienten* einer endlich erzeugten abelschen Gruppe (und nur in diesem Kontext macht es überhaupt Sinn, diese Begriffe zu verwenden).

Der Vollständigkeit halber bringen wir zunächst ein Strukturresultat, das sich fast unmittelbar aus der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen ergibt und für jede abelsche Gruppe, auch nicht endlich erzeugte, zur Verfügung steht. Sei nämlich S Erzeugendensystem der abelschen Gruppe A (mit $S = A$ gibt es ein solches immer) und F die freie abelsche Gruppe auf S bezüglich der Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$. Sei $\iota: S \hookrightarrow A$ die Inklusion. Nach der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen

gibt es dann genau einen Homomorphismus $\nu: F \rightarrow A$ mit $\iota = \nu\varphi$. Insbesondere ist ν auch surjektiv, da S die Gruppe A ja erzeugt, und wir haben:

Hilfssatz 3: *Jede abelsche Gruppe A ist epimorphes Bild einer freien abelschen Gruppe, d.h. zu A gibt es eine freie abelsche Gruppe F und einen Epimorphismus $\nu: F \rightarrow A$. Jedes von 0 verschiedene Element $r \in \text{Kern } \nu$ heißt eine nichttriviale Relation innerhalb der Menge S von Erzeugern, die F zugrunde liegt. \square*

Damit kommen wir zum Struktursatz endlich erzeugter abelscher Gruppen und der Definition von der Betti-Zahl einer solchen Gruppe. Wir erwähnen noch, daß wir mit $\text{Tor } G$ die *Torsionsuntergruppe* der Gruppe G bezeichnen, also die Menge aller Elemente von G , die endliche Ordnung besitzen. Ist $\text{Tor } G = \{0\}$, nennen wir G *torsionsfrei* — per Konstruktion gilt dies z.B. für die Quotientengruppe $G/\text{Tor } G$. Im Falle $\text{Tor } G = G$ heißt G *Torsionsgruppe*; z.B. ist jede endliche abelsche Gruppe Torsionsgruppe. Mit dieser Notation können wir formulieren:

Satz 1 (Struktur endlich erzeugter abelscher Gruppen):

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- $\text{Tor } G$ und $G/\text{Tor } G$ sind ebenfalls endlich erzeugt, und G ist isomorph zur direkten Summe $\text{Tor } G \oplus G/\text{Tor } G$. Also ist die Struktur von G vollständig bestimmt durch deren Torsionsuntergruppe $\text{Tor } G$ und torsionsfreie Quotientengruppe $G/\text{Tor } G$.
- Jede endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe ist eine freie abelsche Gruppe von endlichem Rang.
- Jede endlich erzeugte abelsche Torsionsgruppe ist isomorph zu einer direkten Summe $C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_n$. Dabei ist jedes C_i eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung t_i , also $C_i \cong \mathbb{Z}_{t_i}$, und die t_i bilden eine Teilerkette $t_1 | t_2 | \cdots | t_n$ (d.h., t_i teilt t_{i+1} für $i = 1, \dots, n-1$). Ferner sind die Zahlen t_i durch die Torsionsgruppe eindeutig bestimmt. \square

Für einen Beweis verweisen wir auf Satz 39.8 in Scheja/Storch [24]; die Teilbarkeitsaussage für die t_i läßt sich dem Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen in § 61 von Scheja/Storch [25] entnehmen.

Auf der Grundlage von Satz 1 läßt sich nun folgende Definition geben:

Definition 3 (Betti-Zahl, Torsionskoeffizienten): Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Es seien n, t_i für $\text{Tor } G$ gemäß c) aus Satz 1 gewählt (also sind diese Zahlen eindeutig durch G bestimmt). Ferner setzen wir $p := \text{Rang}(G/\text{Tor } G)$. Dann heißt p die Betti-Zahl und t_1, \dots, t_n die Torsionskoeffizienten von G . Insbesondere besitzt G also die Struktur

$$G \cong \mathbb{Z}^p \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{t_n}.$$

Elemente $b_1, b_2, \dots, b_p \in G$, deren Restklassen eine Basis der freien abelschen Gruppe $G/\text{Tor } G$ bilden, heißen eine Betti-Basis von G , und die Elemente c_1, c_2, \dots, c_n

sind eine Torsionsbasis von G , falls $\text{Tor } G$ die innere direkte Summe der von ihnen erzeugten zyklischen Untergruppen ist.

Damit beenden wir die Zusammenstellung der für die Homologietheorie benötigten gruppentheoretischen Grundlagen.

Freies Produkt von Gruppen

Wir wenden uns nun den Konstruktionen zu, die in der Homotopietheorie, insbesondere im Kontext der Fundamentalgruppe, Anwendung finden werden. Alle Gruppen, die im folgenden auftreten, können dabei abelsch oder nicht-abelsch sein, solange nicht etwas Gegenteiliges ausgesagt wird. Um die Fundamentalgruppe komplizierterer topologischer Räume ausrechnen zu können, ist die folgende Konstruktion, die wir wieder über ihre universelle Eigenschaft definieren, zentral:

Definition 4: Sei $\{G_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Gruppen, so daß für jedes $i \in I$ ein Homomorphismus $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ von G_i in eine feste Gruppe G gegeben ist. Genau dann heißt G das freie Produkt der Gruppen G_i (bezüglich der Homomorphismen φ_i), wenn die folgende universelle Eigenschaft gilt:

Zu jeder Gruppe H und jeder Familie von Homomorphismen $\psi_i: G_i \rightarrow H$ ($i \in I$) gibt es genau einen Homomorphismus $f: G \rightarrow H$, so daß das folgende Diagramm für alle $i \in I$ kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow f \\ G_i & & H \\ & \searrow \psi_i & \end{array}$$

Notation: Ist I endlich, also o.E. $I = \{1, \dots, n\}$, bezeichnen wir das freie Produkt G der Gruppen G_i mit $G := G_1 * G_2 * \dots * G_n$ oder auch $\prod_{1 \leq i \leq n}^* G_i$, im allgemeinen Fall mit

$$G := \prod_{i \in I}^* G_i.$$

Ähnlich dem Fall freier abelscher Gruppen (Hilfssatz 1) charakterisiert diese Eigenschaft das freie Produkt von Gruppen bis auf Isomorphie in dem folgenden Sinne:

Hilfssatz 4: Seien G und G' freie Produkte der Familie $\{G_i \mid i \in I\}$ von Gruppen bezüglich der Homomorphismen $\varphi_i: G_i \rightarrow G$ bzw. $\varphi'_i: G_i \rightarrow G'$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $h: G \rightarrow G'$, so daß das folgende Diagramm für alle $i \in I$ kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow h \\ G_i & & G' \\ & \searrow \varphi'_i & \end{array}$$

□

Der Existenzbeweis für das freie Produkt von Gruppen ist insofern algebraisch aufwendiger als der für freie abelsche Gruppen, als etwas Sorgfalt auf die Definition der Gruppenverknüpfung auf G verwandt werden muß (die Gruppen G_i brauchen a priori überhaupt nichts miteinander zu tun zu haben!). Die grundlegende Idee ist hier, die Menge W aller Wörter auf der Vereinigung der G_i zu betrachten. Auf dieser operiert jedes G_i effektiv und kann also als Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_W auf W aufgefaßt werden. Dann setzt man $G := \langle G_i \mid i \in I \rangle \subset \Sigma_W$, und damit ist klar, daß die Verknüpfung auf G algebraisch nichts anderes als die Komposition von Permutationen auf W ist. Ferner ist $\varphi_i: G_i \hookrightarrow G$ die Inklusionsabbildung (jedes G_i kann also als Teilmenge von G begriffen werden), und aufgrund der Konstruktion von G kann jedes von 1 verschiedene Element $g \in G$ in eindeutiger Weise als Produkt

$$g = g_1 g_2 \cdots g_n$$

dargestellt werden, wobei die Faktoren Elemente der Gruppen G_i und alle von 1 verschieden sind sowie keine zwei aufeinanderfolgenden Faktoren derselben Gruppe angehören. Insbesondere gelten für das Produkt zweier Elemente von G in dieser Darstellung die gewohnten Multiplikationsregeln.

Die Details der Konstruktion sind in Massey [19], Sec. III.4 ausgeführt; dort findet sich auch der Nachweis, daß das Paar $(G, \{\varphi_i \mid i \in I\})$ die universelle Eigenschaft von Definition 4 erfüllt. Wir können uns damit der letzten Konstruktion zuwenden, die wir im Rahmen der Homotopietheorie benötigen:

Freie Gruppen

Fundamentalgruppen topologischer Räume haben häufig die Struktur einer freien Gruppe auf einer Menge S mit gewissen Relationen; vgl. das gesamte Kapitel 4. Die universelle Eigenschaft, die freie Gruppen definiert, ist völlig analog zu der für freie abelsche Gruppen in Definition 1:

Definition 5: Sei S eine beliebige Menge. Eine freie Gruppe auf der Menge S (oder eine durch S erzeugte freie Gruppe) ist eine Gruppe F zusammen mit einer Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$, so daß die folgende universelle Eigenschaft gilt:

Zu jeder Gruppe H und jeder Abbildung $\psi: S \rightarrow H$ gibt es genau einen Homomorphismus $f: F \rightarrow H$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow \varphi & \downarrow f \\ S & & H \\ & \searrow \psi & \end{array}$$

Der Vollständigkeit halber sei auch hier die Eindeutigkeitsaussage erwähnt, die ebenso analog zu der für freie abelsche Gruppen lautet:

Hilfssatz 5: Seien F und F' freie Gruppen auf der Menge S bezüglich der Abbildungen $\varphi: S \rightarrow F$ bzw. $\varphi': S \rightarrow F'$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $h: F \rightarrow F'$, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} & & F \\ & \nearrow \varphi & \downarrow h \\ S & & \\ & \searrow \varphi' & F' \end{array}$$

□

Der Existenzbeweis für freie Gruppen verwendet dieselbe Methode wie der für freie abelsche Gruppen mit dem einzigen Unterschied, daß statt der direkten Summe zyklischer Gruppen hier deren freies Produkt verwendet wird:

Ist S gegeben, schreiben wir wieder $S = \{x_i \mid i \in I\} = \bigcup_{i \in I} S_i$ mit $S_i := \{x_i\}$ als disjunkte Vereinigung ihrer Elemente und bezeichnen mit F_i die von x_i erzeugte zyklische Untergruppe. Um eine Abgrenzung zu freien abelschen Gruppen zu erreichen, ziehen wir jedoch im folgenden eine multiplikative Notation vor, da unser Ergebnis in dieser Situation i.a. eine nicht-abelsche Gruppe darstellen wird: Dazu sei eine *Silbe* auf dem *Alphabet* S ein Ausdruck der Form $(x_i, n) \in S \times \mathbb{Z}$, und wir schreiben dafür suggestiv $x_i^n := (x_i, n)$. Für Silben x_i^n auf einem einelementigen Alphabet S_i läßt sich durch die Definition $x_i^n \cdot x_i^m := x_i^{n+m}$ dann leicht eine Gruppenstruktur einführen, und es ist

$$F_i := \langle x_i^1 \rangle = \{x_i^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

eine unendliche zyklische Gruppe, die wir als zyklische Gruppe des Elements x_i ansehen können (und die natürlich zu der zyklischen Gruppe, die wir im Zuge der Konstruktion freier abelscher Gruppen definiert haben, isomorph ist, weswegen wir die gleiche Notation gewählt haben).

Dies ist nun offenbar die freie Gruppe auf der Menge S_i bezüglich der "Inklusion" $\varphi_i: S_i \rightarrow F_i, x_i \mapsto x_i^1$. (Hier bemerken wir ohne Beweis, daß dieser Fall einer einelementigen Grundmenge S_i von Erzeugern der einzige ist, in dem die freie und die freie abelsche Gruppe übereinstimmen.) Jetzt bilden wir das freie Produkt

$$F := \prod_{i \in I}^* F_i$$

und verwenden analog zum Fall freier abelscher Gruppen das Ergebnis, daß das freie Produkt einer Familie freier Gruppen auf den Elementen der Partition einer gegebenen Menge wieder eine freie Gruppe darstellt, und zwar auf der gesamten Menge. Insbesondere ist F also freie Gruppe auf der Menge S bezüglich der Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$, definiert durch $\varphi|_{S_i} := \eta_i \circ \varphi_i$ mit dem im vorigen Abschnitt erwähnten Monomorphismus $\eta_i: F_i \rightarrow F$ von einem Faktor F_i des freien Produkts F in das Produkt, der Bestandteil der universellen Eigenschaft aus Definition 4 ist.

Mit den Betrachtungen des letzten Teilabschnitts über das freie Produkt von Gruppen ist dann auch klar, wie man sich die Elemente von F vorzustellen hat: Jedes

von 1 verschiedene Element $g \in F$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form

$$g = x_{i_1}^{n_1} x_{i_2}^{n_2} \dots x_{i_k}^{n_k}$$

mit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k} \in S$, so daß jeweils $x_{i_j} \neq x_{i_{j+1}}$ gilt und die $n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind. Einen solchen Ausdruck nennen wir auch ein *reduziertes Wort* in den Elementen von S und vereinbaren, daß die Identität 1 von F durch das *leere Wort* repräsentiert wird. Schließlich stellen wir noch fest, daß die Abbildung φ injektiv ist und daher jedes $x_i \in S$ mit $\varphi(x_i) = x_i^1$ identifiziert werden kann. Insbesondere wird dann die freie Gruppe F von der Menge S erzeugt.

Die Einzelheiten der hier skizzierten Konstruktion finden sich in Sec. III.5 von Massey [19]. Wir gehen nun noch auf einen anderen Aspekt ein, der für unsere Belange von besonderem Interesse ist: Aufgrund der zwischen der Fundamentalgruppe und ersten Homologiegruppe eines zusammenhängenden topologischen Raumes bestehenden Verwandtschaft (siehe Abschnitt 2.4) ist es wichtig zu wissen, welcher Zusammenhang zwischen der freien und der freien abelschen Gruppe auf einer gegebenen Menge S besteht.

Um diesen formulieren zu können, bezeichnen wir wie üblich mit $[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}$ den *Kommutator* zweier Elemente x, y einer gegebenen Gruppe G ; dieser ist genau dann 1, wenn x und y in G kommutieren. Der Ausdruck

$$[G, G] := \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$$

bezeichnet die von allen Kommutatoren in G erzeugte Untergruppe; es ist leicht zu sehen, daß $[G, G]$ Normalteiler von G ist, da die Konjugation eines Kommutators wieder einen solchen ergibt. Daher ist die Quotientengruppe $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ wohldefiniert und heißt die *abelsch gemachte* Gruppe G^{ab} . Der erwähnte Zusammenhang, dessen Beweis wir hier ausführen wollen, da er in Massey [19] ausgelassen ist, lautet dann:

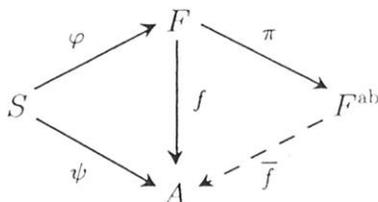
Hilfssatz 6: Sei F eine freie Gruppe auf der Menge S bezüglich der Abbildung $\varphi: S \rightarrow F$. Es bezeichne $\pi: F \rightarrow F/[F, F] = F^{\text{ab}}$ die natürliche Projektion von F auf die Quotientengruppe. Dann ist F^{ab} eine freie abelsche Gruppe auf S bezüglich der Abbildung $\pi\varphi: S \rightarrow F^{\text{ab}}$.

Beweis: Es sei A eine beliebige abelsche Gruppe und $\psi: S \rightarrow A$ eine Abbildung. Wir müssen einen Homomorphismus $\bar{f}: F^{\text{ab}} \rightarrow A$ finden, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & F^{\text{ab}} \\ & \nearrow \pi\varphi & \downarrow \bar{f} \\ S & & A \\ & \searrow \psi & \end{array}$$

kommutiert, und zeigen, daß dieser eindeutig bestimmt ist. Mit Hilfe der universellen Eigenschaft der freien Gruppe F , angewendet auf die Gruppe A und die Abbildung

ψ , finden wir zunächst einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus $f: F \rightarrow A$, so daß der linke Teil des folgenden Diagrammes kommutativ ist:



Weil A abelsch ist, gilt jedoch $f([F, F]) = 1$, und f induziert daher einen Homomorphismus

$$\bar{f}: F^{\text{ab}} = F/[F, F] \longrightarrow A, \quad [x] \longmapsto \bar{f}([x]) := f(x),$$

d.h. es gilt $f = \bar{f} \circ \pi$. Im obigen Diagramm kommutiert mit dieser Definition von \bar{f} also auch die rechte Seite und damit das gesamte "äußere" Diagramm, so daß die Existenz gezeigt ist.

Gäbe es nun noch einen weiteren Homomorphismus $\bar{g}: F^{\text{ab}} \rightarrow A$ mit $\psi = \bar{g} \circ \pi \circ \varphi$, so setzen wir $g := \bar{g} \circ \pi$. $g: F \rightarrow A$ erfüllt dann ebenfalls die universelle Eigenschaft der freien Gruppe F , und wegen der Eindeutigkeit des entsprechenden Homomorphismus folgt $g = f$ und daraus $\bar{g} = \bar{f}$. \square

In Verallgemeinerung von Definition 2 nennen wir eine Gruppe F *freie Gruppe*, falls es eine Teilmenge S von F gibt, so daß F die freie Gruppe auf S bezüglich der Inklusionsabbildung $\iota: S \hookrightarrow F$ ist. S ist dann eine *Basis* von F , und die Mächtigkeit von S heißt der *Rang* von G . Auch im Falle freier Gruppen kann man zeigen, daß der Rang eine wohldefinierte Größe ist.

In Hinblick auf Abschnitt 4.2 beenden wir unsere Zusammenstellung gruppentheoretischer Hilfsmittel mit dem Begriff der *Präsentation* einer Gruppe. Um dabei den Begriff einer nichttrivialen Relation auf einer Gruppe definieren zu können, benötigen wir das folgende Resultat, das das Analogon von Hilfssatz 3 für beliebige Gruppen darstellt und das man völlig entsprechend unter Ausnutzung der universellen Eigenschaft der freien Gruppe auf einer Menge beweist:

Hilfssatz 7: *Jede Gruppe G ist epimorphes Bild einer freien Gruppe. Genauer: Ist S irgendein Erzeugendensystem von G und F freie Gruppe auf S , dann bestimmt die Inklusion $S \hookrightarrow G$ einen eindeutig bestimmten Epimorphismus $\nu: F \rightarrow G$. Jedes von 1 verschiedene Element $r \in \text{Kern } \nu$ heißt eine nichttriviale Relation innerhalb der Menge S von Erzeugern von G .* \square

Ist nun $\{r_j\} \subset \text{Kern } \nu$ irgendeine Familie von Relationen für G , so heißt eine weitere Relation r eine *Folge* oder *Konsequenz* der Relationen $\{r_j\}$, wenn r im kleinsten Normalteiler $N(\{r_j\})$ von F enthalten ist, der die Familie $\{r_j\}$ umfaßt (in mancher Literatur wird dieser Normalteiler auch der *Normalisator* der Familie genannt). Falls nun jede Relation $r \in \text{Kern } \nu$ Konsequenz der Menge $\{r_j\}$ ist, so gilt offenbar $\text{Kern } \nu = N(\{r_j\})$, und die Gruppe G ist dann bis auf Isomorphie durch die

Menge S der Erzeuger und durch die Familie $\{r_j\}$ von Relationen bestimmt, denn dann gilt wegen $F = \langle S \rangle$

$$G \cong \langle S \rangle / N(\{r_j\}).$$

Eine Familie von Relationen mit dieser Eigenschaft nennen wir daher *vollständiges System von Relationen* und schließen den Abschnitt mit der folgenden Definition:

Definition 6: Eine Präsentation auf einer Gruppe G ist ein Paar $(S, \{r_j\})$ bestehend aus einem Erzeugendensystem S von G und einem vollständigen System von Relationen zwischen diesen Erzeugern. Falls sowohl S als auch $\{r_j\}$ endlich sind, heißt die Präsentation endlich und G in diesem Fall endlich präsentierbar.

2.3 Homotopie

In diesem Abschnitt fassen wir die wichtigsten Begriffe und Definitionen aus der elementaren Homotopietheorie zusammen, die wir im Rahmen unserer Untersuchungen benötigen; auf Beweise wird dabei gänzlich verzichtet. Wir beginnen gleich mit dem zentralen Begriff des Abschnitts:

Homotopiebegriff

Im folgenden bezeichnen X und Y stets topologische Räume und $I := [0, 1]$ das Einheitsintervall.

Definition 1: Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen. Dann heißen f und g homotop, in Zeichen $f \simeq g$, falls es eine stetige Abbildung $H: X \times I \rightarrow Y$ gibt, so daß $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = g$ gilt. H ist dann eine Homotopie von f nach g und definiert eine Schar von Abbildungen $h_t := H(\cdot, t): X \rightarrow Y$ für alle $t \in I$, die wegen der Stetigkeit von H allesamt stetig sind.

Sei nun $A \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum, so daß $f|_A = g|_A$ gilt. Es gebe eine Homotopie H von f nach g mit der zusätzlichen Eigenschaft $H(a, t) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ und $t \in I$. In diesem Fall heißen f und g homotop relativ A , in Zeichen $f \simeq g \text{ rel } A$. Offenbar werden die Punkte in $f(A) = g(A)$ bei einer relativen Homotopie nicht bewegt.

Die wichtigste Eigenschaft des Homotopiebegriffs ist die folgende (siehe Stöcker/Zieschang [28], Satz 2.1.2 S. 48 für den Beweis):

Hilfssatz 1: Die Eigenschaften "Homotopie" und "Homotopie relativ A " definieren beide Äquivalenzrelationen auf der Menge der stetigen Abbildungen von X nach Y bzw. auf der Menge derartiger Abbildungen, die auf dem Teilraum A übereinstimmen. \square

Diese Beobachtung ermöglicht die Konstruktion der Fundamentalgruppe, mit der wir (einschließlich ihrer grundlegenden Eigenschaften) fortfahren.

Fundamentalgruppe

Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen ist die Menge

$$\Omega(X, x) := \{ \gamma \mid \gamma: I \rightarrow X \text{ ist stetig und } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

aller geschlossenen Wege auf X mit Anfangs- und Endpunkt x , der sogenannte *Schleifenraum* auf X zum *Basispunkt* x . Daß dabei alle Wege über das Einheitsintervall I parametrisiert aufgefaßt werden, hat lediglich technische Gründe und stellt für unsere Belange keine Einschränkung dar, denn ist $\omega: [a, b] \rightarrow X$ ein beliebiger Weg mit $\omega(a) = \omega(b) = x$, so ist $\gamma: I \rightarrow X$, definiert durch $\gamma(t) := \omega((1-t)a + tb)$, ein Weg mit I als Parameterintervall und $\text{Sp } \gamma = \text{Sp } \omega$. Wir wollen solche Wege, die durch orientierungstreue Parameterwechsel auseinander hervorgehen, miteinander identifizieren.

Die folgenden beiden Wege spielen im weiteren Verlauf eine besondere Rolle: Ist $\gamma \in \Omega(X, x)$, so ist der *rückwärts durchlaufene* oder kurz *inverse Weg* γ^{-1} definiert durch $\gamma^{-1}: I \rightarrow X$, $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$. Für alle $x \in X$ ist $\mathcal{E}_x: I \rightarrow X$, $\mathcal{E}_x(t) \equiv x$ der *konstante Weg* in x .

Mit Hilfe des Homotopiebegriffs gehen wir nun zu einem Quotientenraum auf $\Omega(X, x)$ über: Wir nennen zwei Wege $\sigma, \tau \in \Omega(X, x)$ *weghomotop* genau dann, wenn $\sigma \simeq \tau \text{ rel } \partial I$ gilt (wobei $\partial I = \{0, 1\}$ ist), wenn es also eine den Basispunkt $x \in X$ festlassende Homotopie $H: I \times I \rightarrow X$ gibt mit $H(\cdot, 0) = \sigma$, $H(\cdot, 1) = \tau$ und $H(0, \tilde{t}) = H(1, \tilde{t}) = x$ für alle $\tilde{t} \in I$. Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir fortan auch die Wegehomotopie mit dem Symbol \simeq und unterdrücken die relative Natur des Homotopiebegriffs; da wir im Zusammenhang mit Wegen keine anderen Homotopien verwenden, sollte dies zu keinen Verwechslungen führen. Nach Hilfssatz 1 ist dann jedenfalls der Quotientenraum $\Omega(X, x)/\simeq$ der Homotopieklassen geschlossener Wege durch x wohldefiniert. Solche Homotopieklassen notieren wir mit eckigen Klammern in der Form $[\cdot]$.

