Universität Bayreuth

Fakultät für Mathematik und Physik

Diplomarbeit
in
Mathematik

Von

Stefan Friedrich

Thema

Die Normalensprungrelationen stetiger Flächenbelegungen und das Neumannsche Problem für stetige Randvorgaben

3., überarbeitete Auflage

Abgabedatum: 23. März 2001

Betreuer: Prof. Dr. von Wahl

Vorwort

Diese Diplomarbeit handelt von zwei kleinen Teilgebieten der Potentialtheorie, nämlich den Normalensprungrelationen stetiger Flächenbelegungen und dem Neumannschen Problem für stetige Randvorgaben.

Ich habe mich für ein Thema aus der mathematischen Physik entschieden, weil die Vorlesungen zur theoretischen Physik zumindest zu Beginn meines Studiums die treibende Kraft waren, als es in den Mathematikvorlesungen nicht so ganz nach meinen Vorstellungen lief. Gegen Ende des Studiums ist dann allerdings die Mathematik immer mehr in den Vordergrund gerückt, und mittlerweile bin ich mir sicher, mit diesem Thema genau meine Vorstellungen von angewandter Mathematik, d. h. Mathematik in Verbindung mit einem Nebenfach, getroffen zu haben.

Bei der Bearbeitung dieses Themas habe ich sämtliche Höhen und Tiefen durchlaufen. Während ich am Anfang sehr zügig und ohne großen Probleme vorankam, wurde es in der Mitte auf einmal so schwer, daß ich das Gefühl hatte, nur noch auf der Stelle zu treten, und ohne fremde Hilfe nicht mehr weiterkam. Gegen Ende der Arbeit hat sich die Lage dann wieder normalisiert. Zurückblickend kann man jedoch sagen, daß mir die Ausarbeitung dieses Themas im Mittelwert sehr viel Spaß bereitet hat.

Als besonderes Aha-Erlebnis wird mir in Erinnerung bleiben, wie ich beim durchschauen von Prof. von Wahls Lipschitz-Vorlesung [8] zur Vorbereitung auf diese Diplomarbeit auf einmal erkannte, wie man unter Verwendung der Fredholmschen Alternative das Neumannsche Problem lösen kann, indem man die Normalensprungrelationen verwendet. Das war das erste Mal, wo ich eine konkrete Anwendung der abstrakten Fredholmschen Alternative aus der Funktionalanalysis vor mir sah.

Inhaltlich stellt diese Diplomarbeit eine Ausarbeitung des vierten Paragraphen von Prof. von Wahls Vorlesung *Potentialtheorie* dar. Auch wenn ich nicht immer an jeder Stelle genau diese Vorlesung zitiert habe, so stammt doch fast alles daraus.

An dieser Stelle möchte ich auf die zahlreichen Anregungen und Tips hinweisen, die ich während dieser Arbeit und insbesondere bei den Beweisen von Lemma 2.5, Lemma 2.6 und den Hilfssätzen 2.14 und 2.15 von Prof. von Wahl erhalten habe. Ohne diese Hinweise wäre diese Arbeit niemals in dieser Form zustandegekommen.

Mein Dank gilt Prof. von Wahl für die oftmals sehr aufmunternden Gespräche bei der Betreuung dieser Arbeit, sowie meiner Familie, die immer für mich da war.

Bayreuth, im März 2001

Stefan Friedrich

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit sollen die Normalensprungrelationen stetiger Flächenbelegungen und das Neumannsche Problem für stetige Randvorgaben untersucht werden, wobei wir uns naturgemäß zuerst mit den Potentialen solcher Flächenbelegungen beschäftigen werden.

Bei den Normalensprungrelationen für stetige Flächenbelegungen handelt es sich um das folgende Problem:
Wir denken uns einen Körper im $\mathbb{R}^3$ vorgegeben, den wir durch ein beschränktes Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^3$ beschreiben. Dabei möge G glatten Rand haben (für eine genaue Definition siehe Kapitel 2.1). Auf der Körperoberfläche sei eine Ladung angebracht, deren Verteilung wir durch eine stetige Funktion $\lambda : \partial G \to \mathbb{R}$ beschreiben. Diese Ladungsverteilung erzeugt bekanntlich ein Potential U.

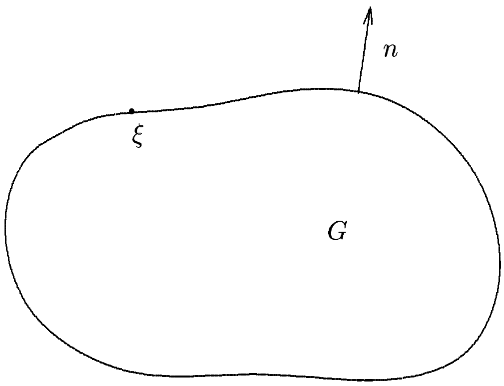

Abbildung 1.1: Ein Normalgebiet.

Nun betrachten wir einen Punkt $\xi \in \partial G$, und fragen uns, wie sich der Gradient des Potentials U bei Annäherung von innen bzw. außen in Normalenrichtung ändert. In Kapitel 2 werden folgende Relationen bewiesen werden (+ bezeichnet die Annäherung von außen, $-$ die Annäherung von innen):

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_-(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in G}} \langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle = \int\limits_{\partial G} \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi - \xi'||}, n(\xi) \right\rangle \lambda(\xi')\, d\Omega(\xi') + 2\pi\lambda(\xi),$$

$$(2) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in \mathbb{R}^3\setminus\overline{G}}} \langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle = \int\limits_{\partial G} \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi - \xi'||}, n(\xi) \right\rangle \lambda(\xi')\, d\Omega(\xi') - 2\pi\lambda(\xi).$$

Diese Gleichungen bezeichnet man als Normalensprungrelationen, da der Gradient beim Durchgang durch die Fläche in Normalenrichtung einen Sprung der Größe $4\pi\lambda(\xi)$ erleidet.

Unter dem Neumannschen Problem versteht man die folgende Aufgabe:
Gegeben sei eine stetige Funktion $g : \partial G \to \mathbb{R}$ auf dem Rand von G. Wir suchen eine Funktion $U : G \to \mathbb{R}$

aus einem noch zu präzisierenden Funktionenraum, die den Gleichungen

$$\Delta U = 0 \quad \text{in} \quad G, \tag{3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = g \quad \text{auf} \quad \partial G, \tag{4}$$

genügt. Diese partielle Differentialgleichung ist in der Elektrostatik von gewisser Bedeutung. Wir werden darauf genauer in Kapitel 3.1 eingehen.

Die Idee zur Lösung des Neumannschen Problems ist die folgende: Zu der zunächst noch unbestimmten Flächenbelegung λ definieren wir ein Potential U durch

$$U(x) := \int_{\partial G} \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||} \, d\Omega(\xi).$$

Dieses Potential erfüllt dann nach Satz 2.3 die Laplacegleichung (3). Die Normalenableitung dieses so definierten Potentials muß aber auch (4) und (1) erfüllen. Definieren wir nun den Integraloperator K durch

$$(K\lambda)(\xi) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi) \right\rangle \lambda(\xi') \, d\Omega(\xi'),$$

so muß also

$$(I-K)\lambda = \frac{1}{2\pi} g \tag{5}$$

gelten. Zu gegebenem g ist also ein λ so zu bestimmen, daß (5) erfüllt ist. Da der Operator K kompakt ist, kann dieses Problem mit der Fredholmschen Alternative behandelt werden. Damit beschäftigen wir uns in Kapitel 3.2.