Um zum Begriff der Fundamentalgruppe zu kommen, führen wir nun ein algebraisches Element in die bisher rein geometrischen Betrachtungen ein: Zu zwei Wegen $\sigma, \tau \in \Omega(X, x)$ sei der *Produktweg* $\sigma * \tau: I \rightarrow X$ gegeben durch

$$\sigma * \tau(t) := \begin{cases} \sigma(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq 1/2, \\ \tau(2t-1) & \text{für } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

also durch "Hintereinanderdurchlaufen" der Wege. Die Tatsache, daß der Quotientenraum $\Omega(X, x)/\simeq$ durch die Verknüpfung $*$ mit der Struktur einer Gruppe versehen wird, ist die Aussage des folgenden Hilfssatzes, dessen sämtliche Teile in Sec. II.3 von Massey [19] gezeigt werden:

Hilfssatz 2: Die Verknüpfung $*$ ist wohldefiniert auf Homotopieklassen geschlossener Wege; es ist also $\sigma * \tau \simeq \sigma' * \tau'$, falls $\sigma \simeq \sigma'$ und $\tau \simeq \tau'$. Daher ist die durch $[\sigma] * [\tau] := [\sigma * \tau]$ für $\sigma, \tau \in \Omega(X, x)$ erklärte Operation wohldefiniert und hat die folgenden Eigenschaften:

(i) (Assoziativität) Für alle $\sigma, \tau, \omega \in \Omega(X, x)$ gilt

$$([\sigma] * [\tau]) * [\omega] = [\sigma] * ([\tau] * [\omega]).$$

(ii) (Neutrales) Für alle $\sigma \in \Omega(X, x)$ gilt

$$[\sigma] * [\mathcal{E}_x] = [\sigma] \quad \text{und} \quad [\mathcal{E}_x] * [\sigma] = [\sigma].$$

(iii) (Inverse) Für alle $\sigma \in \Omega(X, x)$ gilt

$$[\sigma] * [\sigma^{-1}] = [\mathcal{E}_x] \quad \text{und} \quad [\sigma^{-1}] * [\sigma] = [\mathcal{E}_x]. \quad \square$$

Auf der Grundlage dieses Hilfssatzes kann damit die folgende Definition gegeben werden:

Definition 2: Sei (X, x) ein topologischer Raum mit Basispunkt x . Dann ist die Menge

$$\pi_1(X, x) := \Omega(X, x) / \simeq$$

eine Gruppe bezüglich der Multiplikation $[\sigma] * [\tau] := [\sigma * \tau]$, genannt die Fundamentalgruppe oder 1. Homotopiegruppe von X zum Basispunkt x .

Schließlich enden wir mit den wichtigsten Eigenschaften der Fundamentalgruppe. Zunächst zur "Unabhängigkeit" der Fundamentalgruppe vom Basispunkt (siehe nach wie vor Sec. II.3 in Massey [19]):

Satz 1: Sei X wegzusammenhängender topologischer Raum, $x, y \in X$ verschiedene Punkte und p ein Weg von x nach y . Dann induziert die Konjugationsabbildung

$$p^*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y), \quad [\gamma] \longmapsto [p^{-1} * \gamma * p] =: p^*([\gamma])$$

einen Isomorphismus $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$ der Fundamentalgruppen auf X zu den Basispunkten x bzw. y . \square

Dieser Satz ist die Grundlage dafür, daß wir häufig die Angabe des Basispunktes in der Notation der Fundamentalgruppe unterdrücken werden und damit stillschweigend meinen, daß wir ihn für unsere aktuellen Zwecke "geeignet" wählen.

Um die im nächsten Teil zitierten Resultate richtig einordnen zu können, brauchen wir die folgende Eigenschaft stetiger Abbildungen bezüglich der Fundamentalgruppe (Sec. II.4 in Massey [19]):

Satz 2: Seien (X, x) und (Y, y) topologische Räume mit Basispunkt und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige basispunkterhaltende Abbildung (d.h. $f(x) = y$). Dann induziert f einen Homomorphismus

$$f_*: \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

von Fundamentalgruppen durch die Zuordnung

$$[\gamma] \mapsto f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma],$$

der gelegentlich auch mit $\pi_1(f)$ bezeichnet wird. \square

Sind hierbei $f, g: X \rightarrow Y$ homotope Abbildungen relativ $\{x\}$, ist unmittelbar klar, daß $f_* = g_*$ gilt. Wir sehen außerdem, daß die von Homöomorphismen induzierten Abbildungen Isomorphismen zwischen den betreffenden Fundamentalgruppen sind. Einen wichtigen Spezialfall stellt ferner die Situation dar, daß $X' \subset X$ ein Teilraum und die betrachtete Abbildung die Inklusion ι ist. Dann ist klar, daß ι_* im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv zu sein braucht; aus dem wegweisen Zusammenhang der Mengen I und $I \times I$ folgt jedoch sofort:

Hilfssatz 3: Ist X' die Wegekomponeute von (X, x) , die x enthält, dann induziert die Inklusion $\iota: X' \hookrightarrow X$ einen Isomorphismus

$$\iota_*: \pi_1(X', x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x). \quad \square$$

Homotopietyp und Homotopieäquivalenz von Räumen

Die folgenden Ausführungen sind einer der wichtigsten Eigenschaften der Fundamentalgruppe gewidmet: Sie ist nicht nur eine Invariante des Homöomorphietyps, sondern sogar des *Homotopietyps*. Dieser Begriff ist eine Verallgemeinerung der Definition eines Homöomorphismus; in dieser wird nämlich die Gleichheitsbeziehung durch die Homotopierelation ersetzt:

Definition 3: Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt eine Homotopieäquivalenz, in Zeichen $f: X \xrightarrow{\cong} Y$, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt, genannt Homotopie-Inverse von f , so daß $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Insbesondere ist eine Homotopie-Inverse also nur bis auf Homotopie eindeutig bestimmt.

Zwei Räume X und Y , zwischen denen es eine Homotopieäquivalenz gibt, heißen vom gleichen Homotopietyp; Notation: $X \simeq Y$.

Wie zu Beginn des Teils angesprochen, liegt die Bedeutung dieses Begriffs in dem folgenden Satz, dessen Beweis sich in Sec. II.8 von Massey [19] findet:

Satz 3: Ist die Abbildung $f: X \xrightarrow{\cong} Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist der induzierte Homomorphismus $f_*: \pi_1(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, f(x))$ für alle $x \in X$ ein Isomorphismus. Zusammen mit Satz 1 folgt somit: Wegzusammenhängende Räume vom gleichen Homotopietyp besitzen isomorphe Fundamentalgruppen, und zwar bei jeder Wahl der Basispunkte. \square

Die für unsere Zwecke wichtigste Homotopieäquivalenz wird vermittelt durch *Deformationsretrakte*:

Definition 4: Sei $A \subset X$ ein Teilraum.

- (i) A ist ein Retrakt von X , wenn es eine stetige Abbildung $r: X \rightarrow A$ (genannt Retraktion) gibt, so daß für alle $a \in A$ gilt: $r(a) = a$.
- (ii) A heißt Deformationsretrakt von X , wenn es eine Retraktion $r: X \rightarrow A$ und eine Homotopie $H: X \times I \rightarrow X$ gibt, so daß

$$\left. \begin{array}{l} H(x, 0) = x \\ H(x, 1) = r(x) \end{array} \right\} \text{ für alle } x \in X.$$

Falls sogar $H(a, t) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in I$ gilt, heißt A strenger oder auch starker Deformationsretrakt.

Ist $\iota: A \hookrightarrow X$ die Inklusion, so gilt $r \circ \iota = \text{id}_A$, und die Existenz von H ist gleichbedeutend mit $\iota \circ r \simeq \text{id}_X$ (im Falle eines strengen Deformationsretraktes sogar $\iota \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } A$). Also ist ι eine Homotopieäquivalenz (mit Homotopie-Inverser r), und nach Satz 3 besitzen X und A isomorphe Fundamentalgruppen für jeden Basispunkt $x \in A$.

Fundamentalgruppe der Kreislinie

Hier zitieren wir nur kurz dieses sicherlich wichtigste Beispiel einer nichttrivialen Fundamentalgruppe und verweisen für einen Beweis auf Massey [19], Sec. II.5 und V.3 (letzterer Abschnitt enthält die benötigte Theorie der Überlagerungsräume):

Satz 4: Die Fundamentalgruppe der Kreislinie S^1 ist frei zyklisch, erzeugt von der Homotopieklasse des Weges $I \rightarrow S^1, t \mapsto \exp 2\pi it$:

$$\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}. \quad \square$$

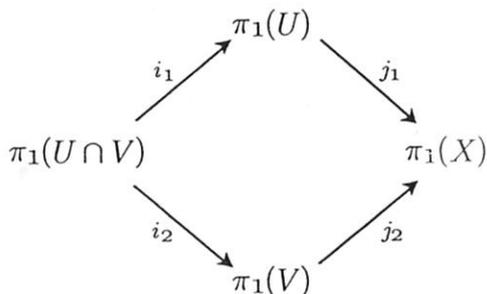
Seifert–van Kampen

Zum Abschluß dieses Abschnitts bringen wir eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Berechnung der Fundamentalgruppen komplizierterer topologischer Räume: den Satz von Seifert und van Kampen. Er beschreibt die Fundamentalgruppe der Vereinigung zweier Räume mit Hilfe der Fundamentalgruppen jedes dieser beiden Räume und ihres Durchschnitts unter geeigneten Voraussetzungen.

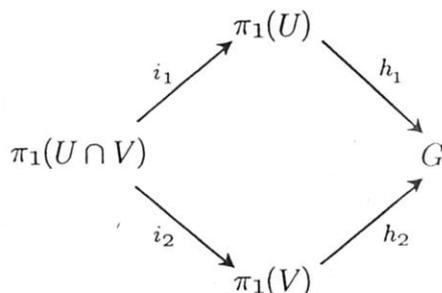
Dieser Zusammenhang wird dabei, wie schon in Abschnitt 2.2, mit Hilfe einer universellen Eigenschaft beschrieben, der die gesuchte Fundamentalgruppe genügt. Insbesondere folgt daraus mit den in 2.2 angerissenen Methoden sofort, daß die derartige Beschreibung die betreffende Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie charakterisiert. Eine für unsere Zwecke ausreichende Version des Satzes von Seifert–van Kampen entnehmen wir Sec. 14c aus Fulton [10]:

Satz 5 (Seifert–van Kampen): Sei X wegzusammenhängender Raum, und seien U, V wegzusammenhängende offene Teilräume mit $X = U \cup V$, so daß $U \cap V$ nichtleer

und ebenfalls wegzusammenhängend ist. In $U \cap V$ sei ein beliebiger, fortan fester Basispunkt x aller im folgenden betrachteten Fundamentalgruppen gewählt, der in deren Notation unterdrückt wird. Weiter seien in dem Diagramm



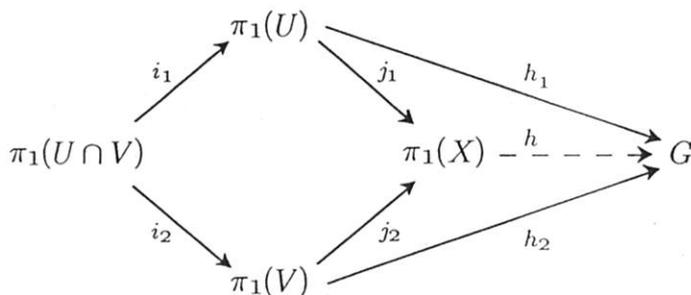
alle aufgeführten Abbildungen induziert durch die Inklusionen der jeweiligen Teilräume. Dann gilt: Für jede Gruppe G und alle Homomorphismen $h_1: \pi_1(U) \rightarrow G$ und $h_2: \pi_1(V) \rightarrow G$, so daß das Diagramm



kommutativ ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$h: \pi_1(X) \longrightarrow G$$

mit $h \circ j_1 = h_1$ und $h \circ j_2 = h_2$. h ist also die eindeutig bestimmte Wahl eines Homomorphismus, der das Diagramm



zu einem kommutativen Diagramm vervollständigt. \square

Da wir die benötigten gruppentheoretischen Konstruktionen in Form ihrer universellen Eigenschaften gebracht haben, macht der Beweis der nächsten Folgerung keine große Mühe:

Folgerung: Seien $X, U, V, U \cap V$ wie im Satz von Seifert–van Kampen. Ist $U \cap V$ einfach zusammenhängend, so ist $\pi_1(X)$ das freie Produkt der Gruppen $\pi_1(U)$ und $\pi_1(V)$ bezüglich der Homomorphismen $j_1: \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ und $j_2: \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$.

Beweis: Wegen $\pi_1(U \cap V) = \{1\}$ sind sowohl i_1 als auch i_2 der triviale Homomorphismus, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(U) & \\
 i_1 \nearrow & & \searrow h_1 \\
 \pi_1(U \cap V) & & G \\
 i_2 \searrow & & \nearrow h_2 \\
 & \pi_1(V) &
 \end{array}$$

ist folglich für jede Gruppe G mit beliebigen Homomorphismen h_1, h_2 kommutativ.

Daß dann nach Seifert–van Kampen stets ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $h: \pi_1(X) \rightarrow G$ mit $h \circ j_1 = h_1$ und $h \circ j_2 = h_2$ existiert, bedeutet nach Definition 2.4 gerade, daß $\pi_1(X)$ das freie Produkt von $\pi_1(U)$ und $\pi_1(V)$ bezüglich j_1 und j_2 ist. \square

2.4 Homologie und Definition der Betti-Zahlen

Wir kommen nun zu einer Zusammenstellung der grundlegenden Konzepte der Homologietheorie. In der Einleitung haben wir bereits versucht zu illustrieren, daß man die Homologiegruppen als eine Realisation des Konzepts auffassen kann, Zusammenhangseigenschaften höherer Ordnung eines topologischen Raumes zu messen. Im Hinblick auf die Art und Weise, in der wir die Homologiegruppen nutzen wollen (siehe Abschnitt 3.2, dort insbesondere den “Satz von Stokes” für das Integral über — später Homologieklassen repräsentierende — differenzierbare Würfel), bringen wir die Theorie auf der Grundlage singulärer Würfel anstelle der klassischen Darstellung mittels singulärer Simplexes; dies erleichtert die Anwendung des Satzes von Fubini erheblich. Vom logischen Standpunkt macht das keinen Unterschied, da die resultierenden Homologie- und Cohomologietheorien in jeder Hinsicht isomorph sind, was wir hier natürlich nicht zeigen, jedoch das Kernargument skizzieren. Für eine Einführung der singulären simplizialen Homologie verweisen wir auf Kap. 9 aus Stöcker/Zieschang [28]; alle hier aufgeführten Sätze der kubischen singulären Homologietheorie werden in Massey [19], Chap. VII und VIII gezeigt.

Singuläre Homologie

Im folgenden schildern wir die Konstruktion singulärer Homologiegruppen und stellen deren grundlegende Eigenschaften zusammen. Dazu bezeichne wie üblich X einen topologischen Raum und $I := [0, 1]$ das Einheitsintervall.

Jede stetige Abbildung $\Gamma: I^k \rightarrow X$, wobei $k \geq 0$, $I^0 := \{\text{pt}\}$ und

$$I^k = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^k \quad (k \geq 1)$$

der k -dimensionale Würfel im \mathbb{R}^k ist, nennen wir einen *singulären k -Würfel*, kurz *k -Würfel*. $Q_k(X)$ sei dann die freie abelsche Gruppe auf der Menge aller k -Würfel in X , deren Elemente nach Abschnitt 2.2 alle ganzzahligen Linearkombinationen von k -Würfeln sind. Falls es ein i mit $1 \leq i \leq k$ gibt, so daß der Würfel $\Gamma: I^k \rightarrow X$ als Funktion der i -ten Koordinate konstant ist, nennen wir Γ *degeneriert*; es sei $D_k(X)$ die von allen degenerierten k -Würfeln erzeugte Untergruppe in $Q_k(X)$. Insbesondere ist dann $D_0(X) = \{0\}$, und ein degenerierter 1-Würfel ist nichts anderes als ein konstanter Weg in X .

Wir setzen nun für $k \geq 0$

$$C_k(X) := Q_k(X)/D_k(X)$$

und nennen diese Gruppe die Gruppe aller (kubischen) *k -Ketten* auf X . Die Nichtberücksichtigung degenerierter Würfel ist dabei der Preis, den die Verwendung kubischer anstelle simplizialer Ketten erfordert, um auf dem Homologie-Level isomorphe Objekte zu erhalten. Im Anschluß an die Definition der Homologiegruppen gehen wir auf diesen Aspekt noch einmal kurz ein.

Der zentrale Schritt im Zuge der Konstruktion der Homologiegruppen ist nun die Definition des *Randoperators* ∂ , der präzisiert, was unter orientierten Rändern von Ketten zu verstehen ist. Zunächst zum Begriff der *Seite* eines k -Würfels $\Gamma: I^k \rightarrow X$ ($k \geq 1$): Darunter verstehen wir für $1 \leq i \leq k$ und $s \in \{0, 1\}$ den $(k-1)$ -Würfel

$$\partial_i^s \Gamma: I^{k-1} \longrightarrow X, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \longmapsto \Gamma(t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_{k-1});$$

die $2k$ Seiten eines k -Würfels sind also die Einschränkungen von Γ auf die $2k$ Seiten von I^k . Dann ist der *Rand* von Γ der $(k-1)$ -Würfel

$$\partial \Gamma := \sum_{i=1}^k (-1)^i (\partial_i^0 \Gamma - \partial_i^1 \Gamma).$$

Wegen $\partial(D_k(X)) \subset D_{k-1}(X)$ für alle $k \geq 1$ ist ∂ auch für eine k -Kette wohldefiniert und setzt sich wegen der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen (vgl. Definition 2.1) für alle $k \geq 1$ zu einem Homomorphismus

$$\partial_k: C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X)$$

von Kettengruppen fort. Wir setzen noch formal $C_k(X) := \{0\}$ für $k < 0$ und $\partial_k = 0$ (trivialer Homomorphismus) für alle $k \leq 0$. Eine elementare Rechnung zeigt dann:

Hilfssatz 1: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0.$$

□

Wir nennen nun alle k -Ketten mit verschwindendem Rand k -Zyklus oder *geschlossen* und solche k -Ketten, die als Ränder von $(k + 1)$ -Ketten auftreten, *k -Randketten*, *berandend* oder *nullhomolog*, und notieren die betreffenden Untergruppen wie folgt:

$$Z_k(X) := \text{Kern } \partial_k \quad \text{und} \quad B_k(X) := \text{Bild } \partial_{k+1}.$$

Nach Hilfssatz 1 ist $B_k(X) \subset Z_k(X)$, und daher kann die folgende fundamentale Definition gegeben werden:

Definition 1 (Homologie): Für alle $k \in \mathbb{Z}$ heißt die Quotientengruppe

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X) = \frac{\text{Kern}(\partial_k: C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X))}{\text{Bild}(\partial_{k+1}: C_{k+1}(X) \rightarrow C_k(X))}$$

die k -te Homologiegruppe von X ; k -Zyklen, die die gleiche Homologiekategorie repräsentieren, sind homolog.

Im Falle, daß $H_k(X)$ endlich erzeugt ist, wird deren Betti-Zahl (vgl. Definition 2.3) die k -te Betti-Zahl von X genannt, in Zeichen $p_k(X) := \text{Rang}(H_k(X)/\text{Tor } H_k(X))$, und ihre Torsionskoeffizienten heißen auch k -dimensionale Torsionskoeffizienten von X .

Damit können wir nun kurz erklären, wieso es erforderlich war, bei dem gerade skizzierten Aufbau der kubischen singulären Homologietheorie die degenerierten singulären Würfel zu ignorieren. Siehe dazu Punkt (iii) in der nachfolgenden Bemerkung; zuvor erwähnen wir noch:

Bemerkung 1:

- (i) Die Definition der k -ten Betti-Zahl und k -dimensionalen Torsionskoeffizienten ist nach dem Struktursatz 2.1 für endlich erzeugte abelsche Gruppen sinnvoll.
- (ii) Alle kompakten Mannigfaltigkeiten besitzen endlich erzeugte Homologiegruppen. Denn nach Sec. IV.8 aus Dold [6] sind diese Räume sog. "Euklidische Umgebungsretrakte" (engl. "Euclidean neighborhood retract"), so daß deren Homologiegruppen nach Prop. V.4.11 loc.cit. endlich erzeugt sind.
- (iii) Sei $X = \{\text{pt}\}$ einpunktiger Raum. Dann ist $C_k(X) = \{0\}$ für alle $k \geq 1$, da in diesem Falle alle k -Würfel entartet und daher in der Kettengruppe 0 sind, und somit $H_k(X) = \{0\}$ für $k \neq 0$. Klar ist ferner $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Dieses Ergebnis, das sog. "Dimensionsaxiom", gilt auch im Falle simplizialer singulärer Homologie (Stöcker/Zieschang [28], Satz 9.1.10 S. 219), und die Betrachtungen in Sec. 4.8 aus Spanier [27] zeigen die Isomorphie der zugehörigen Homologietheorien auf einer hinreichend großen Klasse topologischer Räume.
Hätten wir $C_k(X) = Q_k(X)$ für alle $k \geq 0$ gesetzt, hätte dies auf $H_k(X) \cong \mathbb{Z}$ für alle $k \geq 0$ geführt, und wegen der Verletzung des Dimensionsaxioms wäre die Isomorphie zur singulären simplizialen Homologie verlorengegangen.

Die Eigenschaften singulärer Homologiegruppen besitzen teilweise Analoga aus der Theorie der Fundamentalgruppe; wir stellen sie nun zusammen, soweit wir sie in

unserem Rahmen benötigen. Sofern nicht anders angegeben, finden sich die Beweise in Chap. VII von Massey [19].

Zunächst ist klar, daß für jede k -Kette $\Gamma: I^k \rightarrow X$ das Bild $\Gamma(I^k)$ in genau einer Wegekomponekte von X liegt, denn I^k ist wegzusammenhängend. Daraus folgt auch schon:

Hilfssatz 2: *Es sei $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ die Zerlegung von X in Wegekomponekten. Dann ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Homologiegruppe $H_k(X)$ kanonisch isomorph zur direkten Summe $\bigoplus_{j \in J} H_k(X_j)$.* \square

Der Ausgangspunkt für die Interpretation der Homologiegruppen als Maß für höhere Zusammenhangseigenschaften ist die Bedeutung der 0-ten Homologiegruppe, die wir deswegen beweisen:

Satz 1: *Für jeden topologischen Raum X ist die Homologiegruppe $H_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gleich der Anzahl der Wegekomponekten von X ist.*

Beweis: Wegen Hilfssatz 2 genügt der Fall, daß X wegzusammenhängend ist. Sei ferner $X \neq \emptyset$ und $x \in X$. Dann bezeichne c_x den durch x bestimmten 0-Würfel, der gleichzeitig 0-Kette ist. Weil der Rand eines jeden 1-Würfels $\gamma: I \rightarrow X$ gerade $\gamma(1) - \gamma(0)$ ist und Anfangs- und Endpunkt von γ beide in X liegen müssen, berandet c_x nicht. Andererseits ist jede 0-Kette der Form c_y mit $y \neq x$ zu c_x homolog, denn in X existiert ein Weg von x nach y , der eine 1-Kette mit Rand $c_y - c_x$ definiert. Da eine beliebige 0-Kette eine \mathbb{Z} -Linearkombination derartiger 0-Ketten ist, folgt $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt von der Homologiekategorie von c_x . \square

Gegenüber den von einer stetigen Abbildung induzierten Homomorphismen von Homologiegruppen verhalten sich diese in gleicher Weise wie die Fundamentalgruppe, was die beiden folgenden Sätze ausdrücken:

Satz 2: *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $k \in \mathbb{Z}$. Dann wird durch $f_{\#}(\Gamma) := f \circ \Gamma$ für alle $\Gamma \in Q_k(X)$ ein Gruppenhomomorphismus $f_{\#}: C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ vermittelt. Wegen $\partial_k \circ f_{\#} = f_{\#} \circ \partial_k$ induziert dies einen Homomorphismus der Homologiegruppen, der mit*

$$f_*: H_k(X) \longrightarrow H_k(Y)$$

bezeichnet wird. Ist $g: X \rightarrow Y$ eine weitere stetige Abbildung und gilt $f \simeq g$, so stimmen die induzierten Homomorphismen überein, d.h. es gilt $f_ = g_*$.* \square

Aus diesem Satz folgt sofort die folgende wichtige Invarianzeigenschaft der Homologiegruppen:

Satz 3: *Falls die Abbildung $f: X \xrightarrow{\simeq} Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, so ist der induzierte Homomorphismus $f_*: H_k(X) \xrightarrow{\simeq} H_k(Y)$ der Homologiegruppen für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.* \square

Insbesondere besitzen also Räume, die einen gemeinsamen Deformationsretrakt enthalten, isomorphe Homologiegruppen. — Zum Schluß dieses Teils erwähnen wir nur

kurz, daß es auch in der Homologietheorie ein Resultat gibt, das die gleiche Rolle wie der Satz von Seifert–van Kampen beim Studium von Fundamentalgruppen spielt: die lange exakte Homologie-Sequenz von Mayer–Vietoris. Sie beinhaltet Aussagen über die Zusammenhänge der Homologiegruppen von der Vereinigung $X = U \cup V$ zweier offener Mengen, den Mengen U und V selbst sowie deren Durchschnitt $U \cap V$, und zwar unter relativ schwachen Voraussetzungen an die beteiligten Teilräume. Insbesondere braucht $U \cap V$ nicht mehr wegzusammenhängend zu sein. Wir verweisen auf Massey [19], Sec. VIII.5 für die Formulierung und den Beweis des Satzes.

Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe

Der Satz, den wir in diesem Teil bringen, besagt, daß im Falle wegweise zusammenhängender Räume die erste Homologiegruppe vollständig von der Fundamentalgruppe des betrachteten Raums bestimmt wird. Dies ist insofern angenehm, als der Homotopiebegriff und damit die Fundamentalgruppe der Anschauung zugänglicher sind als die Definition homologer Ketten, die zudem auch noch *sehr* singular aussehen können. Entsprechend häufig werden wir diesen Satz im folgenden auch nutzen, dessen Beweis sich in Sec. VIII.7 von Massey [19] findet.

Sei also $x \in X$ Basispunkt von $\pi_1(X, x)$ und $[\gamma] \in \pi_1(X, x)$. Dann kann γ als 1-Kette in X aufgefaßt werden und ist als geschlossener Weg mit Aufpunkt x sogar ein 1-Zyklus. Also repräsentiert γ eine Homologieklassse in $H_1(X)$. Wir erhalten so eine kanonische Abbildung $h: \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X)$. Man kann zeigen, daß diese Abbildung sogar ein Gruppenhomomorphismus ist, also wohldefiniert auf den Homotopieklassen und verträglich mit den jeweiligen Gruppenverknüpfungen $*$ und $+$. Insbesondere muß h damit auf dem Kommutator $[\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$ von $\pi_1(X, x)$ verschwinden, da $H_1(X)$ abelsch ist. Also induziert h einen kanonischen Homomorphismus von der abelsch gemachten Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ nach $H_1(X)$. Für diesen gilt nun das folgende Resultat:

Satz 4: Sei X wegweise zusammenhängender Raum. Dann ist der kanonische Homomorphismus von $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ nach $H_1(X)$ ein Isomorphismus, also

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \cong H_1(X). \quad \square$$

Homologiegruppen differenzierbarer Ketten

Wir schließen das Kapitel mit einer technischen Bemerkung über Homologiegruppen, die uns erlauben wird, diese Gruppen auch analytisch zu nutzen, genauer, über Homologieklassen von k -Würfeln zu integrieren. Dies macht natürlich nur dann Sinn, wenn die Würfel differenzierbare Abbildungen sind, und das hier zitierte Resultat sagt gerade aus, daß die gesamte Homologiegruppe $H_k(M)$ einer (im C^∞ -Sinne) differenzierbaren Mannigfaltigkeit M allein mit Hilfe differenzierbarer Würfel bestimmt werden kann.

Doch zuvor präzisieren wir die Begriffe. Ein k -Würfel $\Gamma: I^k \rightarrow M$, wobei $k \geq 1$, heiße *differenzierbarer k -Würfel* oder kurz *C^∞ -Würfel*, wenn es eine offene Umgebung U von I^k in \mathbb{R}^k gibt, auf der sich Γ zu einer differenzierbaren Abbildung der

Klasse C^∞ fortsetzen läßt. Dann sei $C_k^\infty(M) := Q_k^\infty(M)/D_k^\infty(M)$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge aller nicht-degenerierten differenzierbaren k -Würfel auf M . 0-Ketten seien definitionsgemäß differenzierbar. Offenbar bildet der Randoperator ∂ differenzierbare k -Ketten auf differenzierbare $(k-1)$ -Ketten ab. Also können wir ∂ auf die Gruppen $C_*^\infty(M)$ einschränken und so die k -te Homologiegruppe differenzierbarer Ketten als

$$H_k^\infty(M) := Z_k^\infty(M)/B_k^\infty(M) := \frac{\text{Kern}(\partial_k: C_k^\infty(M) \rightarrow C_{k-1}^\infty(M))}{\text{Bild}(\partial_{k+1}: C_{k+1}^\infty(M) \rightarrow C_k^\infty(M))}$$

definieren. Dann lautet der schon angesprochene Satz, der in § 2 von Appendix A aus Massey [19] bewiesen wird:

Satz 5: *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$: Die Inklusionsabbildung*

$$C_k^\infty(M) \longrightarrow C_k(M)$$

von Kettengruppen induziert einen Isomorphismus der zugehörigen Homologiegruppen, d.h. es ist

$$H_k^\infty(M) \cong H_k(M)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. □

3

Das Verschlingungsintegral

3.1 Die Verschlingungsform

Nachdem das vorangehende Kapitel nahezu ausschließlich topologisch geprägt war, soll nun die Aufgabe in Angriff genommen werden, die Brücke zur Analysis — und hier insbesondere zum Raum Neumannscher Felder — zu schlagen; erste in diese Richtung zielende Vorbereitungen wurden dabei schon beim Vorzug der kubischen gegenüber der simplizialen singulären Homologietheorie sowie bei den Bemerkungen über Homologiegruppen differenzierbarer Ketten im letzten Teil des vorigen Kapitels deutlich.

Unser Hauptwerkzeug bei diesem Unterfangen stellt eine Pfaffsche Form dar, die man heute im wesentlichen nur noch in der Potentialtheorie ansiedelt, deren weit über die Analysis hinausgehende Nützlichkeit jedoch schon Gauß nicht verborgen geblieben ist, wie aus einem seiner Fragmente aus dem Jahre 1833 hervorgeht (siehe Gauß [11], S. 605 — das Fragment ist als Nr. 4 unter dem Titel “Zur mathematischen Theorie elektrodynamischer Wirkungen” erschienen — und vor allem den lesenswerten Artikel Epple [7] für den historischen Kontext). Wir werden im Rahmen dieser Arbeit wieder und wieder zu ihr zurückkehren und wollen in diesem Kapitel die dazu nötigen technischen Grundlagen legen.

Definition 1 (Verschlingungsform): *Es sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg, dessen Ableitung wie üblich mit $\dot{\gamma}$ bezeichnet sei. Wir betrachten das zum Vektorpotential*

$$A(x) := \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t)}{|x - \gamma(t)|} dt, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp}\gamma,$$

zugehörige Vektorfeld

$$v(x) := \text{rot } A(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp}\gamma.$$

Dann heißt die durch v auf $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma$ induzierte 1-Form

$$\omega(\gamma) := v_1 dx + v_2 dy + v_3 dz$$

die zum Weg γ gehörende Verschlingungsform.

In dem Falle, daß γ regulärer Weg ist, für alle $t \in [0, 1]$ also $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ gilt, bezeichnen wir für einen Kurvenpunkt $x = \gamma(t) \in \text{Sp } \gamma$ mit

$$\tau(x) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

den Tangenten-Einheitsvektor an die Kurve; dies definiert eine stetige Abbildung $\tau: \text{Sp } \gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dann gilt offenbar für das Vektorpotential A , das die Verschlingungsform von γ definiert,

$$A(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\tau(x')}{|x - x'|} ds(x'), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma;$$

hierbei bezeichnet das auftretende Integral die Integration bezüglich des Bogenelements (siehe Forster [8], Kap. 18 S. 210 ff.), jeweils über die Komponenten des Vektorfelds genommen, das im Integranden auftritt. Dies spielt jedoch für unsere weiteren Betrachtungen keine Rolle und sei nur der Vollständigkeit halber erwähnt. Weiter bemerken wir:

Bemerkung 1:

- (i) Ausgeschrieben lautet das Vektorfeld v aus Definition 1 (wobei $r := |x - x'|$ für einen Kurvenpunkt $x' = \gamma(t)$ stehe):

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t) \times (x - \gamma(t))}{r^3} dt.$$

- (ii) Die Verschlingungsform läßt sich in naheliegender Weise auch für stückweise stetig differenzierbare Wege definieren, indem bezüglich einer geeigneten Zerlegung von I in Teilintervalle integriert wird.

Anhand der in der vorangehenden Bemerkung ausgeschrieben Definition des Vektorfeldes, das der Verschlingungsform zugrundeliegt, können wir dieses physikalisch interpretieren: Offenbar lautet der Integrand wegen der Beziehung $d\gamma(t) = \dot{\gamma}(t) dt$ (jeweils über die Komponenten genommen):

$$\frac{d\gamma(t) \times (x - \gamma(t))}{4\pi r^3}.$$

Dies ist gerade der Ausdruck, der im klassischen "Satz von Biot-Savart" aus der Magnetostatik auftritt (siehe z.B. Gerthsen [12], Gleichung (7.38) aus Abschn. 7.2.5 S. 343), und beschreibt danach die Stärke des Magnetfeldes im Punkte x , das vom am Ort $\gamma(t)$ befindlichen "Einheits-Stromelement" $d\gamma(t)$ erzeugt wird. Also kann das Integral $v(x)$ entlang des gesamten Weges γ als die Stärke des Magnetfeldes am Ort x angesehen werden, das um den durch $\text{Sp } \gamma$ beschriebenen Leiter entsteht, wenn er von einem konstanten Strom der Stärke 1 durchflossen wird. Im übrigen war diese Interpretation auch schon Gauß bekannt; wieder verweisen wir auf Epple [7].

3.2 Ausbau der Verschlingungsform zu einer Bilinearform

Das Hauptziel in diesem Abschnitt ist die Einführung einer symmetrischen Bilinearform (im folgenden auch "Verschlingungsintegral" genannt)

$$H_1(\overline{G}) \times H_1(\hat{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

auf dem kartesischen Produkt der ersten Homologiegruppen einer zulässigen Menge und ihres Komplements (die ja beide in natürlicher Weise die Struktur eines \mathbb{Z} -Moduls tragen, was den Namen "Bilinearform" rechtfertigt). Dies soll mit Hilfe der im vorigen Teil eingeführten Verschlingungsform geschehen. Bevor wir mit den dazu benötigten technischen Vorbereitungen beginnen, sammeln wir zunächst weitere Eigenschaften dieser 1-Form bzw. des durch sie definierten Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma$. Zunächst zeigt man durch elementare Rechnung:

Hilfssatz 1: *Das zur Verschlingungsform eines stetig differenzierbaren geschlossenen Weges gehörende Vektorpotential A und Vektorfeld v sind ~~harmonische~~ Vektorfelder der Klasse $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma)$, ~~d.h.~~ _{und} es gilt*

$$\text{div } A \equiv 0, \text{ rot } A \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div } v \equiv 0, \text{ rot } v \equiv 0. \quad \square$$

Für den nächsten Hilfssatz benutzen wir den Kalkül von Differentialformen in der folgenden Form: Wir fassen die Standardbasis $\{dx, dy, dz\}$ des Vektorraums der 1-Formen auf einer offenen Menge U im \mathbb{R}^3 formal zu einem Vektor $d\vec{s} := (dx, dy, dz)$, dem sog. "vektoriellen Streckenelement", zusammen und verfahren analog mit der Standardbasis $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$ des Vektorraums der 2-Formen auf U : Aus der letzteren bilden wir das "vektorielle Flächenelement" $d\vec{S} := (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$. Sind $a, b: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ geeignete Vektorfelder, kann man also jede 1- bzw. 2-Form auf U durch formale Skalarproduktbildung in der Form

$$\omega_1 = a \cdot d\vec{s} \quad \text{bzw.} \quad \omega_2 = b \cdot d\vec{S}$$

notieren, und es gilt

$$d(a \cdot d\vec{s}) = \text{rot } a \cdot d\vec{S}$$

für stetig differenzierbares a . Aus dem vorangehenden Hilfssatz folgt also wegen $\omega(\gamma) = v \cdot d\vec{s}$:

Hilfssatz 2: Die Verschlingungsform $\omega(\gamma)$ eines stetig differenzierbaren Weges γ ist geschlossen, und es gilt $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp}\gamma)$, was wie üblich den Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren 1-Formen auf $\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp}\gamma$ bezeichnet. \square

Schließlich zitieren wir noch eine weitere Eigenschaft, die den im vorherigen Abschnitt eingeführten Namen "Verschlingungsform" rechtfertigt und auch erklärt, warum wir die angekündigte Bilinearform in suggestiver Weise mitunter als "Verschlingungsintegral" bezeichnen werden. Ein Beweis dieses Ergebnisses findet sich in von Wahl [30] (dort Satz 2.10) oder auch Martensen [18] (Satz 1.4 S. 33); den Begriff des regulären Hyperflächenstückes verstehen wir hierbei im Sinne des Beginns von § I.1 in von Wahl [29] (S. 21 loc.cit.).

Hilfssatz 3: Sei γ ein ^{orientierbar} stetig differenzierbarer geschlossener Weg. Weiter gebe es ein reguläres Hyperflächenstück, das durch $\text{Sp}\gamma$ berandet wird. Dann gilt für einen weiteren geschlossenen Weg $\hat{\gamma}$ mit $\text{Sp}\gamma \cap \text{Sp}\hat{\gamma} = \emptyset$: Durchsetzt $\hat{\gamma}$ den Weg γ genau einmal, d.h. schneidet $\text{Sp}\hat{\gamma}$ die Spur des von γ berandeten Hyperflächenstückes in genau einem Punkt, so ist

$$\int_{\hat{\gamma}} \omega(\gamma) = \pm 1$$

je nach dem Durchlaufsinne von $\hat{\gamma}$. Falls γ von $\hat{\gamma}$ nicht durchsetzt wird, ist der Wert dieses Integrals 0. \square

Damit wenden wir uns nun der Konstruktion der angestrebten Bilinearform zu. Auf der Grundlage der gerade zitierten Resultate ist klar, wie das geschehen soll: Sind zwei Homologieklassen aus $H_1(\bar{G})$ bzw. $H_1(\hat{G})$ durch sie repräsentierende 1-Zyklen $\gamma \in C_1(\bar{G})$, $\hat{\gamma} \in C_1(\hat{G})$ gegeben, so stellen diese geschlossene Wege dar. Nach Satz 2.4.5 dürfen wir annehmen, daß diese Wege sogar aus der Klasse $C^\infty([0, 1])$ sind. Also liegt es nahe zu definieren:

$$\langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle := \int_{\hat{\gamma}} \omega(\gamma),$$

wobei $\omega(\hat{\gamma})$ die zum Weg $\hat{\gamma}$ gehörige Verschlingungsform ist und wir fortan Homologieklassen, wenn nötig, mit spitzen Klammern in der Form $\{\cdot\}$ notieren, um sie von Homotopieklassen zu unterscheiden. Um nun einzusehen, daß diese Setzung Sinn macht, sind natürlich einige Überlegungen anzustellen, die der Inhalt der nächsten Hilfssätze sind.

Zunächst stellen wir uns dem Problem der Wohldefiniertheit: Wechseln wir zu einem Weg in derselben Homologieklass, darf sich der Wert des Verschlingungsintegrals nicht ändern. Falls die entsprechenden Repräsentanten zueinander homotop sind, ist dies ein bekannter Satz aus der Theorie Pfaffscher Formen (siehe etwa Forster [8], Satz 18.5 S. 205), da wir in Hilfssatz 2 bemerkt haben, daß die Verschlingungsform geschlossen ist. Nun ist Homologie aber ein schwächerer Begriff

als Homotopie, was noch in den Abschnitten 4.2 und 4.3 illustriert werden wird (die dort betrachtete Fundamentalgruppe einer Verschlingung zeigt, daß "Homologie" nicht notwendig "Homotopie" impliziert), so daß wir ein analoges Resultat für den Homologiebegriff benötigen. Es bedeutet keinen wesentlichen Mehraufwand, ein solches Ergebnis nicht nur für die erste Homologiegruppe, sondern für Homologiegruppen beliebiger Dimensionen bereitzustellen. Da dies zudem von gewissem theoretischen Interesse ist, widmen wir uns diesem Problem nun in einem kurzen Einschub.

Auf der Grundlage von Satz 2.4.5 arbeiten wir dazu von Anfang an in der Gruppe $C_k^\infty(M)$ der differenzierbaren k -Ketten auf einer glatten Mannigfaltigkeit M . Sei ω eine stetige k -Form auf M . Dann wollen wir das Integral von ω über eine beliebige solche k -Kette erklären. Wie üblich reicht es, dazu einen differenzierbaren k -Würfel $\Gamma: I^k \rightarrow M$ zu betrachten. Ziehen wir ω mit Hilfe von Γ zurück, erhalten wir eine Top-Form auf einer offenen Menge im \mathbb{R}^k . Daher macht die folgende Setzung Sinn:

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_{I^k} \Gamma^*(\omega).$$

Die Grundlage, diese Definition auch auf Homologieklassen auszudehnen, stellt nun das folgende angekündigte Resultat dar, das wir in suggestiver Weise "Satz von Stokes" für k -Würfel nennen wollen. Dies suggeriert die Formulierung sofort, auch wenn das wichtigste Hilfsmittel im Beweis der Satz von Fubini ist. Dadurch zeigt der Beweis aber in exemplarischer Weise auf, warum die kubische singuläre Homologietheorie für analytische Zwecke viel besser als die singuläre simpliziale Theorie geeignet ist.

Satz 1 ("Stokes für k -Würfel"): Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit, ω stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form auf M und $\Gamma: I^k \rightarrow M$ differenzierbarer k -Würfel. Dann gilt:

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.$$

Beweis: Zunächst gilt wegen der Regularität von Γ

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{I^k} \Gamma^*(d\omega) = \int_{I^k} d(\Gamma^*\omega).$$

Hierbei ist $\Gamma^*\omega$ eine stetig differenzierbare $(k-1)$ -Form auf einer offenen Umgebung V von $I^k \subset \mathbb{R}^k$, besitzt also eine Basisdarstellung der Form

$$\Gamma^*\omega = \sum_{i=1}^k f_i dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k$$

mit geeigneten Koeffizientenfunktionen $f_i \in C^1(V, \mathbb{R})$. Somit folgt

$$d(\Gamma^*\omega) = \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k,$$

und Ausintegration der jeweils i -ten Komponente im i -ten Summanden nach dem Satz von Fubini ergibt

$$\begin{aligned}
 \int_{I^k} d(\Gamma^* \omega) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \int_{I^{k-1}} (f_i(\dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots) \\
 &\quad - f_i(\dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots)) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_k \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_{I^{k-1}} (f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{k-1}) \\
 &\quad - f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_i, \dots, t_{k-1})) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1},
 \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Variablen dem $(k-1)$ -dimensionalen Integrationsbereich durch eine Umbenennung angepaßt wurden. Wir betrachten nun für $i = 1, \dots, k$ die Abbildungen

$$\delta_i^s: I^{k-1} \longrightarrow I^k, \quad (t_1, \dots, t_{k-1}) \longmapsto (t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_{k-1}),$$

wobei $s \in \{0, 1\}$. Insbesondere gilt dann $\partial\Gamma = \sum_{i=1}^k (-1)^i (\Gamma \circ \delta_i^0 - \Gamma \circ \delta_i^1)$. Für die äußere Ableitung der j -ten Komponente $(\delta_i^s)_j$ von δ_i^s erhalten wir

$$d(\delta_i^s)_j = \begin{cases} dt_j & \text{für } 1 \leq j \leq i-1, \\ 0 & \text{für } j = i, \\ dt_{j-1} & \text{für } i+1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Deswegen gilt aber für den Rückzug von $\Gamma^* \omega$ vermöge δ_i^s gerade

$$(\delta_i^s)^* (\Gamma^* \omega) = f_i(t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_{k-1}) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_{k-1},$$

und unsere Rechnung setzt sich wegen der Linearität des Rückzugs und seiner bekannten Funktoreigenschaften wie folgt fort:

$$\begin{aligned}
 \int_{I^k} d(\Gamma^* \omega) &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_{I^{k-1}} \left((\delta_i^0)^* (\Gamma^* \omega) - (\delta_i^1)^* (\Gamma^* \omega) \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_{I^{k-1}} \left((\Gamma \circ \delta_i^0)^* \omega - (\Gamma \circ \delta_i^1)^* \omega \right) \\
 &= \int_{I^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i (\Gamma \circ \delta_i^0 - \Gamma \circ \delta_i^1) \right)^* \omega \\
 &= \int_{I^{k-1}} (\partial\Gamma)^* \omega = \int_{\partial\Gamma} \omega.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich aber die behauptete Formel. \square

Damit haben wir wie gewünscht:

Folgerung: Ist ω stetig differenzierbare geschlossene k -Form auf M , so hängt für jeden geschlossenen k -Würfel $\Gamma: I^k \rightarrow M$ (und also auch jeden k -Zyklus) der Wert des Integrals $\int_{\Gamma} \omega$ nur von der Homologiekategorie von Γ ab. \square

Inbesondere ist somit die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ als Funktion des ersten Arguments wohldefiniert. Daß sie auch im zweiten Argument unabhängig von der Wahl des homologen Repräsentanten ist, folgt dann durch Zurückführung auf das erste Argument mit Hilfe ihrer Symmetrie, die wir nun zeigen:

Hilfssatz 4: Es seien γ und $\hat{\gamma}$ zwei stetig differenzierbare geschlossene Wege mit $\text{Sp } \gamma \cap \text{Sp } \hat{\gamma} = \emptyset$. Dann gilt

$$\int_{\hat{\gamma}} \omega(\gamma) = \int_{\gamma} \omega(\hat{\gamma}).$$

Beweis: Mit Hilfe von Bemerkung 1 aus Abschnitt 1 erhalten wir für den Rückzug von $\omega(\gamma)$ im Punkt $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} ((\hat{\gamma})^* \omega(\gamma))(t) &= \left\langle \int_0^1 \frac{\dot{\hat{\gamma}}(t') \times (\hat{\gamma}(t) - \gamma(t'))}{4\pi r^3} dt', \dot{\hat{\gamma}}(t) \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \left\langle \frac{\dot{\hat{\gamma}}(t) \times (\gamma(t') - \hat{\gamma}(t))}{4\pi r^3}, \dot{\hat{\gamma}}(t') \right\rangle dt' dt, \end{aligned}$$

so daß sich mit dem Satz von Fubini ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\gamma}} \omega(\gamma) &= \int_0^1 (\hat{\gamma})^* \omega(\gamma) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\left\langle \frac{\dot{\hat{\gamma}}(t) \times (\gamma(t') - \hat{\gamma}(t))}{4\pi r^3}, \dot{\hat{\gamma}}(t') \right\rangle}_{= (\gamma^* \omega(\hat{\gamma}))(t')} dt dt' \\ &= \int_{\gamma} \omega(\hat{\gamma}). \end{aligned}$$

Dies wollten wir einsehen. \square

Soweit die Nachweise von der Wohldefiniertheit der Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_1(\bar{G}) \times H_1(\hat{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

bezüglich ihrer Argumente und von ihrer Symmetrie betroffen sind, haben wir diese nun erbracht. Es bleibt noch die Ganzzahligkeit ihrer Werte zu zeigen. Um dies einzusehen, müssen wir die sog. Fundamentalgruppe einer Verschlingung studieren, was wir auf Abschnitt 4.2 verschieben wollen. Mit dem dort zitierten Resultat folgt die Ganzzahligkeit dann sofort aus Hilfssatz 3.

Wir schließen mit einer Bemerkung zur physikalischen Interpretation von $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ und damit zu einer weiteren Rechtfertigung des Namens "Verschlingungsintegral". Dazu nehmen wir den Gedankengang vom Ende des Abschnitts 1 auf und sehen $\omega(\gamma) = v \cdot d\vec{s}$ wieder als die 1-Form des Magnetfeldes an, das um den mit konstanter Stromstärke 1 durchflossenen Leiter herrscht, der durch $\text{Sp } \gamma$ beschrieben ist (unsere Wege mögen die üblichen Voraussetzungen erfüllen). Da das Kurvenintegral einer 1-Form per Konstruktion die physikalische Arbeit des zugehörigen Feldes entlang des Integrationsweges beschreibt, können wir daher $\int_{\hat{\gamma}} \omega(\gamma)$ als diejenige Arbeit auffassen, die das Magnetfeld um den Leiter verrichtet, wenn sich ein fiktiver magnetischer Monopol der "magnetischen Ladung 1" in diesem Feld entlang des Weges $\text{Sp } \hat{\gamma}$ bewegt. (Experimentell ist dies, wenn auch nur für ebene Wege, etwa durch eine in einen Korken gesteckte Kompaßnadel zu realisieren, die auf einer Flüssigkeit in der Nähe des stromdurchflossenen Leiters schwimmt.) Berücksichtigen wir nun die bekannte wirbelfeldartige Geometrie eines solchen Feldes, ist klar, daß eine von Null verschiedene Arbeit nur aus solchen Wegen der Probeladung resultieren kann, die "parallel" zum Feld des Leiters verlaufen, mit anderen Worten: die mit dem Leiter auf "nichttriviale Art" *verschlungen* sind. Dies erklärt den Namen "Verschlingungsintegral" für die Bilinearform; Hilfssatz 3 stellt nichts anderes als eine mathematische Präzisierung dieser physikalischen Zusammenhänge dar.