Bezeichnungen

In dieser Arbeit sei durchweg $||\cdot||$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$, d. h.

$$||x|| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

welche mit dem Standardskalarprodukt, das wir durch spitze Klammern ausdrücken, verknüpft ist durch

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Mit $K_\varepsilon(x_0)$ bezeichnen wir die offene Einheitskugel mit Radius ε um den Mittelpunkt x_0, also

$$K_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x - x_0|| < \varepsilon\}.$$

Ferner sei $n(\cdot)$ die äußere Einheitsnormale auf einer Fläche (siehe Definition 2.1) und

$$\mathrm{J}_F(x_0) := \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

die Jacobimatrix der Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle x_0.

Bis auf die Lemmata 2.5 und 2.6, die wir ganz allgemein für Hyperflächen des $\mathbb{R}^n$ formuliert haben, beschränken wir uns immer auf den $\mathbb{R}^3$. Um Bezeichnungskonflikte mit der Raumdimension n zu vermeiden, schreiben wir im Projektionslemma ν für die Einheitsnormale, wobei wir uns vorbehalten, zu einem späteren Zeitpunkt wieder n zu schreiben, wenn Mißverständnisse mit der Raumdimension ausgeschlossen sind.

Kapitel 2

Die Normalensprungrelationen stetiger Flächenbelegungen

In diesem Kapitel, das den Hauptteil dieser Arbeit ausmacht, werden die Normalensprungrelationen für stetige Flächenbelegungen bewiesen werden. Es stellt eine Ausarbeitung von [7] dar.

2.1 Grundlegende Sätze und Definitionen

Im folgenden Abschnitt werden einige Grundlegende Sätze aus der Potentialtheorie der Flächenbelegungen bewiesen werden. Zuerst definieren wir aber die „Körper" und Flächen, mit denen wir es im folgenden zu tun haben werden, genauer. Dabei setzen wir Begriffe wie Untermannigfaltigkeit, Kartenabbildung und metrischer Tensor als bekannt voraus. Resultate darüber findet man zum Beispiel in [2].

2.1 Definition *Sei G ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ mit positivem Volumen und ∂G sei eine zweidimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^2, die wir bezüglich der äußeren Einheitsnormalen orientieren. ∂G möge so beschaffen sein, daß es immer einen Atlanten gibt, so daß die Parametergebiete aller Karten Kompakta mit glattem Rand sind*[1]*. Wir nennen dann $\overline{G}$ ein* Normalgebiet *(des $\mathbb{R}^3$) und ∂G seine Oberfläche. Eine Teilmenge S des $\mathbb{R}^3$ heißt* Fläche *(des $\mathbb{R}^3$), wenn es ein Normalgebiet G gibt mit $S = \partial G$.*

Insbesondere ist also eine solche Fläche kompakt und kann somit durch endlich viele Karten überdeckt werden. Wir erklären nun das Integral einer stetigen Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ über die Fläche S. Sei dazu ein endlicher Atlas gegeben, das heißt $(T_k, \varphi_k), k = 1, \dots, M$, seien Karten mit

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} V_k, \quad \text{wobei} \quad V_k := \varphi_k(T_k).$$

Wie üblich setzen wir

$$W_1 := V_1, \quad W_l := V_l \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{l-1} W_i \right), \quad l = 2, \dots, M,$$

und definieren

$$\int_S f(\xi)\, d\Omega(\xi) := \sum_{k=1}^{M} \int_{W_k} f(\xi)\, d\Omega_k(\xi) := \sum_{k=1}^{M} \int_{\varphi_k^{-1}(W_k)} (f \circ \varphi_k)(t) \sqrt{g_k(t)}\, dt,$$

wobei $g_k(t) = \det G_k(t)$ ist mit dem metrischen Tensor $G_k(t)$ zur k-ten Karte. Das so definierte Oberflächenintegral ist bekanntlich von der Wahl des Atlanten unabhängig.

Als nächstes wird das Potential einer stetigen Belegung definiert:

[1] Wir benötigen diese Eigenschaft nur, um den Gaußschen Satz im Beweis von Hilfsssatz 2.15 in einem Parametergebiet anwenden zu können.

2.2 Definition *Sei S eine Fläche und $\lambda : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Belegung auf S. Unter dem* Potential *von λ auf S verstehen wir die Funktion*

$$U : \mathbb{R}^3 \backslash S \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_S \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi).$$

Wir werden im folgenden einige elementare Sätze aus der Potentialtheorie der Flächenbelegungen beweisen. Auf diese Sätze werden wir in Zukunft zurückgreifen, ohne sie genauer zu zitieren.

2.3 Satz *Das Potential einer stetigen Belegung λ auf einer Fläche S ist harmonisch in $\mathbb{R}^3 \backslash S$, das heißt für alle $x \in \mathbb{R}^3 \backslash S$ gilt*

$$\Delta U(x) = 0.$$

Beweis: Wir zeigen, daß man eine Ableitung mit dem Integral vertauschen darf. Sei dazu $x \in \mathbb{R}^3 \backslash S$ und $i \in \{1,2,3\}$. Wir setzen $0 < d := \min_{\xi \in S} ||x-\xi||$ und definieren für $h \neq 0$ mit $|h| < \frac{1}{10}d$ Hilfsfunktionen

$$g_h(x,\xi) := \frac{1}{h}\left(\frac{1}{||x+he_i-\xi||} - \frac{1}{||x-\xi||}\right), \tag{1}$$

die, da $\xi \mapsto ||x-\xi||^{-1}$ integrierbar ist, integrierbar sind und für $h \to 0$ gegen $\frac{\partial}{\partial x_i}||x-\xi||^{-1}$ konvergieren. Entscheidend dabei ist, daß man wegen

$$||x+he_i-\xi|| \geq ||x-\xi|| - |h| > d - \frac{1}{10}d = \frac{9}{10}d > 0$$

in (1) von der Fläche wegbleibt. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt, daß es ein τ zwischen 0 und h gibt mit

$$g_h(x,\xi) = \frac{\xi_i - x_i - \tau}{||x+\tau e_i - \xi||^3}.$$

Nun gilt

$$||x+\tau e_i - \xi|| = ||x+he_i-\xi-(h-\tau)e_i|| \geq ||x+he_i-\xi|| - |h-\tau| \geq \frac{9}{10}d - |h| > \frac{4}{5}d > 0$$

und damit können wir $|g_h(x,\xi)|$ folgendermaßen abschätzen:

$$|g_h(x,\xi)| = \frac{|x_i+\tau-\xi_i|}{||x+\tau e_i-\xi||^3} \leq \frac{1}{||x+\tau e_i-\xi||^2} < \frac{25}{16}\frac{1}{d^2} =: G(x,\xi).$$

Da S kompakt ist, ist $\lambda(\xi)G(x,\xi)$ über S integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue können somit Differentiation und Integration vertauscht werden.
Wendet man dieses Verfahren auf den Integranden $\frac{\partial}{\partial x_i}||x-\xi||^{-1}$ nochmals an, so folgt wegen $\Delta_x||x-\xi||^{-1} = 0$ die Behauptung. □

Das Ziel der beiden folgenden Sätze ist es, zu zeigen, daß das Potential in ganz $\mathbb{R}^3$ wohldefiniert und sogar stetig ist.