3.3 Eine erste Anwendung: Angabe einer unteren Schranke für die erste Betti-Zahl einer eingebetteten berandeten 3-Mannigfaltigkeit

Als erste Anwendung unseres im letzten Abschnitt eingeführten Kalküls auf den eindimensionalen Homologiegruppen von einer offenen oder vom Abschluß einer offenen Menge des \mathbb{R}^3 und des Komplements können wir nun eine Abschätzung beweisen, die die erste Betti-Zahl einer in den \mathbb{R}^3 eingebetteten berandeten 3-Mannigfaltigkeit zu der Zahl ihrer Henkel in Beziehung setzt. Der Begriff eines Henkels für eine beliebige berandete 3-Mannigfaltigkeit läßt sich wortwörtlich aus Abschnitt 2.1 übernehmen mit dem einzigen Unterschied, daß wir dort die Henkel an den Rand des 3-dimensionalen Einheitsballes geklebt haben, den wir nun durch eine beliebige berandete 3-Mannigfaltigkeit ersetzen. Deren Rand bildet in natürlicher Weise eine (unberandete) 2-Mannigfaltigkeit, so daß wir in völlig analoger Weise über Einbettungen des 2-dimensionalen Einheitsballes Henkel ankleben können — insbesondere mit abgeschlossener Umgebung. Selbstverständlich soll dabei jeder Henkel an *eine* Zusammenhangskomponente der Mannigfaltigkeit angeklebt werden. Mit diesen Vorbereitungen können wir nun formulieren:

Satz 2: Es sei M eine berandete 3-Mannigfaltigkeit, die sich stetig differenzierbar in den \mathbb{R}^3 einbetten lasse. Weiter bezeichne g die Anzahl der Henkel von M . Dann gilt für die erste Betti-Zahl von M :

$$p_1(M) \geq g.$$

Beweis: Ohne Einschränkung setzen wir M als zusammenhängend voraus. Insbesondere ist M als lokal wegzusammenhängender Raum dann auch (global) wegzusammenhängend. Es sei $F: M \xrightarrow{\cong} M' \subset \mathbb{R}^3$ die Einbettung von M nach \mathbb{R}^3 . Zu jedem der g Henkel von M können wir ein Paar $(\gamma_i, \hat{\gamma}_i)$ von Wegen mit $\text{Sp } \gamma_i \subset M' \setminus \partial M'$ bzw. $\text{Sp } \hat{\gamma}_i \subset \hat{M}' := \mathbb{R}^3 \setminus M'$ finden, das den Voraussetzungen von Hilfssatz 3 aus Abschnitt 2 genügt, und zwar wie folgt: Es sei $\gamma_{i,1}$ der Weg mit Spur $F(\{0\} \times I)$, wobei $0 \in D_\varepsilon^2$ und der betrachtete i -te Henkel durch Ankleben des Zylinders $D_\varepsilon^2 \times I$ entstanden sei. (Um die Notation einfach zu halten, indizieren wir diesen Zylinder nicht weiter.) D.h., $\gamma_{i,1}$ verläuft "innerhalb" des i -ten Henkels von M' . Wegen des zu Beginn begründeten Wegzusammenhangs einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit gibt es weiter einen Weg $\gamma_{i,2}$ mit $\text{Sp } \gamma_{i,2} \subset M' \setminus F(D_\varepsilon^2 \times I)$ und $\gamma_{i,2}(0) = \gamma_{i,1}(1)$, $\gamma_{i,2}(1) = \gamma_{i,1}(0)$. Dann setzen wir $\gamma_i := \gamma_{i,1} * \gamma_{i,2}$, wobei wir bemerken, daß wegen der Differenzierbarkeit der Einbettung γ_i stückweise stetig differenzierbar ist. Nun sei $\hat{\gamma}_i$ der Weg mit Spur $F(\partial D_\varepsilon^2 \times \{\frac{1}{2}\})$, der also von der Klasse C^1 ist und nach Konstruktion das Hyperflächenstück mit Spur $F(D_\varepsilon^2 \times \{\frac{1}{2}\})$ berandet. Insbesondere erfüllt das Paar $(\gamma_i, \hat{\gamma}_i)$ somit die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 des vorigen Abschnitts.

Haben wir zu jedem der g Henkel ein derartiges Paar geschlossener Wege gewählt, das offenbar als Paar aus $H_1(M') \times H_1(\hat{M}')$ aufgefaßt werden kann, so gilt sogar aufgrund der speziellen Wahl der Repräsentanten

$$\langle\langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle = \delta_{i,j}.$$

Daraus folgt, daß die Homologieklassen $\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_g\} \in H_1(M')$ \mathbb{Z} -linear unabhängig (und damit insbesondere von unendlicher Ordnung) sind und folglich in $H_1(M')/\text{Tor}(H_1(M'))$ eine freie abelsche Gruppe vom Rang g als Untergruppe erzeugen. Die Behauptung folgt nun aus Hilfssatz 2.2.2 a). \square

Bemerkung: Unsere Betrachtungen vom Anfang des Kapitels 6 werden zeigen, daß auf die Differenzierbarkeit der Einbettung verzichtet werden kann.

Unser Resultat stellt einen der grundlegenden Sätze in der Theorie berandeter 3-Mannigfaltigkeiten dar und findet sich z.B. auch in Moise [21] als Theorem 23.19, wird dort jedoch auf völlig andere Art und Weise mit Methoden der geometrischen Topologie bewiesen. Moise benötigt nicht die Einbettbarkeit in den \mathbb{R}^3 , verwendet jedoch den von ihm 1952 bewiesenen tiefliegenden Triangulierungssatz (siehe Moise [20]), d.h. die Aussage, daß jede 3-Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt.

Wir notieren noch, daß sich mit Hilfe der Isomorphie $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\text{ab}}$ (siehe Satz 2.4.4) aus dem Satz sofort ergibt:

Folgerung: Jede berandete, stetig differenzierbar in den \mathbb{R}^3 eingebettete 3-Mannigfaltigkeit, die einfach zusammenhängend ist, besitzt nur Randflächen vom Geschlecht 0 (also keine Henkel). \square

Eine derartige Aussage wurde auf ganz andere Weise schon von Kneser gewonnen (siehe Kneser [17]), was mit unseren Methoden jedoch deutlich schneller möglich war.

3.4 Eine Notiz über das Fortsetzungsproblem und wilde 2-Sphären

Angesichts des im vorangehenden Abschnitt bewiesenen Satzes stellt sich in natürlicher Weise die Frage, ob es berandete 3-Mannigfaltigkeiten gibt, deren erste Betti-Zahl *echt* größer ist als die Zahl ihrer Henkel. Die Intuition verneint dies: Nicht zuletzt wegen der Isomorphie $H_1(M) \cong \pi_1(M)^{\text{ab}}$ stellt man sich unter Räumen mit nichttrivialer erster Betti-Zahl gerade solche vor, in denen sich geschlossene Kurven nicht stetig in einen Punkt zusammenziehen lassen. Und der Prototyp von Mengen, die diese Eigenschaft aufweisen, sind gerade die Henkelkörper, wie wir sie in Abschnitt 2.1 definiert haben. Nichts anderes war die anschauliche Idee, die dem von uns vorgeführten Beweis von Satz 2 zugrundelag.

Daher stellt sich die nächste Frage nach der Notwendigkeit der von uns gestellten Voraussetzungen an zulässige Mengen G , die im nun angerissenen Kontext übertrieben vorsichtig erscheinen. Auf den ersten Blick etwa wäre der folgende Argumentationsgang denkbar gewesen: Wir betrachten offene und einfach zusammenhängende Mengen G des \mathbb{R}^3 , deren Rand ∂G eine orientierbare geschlossene Fläche ist, d.h. kompakt und unberandet. Die Klassifikation der geschlossenen Flächen ist ein klassisches Problem der Topologie des letzten Jahrhunderts und wurde durch Radó 1923 endgültig zu einem Abschluß gebracht. Der zugehörige Klassifikationssatz besagt, daß jede geschlossene orientierbare Fläche homöomorph zu einer 2-Sphäre mit g angeklebten Henkeln ist (siehe z.B. Fulton [10], Theorem 17.4 S. 241). Dann ist $G \cup \partial G$ eine berandete 3-Mannigfaltigkeit, und es liegt nun nahe anzunehmen, daß $G \cup \partial G$ homöomorph zum Henkelkörper mit g Henkeln ist, insbesondere also G homöomorph zu einem offenen Henkelkörper ist.

Mit dieser Vermutung ist aber ein tief liegendes Problem berührt, das der Fortsetzbarkeit eines gegebenen Homöomorphismus: Der nach dem Klassifikationssatz für Flächen bekannte Homöomorphismus von ∂G zur 2-Sphäre mit g angeklebten Henkeln soll sich zu einem Homöomorphismus fortsetzen lassen, der G homöomorph auf das Innere eines von ∂G berandeten Henkelkörpers abbildet. Im einfachsten Fall $g = 0$ lautet die Frage somit: Berandet jede 2-Sphäre (also eine zur 2-Sphäre homöomorphe kompakte orientierbare Fläche) eine 3-Zelle, d.h. einen zur offenen 3-dimensionalen Kugel homöomorphen Raum?

Um eine Raumdimension reduziert, entspricht diese Frage einem anderen klassischen Problem: dem Jordanschen Kurvensatz, also der Aussage, daß jeder zur 1-Sphäre homöomorphe Weg die Ebene in genau zwei Zusammenhangskomponenten

zerlegt. Die Lösung dieses Problems ist in dem folgenden, auf Schönflies zurückgehenden Satz (um 1910) enthalten, der die "Fortsetzungsnatur" der vorgelegten Fragestellung unmittelbar ausdrückt:

Satz (Schönflies): Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ eine topologische 1-Sphäre. Dann läßt sich jeder Homöomorphismus von J in \mathbb{R}^2 zu einem Homöomorphismus von \mathbb{R}^2 auf \mathbb{R}^2 fortsetzen. Insbesondere berandet also jede 1-Sphäre eine 2-Zelle.

Einen Beweis findet man in Moise [21], Theorem 10.4 S. 72. □

Nach diesem positiven Resultat in der Dimension 2 suchte man nach dem Analogon in der Dimension 3. Alexander konnte 1924 zeigen, daß es für den Spezialfall einer sog. polyedrischen 2-Sphäre (also eines 2-dimensionalen Simplizialkomplexes, der zur 2-Sphäre homöomorph ist, wie etwa der Vereinigung der Seitenflächen eines Tetraeders) in der Tat gilt (siehe Moise [21], Theorem 17.12). Es stellte sich heraus, daß es genau die folgende Terminologie ist, die die Situation angemessen beschreibt:

Definition (zahme und wilde Räume): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ triangulierbarer Raum. M heißt *zahm eingebettet*, kurz *zahm*, falls ein Homöomorphismus $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, so daß $h(M)$ ein Polyeder ist, wenn sich also ein eine Triangulierung von M vermittelnder Homöomorphismus global auf den \mathbb{R}^n fortsetzen läßt. Andernfalls heißt M *wild*.

(Dabei verstehen wir unter einem Polyeder die Vereinigung aller Simplizes (als Punkt-mengen), die einem Simplizialkomplex angehören, also den einem Simplizialkomplex zugrundeliegenden topologischen Raum.)

Insbesondere gibt es nach dem Satz von Schönflies also keine wilden 1-Sphären im \mathbb{R}^2 . Nach dem Resultat von Alexander erwartete man, daß analog im \mathbb{R}^3 jede 2-Sphäre zahm ist. Entsprechend viel Aufsehen erregte eine 1921 von Louis Antoine¹ publizierte Arbeit (Antoine [3]), in der er eine wilde 2-Sphäre im \mathbb{R}^3 konstruierte, die auch in Chap. 18 von Moise [21] beschrieben ist. Seine Ergebnisse wurden viel später (1948) von Ralph Fox und Emil Artin unter konsequenter Ausnutzung knotentheoretischer Hilfsmittel verfeinert und — was jedenfalls die Raumdimension 3 angeht — zu einem gewissen Abschluß gebracht; in ihrer Arbeit Fox/Artin [9] haben die Autoren insbesondere die gerade definierten Begriffe der Zahmheit und Wildheit triangulierbarer Mengen eingeführt.

Dieser Veröffentlichung entnehmen wir nun die Antworten auf die eingangs gestellten Fragen: Die Skizze am Ende von Example 3.1 loc.cit. liefert zusammen mit Example 2.2 das Beispiel einer 2-Sphäre, deren beiden Komplemente nichttriviale abelsche Fundamentalgruppen (mit Elementen unendlicher Ordnung) besitzen, die folglich mit der ersten Homologiegruppe übereinstimmen. Nehmen wir nun zum Beispiel die Vereinigung der beschränkten Komponente mit dieser Sphäre, so ist dies also eine berandete 3-Mannigfaltigkeit mit nichttrivialer erster Betti-Zahl, die jedoch keinen Henkel besitzt; mithin ist hier die Ungleichung aus Satz 2 strikt erfüllt.

¹ Antoiness Leistung kann gar nicht genug gewürdigt werden: Er war blind.

Schließlich wird am Ende von Example 3.3 loc.cit. die Konstruktion einer 2-Sphäre skizziert, deren beiden Komplemente zwar einfach zusammenhängend sind, jedoch als 3-Mannigfaltigkeiten nicht homöomorph zu einer offenen 3-Zelle sind und somit in unserem Sinne *keinen* Henkelkörper (hier mit $g = 0$) darstellen: 2-Sphären beranden nicht notwendig 3-Zellen! Vor dem Hintergrund dieser Beispiele mögen unsere in Definition 2.1.1 angebrachten Voraussetzungen nun plausibler erscheinen.

In gewisser Weise berühren wir hier eines der großen ungelösten Probleme der Topologie: die Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten (siehe etwa Hempel [15] für eine Übersicht). Dadurch, daß diese noch offen ist, besteht kein Überblick über die an dieser Stelle als willkürlich empfundenen "pathologischen" Effekte.

4

Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von G und \widehat{G}

4.1 Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von G

Unser Ziel ist es nun, eine Basis für den Raum Neumannscher Felder zu konstruieren, und zwar für Neumann-Felder im Inneren G einer zulässigen Menge sowie in ihrem Außenraum \widehat{G} . Dazu ist jedoch eine genaue Kenntnis der ersten Homologiegruppen von G und \widehat{G} erforderlich; deren Struktur (und damit Zusammenhangseigenschaften erster Ordnung von den zugrundeliegenden Mengen) wird wesentlich in die betreffenden Beweise eingehen. Der Basiskonstruktion widmen wir uns daher erst im nächsten Kapitel und gehen zuvor die Bestimmung der angesprochenen Homologiegruppen an. In gewisser Weise knüpfen wir dabei an die Betrachtungen des letzten Abschnitts an: Wir werden sehen, daß die Henkelkörper diejenigen 3-Mannigfaltigkeiten sind, die in bezug auf die erste Betti-Zahl ganz der Anschauung entsprechen in dem Sinne, daß bei ihnen die untere Schranke für die erste Betti-Zahl aus Satz 2 in Abschnitt 3.3 gerade angenommen wird.

Aufgrund des engen Zusammenhangs zwischen der Fundamentalgruppe und ersten Homologiegruppe eines wegweise zusammenhängenden Raumes (Satz 2.4.4) werden wir dabei so vorgehen, daß zuerst die Fundamentalgruppen der betreffenden Räume bestimmt werden. Mit Hilfe unserer in Abschnitt 2.2 erfolgten gruppentheoretischen Vorarbeiten werden sich daraus die gesuchten Homologiegruppen leicht ergeben.

Die entsprechende Aussage bezüglich des "Innenraums" G ist nun:

Satz 1: Die Fundamentalgruppe von G ist isomorph zum freien Produkt von g Kopien von \mathbb{Z} :

$$\pi_1(G) \cong \mathbb{Z}^{*g}.$$

Beweis: Wir führen eine vollständige Induktion nach der Anzahl g der Henkel mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen durch. Der Fall $g = 0$ ist trivial; sei also

zunächst $g = 1$. Wir betrachten nun das Urbild $F^{-1}(G)$ von G unter der Einbettung F ; dabei sind alle Notationen wie in Abschnitt 2.1 gewählt. Ist der Henkel durch Ankleben des "erweiterten Zylinders" $D_\varepsilon^2 \times I$ vermöge der Klebeabbildung φ entstanden, wählen wir analog zum Beweis von Satz 2 in Abschnitt 3.3 in $\overset{\circ}{D}^3 \cup \varphi(D_\varepsilon^2 \times \{0, 1\})$ einen geeigneten regulären und injektiven Weg ω von $\varphi(0, 1)$ nach $\varphi(0, 0)$ und um diesen einen abgeschlossenen Zylinder, der in D^3 enthalten ist und dessen Dach- bzw. Bodenfläche mit der zugehörigen "Klebestelle" $\varphi(D_\varepsilon^2 \times \{0\})$ bzw. $\varphi(D_\varepsilon^2 \times \{1\})$ übereinstimmt. Es sei dann Z der "Schlauch", der aus der Vereinigung dieses Zylinders mit $D_\varepsilon^2 \times I$ (dem Urbild des Henkels) entsteht. Wir setzen jetzt $U := G \cap F(\overset{\circ}{Z})$ und $V := F(\overset{\circ}{D}^3)$; dies sind offene, wegzusammenhängende Teilräume von G mit $G = U \cup V$. Ferner definieren wir den Weg $\gamma := F(0, \cdot) * F \circ \omega$, der innerhalb des Schlauches U verläuft. Nach Konstruktion enthält U dann $\text{Sp } \gamma \cong S^1$ als (strengen) Deformationsretrakt, so daß nach Satz 2.3.4 $\pi_1(U) = \langle [\gamma] \rangle \cong \mathbb{Z}$ gilt. Da $U \cap V$ (ein Zylinder) offensichtlich einfach zusammenhängend ist, ergibt sich wegen des einfachen Zusammenhangs von V mit der Folgerung aus dem Satz von Seifert-van Kampen am Ende von Abschnitt 2.3 schließlich

$$\pi_1(G) \cong \mathbb{Z} * \{1\} \cong \mathbb{Z},$$

wobei die letzte Isomorphie aufgrund der Eindeutigkeit des freien Produkts von Gruppen (Hilfssatz 2.2.4) klar ist (\mathbb{Z} erfüllt ja trivialerweise die universelle Eigenschaft aus Definition 2.2.4).

Ist $g > 1$, sei U wie eben und $V := G \setminus F(D^2 \times I) \cong F(\overset{\circ}{V}_{g-1})$; mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung und der Folgerung aus Seifert-van Kampen ergibt sich die Behauptung sofort. □

Sind wir an dem expliziten Aussehen von $\pi_1(G)$ interessiert und nicht nur an einer Darstellung bis auf Isomorphie, können wir dem Beweis entnehmen:

Bemerkung 1: Bezeichnen wir mit γ_i den durch den i -ten Henkel von G verlaufenden geschlossenen Weg wie im vorangehenden Beweis, so gilt

$$\pi_1(G) = \langle [\gamma_1] \rangle * \langle [\gamma_2] \rangle * \cdots * \langle [\gamma_g] \rangle,$$

mit anderen Worten: $\pi_1(G)$ ist die freie Gruppe auf einer Menge S von Homotopieklassen, wobei $S := \{ [\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_g] \}$. □

Indem man weiter wortwörtlich wie im Beweis von Satz 2 aus Abschnitt 3.3 vorgeht, sieht man ferner:

Bemerkung 2: Zu jedem der g Henkel von G (wobei $g \geq 1$) existiert ein Paar $(\gamma_i, \hat{\gamma}_i)$ geschlossener, stückweise stetig differenzierbarer Wege mit $\text{Sp } \gamma_i \subset G$ und $\text{Sp } \hat{\gamma}_i \subset \hat{G}$, so daß gilt: $\pi_1(G)$ ist die freie Gruppe auf der Menge $S = \{ [\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_g] \}$ von Homotopieklassen, und jedes Paar erfüllt die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 aus Abschnitt 3.2. Dabei gilt sogar

$$\langle\langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle = \delta_{i,j} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq g. \quad \square$$

Diese Bemerkung wird sich für die Konstruktion einer Basis für den Raum Neumannscher Felder als bedeutsam erweisen und daher auch noch einmal in den nachfolgenden Satz aufgenommen werden.

Aufgrund der Isomorphie $H_1(G) \cong \pi_1(G)^{\text{ab}}$ (Satz 2.4.4) erhalten wir jetzt nämlich aus Bemerkung 1 mit Hilfe von Hilfssatz 2.2.6 unmittelbar das Aussehen der ersten Homologiegruppe von G :

Satz 2: *Es seien die Wege γ_i (wobei $1 \leq i \leq g$) wie in Bemerkung 2 gewählt. Dann ist die erste Homologiegruppe von G die freie abelsche Gruppe auf der Menge $S := \{ \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_g\} \}$ von Homologieklassen, d.h. es gilt:*

$$H_1(G) = \langle \{\gamma_1\} \rangle \oplus \langle \{\gamma_2\} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \{\gamma_g\} \rangle.$$

Insbesondere ist also $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^g$ und $p_1(G) = g$, und die Menge S bildet eine Betti-Basis von $H_1(G)$. Ferner gibt es zu jedem der Wege γ_i einen Weg $\hat{\gamma}_i$ mit $\text{Sp } \hat{\gamma}_i \subset \hat{G}$, so daß für $1 \leq i, j \leq g$ die Auswertungen

$$\langle\langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle = \delta_{i,j}$$

unter dem Verschlingungsintegral gelten. □

Es wird sich zeigen, daß damit die wesentliche analytische Information, die die "Zusammenhangseigenschaften erster Ordnung" von G beinhalten, erfaßt wurden.

4.2 Die Fundamentalgruppe einer Verschlingung

Nachdem wir das explizite Aussehen der ersten Homologiegruppe von G kennen, bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, mit unseren Betrachtungen fortzufahren. Zum einen ließe sich schon an dieser Stelle mit Hilfe des Alexanderschen Dualitätssatzes auf die erste Homologiegruppe des Außenraums \hat{G} schließen; da in der Formulierung des Alexanderschen Satzes das Komplement der betrachteten Menge involviert ist, bemerken wir zunächst:

Bemerkung 3: *Eine Betrachtung des Beweises von Satz 1 aus Abschnitt 1 zeigt, daß hierin (mit den offensichtlichen technischen Modifikationen) die Menge G durch ihren Abschluß \bar{G} ersetzt werden kann, ohne daß sich das Resultat ändert. Es gilt also*

$$\pi_1(G) = \pi_1(\bar{G}) \quad \text{und} \quad H_1(G) = H_1(\bar{G}). \quad \square$$

Daher können wir die Aussagen des klassischen Alexanderschen Dualitätssatzes bezüglich der Betti-Zahlen und auch der Torsionsgruppen der Homologiegruppen anwenden; hierbei besagt letztere $\text{Tor}(H_{k-1}(A)) \cong \text{Tor}(H_{n-k-1}(\mathbb{R}^3 \setminus A))$ für kompakte Untermannigfaltigkeiten $A \subset \mathbb{R}^3$ mit $0 \leq k \leq n-1$ (siehe Alexandroff/Hopf [2], § XI.4 S. 440 oder Stöcker/Zieschang [28], Bsp. 14.8.7 (b) S. 380, wobei zu beachten

ist, daß nach den Triangulierungssätzen von Moise bzw. Radó jede kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 triangulierbar ist). Damit erhalten wir also im Fall $k = 1$ $\text{Tor}(H_1(\hat{G})) \cong \text{Tor}(H_0(G)) = \{0\}$ (denn die 0-te Homologiegruppe ist nach Satz 2.4.1 frei abelsch), und wegen der Dualitätssaussage $p_1(G) = p_1(\hat{G})$ für die ersten Betti-Zahlen folgt schließlich wie erwartet $H_1(\hat{G}) \cong \mathbb{Z}^g \cong H_1(G)$. Hierauf werden wir auch in Abschnitt 5.2 noch einmal zurückkommen.

Doch bei dieser Argumentation haben wir gleich von zwei tiefliegenden Sätzen Gebrauch gemacht: einmal vom Alexanderschen Dualitätssatz selbst, zum anderen von den Triangulierungssätzen von Moise für 3-Mannigfaltigkeiten bzw. Radó für 2-Mannigfaltigkeiten (für letzteren siehe Theorem 8.3 in Moise [21]). Zudem hat diese Herleitung den Nachteil, daß sie nicht sonderlich instruktiv ist, während die Aussage $H_1(\hat{G}) \cong \mathbb{Z}^g$ anschaulich ganz klar ist, da mit \hat{G} das Komplement eines Henkelkörpers vorliegt und man daher erwartet, daß dessen erste Homologiegruppe von den "dualen Wegen" $\hat{\gamma}_i$ aus Satz 2 des vorigen Abschnitts erzeugt wird.

Daher geben wir eine alternative und elementarere Herleitung, die die Anschauung unterstützt und bei der wir gleichzeitig die Fundamentalgruppe von \hat{G} explizit bestimmen. Sie beruht auf der Kenntnis der sog. Fundamentalgruppe einer Verschlingung, also einem Resultat aus der Knotentheorie. Mit dessen Hilfe kann dann auch der in Abschnitt 3.2 aufgeschobene Ganzzahligkeitsnachweis für das Verschlingungsintegral nachgeholt werden; wir benötigen dieses Ergebnis also ohnehin.

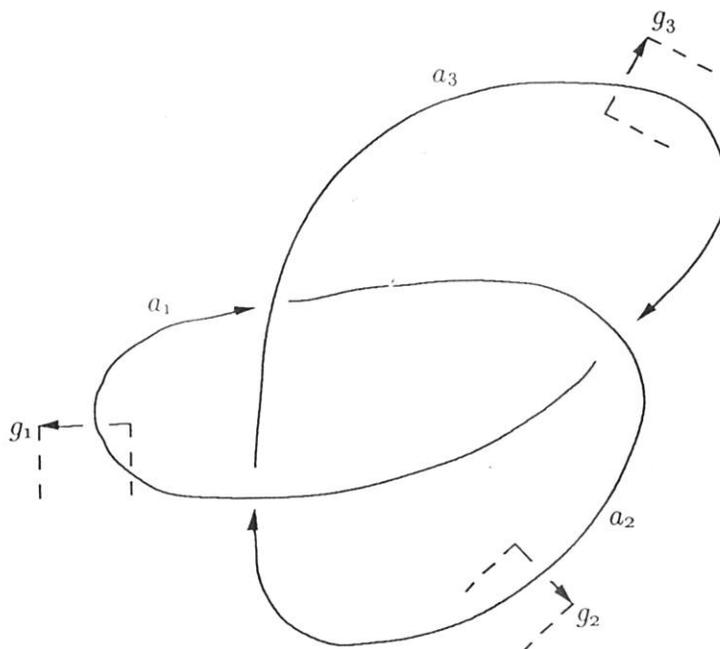
Auch wenn die im Rahmen der Bestimmung von der Fundamentalgruppe einer Verschlingung notwendigen Beweise elementarer Natur sind, übergehen wir sie, um uns kurz zu fassen, und beschreiben vielmehr direkt, wie man eine Präsentation (vgl. Definition 2.2.6) der betreffenden Gruppe gewinnt.

Dazu fassen wir zunächst die notwendigen knotentheoretischen Notationen zusammen; diese findet man z.B. in Chap. 1 von Crowell/Fox [5]. Ein *Knoten* ist bekanntlich das Bild einer Einbettung $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, und zwei Knoten K_1, K_2 heißen *äquivalent*, falls es einen Homöomorphismus von \mathbb{R}^3 in sich gibt, der K_1 auf K_2 abbildet (offenbar ist dies also wieder ein Fortsetzungsproblem!). Das wichtigste Hilfsmittel, um zu entscheiden, ob zwei vorgelegte Knoten äquivalent sind, ist die Untersuchung von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$, der sog. Fundamentalgruppe oder kurz *Gruppe des Knotens*. Da das Komplement eines Knotens wegzusammenhängend ist, ist die Gruppe des Knotens bis auf Isomorphie von der Wahl des Basispunkts unabhängig (Satz 2.3.1); man wählt ihn daher geeignet und unterdrückt ihn in der Notation. Eine *Verschlingung* L ist dann die Vereinigung von endlich vielen disjunkten Knoten, und analog heißt $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ die *Gruppe der Verschlingung*. Ähnlich wie in Abschnitt 3.4 unterscheidet man auch bei Knoten zwischen zahmen und wilden Knoten; insbesondere sind polygonale, d.h. stückweise lineare Knoten zahm (vgl. dazu auch Theorem 19.1 in Moise [21]). Die gesamte im folgenden dargestellte Theorie ist in dieser Form nur auf zahme Knoten anwendbar, was für unsere Belange jedoch keine Rolle spielt, da nach Appendix I von Crowell/Fox [5] insbesondere alle stückweise stetig differenzierbaren Knoten äquivalent zu einem polygonalen Knoten sind (also folglich auch isomorphe Gruppen besitzen); vgl. auch Theorem I.2.1 loc.cit.

Das von uns benötigte Resultat ist eine Präsentation der Gruppe einer Verschlingung von polygonalen Knoten. Um die hierbei auftretenden Erzeuger zu spezifizieren,

verwenden wir die übliche *Projektionsdarstellung*: Dazu wird das Koordinatensystem so gewählt, daß bei vertikaler Projektion von L auf die xy -Ebene höchstens zwei Punkte von L aufeinander abgebildet werden und keine der Ecken von L ein solcher Doppelpunkt ist. Daß dies bei genügend allgemeiner Lage des Koordinatensystems immer möglich ist, zeigt Theorem I.3.1 aus Crowell/Fox [5]. Diese Projektion heißt unter diesen Voraussetzungen auch das *Diagramm* von L . In diesem werden diejenigen Bögen unterbrochen gezeichnet, die die kleinere z -Koordinate besitzen, also "unterhalb" des durchgezogenen gezeichneten Bogens (von positiver z -Richtung aus gesehen) verlaufen.

Wir kommen damit zur Spezifikation von Erzeugern der Gruppe von L . Dazu zeichnen wir in dem folgenden Diagramm der Einfachheit halber L als zusammenhängend; es ist aber klar, daß bei jeder Komponente von L entsprechend zu verfahren ist, um zu Erzeugern zu gelangen. Stellen wir nun L in der Projektionsmethode dar, liefert dies eine Darstellung als Vereinigung endlich vieler disjunkter Bögen a_i :



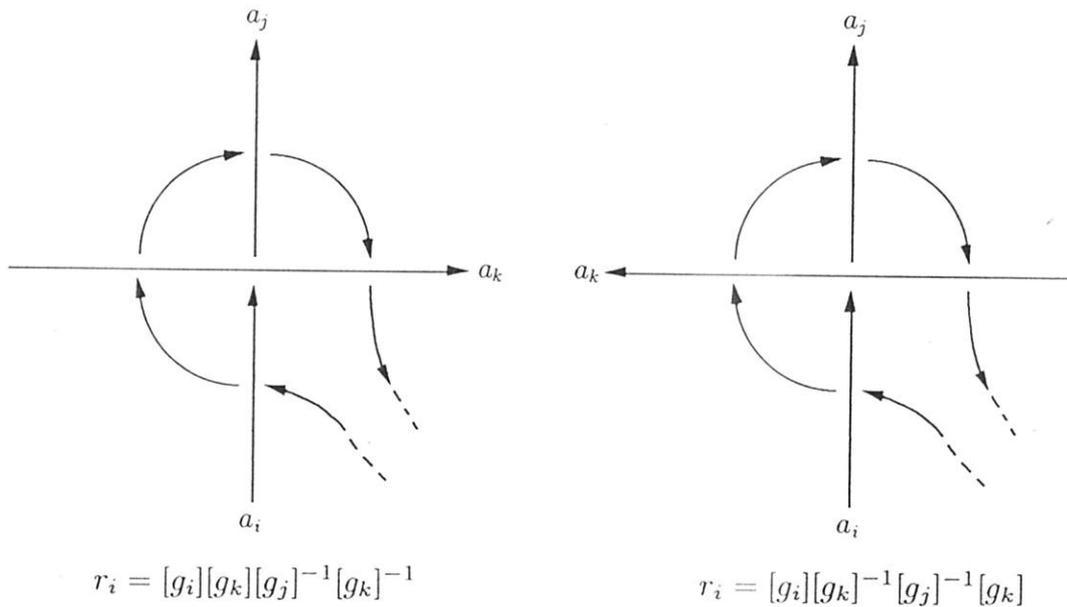
Der Basispunkt für die Fundamentalgruppe wird jetzt genügend weit "oberhalb" von L gewählt, so daß er durch eine Ebene von L abgetrennt ist. Zu jedem Bogen a_i wählen wir einen geschlossenen Weg g_i in $\mathbb{R}^3 \setminus L$, der der Rand eines geeigneten Dreiecks mit dem Basispunkt als Spitze ist, so daß a_i die Dreiecksfläche in einem kleinen Abstand zu dessen Grundlinie durchstößt. Wir bemerken schon an dieser Stelle, daß dann offenbar das Paar (g_i, L) die Voraussetzungen von Hilfssatz 3 aus Abschnitt 3.2 erfüllt und somit gilt:

Bemerkung 4: Es ist $\int_L \omega(g_i) = 1$ für alle i . □

Nun kann man zeigen (siehe Moise [21], Theorem 15.1), daß wir mit den g_i schon ein Erzeugendensystem der Gruppe von L gefunden haben:

Hilfssatz 1: Mit den oben eingeführten Notationen gilt: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ wird von der Menge $S := \{[g_1], [g_2], \dots, [g_n]\}$ von Homotopieklassen (wobei n die Anzahl der Bögen von L angibt) erzeugt. \square

Nach Hilfssatz 2.2.7 ist damit insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ epimorphes Bild der freien Gruppe auf S , die wir im folgenden mit $F(S)$ bezeichnen, und eine Präsentation der Gruppe von L ist gefunden, wenn wir gewisse Relationen angeben können, so daß der von diesen erzeugte Normalteiler in $F(S)$ den Kern des Epimorphismus $\nu: F(S) \rightarrow G$ erzeugt. Zunächst ist klar, daß jedem Kreuzungspunkt dreier Bögen a_i, a_j, a_k von L (man beachte, daß diese nicht zur gleichen Komponente von L zu gehören brauchen) ein sog. *Kreuzungswort* $r_i \in F(S)$ zugeordnet werden kann, das sich in $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ zur Identität reduziert und somit im Kern von ν liegt. r_i hängt von der Orientierung des "oben" verlaufenden Bogens a_k ab, die in der über dem jeweiligen Kreuzungswort stehenden Skizze eingetragen ist, und lautet in diesen beiden möglichen Fällen:



(Es sei betont, daß r_i ein Produkt von Elementen in $F(S)$ und *nicht* in der Fundamentalgruppe von L ist.) Anschaulich gesprochen sind die r_i 's in $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$ gleich der Identität, weil der zugehörige homotope Weg in den obigen Diagrammen unterhalb der Verschlingung nach rechts unten stetig weggezogen werden kann. Wir setzen dann $R := \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ und bezeichnen mit $N(R)$ den von R erzeugten Normalteiler in $F(S)$. Dann ist klar, daß $N(R) \subset \text{Kern } \nu$ gilt; die Aussage des folgenden Satzes (Theorem 15.4 in Moise [21]) ist, daß jede weitere Relation in $F(S)$ bereits Konsequenz von R ist und wir somit eine Präsentation der Gruppe von L gefunden haben:

Satz 3: Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine Verschlingung, und seien $S := \{[g_1], [g_2], \dots, [g_n]\}$ und $R := \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ das oben beschriebene Erzeugendensystem bzw. die Menge der Kreuzungswörter von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$. Dann ist $N(R)$ der Kern des Epimorphismus

$\nu: F(S) \rightarrow G$ und folglich

$$F(S)/N(R) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L).$$

Insbesondere ist (S, R) eine endliche Präsentation von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$. \square

Wir schließen den Abschnitt mit dem angekündigten Beweis der Ganzzahligkeit des Verschlingungsintegrals, die sich nun unmittelbar aus den vorangehenden Sätzen ergibt.

Hilfssatz 2: Es sei $(\{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\}) \in H_1^\infty(\bar{G}) \times H_1^\infty(\hat{G}) \cong H_1(\bar{G}) \times H_1(\hat{G})$. Dann gilt $\langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Wir fassen $\text{Sp } \gamma$ als Verschlingung (bestehend aus einer Komponente) auf. Dann läßt sich $\hat{\gamma}$ als Element von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma)$ ansehen und als solches nach Hilfssatz 1 als Produkt von Potenzen der Homotopieklassen $[g_i] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \text{Sp } \gamma)$ schreiben. Die Behauptung folgt nun aus Bemerkung 4. \square

4.3 Fundamentalgruppe und erste Homologiegruppe von \hat{G}

Mit Hilfe der Fundamentalgruppe einer Verschlingung ergibt sich die Fundamentalgruppe von \hat{G} nun leicht, da mit \hat{G} "fast" das Komplement einer Verschlingung vorliegt. Was "fast" bedeutet, präzisieren wir im nächsten Hilfssatz, für den wir eine neue Menge einführen:

Besitzt die Menge G dabei g Henkel, so betrachten wir den i -ten Henkel, der durch das Ankleben von $D_\varepsilon^2 \times I$ vermöge φ_i an D^3 entstanden sei, und bezeichnen mit σ_i den Weg $F(0, \cdot)$, wobei $0 \in D_\varepsilon^2$ ist (diesen Weg hatten wir schon im Beweis von Satz 1 aus Abschnitt 1 benutzt, um die geschlossenen Wege γ_i durch die Henkel von G zu definieren). $\text{Sp } \sigma_i$ verläuft also gerade durch den i -ten Henkel von G zwischen den beiden Verklebestellen. Dann sei $\bar{G}_{L,g}$ die Menge, die entsteht, wenn an $F(D^3)$ vermöge der Abbildung $F \circ \varphi_i$ (entsprechend eingeschränkt) $\text{Sp } \sigma_i$ angeklebt wird, und zwar für jedes $1 \leq i \leq g$. Unter $\bar{G}_{L,g}$ kann man sich also den "Rumpf" $F(D^3)$ des Henkelkörpers \bar{G} vorstellen, an den statt der Henkel nur Wege angeklebt wurden, die vormals im Inneren der Henkel von G verliefen.

Unsere Beobachtung ist nun:

Hilfssatz 3: Es gilt $\hat{G} \simeq \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}_{L,g}$, d.h. \hat{G} und $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}_{L,g}$ sind vom gleichen Homotopietyp und besitzen somit isomorphe Fundamental- und Homologiegruppen.

Beweis: Wir zeigen, daß \hat{G} und $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}_{L,g}$ einen gemeinsamen Deformationsretrakt enthalten und somit vom gleichen Homotopietyp sind (vgl. Satz 2.4.3). Dieser (sogar strenge) Deformationsretrakt ist nämlich das Komplement des Raumes, der entsteht, wenn D^3 über die zugehörigen Verklebeabbildungen mit den Zylindern

$\overset{\circ}{D}_\varepsilon^2 \times I$ ohne Mantelfläche verklebt und anschließend vermöge F nach \mathbb{R}^3 eingebettet wird. Offenbar genügt es, die zugehörigen Homotopien in Umgebungen der Zylinder zu definieren, über die die Henkel angeklebt werden (den Rest erledigt geeignetes Komponieren mit F^{-1} und F). Für \hat{G} betrachten wir dazu die (in der Umgebung des i -ten Zylinders definierte) Abbildung

$$((D_\varepsilon^2 \times \overset{\circ}{I}) \setminus (D^2 \times \overset{\circ}{I})) \times I \longrightarrow D_\varepsilon^2 \times \overset{\circ}{I}, \quad (x, s) \times t \longmapsto \left((1-t)x + t(1+\varepsilon) \frac{x}{|x|}, s \right)$$

und für $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g}$ analog die in der Umgebung von $\text{Sp } \sigma_i$ gegebene Abbildung

$$((D_\varepsilon^2 \times \overset{\circ}{I}) \setminus (\{0\} \times \overset{\circ}{I})) \times I \longrightarrow D_\varepsilon^2 \times \overset{\circ}{I}, \quad (x, s) \times t \longmapsto \left((1-t)x + t(1+\varepsilon) \frac{x}{|x|}, s \right),$$

die jeweils radiale Deformationen auf $\partial D_\varepsilon^2 \times \overset{\circ}{I}$ definieren. Diese leisten offenbar das Gewünschte. \square

Somit ist klar, wieso — was die Fundamental- und Homologiegruppen anbelangt — das Komplement eines Henkelkörpers “fast” dem Komplement der Verschlingung $\bigcup_{1 \leq i \leq g} \text{Sp } \sigma_i$ entspricht. Aufgrund der in Definition 2.1.1 gestellten topologischen Voraussetzungen (i) und (ii) an G können wir nun auch auf $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g}$ das Ergebnis aus Satz 3 des vorigen Abschnitts über die Fundamentalgruppe einer Verschlingung anwenden, was eine Inspektion des Beweises in Moise [21] zeigt (vgl. dazu insbesondere die zentralen Argumentationsschritte auf S. 103 unten bzw. S. 104 unten, die die topologischen Voraussetzungen an zulässige Mengen erklären). Indem wir entsprechende Erzeuger g_i wie bei der Gruppe einer Verschlingung für $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g}$ wählen, erhalten wir:

Satz 4: Für die Fundamentalgruppe von \hat{G} gilt

$$\pi_1(\hat{G}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g}) \cong F(S)/N(R),$$

wobei Erzeugendensystem S und Kreuzungswörter R wie in Satz 3 aus Abschnitt 2 für $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g}$ zu wählen sind. \square

Das Abelschmachen der Fundamentalgruppe $\pi_1(\hat{G}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g})$ liefert dann wieder die erste Homologiegruppe von \hat{G} . Um das Resultat dieser Operation zu erhalten, sind die Veränderungen bei den Relationen R zu betrachten, wenn wir zur abelsch gemachten Gruppe übergehen. Nach dem letzten Abschnitt lauten diese Relationen gerade (die wir nun durch den Epimorphismus ν in die Fundamentalgruppe transportieren)

$$1 = \nu(r_i) = [g_i] * [g_k] * [g_j]^{-1} * [g_k]^{-1} \quad \text{oder} \quad 1 = \nu(r_i) = [g_i] * [g_k]^{-1} * [g_j]^{-1} * [g_k],$$

was sich in der abelsch gemachten Gruppe zu

$$1 = \nu(r_i) = [g_i] * [g_j]^{-1} \quad \text{oder} \quad 1 = \nu(r_i) = [g_i] * [g_j]$$

reduziert. Das aber bedeutet: Alle Erzeuger $[g_i]$, die zu Bögen a_i derselben Zusammenhangskomponente im zugehörigen Diagramm gehören (und für die daher Kreuzungswörter wie gerade betrachtet existieren), repräsentieren in der abelsch gemachten Fundamentalgruppe dasselbe Element. Wegen der Voraussetzung (ii) in Definition 2.1.1 für zulässige Mengen ist jedoch sichergestellt, daß sich die Bilder von $\text{Sp } \sigma_i$ und $\text{Sp } \sigma_j$ in der Projektionsdarstellung für $i \neq j$ nicht schneiden. Wählen wir also für jedes i genau einen der äquivalenten Erzeuger wie gerade beschrieben und bezeichnen diesen mit $[\tilde{g}_i]$, liefert das einen Isomorphismus

$$H_1(\hat{G}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}_{L,g})^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} \langle [\tilde{g}_1], [\tilde{g}_2], \dots, [\tilde{g}_g] \rangle^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^g,$$

d.h., $H_1(\hat{G})$ ist frei abelsch vom Rang g .

Sind nun $\hat{\gamma}_i$ ($1 \leq i \leq g$) die "dualen Wege" zu den Henkeln von G wie in Satz 2 bzw. Bemerkung 2 aus Abschnitt 1, so zeigt diese Bemerkung ferner, daß die $\hat{\gamma}_i$ über \mathbb{Z} linear unabhängig sind und daher $\langle \{\hat{\gamma}_1\}, \{\hat{\gamma}_2\}, \dots, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle = \bigoplus_{1 \leq i \leq g} \langle \{\hat{\gamma}_i\} \rangle$ gilt. Nach Hilfssatz 2.2.2 b) ist die Inklusion $\bigoplus_{1 \leq i \leq g} \langle \{\hat{\gamma}_i\} \rangle \hookrightarrow H_1(\hat{G})$ folglich ein Isomorphismus, und wir haben gezeigt:

Satz 5: Für $1 \leq i \leq g$ seien die Wege $\hat{\gamma}_i$, die sogenannten dualen Wege der Henkel, wie in Bemerkung 2 aus Abschnitt 1 gewählt. Dann ist die erste Homologiegruppe von \hat{G} die freie abelsche Gruppe auf der Menge $\hat{S} := \{ \{\hat{\gamma}_1\}, \{\hat{\gamma}_2\}, \dots, \{\hat{\gamma}_g\} \}$ von Homologieklassen, d.h. es gilt:

$$H_1(\hat{G}) = \langle \{\hat{\gamma}_1\} \rangle \oplus \langle \{\hat{\gamma}_2\} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \{\hat{\gamma}_g\} \rangle \cong \mathbb{Z}^g.$$

Folglich ist $p_1(\hat{G}) = g$, und die Menge \hat{S} bildet eine Betti-Basis von $H_1(\hat{G})$. Falls $S = \{ \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_g\} \}$ die Betti-Basis von $H_1(G)$ aus Satz 2 in Abschnitt 1 bezeichnet, so gilt für alle $1 \leq i, j \leq g$

$$\langle \langle \{\gamma_i\}, \{\gamma_j\} \rangle \rangle = \delta_{i,j}. \quad \square$$

Insbesondere haben wir auf diese Weise auf elementare Art die Beziehung

$$H_1(G) \cong H_1(\hat{G})$$

gezeigt, die sich sonst aus dem tiefliegenden Alexanderschen Dualitätssatz wie zu Beginn von Abschnitt 4.2 vorgeführt (ohne jegliche geometrische Interpretation) ergibt.

5

Der Raum Neumannscher Felder in G und \widehat{G}

5.1 Potentialtheoretische Vorbereitungen

Nachdem wir im letzten Kapitel die ersten Homologiegruppen des Innen- und auch Außenraums zulässiger Mengen explizit bestimmt haben und somit nun über einen vollständigen Überblick über deren "Zusammenhangseigenschaften erster Ordnung" verfügen, wobei wir die hier zutage tretende topologische Dualität mit Hilfe des Verschlingungsintegrals sogar *analytisch* ausdrücken konnten, sind alle in unserem Kontext notwendigen topologischen Betrachtungen abgeschlossen. Wir können daher jetzt die analytische Seite unseres Ziels, eine Basis für den Raum Neumannscher Felder zu konstruieren, angehen und stellen in diesem Abschnitt die benötigten potentialtheoretischen Hilfsmittel zusammen.

Zunächst geben wir der Vollständigkeit halber noch einmal die nachfolgenden Definitionen. Wir betonen hierbei ausdrücklich, daß wir in der gesamten Arbeit glatt berandete Gebiete im Sinne der Definition zu Beginn von § 6.2 in Gilbarg/Trudinger [13] verstehen.

Definition 1 (Dirichletsche und Neumannsche Felder):

Sei G eine beschränkte offene Teilmenge des \mathbb{R}^3 mit endlich vielen Wege-Komponenten. Ihr Rand ∂G sei stetig gekrümmt (d.h. von der Klasse C^2), orientierbar und geschlossen (also kompakt und unberandet) und besitze ebenfalls endlich viele Wege-Komponenten. Ferner sei $\widehat{G} := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$.

- (i) Ein Vektorfeld $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ heißt Dirichletsches Feld in G , wenn es harmonisch ist (also $\operatorname{div} v = 0$ und $\operatorname{rot} v = 0$ in G gelten) und dessen Tangentialkomponente auf ∂G verschwindet, also für alle $\xi \in \partial G$ gilt

$$n(\xi) \times v(\xi) = 0,$$

wobei $n(\xi)$ die äußere Normale bezüglich G in $\xi \in \partial G$ bezeichnet. Wir setzen dann

$$Y(G) := \{ y \mid y \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^3), y \text{ ist Dirichletsches Feld in } G \}$$

für den Vektorraum aller Dirichletschen Felder in G . Für den Außenraum \hat{G} definieren wir als Raum Dirichletscher Felder

$$Y(\hat{G}) := \{ y \mid y \in C^1(\hat{G}, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{\hat{G}}, \mathbb{R}^3), y \text{ ist Dirichletsches Feld in } \hat{G} \\ \text{und } |y(x)| = O(1/|x|^2) \text{ für } |x| \rightarrow \infty \}.$$

(ii) Das Vektorfeld $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{G}, \mathbb{R}^3)$ ist ein Neumannsches Feld in G , falls es harmonisch ist und dessen Normalkomponente auf ∂G verschwindet, also für alle $\xi \in \partial G$

$$\langle n(\xi), v(\xi) \rangle = 0$$

gilt. Wir setzen dann

$$Z(G) := \{ z \mid z \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\overline{G}, \mathbb{R}^3) \text{ für ein } \rho \in]0, 1[, \\ z \text{ ist Neumannsches Feld in } G \}$$

für den Vektorraum aller Neumannschen Felder in G . Der Raum Neumannscher Felder im Außenraum \hat{G} sei

$$Z(\hat{G}) := \{ z \mid z \in C^1(\hat{G}, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\overline{\hat{G}}, \mathbb{R}^3) \text{ für ein } \rho \in]0, 1[, \\ z \text{ ist Neumannsches Feld in } \hat{G} \\ \text{und } |z(x)| = O(1/|x|^2) \text{ für } |x| \rightarrow \infty \}.$$

Bezüglich der vorangehenden Definition ist eine kurze Bemerkung angebracht, wieso für Neumannsche Felder im unbeschränkten Außenraum \hat{G} (und auch Dirichletsche Felder, auf die wir aber nicht weiter eingehen) ein bestimmtes Abklingverhalten im Unendlichen gefordert wurde. Der Grund ist, daß es sich bei den Neumannschen Feldern in \hat{G} ohne vorgeschriebenes Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$ um einen \mathbb{R} -Vektorraum von unendlicher Dimension handelt, der als Unterräume etwa alle Räume Neumannscher Felder von der Ordnung $|x|^k$ (für $|x| \rightarrow \infty$) enthält. Die Dimension dieser Räume wird mit k aber beliebig groß; siehe dazu Satz 1.11 in Neudert [22]. Satz 1.13 loc.cit. zeigt sogar, daß ein beliebiges Wachstumsverhalten entlang einer Ebene im \mathbb{R}^3 vorgeschrieben werden darf, zu dem dann stets ein Neumannsches Feld im Außenraum existiert, das noch stärker anwächst. Um also einen endlich-dimensionalen Raum zu erhalten, beschränken wir uns auf eine Teilmenge aller Neumannschen Felder im Außenraum, indem wir deren Verhalten im Unendlichen wie in der obigen Definition angegeben vorschreiben.