2.4 Satz *Das Potential einer stetigen Belegung λ auf einer Fläche S existiert für alle $x \in S$.*

Beweis: Wir haben zu zeigen, daß

$$\xi \mapsto \frac{\lambda(\xi)}{||x_0-\xi||} \in L^1(S)$$

ist, falls $x_0 \in S$ ist. Sei also $x_0 \in S$. Dann gibt es eine Karte $\varphi : T \to V \subseteq S$ um den Punkt x_0 mit $\varphi(t_0) = x_0$. Wähle nun ein $\varrho > 0$ so klein, daß $\overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)} \subset T$. Angenommen für alle $\delta > 0$ gibt es ein $t \in \overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ mit

$$\frac{||\varphi(t)-\varphi(t_0)||}{||t-t_0||} < \delta.$$

Da $\overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ kompakt ist und φ injektiv und stetig ist, gibt es nach einem Standardschluß eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ mit $t_n \to t_0$ für $n \to \infty$ und

$$\frac{||\varphi(t_n) - \varphi(t_0)||}{||t_n - t_0||} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Die Abbildung $\varphi^{-1} : \overline{K_\varrho(x_0) \cap S} \to \overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ ist lipschitzstetig, d. h. für $y_n := \varphi(t_n), y_0 := \varphi(t_0)$ gilt

$$||\varphi^{-1}(y_n) - \varphi^{-1}(y_0)|| \leq L \cdot ||y_n - y_0||, \quad L \geq 0,$$

bzw. äquivalent umgeformt

$$L \cdot ||\varphi(t_n) - \varphi(t_0)|| \geq ||t_n - t_0||.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (2). Also gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $t \in \overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ gilt

$$||t - t_0|| \leq \frac{1}{\delta}||\varphi(t) - \varphi(t_0)||. \tag{3}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß (3) genauso gilt, wenn wir an Stelle von $K_\varrho(x_0) \cap S$ eine beliebige, genügend kleine Umgebung von x_0 bezüglich S wählen oder wenn wir ein Kompaktum K mit $t_0 \in \overset{\circ}{K}$ und $K \subset T$ wählen. In einer dieser Formen werden wir auf (3) noch häufig zurückgreifen.
Um nun die Existenz des Integrals zu zeigen, müssen wir es in einer Umgebung von x_0 abschätzen. Wähle dazu ein $R > 0$ so klein, daß $\overline{K_R(t_0)} \subseteq \overline{\varphi^{-1}(K_\varrho(x_0) \cap S)}$ ist. Dann folgt wegen (3)

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{\varphi(K_R(t_0))} \frac{\lambda(\xi)}{||x_0 - \xi||}\, d\Omega(\xi) \right| &\leq C \int\limits_{K_R(t_0)} \frac{dt}{||\varphi(t_0) - \varphi(t)||} \leq \frac{C}{\delta} \int\limits_{K_R(t_0)} \frac{dt}{||t - t_0||} \\
&= \frac{C}{\delta} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \frac{1}{r} r \, dr d\vartheta = 2\pi \frac{C}{\delta} R, \quad C := \sup_{\xi \in S} |\lambda(\xi)| \cdot \sup_{t \in K_R(t_0)} \sqrt{g(t)}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wie angekündigt zeigen wir jetzt, daß man das Potential stetig auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortsetzen kann. Dazu formulieren wir zunächst zwei wichtige Lemmata, auf welche wir noch häufig zurückgreifen werden. Die Beweise haben wir [3] und [8] entnommen und unseren Bedürfnissen angepaßt.

2.5 Lemma *Sei M eine $(n-1)$-dimensionale, orientierbare und kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^2, die bezüglich der Einheitsnormalen ν orientiert sei. Dann gibt es ein $M > 0$, so daß für alle $\xi, \xi' \in M$ gilt*

$$| \langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle | \leq M \cdot ||\xi - \xi'||^2. \tag{4}$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst lokal: Sei $x_0 \in M$ und $\varphi : T \to V$ eine Karte mit $\varphi(t_0) = x_0$. Wähle nun ein $R > 0$ so klein, daß $\overline{K_R(t_0)} \subset T$ ist und somit (3) gilt (wie man im Beweis von Satz 2.4 sieht, kann man (3) auch für eine Karte φ einer $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ zeigen). Nun wählen wir ein $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap M \subset \varphi(K_R(t_0))$ ist und betrachten $\xi, \xi' \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap M$ mit $\xi = \varphi(t), \xi' = \varphi(t')$. Bildet man für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Komposition von φ_i mit $g(\eta) := \eta t + (1-\eta)t', \eta \in [0,1], \varphi_i \circ g$, so folgt aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung einer Veränderlichen, daß es für $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein τ_i auf der Verbindungsstrecke zwischen t und t' gibt mit

$$\xi_i - \xi_i' = \varphi_i(t) - \varphi_i(t') = \langle \nabla \varphi_i(\tau_i), t - t' \rangle. \tag{5}$$

Dabei entsteht das Skalarprodukt in (5) durch die Anwendung der Kettenregel. Nun berechnen wir mit Hilfe von (5)

$$|\langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi_i')\nu_i(\xi) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(\tau_i)\nu_i(\xi) \right) (t_j - t_j') \right|. \tag{6}$$

Fügen wir $0 = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t), \nu(\xi) \right\rangle$ in (6) ein und verwenden, da φ zweimal stetig differenzierbar ist, daß $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}$ in $\overline{K_R(t_0)}$ lipschitzstetig mit Konstante $L \geq 0$ ist, so erhalten wir

$$(7) \qquad \begin{aligned} |\langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle| &\leq L \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} ||\tau_i - t|| \cdot |\nu_i(\xi)| \cdot |t_j - t_j'| \\ &\leq L||t - t'|| \cdot ||\nu(\xi)||_1 \cdot ||t - t'||_1 \leq C||t - t'||^2, \quad C \geq 0. \end{aligned}$$

Das letzte Ungleichheitszeichen in (7) gilt wegen der Äquivalenz der Normen. Unter Verwendung von (3) erhalten wir schließlich

$$(8) \qquad |\langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle| \leq M \cdot ||\xi - \xi'||^2, \quad M > 0, \xi, \xi' \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap M.$$

Zur globalen Aussage: Da M kompakt ist, gibt es eine endliche, offene Überdeckung von M, d. h.

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(K_{\frac{1}{2}\varepsilon_i}(x_i) \cap M \right),$$

wobei in den $K_{\varepsilon_i}(x_i)$ die Ungleichung (8) mit einer Konstante M_i gilt. Nun setzen wir

$$\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq m} \varepsilon_i > 0, \quad M_{max} := \max_{1 \leq i \leq m} M_i, \quad M := \max \left\{ \frac{2}{\varepsilon}, M_{max} \right\}$$

und betrachten beliebige $\xi, \xi' \in M$. Dann gibt es ein $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\xi \in K_{\frac{1}{2}\varepsilon_i}(x_i) \cap M$.
a) Ist $\xi' \notin K_{\varepsilon_i}(x_i) \cap M$, so haben wir

$$(9) \qquad ||\xi - \xi'|| > \frac{1}{2}\varepsilon_i > \frac{1}{2}\varepsilon > 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{||\xi - \xi'||} < \frac{2}{\varepsilon}$$

und wir erhalten mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (9)

$$|\langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle| \leq \frac{||\xi - \xi'||}{||\xi - \xi'||^2} \cdot ||\xi - \xi'||^2 \leq \frac{2}{\varepsilon}||\xi - \xi'||^2 \leq M \cdot ||\xi - \xi'||^2.$$

b) Im Fall $\xi' \in K_{\varepsilon_i}(x_i) \cap M$ folgt

$$|\langle \xi - \xi', \nu(\xi) \rangle| \leq M_i \cdot ||\xi - \xi'||^2 \leq M_{max} \cdot ||\xi - \xi'||^2 \leq M \cdot ||\xi - \xi'||^2.$$

Damit ist das Lemma in seiner globalen Fassung bewiesen. □

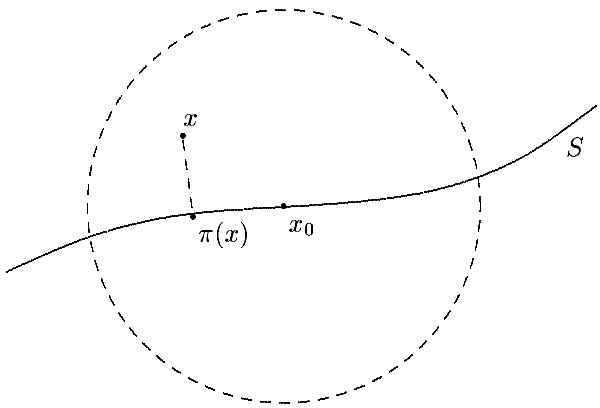

Abbildung 2.1: Projektion auf eine Fläche.

Ist $x_0 \in M$, so bezeichnen wir in einer kleinen Umgebung von x_0 mit A_{x_0} die Punkte des $\mathbb{R}^n$, die auf der Seite von M liegen, in die $\nu(x_0)$ zeigt; A_{x_0} heißt lokales Außenraumgebiet um den Punkt x_0. Mit I_{x_0} bezeichnen wir das sogenannte lokale Innenraumgebiet um x_0, also die Punkte in einer Umgebung von x_0, die nicht auf der Seite von M liegen, in die $\nu(x_0)$ zeigt. Für eine genaue Definition von A_{x_0} und I_{x_0} siehe den Beweis des nachfolgenden Projektionslemmas.[2]

[2]Ganz korrekt ist diese Vorgehensweise nicht. Eigentlich sollte man die exakten Definitionen von A_{x_0} und I_{x_0} in das Projektionslemma einbauen. Doch dann hätten wir den halben Beweis mit in das Lemma aufnehmen müssen. Da nach dem Beweis klar ist, was gemeint war, haben wir uns für diese Vorgehensweise entschieden.

2.6 Projektionslemma *Sei M eine $(n-1)$-dimensionale, orientierbare und kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ der Klasse C^2, die bezüglich der Einheitsnormalen ν orientiert sei, und sei $x_0 \in M$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß es für alle $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A_{x_0}$ genau ein $\pi(x) \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap M$ gibt mit*

$$(10) \qquad ||x - \pi(x)|| = d(x, M) := \inf\{||x - \xi|| \mid \xi \in M\}.$$

Weiter gilt für beliebiges $\xi \in M$

$$(11) \qquad ||\pi(x) - \xi|| \le \kappa ||x - \xi||, \quad \kappa > 0.$$

Desweiteren ist $\pi(x)$ global der zu x nächste Punkt. — Dasselbe Resultat gilt, wenn wir oben $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A_{x_0}$ durch $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap I_{x_0}$ ersetzen.

Beweis: Sei $\varphi : T \to V \subseteq M$ eine Karte um x_0 mit $\varphi(t_0) = x_0$. Definiere nun

$$F : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad (t, \delta) \mapsto \varphi(t) + \delta \cdot \nu(\varphi(t)).$$

Wegen

$$\det \mathrm{J}_F(t_0, 0) = \det \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t_0), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t_0), \nu(\varphi(t_0)) \right) \neq 0$$

folgt aus dem Satz über die Umkehrabbildung, daß es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß $F : F^{-1}(K_{\varepsilon_0}(x_0)) \to K_{\varepsilon_0}(x_0)$ C^1-invertierbar ist. Sei zusätzlich $\varepsilon_0 < \frac{1}{4M}$, M aus (4). Für ein $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0)$ ist somit $x = F(t_x, \delta_x)$ mit eindeutig bestimmten (t_x, δ_x). Wir können deshalb

$$A_{x_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = F(t_x, \delta_x),\ 0 < \delta_x\}$$

setzen. Sei nun $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A_{x_0}$. Dann ist auch

$$F : F^{-1}(K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A_{x_0}) \to K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap A_{x_0}$$

C^1-invertierbar und wir können $\pi(x) := \varphi(t_x)$ setzen[3]. Zum Beweis von (10) berechnen wir für beliebiges $\xi \in M$ unter Verwendung der Darstellung $x = F(t_x, \delta_x) = \pi(x) + \delta_x \nu(\pi(x)), \delta_x > 0$

$$\begin{aligned} ||x - \xi||^2 &= \langle x - \pi(x) + \pi(x) - \xi, x - \pi(x) + \pi(x) - \xi \rangle \\ &= \delta_x^2 - 2\delta_x \langle \nu(\pi(x)), \xi - \pi(x) \rangle + ||\pi(x) - \xi||^2. \end{aligned}$$

Wegen $\delta_x = ||x - \pi(x)|| \le ||x - x_0|| + ||x_0 - \pi(x)|| < 2\varepsilon_0 \le 2\varepsilon_0$ und (4) erhalten wir nun

$$(12) \qquad \begin{aligned} ||x - \xi||^2 &\ge \delta_x^2 - 2M\delta_x ||\pi(x) - \xi||^2 + ||\pi(x) - \xi||^2 \\ &= \delta_x^2 + (1 - 2M\delta_x)||\pi(x) - \xi||^2 \ge \delta_x^2 + (1 - 4M\varepsilon_0)||\pi(x) - \xi||^2 \\ &=: \delta_x^2 + \mu ||\pi(x) - \xi||^2, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Aus (12) folgt die Gültigkeit von (10) unmittelbar. Aus (10) folgt nun weiter $||x - \pi(x)|| \le ||x - \xi||$ und wir können mit Hilfe der Dreiecksungleichung abschätzen

$$||\pi(x) - \xi|| \le ||\pi(x) - x|| + ||x - \xi|| \le \kappa ||x - \xi||, \quad \kappa = 2.$$

Dies ist (11). Ist $x \in K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap I_{x_0}$, $I_{x_0} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = F(t_x, \delta_x),\ \delta_x < 0\}$, so definieren wir F neu durch

$$F : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad (t, \delta) \mapsto \varphi(t) - \delta \cdot \nu(\varphi(t))$$

und drehen die Ungleichheitszeichen in den Definitionen von A_{x_0} und I_{x_0} um. Die Formeln (10) und (11) folgen dann wie oben. □

Bemerkung: Seien $\varphi_1 : T_1 \to V_1$ und $\varphi_2 : T_2 \to V_2$ zwei Karten um x_0. Ohne Einschränkung sei ε_0 so klein, daß $K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap M \subset V_1 \cap V_2$ ist und die Abbildungen F_1, F_2 in $K_{\varepsilon_0}(x_0)$ C^1-invertierbar sind. Führt man obigen Beweis für beide Karten durch, so erhält man aus den Darstellungen $x = F_i(t_i, \delta_i), i = 1, 2$ zum einen, daß $\pi(x) := \varphi_1(t_1)$ global der zu x nächste Punkt ist und zum anderen, daß $\pi(x) := \varphi_2(t_2)$ global der zu x nächste Punkt ist. Also ist $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$ und somit ist die Definition der Abbildung π von der Wahl der Karte unabhängig.

[3] Zur Wohldefiniertheit der Abbildung π siehe die nachfolgende Bemerkung.