Das wichtigste Hilfsmittel bei der Konstruktion Neumannscher Felder ist nun die Lösbarkeit des Neumann-Problems auf Bereichen G wie in Definition 1 und auf dem entsprechenden Außenraum \hat{G} . Um den zugehörigen Satz für dieses Problem formulieren zu können, benötigen wir noch die folgenden Räume:

Definition 2 (Räume lokal konstanter Funktionen): Zu einer Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ wie in Definition 1 setzen wir

$$H(G) := \{ h \mid h \in C^1(\overline{G}), \operatorname{grad} h = 0 \text{ in } \overline{G} \}.$$

Offenbar besitzt dann jedes $h \in H(G)$ eine eindeutige Darstellung der Form

$$h = \sum_{i=1}^N c_i \cdot 1_{\overline{G}_i}$$

mit $c_i \in \mathbb{R}$, wobei G_1, G_2, \dots, G_N die endlich vielen Wege-Komponenten von G und $1_{\overline{G}_i}$ die charakteristische Funktion der Menge \overline{G}_i bezeichnen. Insbesondere ist hier $\dim_{\mathbb{R}} H(G) = N = p_0(G)$. Analog sei für den Außenraum \hat{G}

$$\hat{H}(\hat{G}) := \{ \hat{h} \mid \hat{h} \in C^1(\overline{\hat{G}}), \text{grad } \hat{h} = 0 \text{ in } \overline{\hat{G}}, |\hat{h}(x)| = O(1/|x|^2) \text{ für } |x| \rightarrow \infty \},$$

und es ist $\dim_{\mathbb{R}} \hat{H}(\hat{G}) = M = p_0(\hat{G}) - 1$, wenn M die Zahl der (endlich vielen) beschränkten Wege-Komponenten von \hat{G} angibt.

Hier tritt also die analytische Charakterisierung der nullten Betti-Zahl einer offenen Menge G bzw. des Komplements ihres Abschlusses, die jeweils endlich viele Wege-Komponenten besitzen, noch einmal explizit auf.

Unter dem *Neumann-Problem* $N(G, g)$ auf einer offenen Menge G wie in Definition 1 zum Hölder-stetigen Randdatum $g \in C^\alpha(\partial G)$ (wobei $\alpha \in]0, 1[$ ist) verstehen wir die folgende Aufgabe:

Gesucht ist ein $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ mit

$$N(G, g) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } G, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Damit die Eindeutigkeitsaussage aus dem gleich zu formulierenden Satz über die Lösung des Neumann-Problems auch für den unbeschränkten Außenraum \hat{G} erhalten bleibt, ist in diesem Fall noch ein bestimmtes Abklingverhalten im Unendlichen für die Lösung vorzuschreiben. Ist g wie eben, so lautet das Neumann-Problem $N(\hat{G}, g)$ für den Außenraum \hat{G} konkret:

Gesucht ist ein $u \in C^2(\hat{G}) \cap C^1(\overline{\hat{G}})$ mit

$$N(\hat{G}, g) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \hat{G}, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial \hat{G} = \partial G, \end{cases}$$

so daß u das folgende Verhalten im Unendlichen aufweist:

$$\begin{cases} |u(x)| & = O(1/|x|) \text{ für } |x| \rightarrow \infty, \\ |\text{grad } u(x)| & = O(1/|x|^2) \text{ für } |x| \rightarrow \infty, \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) \right| & = O(1/|x|^3) \text{ für } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Bezüglich der Lösbarkeit der Probleme $N(G, g)$ bzw. $N(\hat{G}, g)$ gilt dann der folgende Satz, für dessen Beweis wir auf Satz I.2.5 (S. 81) in von Wahl [29] verweisen und lediglich erwähnen, daß die beschriebene Lösung u als Einfachschichtpotential $\int_{\partial G} \lambda' / r \, dS'$ angesetzt werden kann, bei dem man die einfache Belegung $\lambda \in C^p(\partial G)$ als Lösung einer Integralgleichung gewinnt:

Satz 1 (Lösung des Neumann-Problems): Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ wie in Definition 1 und das Randdatum g aus $C^\alpha(\partial G)$ für ein $\alpha \in]0, 1[$. Für alle Funktionen \tilde{h} mit $\tilde{h} = h|_{\partial G}$ für ein $h \in H(G)$ gelte

$$\int_{\partial G} \tilde{h} g \, dS = 0,$$

d.h., g besitze auf jeder Komponente von ∂G den Mittelwert 0. Dann haben die Probleme $N(G, g)$ bzw. $N(\hat{G}, g)$ eine Lösung u im Sinne der oben gegebenen Definitionen. Für die Lösungsmengen \mathcal{L}_G und $\mathcal{L}_{\hat{G}}$ dieser Probleme gilt

$$\mathcal{L}_G = u + H(G) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}_{\hat{G}} = u + \hat{H}(\hat{G}),$$

d.h. sind u_1, u_2 zwei Lösungen von $N(G, g)$ bzw. $N(\hat{G}, g)$, so gibt es eine Funktion $h \in H(G)$ oder $\hat{h} \in \hat{H}(\hat{G})$ mit $u_1 - u_2 = h$ bzw. $u_1 - u_2 = \hat{h}$. \square

Wir weisen noch darauf hin, daß die in dem vorangehenden Satz auftretende Bedingung an das Randdatum g des Neumann-Problems nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig für die Existenz einer Lösung ist, was man leicht mit Hilfe der Greenschen Formel einsieht.

Um nun diese Bedingung bei Anwendungen bequem überprüfen zu können, erweisen sich zwei Aussagen über stetig differenzierbare Tangentialfelder auf stetig gekrümmten Flächen als nützlich. Zunächst erwähnen wir den Satz von Gauß für geschlossene Flächen. Dazu benötigen wir den invarianten Differentialausdruck "Divergenz" für eingebettete 2-Mannigfaltigkeiten (also Flächen) F von der Klasse C^2 . Dies ist folgendes: Ist $a: F \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Tangentialfeld auf F , d.h. gilt $\langle a, n \rangle \equiv 0$ auf F , und sind t_1, t_2 die lokalen Koordinaten der Karte $\bar{x}: \mathbb{R}^2 \supset T \rightarrow F \subset \mathbb{R}^3$ von ∂G , so gibt es stetig differenzierbare Koeffizientenfunktionen $a^{(1)}, a^{(2)}$ auf $\bar{x}(T)$, so daß die Darstellung $a = \sum (a^{(i)} \circ \bar{x}) \cdot \partial \bar{x} / \partial t_i$ von a als Linearkombination der Basis $\partial \bar{x} / \partial t_i$ von $T_{\bar{x}(t)}(F)$ in jedem $t \in T$ gilt. (Dies kann man zum Beispiel einsehen, indem man das lineare Gleichungssystem $(\partial \bar{x} / \partial t_1, \partial \bar{x} / \partial t_2, n \circ \bar{x}) \cdot (a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})^t = a$ mit Hilfe der Cramerschen Regel löst.) Dann ist die Divergenz dieses Tangentialfeldes in $\xi = \bar{x}(t)$ definiert als

$$\text{Div } a := \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (\sqrt{g} (a^{(i)} \circ \bar{x}))}{\partial t_i},$$

wobei g die Gramsche Determinante von F bezüglich der Karte \bar{x} bezeichnet. Per Konstruktion ist $\text{Div } a$ unabhängig von der Auswahl der Karte. Es gilt nun:

Hilfssatz 1 (Gauß für geschlossene Flächen): Sei F geschlossene stetig gekrümmte Fläche im \mathbb{R}^3 . Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Tangentialfeld $a: F \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\int_F \operatorname{Div} a \, dS = 0.$$

Für einen Beweis verweisen wir auf von Wahl [30], Hilfssatz 5.1. □

Die zweite in diesem Kontext anzusprechende Eigenschaft ist eine punktweise Identität für die Divergenz eines Tangentialfeldes, das in natürlicher Weise bei "hinreichend glatten" Vektorfeldern auf offenen Mengen mit stetig gekrümmtem Rand auftritt. Präziser:

Hilfssatz 2: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und ∂G stetig gekrümmt und orientierbar mit äußerer Normalen $n: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^3$. Ist ferner $v \in C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$, so ist durch $n \times v$ ein stetig differenzierbares Tangentialfeld auf ∂G gegeben. Für dessen Divergenz gilt auf ∂G punktweise die Identität

$$\operatorname{Div}(n \times v) = -\langle n, \operatorname{rot} v \rangle.$$

Dies sieht man entweder durch direktes Nachrechnen unter Verwendung der Definition von der Divergenz ein (siehe etwa S. 106–107 im Beweis des Lemmas I.3.1 in von Wahl [29]) oder folgert es aus den Kontinuitätsbedingungen für divergenzfreie Vektorpotentiale gekoppelter Stromverteilungen, indem man v mit Hilfe des Fundamentalsatzes der Vektoranalysis auf \mathbb{R}^3 fortsetzt (vgl. von Wahl [30], Sätze 5.3 und 6.4; für diese Argumentation sollte v aus der Klasse $C^2(\bar{G})$ sein, um tiefere Regularitätsargumente zu vermeiden). □

Indem man die beiden vorangehenden Hilfssätze kombiniert, erhält man nun sofort:

Folgerung: Die offene Menge $G \subset \mathbb{R}^3$ sei wie in Definition 1, besitze also insbesondere einen stetig gekrümmten und geschlossenen Rand. Für jedes Vektorfeld $v \in C^{1,\alpha}(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ mit einem $\alpha \in]0, 1[$ gilt dann

$$\int_{\partial G} \langle n, \operatorname{rot} v \rangle \, dS = 0,$$

d.h., die Funktion $\langle n, \operatorname{rot} v \rangle \in C^\alpha(\partial G)$ erfüllt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des Neumann-Problems $N(G, \langle n, \operatorname{rot} v \rangle)$ aus Satz 1. □

5.2 Konstruktion einer Basis für den Raum Neumannscher Felder

Wir haben nun alle topologischen und analytischen Vorarbeiten geleistet, um auf in unserem Sinne zulässigen Mengen (und auch ihren Komplementen) eine Basis für den

Raum Neumannscher Felder zu konstruieren. Das wesentliche *analytische* Element dieser Konstruktion ist (neben der Lösbarkeit des Neumann-Problems auf beliebigen Bereichen gemäß Satz 1 des vorigen Abschnitts) das Vektorfeld der Verschlingungsform aus Definition 1 in Abschnitt 3.1; die *Topologie* von G wird entscheidend an zwei Stellen ausgenutzt: zum einen direkt bei der Auswahl der Zyklen, deren Verschlingungsformen auf die Neumann-Felder der gesuchten Basis führen — hier geht insbesondere auch die Kenntnis einer Betti-Basis der ersten Homologiegruppe des Komplements, also der sog. "dualen" Zyklen zu den Henkeln gemäß Satz 5 in Abschnitt 4.3, ein. Zum anderen ist das Wissen um das explizite Aussehen der ersten Homologiegruppe von G sowohl beim Nachweis der linearen Unabhängigkeit als auch der Erzeugendeneigenschaft der Basis entscheidend.

Wie erwartet lautet der Satz nun:

Satz 2: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ zulässige Menge gemäß Definition 1 in Abschnitt 2.1. Dann ist der Raum $Z(G)$ der Neumannschen Felder auf G endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum von der Dimension $p_1(G)$.

Beweis: Nach Satz 2 in Abschnitt 4.1 gilt $p_1(G) = g$, wobei g die Anzahl der Henkel von G bezeichnet. Zunächst ist der Fall $g = 0$ separat zu behandeln. Sei hierbei $z \in Z(G)$. Wegen $\operatorname{rot} z = 0$ verschwindet die äußere Ableitung der 1-Form $z \cdot d\vec{s}$, so daß aufgrund des einfachen Zusammenhangs von G eine Stammfunktion zu $z \cdot d\vec{s}$ existiert (siehe z.B. Forster [8], Satz 18.6 S. 207). Sei $f \in C^2(G, \mathbb{R}^3) \cap C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ mit $df = z \cdot d\vec{s}$, also $\operatorname{grad} f = z$. Dann gilt $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0$ in G (denn $\operatorname{div} z = 0$), und auf ∂G ist $\partial f / \partial n = \langle n, \operatorname{grad} f \rangle = 0$ wegen $\langle n, z \rangle = 0$. Somit löst f das Neumann-Problem $N(G, 0)$, das nach Satz 1 des letzten Abschnitts die Lösungsmenge $H(G)$ besitzt. Es folgt $z = \operatorname{grad} f = 0$ und damit $Z(G) = \{0\}$.

Nun sei $g \geq 1$. Wir betrachten die dualen Betti-Basen $S := \{ \{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_g\} \}$ von $H_1(G)$ und $\hat{S} := \{ \{\hat{\gamma}_1\}, \{\hat{\gamma}_2\}, \dots, \{\hat{\gamma}_g\} \}$ von $H_1(\hat{G})$ aus den Sätzen 2 (Abschnitt 4.1) bzw. 5 (Abschnitt 4.3); diese erfüllen demnach die Dualitätsrelation

$$\langle \langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq g.$$

Für $1 \leq i \leq g$ sei ferner v_i das durch die Verschlingungsform $\omega(\hat{\gamma}_i)$ definierte Vektorfeld auf $\mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Sp} \hat{\gamma}_i$, d.h. es gelte $\omega(\hat{\gamma}_i) = v_i \cdot d\vec{s}$ (vgl. Definition 1 in Abschnitt 3.1). Zur Vereinfachung der Notation bezeichne v_i fortan auch dessen Einschränkung auf \bar{G} , die wir ab jetzt nur noch betrachten. Um aus den v_i Neumann-Felder auf G zu konstruieren, betrachten wir die g Neumann-Probleme $N(G, \langle n, v_i \rangle)$; wegen der stetigen Gekrümmtheit von ∂G gilt dabei $\langle n, v_i \rangle \in C^{0,1}(\partial G)$ (vgl. hierzu auch von Wahl [29], Lemma I.2.1 S. 36). Nach der Folgerung am Ende von Abschnitt 5.1 sind diese Probleme lösbar, da die Felder v_i ein Vektorpotential besitzen. Mit Hilfe von Satz 1 finden wir also für $1 \leq i \leq g$ Funktionen $u_i \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ mit

$$\begin{cases} \Delta u_i = 0 & \text{in } G \text{ und} \\ \frac{\partial u_i}{\partial n} = \langle n, v_i \rangle & \text{auf } \partial G. \end{cases}$$

Wir entnehmen der Arbeit Wiegner [31], daß diese Lösungen u_i sogar aus der Klasse $C^2(G) \cap C^{1,1}(\bar{G})$ sind. Definieren wir also

$$z_i := v_i - \text{grad } u_i,$$

gilt daher $z_i \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^\rho(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ für alle $\rho \in]0, 1[$. Wegen $\text{div } v_i = 0$ bzw. $\text{rot } v_i = 0$ (siehe Hilfssatz 1 aus Abschnitt 3.2) sowie den Beziehungen $\text{div grad } u_i = \Delta u_i = 0$ und $\text{rot grad } u_i = 0$ für $u_i \in C^2(G)$ ist weiter

$$\text{div } z_i = 0 \text{ und } \text{rot } z_i = 0 \text{ in } G.$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \langle n, z_i \rangle &= \langle n, v_i \rangle - \langle n, \text{grad } u_i \rangle \\ &= \langle n, v_i \rangle - \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial G, \end{aligned}$$

und wir sehen $z_i \in Z(G)$ für alle $1 \leq i \leq g$.

Wir behaupten, daß $\{z_1, z_2, \dots, z_g\}$ eine Basis von $Z(G)$ darstellt. Dazu bemerken wir zunächst, daß wegen

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} \text{grad } u_j \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_i} du_j \\ &= u_j(\gamma_i(1)) - u_j(\gamma_i(0)) = 0 \end{aligned}$$

für alle $1 \leq i, j \leq g$

$$(1) \quad \int_{\gamma_i} z_j \cdot d\vec{s} = \langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle$$

$$(2) \quad = \delta_{i,j}$$

gilt. Indem man zu einem Ansatz $\sum_{j=1}^g \alpha_j z_j = 0$ in \bar{G} mit $\alpha_j \in \mathbb{R}$ die zugehörige 1-Form $\sum_{j=1}^g \alpha_j (z_j \cdot d\vec{s}) = 0$ betrachtet und über γ_i für $1 \leq i \leq g$ integriert, folgt somit $\alpha_j = 0$ für alle j , also die lineare Unabhängigkeit der Neumann-Felder z_i .

Um einzusehen, daß die z_i den Raum $Z(G)$ auch erzeugen, betrachten wir ein beliebiges Neumann-Feld $z \in Z(G)$ und setzen

$$\alpha_i := \int_{\gamma_i} z \cdot d\vec{s}.$$

Weiter sei

$$v := z - \sum_{i=1}^g \alpha_i z_i.$$

Dann ist $v \in Z(G)$, und wegen (2) gilt für alle $1 \leq i \leq g$

$$(3) \quad \int_{\gamma_i} v \cdot d\vec{s} = 0.$$

Es sei nun $\beta: [0, 1] \rightarrow G$ ein beliebiger stückweise stetig differenzierbarer geschlossener Weg. Dieser repräsentiert eine Homologiekategorie aus $H_1(G)$, und es gibt somit ganze Zahlen n_1, n_2, \dots, n_g mit $\{\beta\} = \sum_{i=1}^g n_i \cdot \{\gamma_i\}$. Aus der Homologie-Invarianz des Kurvenintegrals nach der Folgerung aus Satz 1 ("Stokes für k -Würfel") in Abschnitt 3.2 folgt zusammen mit Gleichung (3), daß $\int_{\beta} v \cdot d\vec{s} = 0$ für jeden derartigen Weg in G ist. Nach Satz 18.3 aus Forster [8] (S. 200) ist dies aber notwendig und hinreichend dafür, daß $v \cdot d\vec{s}$ eine Stammfunktion auf G besitzt, d.h., es gibt eine Funktion $u \in C^1(G)$ mit $v \cdot d\vec{s} = du$ bzw. $v = \text{grad } u$. Wegen $v \in C^1(G, \mathbb{R}^3) \cap C^{\rho}(\bar{G}, \mathbb{R}^3)$ für ein $\rho \in]0, 1[$ folgt daraus sogar $u \in C^2(G) \cap C^{1,\rho}(\bar{G})$.

Also ist $\Delta u = \text{div grad } u = 0$ in G , und wegen $\langle n, v \rangle = 0$ auf ∂G folgt

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle n, \text{grad } u \rangle = 0 \text{ auf } \partial G.$$

Die gleiche Argumentation wie zu Beginn des Beweises zeigt jetzt $u \in H(G)$, und damit folgt $v = 0$ in \bar{G} und somit die Behauptung. \square

Was nun die Konstruktion einer Basis im Außenraum \hat{G} anbelangt, so bemerken wir lediglich, daß sowohl die Felder \hat{v}_i als auch $\text{grad } \hat{u}_i$, die man erhält, wenn man in der vorangegangenen Konstruktion die Rollen von den Elementen γ_i bzw. $\hat{\gamma}_i$ der Betti-Basen im Innen- und Außenraum vertauscht, von der Ordnung $O(1/|x|^2)$ (für $|x| \rightarrow \infty$) sind; hierbei haben wir das Neumann-Problem im Außenraum in der Klasse $C^2(\hat{G}) \cap C^1(\bar{\hat{G}})$ aller Vektorfelder gelöst, die von der Ordnung $O(1/|x|)$ sind und deren Gradient wie $O(1/|x|^2)$ abfällt. Also sind die Elemente $\hat{z}_i := \hat{v}_i - \text{grad } \hat{u}_i$ linear unabhängige Neumann-Felder im Außenraum. Weil nach Satz 1 des vorigen Abschnitts die Eindeutigkeitsaussage für das Neumann-Problem in der gerade erwähnten Klasse erhalten bleibt, folgt wortwörtlich wie zum Schluß des Beweises, daß die \hat{u}_i den Raum $Z(\hat{G})$ auch erzeugen. Es gilt also:

Satz 3: Sei G zulässige Menge des \mathbb{R}^3 . Dann ist $Z(\hat{G})$ endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum von der Dimension $p_1(\hat{G})$. \square

Vom logischen Standpunkt her gesehen haben unsere gerade bewiesenen Resultate den Alexanderschen Dualitätssatz *nicht* ausgenutzt, denn die topologischen Voraussetzungen (i) und (ii) in Definition 1 aus Abschnitt 2.1 ermöglichten uns ja eine elementare Bestimmung der ersten Homologiegruppe des Außenraums \hat{G} mit Hilfe der Fundamentalgruppe einer Verschlingung, und zwar *ohne* Verwendung des Alexanderschen Satzes. Wegen der Voraussetzung (ii) bedeutet das aber, daß die Henkel der von uns betrachteten Mengen zwar für sich, aber nicht *untereinander* verschlungen sein dürfen, da nur in diesem Fall das Resultat bezüglich der Fundamentalgruppe einer Verschlingung anwendbar war.

Zu Beginn von Abschnitt 4.2 haben wir jedoch gezeigt, wie sich die Aussage $H_1(G) \cong \mathbb{Z}^g \cong H_1(\hat{G})$ mit Hilfe des Alexanderschen Dualitätssatzes beweisen läßt, *ohne* auf die Voraussetzungen (i) und (ii) für zulässige Mengen zurückgreifen zu müssen. Kennt man aber einmal die Aussage $H_1(\hat{G}) \cong \mathbb{Z}^g$, so behält der Beweis von Satz 5 aus Abschnitt 4.3, der die Struktur von $H_1(\hat{G})$ beschreibt, wortwörtlich

Gültigkeit, und insbesondere sind dann auch die Beweise von den Sätzen 2 und 3 in diesem Abschnitt nach wie vor richtig. Also gilt:

Bemerkung 1: Der Alexandersche Dualitätssatz zeigt, daß auf die Voraussetzungen (i) und (ii) in Definition 1 aus Abschnitt 2.1 für zulässige Mengen verzichtet werden kann. Insbesondere sind damit die Dimensionen von $Z(G)$ und $Z(\hat{G})$ von der Einbettung F des Henkelkörpers unabhängig; anschaulich: Die Henkel dürfen sich auch "untereinander verschlingen". \square

Fassen wir zusammen: Wir haben gesehen, daß es offenbar die erste Betti-Zahl ist, die beim Raum Neumannscher Felder die wesentliche topologische Größe des zugrundeliegenden Bereichs ist. Um diese Tatsache in den Griff zu bekommen, haben wir die Topologie zulässiger Mengen in Definition 1 aus Abschnitt 2.1 derart spezifiziert, daß die erste Betti-Zahl von G — und damit auch die von \hat{G} aufgrund der tiefliegenden Dualitätseigenschaft, durch die diese Größen nach dem Alexanderschen Dualitätssatz zusammenhängen — analytisch nutzbar gemacht werden konnte, und zwar mit Hilfe des Verschlingungsintegrals aus Kapitel 3. Als die zentrale Stelle, an der Topologie und Analysis sich schließlich für unsere Zwecke konstruktiv vereinigt haben, ist dann das gewissermaßen duale Paar der Sätze 2 aus Abschnitt 4.1 und 5 aus Abschnitt 4.3 zu sehen: Die (topologische) Dualität der Betti-Basen in Innenraum und Außenraum konnte mit Hilfe eines analytischen Hilfsmittels gleichsam quantifiziert werden.

Diese Beobachtung stellt den Ausgangspunkt für unsere folgenden Versuche dar, nun die erste Betti-Zahl im \mathbb{R}^3 analytisch zu charakterisieren: Präzisiert man die Idee, die topologisch-algebraische Dualität der Betti-Basen in \overline{G} und $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ durch ein analytisches Instrument zu erfassen, so kann das nur bedeuten, mit diesem Instrument einen Isomorphismus $B_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}) \cong \text{Hom}(B_1(\overline{G}), \mathbb{Z})$ bzw. dualisiert $B_1(\overline{G}) \cong \text{Hom}(B_1(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}), \mathbb{Z})$ zu konstruieren — nichts anderes war der algebraische Kern, der hinter dem Beweis über die Basis für den Raum Neumannscher Felder stand. Hierbei ist die Gruppe $B_1(\overline{G}) := H_1(\overline{G}) / \text{Tor}(H_1(\overline{G}))$ die sog. *erste Betti-Gruppe* von \overline{G} ; sie besteht aus allen eindimensionalen Homologieklassen, die unendliche Ordnung besitzen. Es ist klar, daß im analytischen Kontext allein diese Klassen interessieren, da aus der Folgerung aus Satz 1 in Abschnitt 3.2 sofort folgt, daß das Kurvenintegral von einer geschlossenen Pfaffschen Form über einem 1-Zyklus von endlicher Ordnung in der Homologie verschwindet.

Um also dieses Ziel zu erreichen, erscheint das Verschlingungsintegral nach wie vor das "richtige" analytische Bindeglied zu sein, insbesondere auch für eine größere Klasse von Grundbereichen. Dies hat übrigens schon Gauß geahnt; in seinem Fragment über das Verschlingungsintegral notierte er: "Eine Hauptaufgabe aus dem *Grenzgebiet der Geometria Situs und der Geometria Magnitudinis* wird die sein, die Umschlingungen zweier geschlossener oder unendlicher Linien zu zählen."¹ Wir werden daher im nächsten, abschließenden Kapitel einen dahingehenden Ausblick geben. Soll die vorgeschlagene analytische Charakterisierung wirklich Sinn machen,

¹ Gauß [11], "Zur mathematischen Theorie der elektrodynamischen Wirkungen" Nr. 4, S. 605.

so muß sie als erstes, gewissermaßen als Vorbedingung, die Konstruktion der gerade erwähnten Isomorphismen leisten — die aber nichts anderes als eine äquivalente Formulierung des Alexanderschen Dualitätssatzes für kompakte Mengen \bar{G} des \mathbb{R}^3 sind (vgl. Alexandroff/Hopf [2], S. 440–441). In Abschnitt 6.2 werden wir zeigen, daß das in der Tat der Fall ist. Dann ist klar, daß ein derartiges Resultat auf einen Schlag unsere topologischen Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 überflüssig machen würde. Auch das werden wir in Abschnitt 6.3 nachweisen können. Dies wird uns gleichzeitig die Möglichkeit eröffnen, die Klasse zulässiger Mengen, für die die Resultate dieses Abschnitts gelten, erheblich zu erweitern, womit wir diese Arbeit schließen werden.