2.7 Satz *Sei S eine Fläche und $\lambda : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Belegung auf S. Dann ist das Potential dieser Belegung stetig nach S fortsetzbar, das heißt das Potential ist eine auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetige Funktion.*

Beweis: Wir definieren eine Folge $(F_{\delta,\varepsilon_0})_{\delta>0}$ stetiger Funktionen und zeigen, daß diese gleichmäßig gegen

$$\int\limits_{K_{\varepsilon_0}(x_0)\cap S} \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi), \quad x \in \overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)}$$

konvergiert für $\delta \to 0$. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig und wir sind fertig. Sei dazu $x_0 \in S$ und $\varphi : T \to V \subseteq S$ eine Karte um x_0 mit $\varphi(t_0) = x_0$. Für den Rest des Beweises sei $F := K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap S$, ε_0 wie unten gewählt. Nun setzen wir

$$F_{\delta,\varepsilon_0} : \overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int\limits_F K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi)\lambda(\xi)\, d\Omega(\xi) \quad \text{mit}$$

$$K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi) := \begin{cases} \dfrac{1}{||x-\xi||} & \text{, falls} \quad \delta \le ||x-\xi|| \\ \dfrac{1}{\delta} & \text{, falls} \quad ||x-\xi|| \le \delta. \end{cases}$$

Dabei wählen wir ε_0 so klein, daß das Lemma 2.6 erfüllt ist, $\overline{K_{2\varepsilon_0}(x_0)} \cap S \subset \varphi(T)$ gilt und $K_{2\varepsilon_0}(x_0) \cap S \subset \varphi(\overline{K_\varrho(t_0)})$ ist, wobei für $\varrho > 0$ $\overline{K_\varrho(t_0)} \subset T$ und (3) gelten soll. Zudem wählen wir $\delta > 0$ kleiner als $\frac{1}{2}\varepsilon_0$ und so, daß $\varphi^{-1}(K_{2\delta}(x) \cap S) \subset K_\varrho(t_0)$ für $x \in \overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)}$.
Dann ist trivialerweise $F_{\delta,\varepsilon_0} \in C^0(\overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)}, \mathbb{R})$. Wir haben nun folgenden Term abzuschätzen:

$$\begin{aligned} G_{\delta,\varepsilon_0}(x) &:= \left| F_{\delta,\varepsilon_0}(x) - \int\limits_F \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi) \right| \\ &= \left| \int\limits_{F\setminus K_\delta(x)} \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi) - \int\limits_F \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\delta} \int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi) - \int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \frac{\lambda(\xi)}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi) \right| \\ &\le \frac{s}{\delta} \int\limits_{S\cap K_\delta(x)} d\Omega(\xi) + s \int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \frac{1}{||x-\xi||}\, d\Omega(\xi), \quad s := \sup_{\xi\in F} |\lambda(\xi)|. \end{aligned} \tag{13}$$

Das Integral linker Hand in (13) bezeichnen wir mit $T_1(x, \delta, \varepsilon_0)$ und das rechter Hand mit $T_2(x, \delta, \varepsilon_0)$. Für $x \notin S$ gilt trivialerweise $G_{\delta,\varepsilon_0} \to 0$ für $\delta \to 0$, da für genügend kleines δ $F \cap K_\delta(x) = \emptyset$ gilt. Sei also im folgenden $x \in S$.
Wir schätzen nun $T_1(x, \delta, \varepsilon_0)$ ab: Betrachte $\xi, \xi' \in S \cap K_\delta(x)$. Es gilt dann $||\xi - \xi'|| \le 2\delta$ und aus (3) folgt weiter

$$||t - t'|| \le \frac{1}{\tilde{c}}||\xi - \xi'|| \le \frac{2\delta}{\tilde{c}},$$

wobei wir $\xi := \varphi(t), \xi' := \varphi(t')$ gesetzt haben und das δ aus (3) in $\tilde{c}$ umbenannt haben. Mit $C := \sup_{t\in\varphi^{-1}(S\cap K_\delta(x))} \sqrt{g(t)}$ folgt dann

$$T_1(x, \delta, \varepsilon_0) = \frac{s}{\delta} \int\limits_{\varphi^{-1}(S\cap K_\delta(x))} \sqrt{g(t)}\, dt \le \frac{sC}{\delta} \int\limits_{\varphi^{-1}(S\cap K_\delta(x))} dt \le \frac{sC}{\delta} \int\limits_{K_{2\delta/\tilde{c}}(0)} dt = \frac{4\pi C s}{\tilde{c}^2}\delta$$

Nun kommen wir zu $T_2(x, \delta, \varepsilon_0)$: Aus (11) in Lemma 2.6 folgt

$$T_2(x, \delta, \varepsilon_0) \le s\kappa \int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \frac{1}{||\xi - \pi(x)||}\, d\Omega(\xi).$$

Wendet man nun die Höldersche Ungleichung für $1 < p < 2, 1 < q$ und $1/p + 1/q = 1$ an, wobei wir im Integranden den Faktor 1 einfügen und das Integrationsgebiet im ersten Term nochmals vergrößern, so folgt

$$T_2(x,\delta,\varepsilon_0) \le s\kappa \left(\int\limits_{S\cap K_\delta(x)} d\Omega(\xi) \right)^{1/q} \cdot \left(\int\limits_{F\cap K_\delta(x)} \frac{1}{||\xi-\pi(x)||^p}\, d\Omega(\xi) \right)^{1/p} =: s\kappa (I_1)^{1/q}\cdot (I_2)^{1/p}.$$

Analog wie oben folgt $I_1 \le C\frac{4\pi}{\tilde c^2}\delta^2$. Für I_2 gilt wiederum nach (3) und wegen $\varphi^{-1}(K_{2\delta}(x)\cap S) \subset K_\varrho(t_0)$

$$I_2 \le \frac{C}{\tilde c^p} \int\limits_{K_\varrho(t_0)} \frac{1}{||t_{\pi(x)}-t||^p}\, dt, \quad \xi := \varphi(t), \pi(x) := \varphi(t_{\pi(x)}).$$

Setzen wir $R_0 := 2\operatorname{diam} T$, so folgt weiter

$$I_2 \le \frac{C}{\tilde c^p} \int\limits_{K_{R_0}(0)} \frac{1}{||t||^p}\, dt = \frac{2\pi C}{\tilde c^p} \int\limits_0^{R_0} \frac{r}{r^p}\, dr = \frac{2\pi C}{\tilde c^p} R_0^{2-p}$$

Insgesamt folgt also

$$G_{\delta,\varepsilon_0}(x) \le \frac{4\pi C s}{\tilde c^2}\delta + s\kappa \left(\frac{4\pi C}{\tilde c^2}\right)^{1/q} \delta^{2/q} \left(\frac{2\pi C R_0^{2-p}}{\tilde c^p}\right)^{1/p}.$$

Für $\delta \to 0$ konvergiert dieser Term aber gegen 0. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

2.2 Der Hauptsatz für hölderstetige Funktionen

In diesem Abschnitt soll der Satz über die Normalensprungrelationen für hölderstetige Flächenbelegungen bewiesen werden. Dabei wird von entscheidender Bedeutung sein, daß die Flächen, mit denen wir es zu tun haben, stetig gekrümmt (das heißt von der Klasse C^2) sind. Bei unserer Definition von „Fläche" ist dies von selbst erfüllt.

Der Übersichtlichkeit wegen und um uns Schreibarbeit zu sparen, verwenden wir im folgenden die Abkürzungen

$$r := ||x-\xi||, \qquad r' := ||\xi-\xi'||, \qquad \tilde r := ||x-\xi'||,$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) := \left\langle \nabla_x \frac{1}{r}, n(\xi)\right\rangle \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) := \left\langle \nabla_{\xi'} \frac{1}{r'}, n(\xi')\right\rangle.$$

Um den Beweis der Normalensprungrelationen übersichtlicher zu gestalten, werden nun einige Hilfssätze formuliert, aus denen dann der eigentliche Beweis zusammengesetzt wird. Zuerst beginnen wir aber mit zwei Definitionen:

2.8 Definition *Sei S eine Fläche, $x_0 \in S$ und $\lambda : S\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man sagt, das Integral*

$$\int\limits_S \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi)$$

existiert im Sinn des Cauchy-Hauptwerts, *wenn*

$$\lim_{\varrho\to 0} \int\limits_{S\backslash(S\cap K_\varrho(x_0))} \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi)$$

existiert. Wir schreiben dann

$$\fint\limits_S \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi)$$

und nennen diesen Ausdruck den Cauchyschen Hauptwert *von* $\int_S \lambda(\xi)\, d\Omega(\xi)$.

2.9 Definition *Eine stetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer kompakten Menge Ω des $\mathbb{R}^n$ heißt* hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$, *falls es eine Konstante $K \geq 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in \Omega$ gilt:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K||x - y||^\alpha.$$

Mit $(C^\alpha(\Omega), ||\cdot||_{C^\alpha(\Omega)})$ bezeichnen wir den Banachraum aller zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$ hölderstetigen Funktionen auf Ω. Dabei ist $||\cdot||_{C^\alpha(\Omega)}$ durch

$$||f||_{C^\alpha(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||^\alpha}$$

gegeben.

Bemerkung: Man kann leicht zeigen, daß die kleinste Konstante K aus Definition 2.9 gegeben ist durch

$$\sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{||x - y||^\alpha}.$$

Wir werden an einigen Stellen die Greensche Integralformel benötigen. Sie lautet

$$\int_G (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\, dx = \int_{\partial G} \left(u(\xi)\frac{\partial v}{\partial n}(\xi) - v(\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi) \right) d\Omega(\xi).$$

2.10 Lemma *Sei G ein Normalgebiet, S seine Oberfläche und $\xi \in S$. Dann gilt*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon(0)\cap\{g-\xi|g\in G\}} d\Omega(\xi') = 2\pi.$$

Beweis: Siehe [4], Lemma 2.2 auf Seite 110. □

Hilfssätze

2.11 Hilfssatz *Sei S eine Fläche, $\xi \in S$ und $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$. Dann ist*

$$x \mapsto \int_S -\frac{x_i - \xi_i'}{||x - \xi'||^3}(\lambda(\xi') - \lambda(x))\, d\Omega(\xi') \tag{14}$$

stetig in $\mathbb{R}^3$ und es gilt

$$\lim_{x\to\xi} \int_S -\frac{x_i - \xi_i'}{||x - \xi'||^3}(\lambda(\xi') - \lambda(x))\, d\Omega(\xi') = \int_S -\frac{\xi_i - \xi_i'}{||\xi - \xi'||^3}(\lambda(\xi') - \lambda(\xi))\, d\Omega(\xi'). \tag{15}$$

Beweis: Der Beweis verläuft in weiten Teilen analog zum Beweis von Satz 2.7. Wir fassen uns daher etwas kürzer und konzentrieren uns auf die wesentlichen Änderungen. Wieder definieren wir für $x_0 \in S$ eine Folge stetiger Funktionen $(F_{\delta,\varepsilon_0})_{\delta>0}$ durch

$$F_{\delta,\varepsilon_0} : \overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_{S\cap K_{\varepsilon_0}(x_0)} K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi')(\lambda(\xi') - \lambda(x))\, d\Omega(\xi'),$$

$$K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi') := \begin{cases} -\dfrac{x_i - \xi_i'}{||x - \xi'||^3}, & \text{falls} \quad \delta \leq ||x - \xi'|| \\ -\dfrac{x_i - \xi_i'}{\delta^3}, & \text{falls} \quad ||x - \xi'|| < \delta \end{cases},$$

und zeigen, daß diese gleichmäßig auf $\overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)}$ gegen das gewünschte Integral (14) konvergiert. Dazu setzen wir $F := K_{\varepsilon_0}(x_0) \cap S$ und wählen ε_0, ϱ und δ so wie im Beweis von Satz 2.7 und schätzen ab:

$$\begin{aligned} G_{\delta,\varepsilon_0}(x) &:= \left| F_{\delta,\varepsilon_0}(x) - \int_F -\frac{x_i - \xi_i'}{||x - \xi'||^3}(\lambda(\xi') - \lambda(x))\, d\Omega(\xi') \right| \\ &\leq \int_{F\cap K_\delta(x)} \frac{|x_i - \xi_i'|}{\delta^3} |\lambda(\xi') - \lambda(x)|\, d\Omega(\xi') + \int_{F\cap K_\delta(x)} \frac{|x_i - \xi_i'|}{||x - \xi'||^3} |\lambda(\xi') - \lambda(x)|\, d\Omega(\xi'). \end{aligned}$$

Aus der Hölderstetigkeit von λ und $|x_i - \xi_i'| \le ||x - \xi'||$ folgt weiter

$$(16) \qquad G_{\delta,\varepsilon_0}(x) \le K \int\limits_{S \cap K_\delta(x)} \frac{||x-\xi'||^{1+\alpha}}{\delta^3}\, d\Omega(\xi') + K \int\limits_{F \cap K_\delta(x)} \frac{1}{||x-\xi'||^{2-\alpha}}\, d\Omega(\xi'), \quad K \ge 0.$$

Das linke Integral in (16) bezeichnen wir mit $T_1(x,\delta,\varepsilon_0)$ und das rechte mit $T_2(x,\delta,\varepsilon_0)$. Ist $x \notin S$ so ist wieder trivialerweise $G_{\delta,\varepsilon_0}(x) = 0$ für genügend kleines δ. Sei also im folgenden $x \in S$. Analog wie im Beweis von Satz 2.7 folgt

$$T_1(x,\delta,\varepsilon_0) \le C \cdot \delta^\alpha, \quad C \ge 0.$$

Beim Term $T_2(x,\delta,\varepsilon_0)$ wenden wir wieder die Höldersche Ungleichung und (11) an und erhalten

$$T_2(x,\delta,\varepsilon_0) \le K\kappa \left(\int\limits_{S \cap K_\delta(x)} d\Omega(\xi') \right)^{1/q} \cdot \left(\int\limits_{F \cap K_\delta(x)} \frac{1}{||\pi(x)-\xi'||^{(2-\alpha)p}}\, d\Omega(\xi') \right)^{1/p} =: K\kappa (I_1)^{1/q} (I_2)^{1/p}.$$

Damit I_2 endlich bleibt müssen wir $p \ge 1$ mit $(2-\alpha)p < 2$ wählen und somit $q = \frac{p}{p-1} \ge 1$. Für I_1 gilt wiederum $I_1 \le \tilde{K}\delta^2$.
Insgesamt konvergiert also G_{δ,ε_0} gegen 0 für $\delta \to 0$. Damit ist (14) als stetig nachgewiesen. (15) folgt wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(F_{\delta,\varepsilon_0})$ unmittelbar. □

2.12 Hilfssatz *Sei S eine Fläche, $\xi \in S$ und $\lambda : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist das Integral*

$$\int\limits_S \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi) \right\rangle (\lambda(\xi') - \lambda(\xi))\, d\Omega(\xi')$$

wohldefiniert.