6

Der allgemeine Fall

6.1 Ein Ansatz für eine analytische Charakterisierung der ersten Betti-Zahl

Nachdem wir im letzten Kapitel schließlich eingesehen haben, daß es die erste Betti-Zahl ist, die die Dimension des Raums Neumannscher Felder auf zulässigen Mengen und ihrem Außenraum bestimmt, liegt die Vermutung nahe, daß dieses Resultat im allgemeinen richtig ist für beliebige offene Teilmengen des \mathbb{R}^3 mit stetig gekrümmtem und geschlossenem Rand (wobei die Menge und ihr Rand wie üblich aus endlich vielen Wege-Komponenten bestehen sollen). Wir wollen in diesem Kapitel unter anderem eine Möglichkeit aufzeigen, um diese Aussage beweisen und folglich die topologischen Voraussetzungen an zulässige Mengen aus Abschnitt 2.1 fallenlassen zu können.

Wie wir schon in der Einleitung (Abschnitt 1.2) angemerkt und am Ende des vorangegangenen Kapitels schließlich näher ausgeführt haben, liegt der Schlüssel hierzu in einer analytischen Charakterisierung der ersten Betti-Zahl, die ja im Falle der nullten Betti-Zahl problemlos möglich war (vgl. Definition 2 aus Abschnitt 5.1). In diesem Abschnitt schlagen wir nun ein Lemma vor, das eine solche Charakterisierung im \mathbb{R}^3 leisten würde, was an den in den nächsten Abschnitten aufgezeigten Folgerungen sofort deutlich wird. Ferner stellen wir für dieses Lemma einen Beweisansatz vor.

Für einen solchen erweist es sich als nützlich, eine analytische Regularitätsaussage für Repräsentanten aus der ersten Homologiegruppe zur Verfügung zu haben. Konkret zeigen wir, daß man sich bei diesen auf Linearkombinationen von Jordankurven der Klasse C^∞ beschränken kann, die sogar regulär sind, d.h. nirgends verschwindende Tangente haben. Dies verschärft insbesondere das Ergebnis des Satzes 2.4.5 für die Homologiedimension 1 beträchtlich und ist insofern auch von allgemeinem Interesse.

Unabhängig von diesem Beweisansatz werden es unsere Resultate in diesem Kapitel jedoch erlauben, unsere Charakterisierung als definierende Eigenschaft einer erweiterten Klasse von Mengen zu verwenden, auf die die bisherigen Ergebnisse Anwendung finden. Daher werden wir in jedem Fall eine Verallgemeinerung unserer

Betrachtungen auf eine größere Klasse zulässiger Grundbereiche als bisher erreichen, was die Brückenfunktion unserer Charakterisierung zwischen Topologie und Analysis zusätzlich unterstreicht.

Wir leiten jedoch zunächst wie angekündigt das Resultat über die Repräsentierbarkeit von eindimensionalen Homologieklassen durch Linearkombinationen glatter regulärer Jordankurven her. Dies geschieht schrittweise, und wir beginnen wie folgt:

Hilfssatz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt: Jede Homologieklass aus $H_1(U)$ kann durch eine Linearkombination stückweise linearer geschlossener Wege repräsentiert werden, die also insbesondere stückweise regulär sind.

Beweis: Es genügt der Fall, daß der die Homologieklass repräsentierende Zyklus γ ein nicht-degenerierter 1-Würfel ist, also ein nichtkonstanter geschlossener Weg. Wir konstruieren im folgenden einen stückweise linearen geschlossenen Weg, der zu γ homotop ist. Weil aus der Definition der Homotopie von Wegen unmittelbar die Homologie dieser Wege (bezüglich kubischer singulärer Homologietheorie) folgt, ergibt das die Behauptung des Hilfssatzes.

Schritt 1: Wir behaupten die Gültigkeit der folgenden Produktdarstellung für alle Wege in U :

Es sei $\omega: I \rightarrow U$ ein Weg und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = 1$ eine beliebige Zerlegung des Einheitsintervalles. Für $i = 1, \dots, m$ bezeichne $\omega_i: I \rightarrow U$ den Weg $\omega_i(t) := \omega((1-t) \cdot t_{i-1} + t \cdot t_i)$. Dann gilt

$$[\omega] = [\omega_1] * [\omega_2] * \dots * [\omega_m],$$

wobei die Verknüpfung $*$ in naheliegender Weise auf die Menge aller Homotopieklassen von Wegen in U mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt (die nicht mehr notwendig übereinstimmen müssen) ausgeweitet wird. Für solche Klassen von Wegen ist dann der Produktweg in dem Fall definiert, daß der Endpunkt des ersten mit dem Anfangspunkt des zweiten Weges übereinstimmt.

Diese Behauptung folgt für $m = 2$ unmittelbar aus der Definition des Produktweges und der Tatsache, daß ein Umparametrisieren des Weges auf dem Einheitsintervall die Homotopieklass nicht ändert, wobei letzteres genauer meint: Ist $\omega: I \rightarrow U$ ein Weg und $\varphi: I \rightarrow I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, so gilt $\omega \circ \varphi \simeq \omega$ vermöge der Homotopie $H(s, t) = \omega((1-t)\varphi(s) + ts)$.

Der Fall eines beliebigen m ergibt sich dann durch Induktion, indem man einen weiteren Unterteilungspunkt in I hinzufügt und die gerade erwähnte Tatsache auf das verfeinerte Teilintervall erneut anwendet.

Schritt 2: Weil $\text{Sp } \gamma$ kompakt und ∂U abgeschlossen ist, ferner $\text{Sp } \gamma \cap \partial U = \emptyset$ gilt, ist $\text{dist}(\text{Sp } \gamma, \partial U) > 0$. Sei dann $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/2 \text{dist}(\text{Sp } \gamma, \partial U)$ gewählt. Wir betrachten die offene Überdeckung $\bigcup_{t \in [0,1]} B_\varepsilon(\gamma(t))$ von $\text{Sp } \gamma$, bestehend aus offenen Kugeln mit Radius ε und Mittelpunkt auf $\text{Sp } \gamma$. Dann sei $\lambda > 0$ die zu dieser Überdeckung des Kompaktums $\text{Sp } \gamma$ gehörende Lebesgue-Zahl.

Nun wählen wir $\delta > 0$ derart, daß für alle $t_1, t_2 \in I$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$ die Abschätzung $|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \lambda$ gilt. Bestimmen wir dann eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m-1} < t_m = 1$$

von I mit Feinheit $< \delta$, so gilt nach Schritt 1

$$[\gamma] = [\gamma_1] * [\gamma_2] * \cdots * [\gamma_m],$$

wobei die $\gamma_i: I \rightarrow U$ Wege mit $\text{Sp } \gamma_i = \text{Sp } \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]} \subset B_\varepsilon(\gamma(t))$ für ein geeignetes $t \in [t_{i-1}, t_i]$ sind.

Schritt 3: Nun betrachten wir für $i = 1, \dots, m$ die Streckenzüge

$$\tilde{\gamma}_i: I \rightarrow U, \quad t \mapsto (1-t)\gamma(t_{i-1}) + t\gamma(t_i).$$

Wegen der Konvexität von $B_\varepsilon(\gamma(t)) \supset \text{Sp } \gamma_i$ und $\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i) \in B_\varepsilon(\gamma(t))$ folgt auch $\text{Sp } \tilde{\gamma}_i \subset B_\varepsilon(\gamma(t))$. Dann ist $\gamma_i * \tilde{\gamma}_i^{-1}$ ein geschlossener Weg in $B_\varepsilon(\gamma(t))$ und daher wegen des einfachen Zusammenhangs der Kugel nullhomotop. Es folgt $[\gamma_i] \simeq [\tilde{\gamma}_i]$ für $i = 1, \dots, m$ und somit unter erneuter Anwendung von Schritt 1

$$[\gamma] = [\tilde{\gamma}_1] * [\tilde{\gamma}_2] * \cdots * [\tilde{\gamma}_m] = [\tilde{\gamma}],$$

wobei $\tilde{\gamma}: I \rightarrow U$ der stückweise lineare und geschlossene Weg mit den Knotenpunkten $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m) = \gamma(t_0)$ ist. \square

Wir nehmen nun an, daß die Menge U der Abschluß einer offenen Menge im \mathbb{R}^n ist und daß ferner ihr Rand eine orientierbare reguläre Hyperfläche im Sinne der Definition zu Beginn von § 6.2 in Gilbarg/Trudinger [13] darstellt. Sei dann γ wie im Beweis des Hilfssatzes gewählt. Falls $\text{Sp } \gamma \subset \overset{\circ}{U}$ ist, können wir den Hilfssatz sofort anwenden. Sei also $\text{Sp } \gamma \cap \partial U \neq \emptyset$. Es bezeichne $n: \partial U \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld bezüglich U . Mit einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ verschieben wir dann jeden Punkt $\xi \in \partial U$ um den Vektor $-\varepsilon n(\xi)$ in den Punkt $\xi - \varepsilon n(\xi) \in \overset{\circ}{U}$ und bezeichnen mit $\partial U_{-\varepsilon}$ den derartig verschobenen Rand (hierbei dürfte ε sogar stetig mit ξ variieren, ohne unsere Argumentation zu beeinträchtigen). Nun projizieren wir den Teil von $\text{Sp } \gamma$, der in dem abgeschlossenen ε -Streifen zwischen ∂U und $\partial U_{-\varepsilon}$ verläuft, in negativer Normalenrichtung auf $\partial U_{-\varepsilon}$, was klarerweise eine Homotopie in U definiert. Somit haben wir einen zu γ homotopen Weg erhalten, dessen Spur ganz in $\overset{\circ}{U}$ liegt. Auf diesen können wir nun den gerade bewiesenen Hilfssatz anwenden und haben damit gezeigt:

Zusatz zu Hilfssatz 1: Die Aussage von Hilfssatz 1 gilt auch für den Abschluß offener Mengen, deren Rand eine orientierbare reguläre Hyperfläche bildet. Dabei liegt die Spur des stückweise linearen Weges in jedem Fall im Inneren der Menge. \square

Auf der Grundlage von Hilfssatz 1 können wir sogar auf elementare Weise eine weitere Verschärfung bezüglich der Eigenschaften des Weges erreichen, der eine beliebige Homologieklassse aus $H_1(U)$ repräsentiert:

Hilfssatz 2: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen oder Abschluß einer offenen Menge, deren Rand eine orientierbare reguläre Hyperfläche ist. Dann kann jede Homologieklassse aus $H_1(U)$ durch eine Linearkombination stückweise linearer Jordankurven repräsentiert werden, deren Spuren im Inneren von U liegen. \square

Beweis: Wir dürfen von einem stückweise linearen geschlossenen Weg $\tilde{\gamma}$ ausgehen, der nach der Konstruktion im Beweis des Hilfssatzes 1 das Produkt endlich vieler Streckensegmente ist, deren Spuren im Inneren von U liegen. Falls $\tilde{\gamma}$ nicht injektiv ist, sind zwei Fälle möglich: Entweder entstehen die Doppelpunkte dadurch, daß sich je zwei verschiedene solcher Segmente in höchstens einem Punkt schneiden, oder es gibt eine Produktdarstellung von $\tilde{\gamma}$ wie in Schritt 1 vom Beweis des Hilfssatzes 1 mit Paaren von "Faktoren" $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$ und $i \neq j$, so daß $\text{Sp } \tilde{\gamma}_i = \text{Sp } \tilde{\gamma}_j$ ist.

Zunächst zum zweiten Fall: Ist i der kleinere Index im Paar $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$, so wählen wir ε so klein (etwa wie im vorangehenden Beweis), daß der abgeschlossene ε -Zylinder mit Mittellinie $\text{Sp } \tilde{\gamma}_i$ ganz im Inneren von U liegt. Dann wählen wir einen Punkt auf dessen Mantelfläche, so daß die Streckensegmente von $\tilde{\gamma}_i(0)$ bzw. $\tilde{\gamma}_i(1)$ zu diesem Punkt $\text{Sp } \tilde{\gamma}$ höchstens in isolierten Punkten schneiden. Dies ist immer möglich, wenn z.B. nur der Radius ε des Zylinders klein genug gewählt wird. Offenbar sind Zylinder einfach zusammenhängend, so daß sich wie im vorangehenden Beweis ergibt, daß der "Faktor" $[\tilde{\gamma}_i]$ aus der Produktdarstellung von $[\tilde{\gamma}]$ zum Produkt der Streckensegmente homotop ist. Verfahren wir mit jedem solchen Paar derart, haben wir einen homotopen Weg wie im ersten Fall erhalten.

In diesem Fall ist $\tilde{\gamma}$ in höchstens endlich vielen Punkten nicht injektiv, wobei die Doppelpunkte Schnittpunkte gewisser Streckensegmente aus der Produktdarstellung des Weges sind. Um jeden solchen Schnittpunkt p zweier Streckensegmente $\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_j$ ($i \neq j$) legen wir eine offene Kugel $B_\varepsilon(p)$, deren Abschluß ganz in $\overset{\circ}{U}$ enthalten ist und in der p der einzige Doppelpunkt von $\tilde{\gamma}$ ist. Sei $\tilde{\gamma}_i$ das beteiligte Streckensegment mit dem kleineren Index; $\tilde{\gamma}_i(t_1), \tilde{\gamma}_i(t_2)$ bezeichnen die Schnittpunkte von $\text{Sp } \tilde{\gamma}_i$ mit $\partial B_\varepsilon(p)$. Dann gibt es einen Punkt auf $\partial B_\varepsilon(p)$, so daß die beiden Streckensegmente von $\tilde{\gamma}_i(t_1)$ und $\tilde{\gamma}_i(t_2)$ zu diesem Punkt $\text{Sp } \tilde{\gamma}_j$ nicht schneiden; das Produkt dieser beiden Streckensegmente ist zum Weg $\tilde{\gamma}_i^*$ mit $\tilde{\gamma}_i^*(t) := \tilde{\gamma}_i((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2)$ (für den also $\text{Sp } \tilde{\gamma}_i^* = \text{Sp } \tilde{\gamma}_i|_{[t_1, t_2]}$ ist) homotop. Indem wir Schritt 1 aus dem Beweis von Hilfssatz 1 anwenden und hierbei $\tilde{\gamma}_i$ über $\tilde{\gamma}_i^*$ faktorisieren, erhalten wir in derselben Homotopieklasse einen Weg, in der p einfacher Punkt ist.

Nun können wir mit jedem der endlich vielen doppelten Punkte derart verfahren und erhalten so eine homotope stückweise lineare Jordankurve. \square

Dieses Resultat läßt sich schließlich in der folgenden Weise verbessern, was das angekündigte Ergebnis liefert:

Satz 1: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen oder der Abschluß einer offenen Menge, so daß ∂U eine orientierbare reguläre Hyperfläche bildet. Dann besitzt jede Homologieklassse aus der Gruppe $H_1(U)$ eine Linearkombination regulärer Jordankurven der Klasse C^∞ als Repräsentanten, deren Spuren im Inneren von U liegen.

Beweis: Wir wählen einen Repräsentanten der Homologiekategorie aus $H_1(U)$ wie in Hilfssatz 2 und brauchen uns nur auf einen Summanden γ , eine stückweise lineare Jordankurve mit der Spur im Inneren von U , zu beschränken. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/2 \operatorname{dist}(\operatorname{Sp} \gamma, \partial U)$. Wir wollen γ mit Hilfe eines Glättungskerns glätten und zeigen, daß die geglättete Kurve sowohl injektiv bleibt als auch keine Nullstellen des Tangentenvektors hinzukommen. Dazu sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{Supp} \varphi = [-1, 1]$, $\varphi > 0$ auf $] -1, 1[$ und $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) dt = 1$. Für γ wählen wir eine Produktdarstellung wie in Schritt 1 des Beweises von Hilfssatz 1, bei der sich jeweils drei aufeinanderfolgende Knotenpunkte $x_i := \gamma(t_i)$ von $\operatorname{Sp} \gamma$ in allgemeiner Lage befinden, d.h. $x_{i-1} - x_i$ und $x_{i+1} - x_i$ jeweils linear unabhängig sind. (Diese Forderung besagt, daß jeder Faktor in der Produktdarstellung von γ ein maximales lineares Streckensegment repräsentiert.) Zur Vereinfachung der Notation parametrisieren wir γ ausnahmsweise auf einem Intervall I der Länge m , wenn m die Zahl der Streckensegmente von γ angibt. Dabei sei für $1 \leq i \leq m$ jeweils $t_i - t_{i-1} = 1$ und

$$\gamma_i(t) := \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}(t) = (t_i - t)x_{i-1} + (t - t_{i-1})x_i, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Um γ über die gesamte reelle Zahlenlinie integrieren zu können, betrachten wir die Komposition $\gamma \circ \nu$ mit $\nu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/I$, die wir zur Vereinfachung der Notation wieder mit γ bezeichnen. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &:= \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{t-\tau}{\rho}\right) \gamma(\tau) d\tau \\ &= \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \gamma(t - \rho\tau) d\tau, \end{aligned}$$

wobei $1 \gg \rho > 0$ so bestimmt ist, daß $\|\tilde{\gamma} - \gamma\|_{C^0(I)} < \varepsilon$ (hier wird die gleichmäßige Stetigkeit von γ auf $[t_0 - \rho, t_m + \rho]$ benutzt). Offenbar gilt $\tilde{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R})$, was man aus der oberen Zeile in der Definition von $\tilde{\gamma}$ abliest. Ferner ist $\gamma \simeq \tilde{\gamma}$ vermöge der Homotopie $H(s, t) := (1-t)\gamma(s) + t\tilde{\gamma}(s)$. Es bleibt somit zu zeigen, daß $\tilde{\gamma}$ injektiv und regulär ist. Dazu betrachten wir das Intervall $I_i := [t_{i-1}, t_i]$.

1. Fall: Wir betrachten $t \in [t_{i-1}, t_i]$ mit $\operatorname{dist}(t, \partial I_i) \geq \rho$. Für solche t ist noch $[t - \rho, t + \rho] \subset I_i$ und daher $\gamma(t - \rho\tau) = \gamma_i(t - \rho\tau)$ für alle $\tau \in [-1, 1]$. Es folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= x_{i-1} \cdot \underbrace{\int_{-1}^1 \varphi(\tau)(t_i - t + \rho\tau) d\tau}_{=: \eta_{i-1}(t)} + x_i \cdot \underbrace{\int_{-1}^1 \varphi(\tau)(t - \rho\tau - t_{i-1}) d\tau}_{=: \eta_i(t)} \\ &= \eta_{i-1}(t)x_{i-1} + \eta_i(t)x_i. \end{aligned}$$

Offenbar gilt dabei $\eta_{i-1}(t) + \eta_i(t) \equiv 1$ und $\tilde{\gamma}'(t) = \eta'_{i-1}(t) + \eta'_i(t) \equiv x_i - x_{i-1}$, d.h., $\tilde{\gamma}(t)$ ist Konvexkombination von x_{i-1} und x_i mit konstanter nichtverschwindender Ableitung. Dies zeigt die gewünschte Eigenschaft von $\tilde{\gamma}$ auf allen Intervallen der Form $[t_{i-1} + \rho, t_i - \rho]$.

2. Fall: Nun sei $t \in [t_{i-1}, t_i]$ mit $\text{dist}(t, \partial I_i) < \rho$, wobei t ohne Einschränkung im Intervall $]t_i - \rho, t_i + \rho[$ liege. In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= \int_{-1}^{\frac{t-t_i}{\rho}} \varphi(\tau) \gamma_{i+1}(t - \rho\tau) d\tau + \int_{\frac{t-t_i}{\rho}}^1 \varphi(\tau) \gamma_i(t - \rho\tau) d\tau \\ &= x_{i-1} \cdot \underbrace{\int_{\frac{t-t_i}{\rho}}^1 \varphi(\tau)(t_i - t + \rho\tau) d\tau}_{=: \eta_{i-1}(t)} + x_{i+1} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{\frac{t-t_i}{\rho}} \varphi(\tau)(t - \rho\tau - t_i) d\tau}_{=: \eta_{i+1}(t)} \\ &\quad + x_i \cdot \underbrace{\left(\int_{-1}^{\frac{t-t_i}{\rho}} \varphi(\tau)(t_{i+1} - t + \rho\tau) d\tau + \int_{\frac{t-t_i}{\rho}}^1 \varphi(\tau)(t - \rho\tau - t_{i-1}) d\tau \right)}_{=: \eta_i(t)} \\ &= \eta_{i-1}(t)x_{i-1} + \eta_i(t)x_i + \eta_{i+1}(t)x_{i+1}. \end{aligned}$$

Also gilt in diesem Fall analog $\eta_{i-1}(t) + \eta_i(t) + \eta_{i+1}(t) \equiv 1$, und $\tilde{\gamma}(t)$ ist Konvexkombination der Punkte x_{i-1} , x_i und x_{i+1} . Da sich diese Punkte in allgemeiner Lage zueinander befinden, ist jede solche Konvexkombination eindeutig durch ihre Koeffizienten bestimmt, und folglich ist $\tilde{\gamma}$ auf $]t_i - \rho, t_i + \rho[$ injektiv genau dann, wenn mindestens eine der Koeffizientenfunktionen dies ist. Dies zeigt aber die nachfolgende Rechnung. Für diese verwenden wir die folgende Beziehung, die für eine stetige, stetig partiell nach x differenzierbare Funktion f sowie stetig differenzierbare Funktionen a, b gelten und die man ohne Mühe verifiziert:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = b'(x)f(x, b(x)) - a'(x)f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \eta'_i(t) &= \int_{\frac{t-t_i}{\rho}}^1 \varphi(\tau) d\tau - \int_{-1}^{\frac{t-t_i}{\rho}} \varphi(\tau) d\tau, \\ \eta'_{i-1}(t) &= - \int_{\frac{t-t_i}{\rho}}^1 \varphi(\tau) d\tau \quad \text{und} \quad \eta'_{i+1}(t) = \int_{-1}^{\frac{t-t_i}{\rho}} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Also ist $\eta'_{i-1} < 0$ bzw. $\eta'_{i+1} > 0$ auf $]t_i - \rho, t_i + \rho[$, d.h. diese Funktionen sind insbesondere injektiv und somit auch $\tilde{\gamma}$. Schließlich zeigt unsere Rechnung auch $\eta'_{i-1} + \eta'_{i+1} = -\eta'_i$ und folglich

$$\tilde{\gamma}'(t) = \eta'_{i-1}(t)(x_{i-1} - x_i) + \eta'_{i+1}(t)(x_{i+1} - x_i),$$

so daß $\tilde{\gamma}' \neq 0$ ist, weil die Koeffizientenfunktionen nie verschwinden und sich die Knotenpunkte in allgemeiner Lage zueinander befinden. \square

Wir formulieren nun wie angekündigt eine mögliche analytische Charakterisierung der ersten Betti-Zahl im \mathbb{R}^3 . Auch hierbei spielt das Verschlingungsintegral eine zentrale Rolle. Zuvor führen wir noch eine Notation ein, die wir am Ende von Abschnitt 5.2 schon einmal kurz erwähnt haben: Der freie Anteil

$$B_k(G) := H_k(G) / \text{Tor}(H_k(G))$$

der k -ten Homologiegruppe von G heißt auch k -dimensionale Betti-Gruppe von G ; falls $H_k(G)$ endlich erzeugt ist, gilt also $p_k(G) = \text{Rang}(B_k(G))$. Die von uns vorgeschlagene Charakterisierung lautet dann:

Satz 2 (“Verschlingungs-Lemma”): *Es sei G eine offene oder der Abschluß einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^3 mit einer orientierbaren regulären Hyperfläche als Rand und $\{\gamma\} \in B_1(G)$. Falls $\{\gamma\} \neq 0$ ist, d.h. der Zyklus γ in G nicht berandet, so gibt es eine Homologieklassse $\{\hat{\gamma}\} \in B_1(\mathbb{R}^3 \setminus G)$ mit*

$$\langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle = \int_{\gamma} \omega(\hat{\gamma}) \neq 0.$$

Wir sagen dann auch, der Zyklus γ sei mit $\hat{\gamma}$ (echt) verschlungen.