Beweis: Zu $\xi \in S$ gibt es eine Karte $\varphi : T \to V \subseteq S$ mit $\varphi(t_0) = \xi$. Wir wählen ein $\varrho > 0$ so klein, daß $\overline{K_\varrho(t_0)} \subset T$ und (3) gilt und betrachten ein $\xi' \in \varphi(K_\varrho(t_0)), \xi' = \varphi(t')$. Um die Wohldefiniertheit des Integrals im Sinn von Lebesgue zu zeigen, müssen wir es in einer Umgebung von ξ abschätzen. Den entscheidenden Teil dieses Beweises haben wir dabei schon in Lemma 2.5 gezeigt. Verwenden wir nämlich (4) aus Lemma 2.5, so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\varphi(K_\varrho(t_0))} \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi) \right\rangle (\lambda(\xi') - \lambda(\xi))\, d\Omega(\xi') \right| &\le \int\limits_{\varphi(K_\varrho(t_0))} \frac{|\lambda(\xi')-\lambda(\xi)|}{||\xi-\xi'||^3} |\langle \xi-\xi', n(\xi)\rangle|\, d\Omega(\xi') \\ &\le M \int\limits_{\varphi(K_\varrho(t_0))} \frac{|\lambda(\xi')-\lambda(\xi)|}{||\xi-\xi'||}\, d\Omega(\xi') \\ &= M \int\limits_{K_\varrho(t_0)} \frac{|\lambda(\varphi(t_0)) - \lambda(\varphi(t'))|\sqrt{g(t')}}{||t_0-t'||}\, dt'. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist integrierbar, was man wie im Beweis von Satz 2.4 sieht. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

2.13 Hilfssatz *Sei G ein Normalgebiet und S seine Oberfläche. Dann gilt für alle $\xi \in S$*

$$\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r'} \right) d\Omega(\xi') = -2\pi.$$

Beweis: Sei $\xi \in S$. Wir betrachten im folgenden die Menge $\Gamma := G \backslash \overline{K_\varepsilon(\xi)}$, $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Da der Gaußsche Satz auch für Gebiete mit niederdimensionalen Singularitäten gilt (vgl. [2], S. 155) und

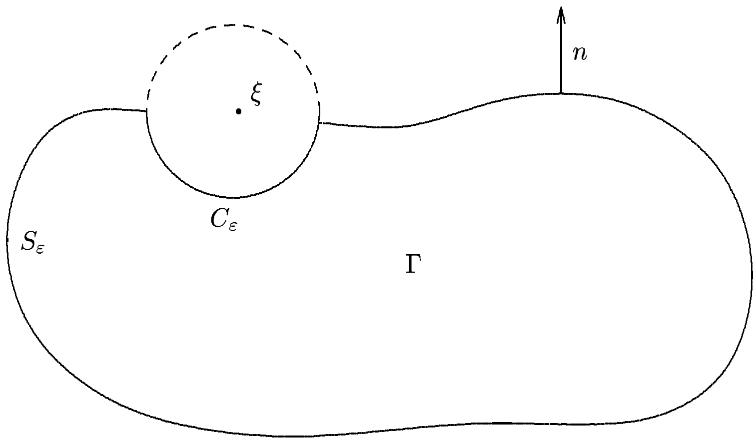

Abbildung 2.2: Die Zerlegung von $\partial\Gamma$ in C_ε und S_ε.

die Greensche Formel nur eine einfache Konsequenz des Gaußschen Satzes ist, folgt aus der Greenschen Formel mit $u(x) := 1$ und $v(x) := \frac{1}{\|\xi - x\|}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Gamma (u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x))\,dx = \int_{\partial\Gamma} \left(u(\xi')\frac{\partial v}{\partial n}(\xi') - v(\xi')\frac{\partial u}{\partial n}(\xi')\right) d\Omega(\xi') \\ &= \int_{\partial\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}(\xi')\,d\Omega(\xi') = \int_{\partial\Gamma} \left\langle \nabla_{\xi'} \frac{1}{\|\xi - \xi'\|}, n(\xi')\right\rangle d\Omega(\xi'). \end{aligned}$$

Wir zerlegen nun den Rand von Γ gemäß Abbildung 2.2 in S_ε und C_ε. Damit ergibt sich dann

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi') = -\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi'). \tag{17}$$

Wir führen nun die Hilfsfunktionen $h_\varepsilon(\xi,\xi') := \chi_{S_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right)$ mit der Charakteristischen Funktion χ ein. Dann ist $h_\varepsilon \in L(S)$, $\lim_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right)$ und wir haben nach (4)

$$|h_\varepsilon| = \chi_{S_\varepsilon}(\xi')\left|\left\langle \frac{\xi - \xi'}{\|\xi - \xi'\|^3}, n(\xi')\right\rangle\right| \le M\chi_{S_\varepsilon}(\xi')\frac{1}{\|\xi - \xi'\|} \in L(S).$$

Somit konvergiert die linke Seite in (17) für $\varepsilon \to 0+$ nach dem Satz von Lebesgue gegen

$$\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi').$$

Die rechte Seite von (17) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} -\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi') &= -\int_{C_\varepsilon} \left\langle \nabla_{\xi'} \frac{1}{\|\xi - \xi'\|}, \frac{\xi - \xi'}{\|\xi - \xi'\|}\right\rangle d\Omega(\xi') = -\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{\|\xi - \xi'\|^2}\,d\Omega(\xi') \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial K_\varepsilon(0)\cap\{g-\xi | g\in G\}} d\Omega(\xi'). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt nach Lemma 2.10 insgesamt die Behauptung. □

2.14 Hilfssatz *Sei G ein Normalgebiet, S seine Oberfläche und $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

Dann gilt für $\xi \in S$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in G}} \lambda(x)\sum_{i=1}^{3}\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}n_i(\xi')\,d\Omega(\xi') &= 4\pi\lambda(\xi),\\ \lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{G}}} \lambda(x)\sum_{i=1}^{3}\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}n_i(\xi')\,d\Omega(\xi') &= 0,\\ \sup_{*}\int_S \frac{|\langle x-\xi', n(\xi')\rangle|}{||x-\xi'||^3}\,d\Omega(\xi') &\leq C, \quad C>0,\end{aligned}$$

wobei der Stern unter dem Supremum für eine der beiden Möglichkeiten $x \in G$ oder $x \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{G}$ steht.

Beweis: Einfache Umformungen liefern

$$\begin{aligned}\lambda(x)\sum_{i=1}^{3}\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}n_i(\xi')\,d\Omega(\xi') &= -\lambda(x)\int_S \left\langle \nabla_{\xi'}\frac{1}{||x-\xi'||}, n(\xi')\right\rangle d\Omega(\xi')\\ &= -\lambda(x)\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\left.\frac{1}{r'}\right|_{\xi:=x}\right) d\Omega(\xi').\end{aligned}$$

1. Sei nun zunächst $x \in G$ fest mit $\overline{K_\delta(x)} \subset G$ für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. $\Gamma := G\setminus\overline{K_\delta(x)}$. Für $u(y) := 1$ und $v(y) := \frac{1}{||x-y||}$ liefert die Greensche Integralformel

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Gamma (u(y)\Delta v(y) - v(y)\Delta u(y))\,dy = \int_{\partial\Gamma}\left(u(\xi')\frac{\partial v}{\partial n}(\xi') - v(\xi')\frac{\partial u}{\partial n}(\xi')\right) d\Omega(\xi')\\ &= \int_{\partial\Gamma}\frac{\partial v}{\partial n}(\xi')\,d\Omega(\xi') = \int_S \left\langle \nabla_{\xi'}\frac{1}{||x-\xi'||}, n(\xi')\right\rangle d\Omega(\xi') + \int_{\partial K_\delta(x)} \left\langle \nabla_{\xi'}\frac{1}{||x-\xi'||}, \frac{x-\xi'}{||x-\xi'||}\right\rangle d\Omega(\xi')\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Umstellen und Multiplikation mit $\lambda(x)$ weiter

$$\begin{aligned}-\lambda(x)\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\left.\frac{1}{r'}\right|_{\xi:=x}\right) d\Omega(\xi') &= \lambda(x)\int_{\partial K_\delta(x)} \left\langle \frac{x-\xi'}{||x-\xi'||^3}, \frac{x-\xi'}{||x-\xi'||}\right\rangle d\Omega(\xi')\\ &= \lambda(x)\int_{\partial K_\delta(0)} \frac{1}{||\xi'||^2}\,d\Omega(\xi') = 4\pi\lambda(x).\end{aligned}$$