Zu diesem Satz sind einige Bemerkungen angebracht:

Bemerkung 1:

- (i) *Es spielt keine Rolle, ob G beschränkt oder unbeschränkt ist. Daher ist das Verschlingungs-Lemma symmetrisch bezüglich der Rollen von G und $\mathbb{R}^3 \setminus G$.*
- (ii) *Wegen der Sätze 2 aus Abschnitt 4.1 und 5 aus Abschnitt 4.3 ist das Verschlingungs-Lemma offenbar erfüllt für zulässige Mengen G gemäß Abschnitt 2.1 und deren Außenraum \hat{G} .*

Wegen Teil (ii) der vorangehenden Bemerkung ist das Verschlingungs-Lemma offenbar die entscheidende Verallgemeinerung unserer vorherigen Betrachtungen aus den Kapiteln 3 bis 5. Genauer: Den Gegenstand dieser vorhergehenden Kapitel bildeten zulässige Mengen gemäß Abschnitt 2.1, deren Topologie mit Hilfe der Verschlingungsform analytisch zugänglich wurde. Das Verschlingungs-Lemma ermöglicht nun eine Abschwächung der topologischen Voraussetzungen an die betrachteten Mengen in dem folgenden Sinne: Die Mengen haben “lediglich” die im Verschlingungs-Lemma genannte Eigenschaft aufzuweisen; daneben sind dann nur noch die analytischen “Standard-Voraussetzungen” zu erfüllen, wie wir sie zu Beginn von Abschnitt 3 noch einmal bringen. Es beinhaltet somit die relevante analytische Information, die die erste Betti-Zahl trägt, was anhand der Aussagen in den Abschnitten 2 und 3 sofort deutlich wird. *Unabhängig* von einem Beweis des Verschlingungs-Lemmas gelten diese Aussagen also insbesondere für alle Mengen, die die im Verschlingungs-Lemma beschriebene Eigenschaft erfüllen; wegen Teil (ii) der vorangehenden Bemerkung sind dies insbesondere unsere vorher betrachteten zulässigen Mengen. Vor diesem Hintergrund, auf den wir auch am Ende von Abschnitt 3 noch einmal hinweisen, sind die nachfolgenden Betrachtungen also in jedem Fall von einem allgemeineren Interesse.

Ferner sehen wir nun auch, in welcher Weise das Verschlingungs-Lemma den von uns angekündigten "Brückenschlag" zwischen Topologie und Analysis leistet: Stellen wir uns unsere Situation bildhaft vor, so haben wir bis zu diesem Zeitpunkt auf zwei durch einen Fluß getrennten "Ufern" gearbeitet, die im Prinzip nichts miteinander zu tun hatten. Das eine Ufer bildeten die analytischen Voraussetzungen an zulässige Mengen, das andere die eingangs vielleicht unmotiviert wirkenden topologischen Voraussetzungen, und zwischen beiden Ufern verlief mit der Verschlingungs-Form aus Kapitel 3 lediglich eine kleine "Hängebrücke". Diese Hängebrücke wird nun durch das Verschlingungs-Lemma ersetzt, das sich als eine so feste Brücke erweist, daß es nicht mehr lohnt, den trennenden Fluß zu überqueren: Die Topologie kommt von selbst an das analytische Ufer, das nach wie vor von den analytischen Standard-Voraussetzungen an die betrachteten Mengen gebildet wird.

Nach diesen hoffentlich nicht zu bildhaften Ausführungen schließen wir den Abschnitt mit einer Skizze möglicher Beweisansätze für das Verschlingungs-Lemma in der in Satz 2 beschriebenen Form. Auf der Grundlage der vorangehenden Untersuchungen bietet sich die folgende Beweisidee an: Wir können γ als glatte und reguläre Jordankurve im Inneren von G voraussetzen. Sei dann B eine beliebige konvexe Menge, die $\text{Sp } \gamma$ enthält. Da B einfach zusammenhängend ist, folgt insbesondere $H_1(B) = \{0\}$. In B berandet γ also, d.h. es gibt einen (ohne Einschränkung differenzierbaren) 2-Würfel $\Gamma: I \times I \rightarrow B$ mit $\partial\Gamma = \gamma$. Dabei muß $\text{Sp } \Gamma \cap (\mathbb{R}^3 \setminus G) \neq \emptyset$ gelten, denn andernfalls wäre γ schon in G ein Rand. Konstruiere dann aus der Kenntnis eines Punktes $p \in \text{Sp } \Gamma \cap (\mathbb{R}^3 \setminus G)$ im Komplement von G einen geschlossenen Weg, der den Voraussetzungen von Hilfssatz 3 in Abschnitt 3.2 genügt.

Das Problem hierbei ist, daß der 2-Würfel Γ im allgemeinen nicht regulär ist, insbesondere also kein Hyperflächenstück zu sein braucht. Daher ist zunächst zu jeder glatten Jordankurve (an dieser Stelle nutzen wir unser Regularitätsresultat aus Satz 1 aus) ein Hyperflächenstück zu finden, das von dieser Kurve berandet wird. Hierfür könnte man z.B. die Theorie von Minimalflächen heranziehen, auch wenn die dort bewiesenen Aussagen aufgrund der Minimalitätseigenschaften der Krümmung für unsere Bedürfnisse viel zu stark sind. Trotzdem zitieren wir in unserem Kontext das folgende tiefliegende Resultat von Hardt und Simon [14]:

Satz (Hardt-Simon, 1979): *Jede geschlossene Jordankurve der Klasse $C^{1,\alpha}$ berandet mindestens eine eingebettete orientierbare Minimalfläche.* \square

Ist $\Gamma: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung dieser Minimalfläche, gilt somit $\partial\Gamma = \gamma$, und wir finden ein $p \in \text{Sp } \Gamma \cap (\mathbb{R}^3 \setminus G)$ und weiter wegen des Wegzusammenhangs des Komplements einen geschlossenen Weg durch p in $\mathbb{R}^3 \setminus G$, der $\text{Sp } \Gamma$ mindestens einmal durchdringt. Das Problem, das nun bleibt, ist jedoch, auszuschließen, daß dieser Weg das Hyperflächenstück noch weitere Male schneidet; gegebenenfalls ist zu einem geeigneten anderen Weg innerhalb derselben Homologiekategorie überzugehen. Sonst könnten sich nämlich bei ungünstiger Orientierung des Weges die zugehörigen Beiträge unter dem Verschlingungsintegral zu Null addieren. Auf dieses Problem ist schon Maxwell 1873 aufmerksam geworden; siehe hierzu Epple [7], dort insbesondere Figur 1.

Wegen dieser sich andeutenden technischen Probleme erscheint eine Anwendung des Satzes von Hardt–Simon nicht mehr gerechtfertigt, und es ist ein elementarer Beweis zu bevorzugen. Ein möglicher Ansatzpunkt könnte die Verwendung der Projektionsdarstellung aus der Knotentheorie (vgl. Abschnitt 4.2) für $\text{Sp } \gamma$ sein und damit eine Darstellung als Graph über einer geeigneten Ebene, so daß man eine “scheibenähnliche” einspannende Hyperfläche erhält. Einen entsprechenden Beweis, der mit den in Abschnitt 4.2 vorgestellten Methoden arbeitet, konnten wir jedoch bisher nicht finden. Wir belassen ihn daher als offenes Problem und verweisen noch einmal auf die Erörterungen im Anschluß an Bemerkung 1 in diesem Abschnitt sowie am Ende der Arbeit in Abschnitt 3.

6.2 Erste Konsequenz: Ein analytischer Beweis für die Isomorphie der ersten Betti-Gruppen von G und \widehat{G}

In den letzten beiden Abschnitten dieser Arbeit möchten wir näher ausführen, wieso das Verschlingungs-Lemma eine analytische Charakterisierung der ersten Betti-Zahl im \mathbb{R}^3 leisten würde. Zu diesem Zweck nehmen wir einen axiomatischen Standpunkt ein und setzen es als wahr voraus. Wir werden sehen, daß sich mit dessen Hilfe dann zwei Aussagen beweisen lassen, in denen die erste Betti-Zahl die zentrale beteiligte Größe ist.

Das erste Beispiel, das wir hierzu bringen, ist der Beweis der Dualitätsaussage aus dem Alexanderschen Dualitätssatz für die erste Betti-Zahl, und zwar für den Abschluß beschränkter offener Teilmengen des \mathbb{R}^3 mit dem üblichen Rand. Genauer zeigen wir die Isomorphie der ersten Betti-Gruppen einer solchen Menge G und ihres Komplements, was die Gleichheit der ersten Betti-Zahlen sofort impliziert (auf diese Weise wurde der Alexandersche Dualitätssatz auch in Alexandroff/Hopf [2] formuliert und bewiesen; vgl. S. 440 ff. loc.cit.). Insbesondere ergibt sich, daß das unbeschränkte offene Komplement eine endliche erste Betti-Zahl hat. Daß dies für die Menge G richtig ist, haben wir schon unter Punkt (ii) von Bemerkung 2.4.1 angemerkt, denn aufgrund unserer Voraussetzung ist G kompakte dreidimensionale (berandete) Mannigfaltigkeit. Nach Dold [6], § IV.8 und Proposition V.4.11 gilt dann das folgende, der algebraischen Topologie entnommene Resultat:

Hilfssatz 3: *Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit, so sind die Homologiegruppen $H_k(M)$ für alle k endlich erzeugt.* □

Wegen unserer Fixierung auf analytische Anwendungen haben wir den Beweis übergangen, auch wenn er nicht schwer ist, insbesondere nicht in der Situation, daß M als Untermannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^n eingebettet ist (vgl. Prop. IV.8.12 in Dold loc.cit.). Eine solche Situation liegt aber bei G gerade vor. In dem zusätzlichen, hier vorausgesetzten Falle, daß $G \subset \mathbb{R}^3$ einen orientierbaren Rand und folglich ein äußeres Einheits-Normalenvektorfeld besitzt, ist die benötigte Aussage, daß G ein sog. “Euklidischer Nachbarschaftsretrakt” ist, sogar trivial, so daß in den uns interessierenden Situationen dieser Hilfssatz so gut wie keine Beweislast beansprucht.

Mit diesem Ergebnis und dem Verschlingungs-Lemma folgt nun leicht die angekündigte Aussage:

Satz 3: Sei G der Abschluß einer beschränkten offenen Menge des \mathbb{R}^3 mit dem Komplement $\hat{G} := \mathbb{R}^3 \setminus G$, wobei ∂G wie in Satz 2 sei. Dann gilt $p_1(G) < \infty$, und es ist

$$B_1(G) \cong B_1(\hat{G}).$$

Insbesondere gilt also $p_1(G) = p_1(\hat{G})$.

Beweis: Wegen des vorangehenden Hilfssatzes ist $B_1(G)$ freie abelsche Gruppe endlichen Ranges $n := p_1(G)$. Insbesondere gilt also $B_1(G) \cong \text{Hom}(B_1(G), \mathbb{Z})$. Wir betrachten nun den Gruppenhomomorphismus

$$B_1(\hat{G}) \longrightarrow \text{Hom}(B_1(G), \mathbb{Z}), \quad \{\hat{\gamma}\} \longmapsto \left(\{\gamma\} \mapsto \langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle \right).$$

Dieser ist nach dem Verschlingungs-Lemma injektiv (man beachte, daß das Verschlingungsintegral auf Zyklen von endlicher Ordnung in der Homologie offenbar verschwindet und somit das betreffende Element aus dem Verschlingungs-Lemma aus der ersten Betti-Gruppe von G stammen muß). Hilfssatz 2.2.2 a) zeigt folglich $p_1(\hat{G}) \leq n$, und es gilt daher auch $B_1(\hat{G}) \cong \text{Hom}(B_1(\hat{G}), \mathbb{Z})$. Indem wir nun die Rollen von G und \hat{G} in dem obigen Homomorphismus vertauschen, erhalten wir analog $n \leq p_1(\hat{G})$, und damit folgt die Behauptung. \square

6.3 Zweite Konsequenz: Der Raum Neumannscher Felder im allgemeinen Fall

Die vielleicht interessanteste Folgerung aus dem Verschlingungs-Lemma ist jedoch die Aussage über die Dimension und Struktur des Raums Neumannscher Felder in einer solchen Klasse von Mengen, die in jeder Hinsicht von einer für analytische Anwendungen hinreichenden Allgemeinheit sind. Genauer betrachten wir in diesem Abschnitt dieselben Mengen wie in Abschnitt 5.1, also beschränkte offene Teilmengen G des \mathbb{R}^3 mit endlich vielen Wege-Komponenten und mit stetig gekrümmtem, orientierbarem und geschlossenem Rand, der ebenfalls aus endlich vielen Wege-Komponenten bestehe; wir lassen also alle topologischen Voraussetzungen aus Abschnitt 2.1 fallen. Dann können wir mit dem Verschlingungs-Lemma die folgende befriedigende Aussage zeigen, die wir als abschließenden Beleg für dessen Geeignetheit als Brücke zwischen Topologie und Analysis anführen:

Satz 4: Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ wie gerade erklärt. Dann ist der Raum $Z(G)$ der Neumannschen Felder auf G ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum von der Dimension $p_1(\bar{G})$, und der Raum $Z(\hat{G})$ der Neumannschen Felder auf \hat{G} ist endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $p_1(\hat{G})$.

Beweis: Nach Satz 3 aus dem vorigen Abschnitt gilt $g := p_1(\bar{G}) = p_1(\hat{G}) < \infty$. Wir bemerken erneut, daß es im Zusammenhang mit Kurvenintegralen geschlossener

1-Formen genügt, sich auf Elemente aus den ersten Betti-Gruppen zu beschränken, da offenbar deren Integral über eine Homologiekategorie endlicher Ordnung verschwindet. Wir beginnen jetzt wieder mit dem Fall $g = 0$. Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg β in G ist dann nullhomolog in \overline{G} , und die Homologie-Invarianz des Kurvenintegrals nach der Folgerung aus Satz 1 in Abschnitt 3.1 zeigt $\int_{\beta} z \cdot d\vec{s} = 0$ für jedes Neumann-Feld $z \in Z(G)$. Wie am Ende des Beweises von Satz 2 in Abschnitt 5.2 ergibt sich dann $z = 0$ in \overline{G} .

Ist nun $g \geq 1$, so sei $\{\{\hat{\gamma}_1\}, \{\hat{\gamma}_2\}, \dots, \{\hat{\gamma}_g\}\}$ eine (auf der Grundlage von Satz 1 in Abschnitt 6.1 hinreichend reguläre) Betti-Basis von $H_1(\hat{G})$ mit den Vektorfeldern v_i wie im Beweis von Satz 2 in Abschnitt 5.2. Analog zu unserem dortigen Vorgehen erhalten wir g Neumann-Felder $z_1, z_2, \dots, z_g \in Z(G)$. Um zu zeigen, daß sie linear unabhängig sind, betrachten wir mit reellen Koeffizienten α_j den Ansatz

$$\sum_{j=1}^g \alpha_j (z_j \cdot d\vec{s}) = 0.$$

Wir wählen eine (wiederum genügend reguläre) Betti-Basis $\{\{\gamma_1\}, \{\gamma_2\}, \dots, \{\gamma_g\}\}$ von $H_1(\overline{G})$ und integrieren die vorangehende Gleichung über die γ_i (die ja Linearkombinationen geschlossener Wege in G sind) für $1 \leq i \leq g$. Dies führt wegen der Beziehung (1) aus dem Beweis von Satz 2 in Abschnitt 5.2 auf das lineare Gleichungssystem

$$(*) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \langle\langle \{\gamma_1\}, \{\hat{\gamma}_1\} \rangle\rangle & \langle\langle \{\gamma_1\}, \{\hat{\gamma}_2\} \rangle\rangle & \cdots & \langle\langle \{\gamma_1\}, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle\rangle \\ \langle\langle \{\gamma_2\}, \{\hat{\gamma}_1\} \rangle\rangle & \langle\langle \{\gamma_2\}, \{\hat{\gamma}_2\} \rangle\rangle & \cdots & \langle\langle \{\gamma_2\}, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle\langle \{\gamma_g\}, \{\hat{\gamma}_1\} \rangle\rangle & \langle\langle \{\gamma_g\}, \{\hat{\gamma}_2\} \rangle\rangle & \cdots & \langle\langle \{\gamma_g\}, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle\rangle \end{pmatrix}}_{=: S} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = 0$$

mit einer Matrix $S \in \mathbb{Z}^{g \times g}$. Wir zeigen nun, daß S sogar in $GL(g, \mathbb{Z})$ liegt. Dazu betrachten wir wieder den Homomorphismus

$$B_1(\hat{G}) \longrightarrow \text{Hom}(B_1(G), \mathbb{Z}), \quad \{\hat{\gamma}\} \longmapsto \left(\{\gamma\} \mapsto \langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle \right)$$

aus dem Beweis von Satz 3, der nach dem Verschlingungs-Lemma injektiv ist. Wegen $\text{Rang}(B_1(\hat{G})) = \text{Rang}(B_1(G))$ und $B_1(G) \cong \text{Hom}(B_1(G), \mathbb{Z})$ folgt nach Hilfsatz 2.2.2 b), daß er sogar ein Isomorphismus ist. Insbesondere sind die Homomorphismen $\langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle$ eine Basis der freien abelschen Gruppe $\text{Hom}(B_1(G), \mathbb{Z})$. Eine solche bilden jedoch auch die Abbildungen $\lambda_i: B_1(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\lambda_i(\{\gamma_j\}) = \delta_{i,j}$, d.h., es gibt ganze Zahlen $n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \dots, n_g^{(j)}$ mit $\langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle = \sum_{k=1}^g n_k^{(j)} \cdot \lambda_k$. Einsetzen von $\{\gamma_i\}$ zeigt $n_i^{(j)} = \langle\langle \{\gamma_i\}, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle$, so daß gilt:

$$\begin{pmatrix} \langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_1\} \rangle\rangle \\ \vdots \\ \langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle\rangle \end{pmatrix} = S^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_g \end{pmatrix}.$$

Andererseits lassen sich auch die λ_i als \mathbb{Z} -Linearkombinationen der $\langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_j\} \rangle\rangle$ darstellen, d.h., es gibt eine Matrix $T \in \mathbb{Z}^{g \times g}$ mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_g \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_1\} \rangle\rangle \\ \vdots \\ \langle\langle \cdot, \{\hat{\gamma}_g\} \rangle\rangle \end{pmatrix}.$$

Zusammen folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_g \end{pmatrix} = T S^t \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_g \end{pmatrix};$$

die Eindeutigkeit der Basisdarstellung in einer freien abelschen Gruppe (vgl. Definition 2.2.2 (ii)) liefert $I = T S^t$, wobei I die $(g \times g)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Mit der Multiplikativität der Determinante erhalten wir schließlich $1 = \det(T) \det(S^t)$; also ist $\det(S) = \det(S^t) \in \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$, und es gilt in der Tat $S \in \text{GL}(g, \mathbb{Z})$. Wir können also die Gleichung (*) mit S^{-1} durchmultiplizieren und erhalten, daß alle α_j verschwinden und die z_j somit linear unabhängig sind.

Um schließlich zu zeigen, daß die z_i auch in dieser Situation den Raum $Z(G)$ erzeugen, definieren wir zu einem beliebigen Neumann-Feld $z \in Z(G)$ die Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} z \cdot d\vec{s} \\ \vdots \\ \int_{\gamma_g} z \cdot d\vec{s} \end{pmatrix}$$

und betrachten hierzu wie im Beweis von Satz 2 in Abschnitt 5.2 das Neumann-Feld

$$v := z - \sum_{i=1}^g \alpha_i z_i.$$

Nach Konstruktion gilt dann auch in unserem Fall

$$\int_{\gamma_i} v \cdot d\vec{s} = 0$$

für alle $1 \leq i \leq g$, und der Rest des Beweises aus Abschnitt 5.2 kann wortwörtlich übernommen werden und vollendet den Basisbeweis für den Innenraum G .

Bezüglich des Außenraums können wir ebenfalls die dem Satz 3 aus Abschnitt 5.2 vorangehende Argumentation wörtlich übertragen und brauchen hierzu lediglich darauf hinzuweisen, daß das Verschlingungs-Lemma symmetrisch bezüglich der Rollen von G und \hat{G} ist (siehe Teil (i) der Bemerkung 1 am Ende von Abschnitt 1). Damit ist dann alles gezeigt. \square

Es bleibt somit die Aufgabe gestellt, einen Beweis für das Verschlingungs-Lemma zu finden. Unabhängig davon kann jedoch auch der folgende Standpunkt eingenommen

werden, mit dem wir die Überlegungen im Anschluß an Bemerkung 1 aus Abschnitt 1 aufgreifen:

Die Topologie der betrachteten Mengen ging in dem vorangehenden Beweis ausschließlich in Form des Verschlingungs-Lemmas ein. Wir sind gemäß der Formulierung von Satz 2 in Abschnitt 1 davon ausgegangen, daß es von allen offenen Mengen oder dem Abschluß offener Mengen im \mathbb{R}^3 mit genügend glattem Rand erfüllt wird. Solange dieser Beweis noch nicht erbracht ist, spricht aber nichts dagegen, das Problem gleichsam von den Füßen auf den Kopf zu stellen und die folgende Klasse von Mengen zu definieren:

Definition 1: Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und genüge den vor Satz 4 beschriebenen analytischen Voraussetzungen. Dann heißt die Menge G zulässig im erweiterten Sinne, wenn sie bezüglich G und \hat{G} die Eigenschaft aus dem Verschlingungs-Lemma besitzt, d.h.: Für jede Homologieklassse $\{\gamma\} \in B_1(G)$ mit $\{\gamma\} \neq 0$ existiere ein $\{\hat{\gamma}\} \in B_1(\hat{G})$ mit

$$\langle\langle \{\gamma\}, \{\hat{\gamma}\} \rangle\rangle = \int_{\gamma} \omega(\hat{\gamma}) \neq 0,$$

und die analoge Aussage gelte auch mit vertauschten Rollen.

Dann ist klar, daß die Resultate aus Abschnitt 2 und aus diesem Abschnitt für solche zulässigen Mengen im erweiterten Sinne gelten — somit auch der Satz 4 über eine Basis des Raums Neumannscher Felder im Innen- und Außenraum derartiger Mengen. Ferner ist diese Klasse von Mengen nach Teil (ii) der Bemerkung 1 aus Abschnitt 1 nicht leer, da sie insbesondere unsere bisher betrachteten Mengen umfaßt. In jedem Fall haben wir dadurch also eine Verallgemeinerung des Ergebnisses von Satz 2 aus Abschnitt 5.2 auf eine größere Klasse von Mengen erreicht, und mit dieser Feststellung wollen wir diese Arbeit schließen:

Satz 5: Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ zulässig im erweiterten Sinne. Dann gilt: Der Raum $Z(G)$ der Neumannschen Felder auf G ist ein endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum von der Dimension $p_1(\overline{G})$, und der Raum $Z(\hat{G})$ der Neumannschen Felder auf \hat{G} ist endlich-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension $p_1(\hat{G})$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] James W. Alexander, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 333–349
- [2] Paul Alexandroff und Heinz Hopf, *Topologie*, Grundlehren math. Wiss., Berlin: Springer 1935
- [3] Louis Antoine, *Sur l'homéomorphie de figures et de leurs voisinages*, J. Math. Pures Appl. **86** (1921), 221–325
- [4] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Math. 82, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1982
- [5] Richard H. Crowell und Ralph H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Grad. Texts in Math. 57, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
- [6] Albrecht Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Grundlehren math. Wiss. 200, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
- [7] Moritz Epple, *Orbits of Asteroids, a Braid, and the First Link Invariant*, Math. Intell. **20** No. 1 (1998), 45–52
- [8] Otto Forster, *Analysis 3*, 3. Aufl., Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg 1984
- [9] Ralph H. Fox and Emil Artin, *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*, Ann. of Math. **49** (1948), 979–990
- [10] William Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Grad. Texts in Math. 153, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1995
- [11] Carl Friedrich Gauß, *Werke*, Band V, Hildesheim-New York: Georg Olms 1973
- [12] Christian Gerthsen und Helmut Vogel, *Physik*, 17. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1993

- [13] David Gilbarg und Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2. Aufl., Grundlehren math. Wiss. 224, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1983
- [14] R. Hardt und Leon Simon, *Boundary regularity and embedded minimal solutions for the oriented Plateau problem*, Ann. Math. 110 (1979), 439–486
- [15] John Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies 86, Princeton: Princeton University Press 1976
- [16] Klaus Jänich, *Topologie*, 5. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1996
- [17] H. Kneser, *Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1925, 128–130
- [18] Erich Martensen, *Potentialtheorie*, Stuttgart: Teubner 1968
- [19] William S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Grad. Texts in Math. 127, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1991
- [20] Edwin E. Moise, *The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. 56 (1952), 96–114
- [21] Edwin E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Grad. Texts in Math. 47, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1977
- [22] Michael Neudert, *Asymptotisches Verhalten beim Neumann-Problem für inhomogen-harmonische Vektorfelder und kräftefreie Magnetfelder im Außenraum*, Dissertation, Bayreuth 1998
- [23] Henri Poincaré, *Œuvres*, Vol. VI, 183–499, Paris: Gauthier-Villars 1953
- [24] Günter Scheja und Uwe Storch, *Lehrbuch der Algebra*, Teil I, 2. Aufl., Stuttgart: Teubner 1994
- [25] Günter Scheja und Uwe Storch, *Lehrbuch der Algebra*, Teil II, Stuttgart: Teubner 1988
- [26] H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig: Teubner 1934
- [27] Edwin H. Spanier, *Algebraic Topology*, New York: McGraw-Hill 1966
- [28] Ralph Stöcker und Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, 2. Aufl., Stuttgart: Teubner 1994

-
- [29] Wolf von Wahl, *Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes*, Rudolph-Lipschitz-Vorlesung 11, Sonderforschungsbereich 256, Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, Bonn: 1989
- [30] Wolf von Wahl, *Vektoranalysis und Potentialtheorie*, Vorlesung, gehalten an der Universität Bayreuth im Sommersemester 1995 und Wintersemester 1995/96
- [31] Michael Wiegner, *Schauder estimates for boundary layer potentials*, Math. Methods Appl. Sci. 16 (1993), 877–894