Für festes $\xi \in S$ und $x \in G$ folgt durch Grenzübergang $x \to \xi, x \in G$ die erste Behauptung.
2. Sei jetzt $x \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{G}$. Die Greensche Formel liefert mit $\Gamma := (\mathbb{R}^3\setminus\overline{G})\setminus\{x\}$

$$0 = \int_{\partial\Gamma}\frac{\partial v}{\partial n}(\xi')\,d\Omega(\xi') = -\int_S \left\langle \nabla_{\xi'}\frac{1}{||x-\xi'||}, n(\xi')\right\rangle d\Omega(\xi'). \tag{18}$$

Das Minuszeichen vor dem Integral in (18) gilt, da die Orientierung umgedreht werden muß. Also ergibt sich

$$\lambda(x)\int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\left.\frac{1}{r'}\right|_{\xi:=x}\right) d\Omega(\xi') = 0.$$

Durch Grenzübergang $x \to \xi, x \in \Gamma$ ergibt sich die zweite Behauptung.
Zum Beweis der dritten Formel wählen wir ein $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß in $K_{\varepsilon_0}(\xi) \cap G$ Lemma 2.6 gilt sowie $\varepsilon_0 < \frac{1}{4M}$, M aus (4). Mit der Darstellung $x = \pi(x) - \delta\cdot n(\pi(x)), \delta > 0$ berechnet man nach Lemma 2.5

$$\begin{aligned}||x-\xi'||^2 &= ||\pi(x)-\xi'||^2 - 2\delta\,\langle \pi(x)-\xi', n(\pi(x))\rangle + \delta^2 \geq ||\pi(x)-\xi'||^2 - 2M\delta\cdot||\pi(x)-\xi'||^2 + \delta^2\\ &= (1-2M\delta)\left[||\pi(x)-\xi'||^2 + \frac{1}{1-2M\delta}\delta^2\right] \geq (1-2M\delta)\left[||\pi(x)-\xi'||^2+\delta^2\right]\\ &\geq (1-4M\varepsilon_0)\left[||\pi(x)-\xi'||^2+\delta^2\right] =: c(||\pi(x)-\xi'||^2+\delta^2), \quad c>0.\end{aligned} \tag{19}$$

Weiter ist

$$|\langle x-\xi', n(\xi')\rangle| \le |\langle \pi(x)-\xi', n(\xi')\rangle| + \delta \le M\cdot ||\pi(x)-\xi'||^2 + \delta. \tag{20}$$

Mit (19) und (20) erhalten wir nun

$$\int\limits_S \frac{|\langle x-\xi', n(\xi')\rangle|}{||x-\xi'||^3}\, d\Omega(\xi') \le \frac{1}{c^{3/2}} \int\limits_S \frac{M\cdot ||\pi(x)-\xi'||^2+\delta}{(||\pi(x)-\xi'||^2+\delta^2)^{3/2}}\, d\Omega(\xi') =: \frac{1}{c^{3/2}} I_S.$$

Wir müssen nun I_S in einer Umgebung von $\pi(x)$ abschätzen. Sei dazu $\varphi : T \to V$ eine Karte um $\pi(x)$ mit $\varphi(t_0) = \pi(x)$. Dann wählen wir ein $R > 0$ so klein, daß zum einen $\overline{K_R(t_0)} \subset T$ ist und zum anderen $\varphi(K_R(t_0)) \subset K_{\varepsilon_0}(\xi)$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_{\varphi(K_R(t_0))} &= \int\limits_{K_R(t_0)} \frac{M\cdot ||\varphi(t_0)-\varphi(t)||^2+\delta}{(||\varphi(t_0)-\varphi(t)||^2+\delta^2)^{3/2}} \sqrt{g(t)}\, dt \\ &\le C \int\limits_{K_R(t_0)} \frac{\tilde{M}\cdot ||t-t_0||^2+\delta}{(\tilde{c}^2||t-t_0||^2+\delta^2)^{3/2}}\, dt, \quad C := \sup_{t\in K_R(t_0)} \sqrt{g(t)}, \end{aligned}$$

wobei wir (3) und die Lipschitzstetigkeit von φ verwendet haben (das δ aus (3) wurde in $\tilde{c}$ umbenannt). Transformation auf Polarkoordinaten liefert

$$\begin{aligned} I_{\varphi(K_R(t_0))} &\le 2\pi C \int\limits_0^R \frac{\tilde{M}r^2+\delta}{(\tilde{c}^2 r^2+\delta^2)^{3/2}} r\, dr \\ &= \frac{2\pi C}{\tilde{c}^2}\left[\frac{\tilde{M}}{\tilde{c}^2}\left(\sqrt{\delta^2+\tilde{c}^2R^2} - \delta + \frac{\delta^2}{\sqrt{\delta^2+\tilde{c}^2R^2}} - \delta\right) + 1 - \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\tilde{c}^2R^2}}\right]. \end{aligned}$$

Dieser Term bleibt beschränkt für $\delta \to 0$. Damit ist die Behauptung für $x \in G$ gezeigt. Der Fall $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}$ wird analog behandelt. □

2.15 Hilfssatz *Sei S eine Fläche und $\xi \in S$. Dann gilt*

$$\lim_{\substack{x\to\xi \\ *}} (n_i(\xi) - n_i(\pi(x))) \int\limits_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\, d\Omega(\xi') = 0,$$

wobei π die Projektion aus Lemma 2.6 ist und der Stern im Limes für eine der beiden Möglichkeiten $x \in G$ oder $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}$ steht.

Beweis: Sei zunächst $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}$. Da $n_i(\xi) - n_i(\pi(x)) \to 0$ für $x \to \xi$, müssen wir nur noch zeigen, daß

$$\int\limits_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\, d\Omega(\xi') = -\int\limits_S \frac{\partial}{\partial\xi_i'} \frac{1}{||x-\xi'||}\, d\Omega(\xi') =: -\int\limits_S \frac{\partial}{\partial\xi_i'} f(\xi')\, d\Omega(\xi') \tag{21}$$

beschränkt bleibt für $x \to \xi$. Da der Integrand in (21) im Punkt x singulär wird für $x \to \xi$, aber sonst harmlos ist, reicht es, das Integral in (21) in einer Umgebung von ξ abzuschätzen. Sei dazu $(T_j, \varphi_j), j = 1,\dots,m$ ein wegen der Kompaktheit von S endlicher Atlas, der S überdeckt, d. h.

$$S \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j, \quad V_j := \varphi_j(T_j).$$

Wir wählen nun eine den V_j untergeordnete, stetig differenzierbare Teilung der Eins, die wir mit α_j bezeichnen und setzen $I := \{j \in \{1,\dots,m\} \,|\, \xi \in V_j\}$. Ferner sei $\tilde{S}$ derselbe einseitige Randstreifen auf der Außenseite von G, wie wir ihn zu Beginn von Kapitel 2.3 konstruieren. Da wir an $x \to \xi$ interessiert sind, können wir ohne Einschränkung $x \in \tilde{S}$ annehmen. Nun setzen wir f auf dem Randstreifen $\tilde{S}\backslash\{x\}$ durch

$$f(y) := \frac{1}{||x-y||}$$

fort und wenden die Koordinatentransformation F aus Lemma 2.6 auf den Integranden an und erhalten mit der Kettenregel (die Abhängigkeit von den einzelnen Karten unterdrücken wir der Übersichtlichkeit wegen und schreiben F an Stelle von F_j usw.) in $\tilde{S}\backslash\{x\}$ die Gleichung

$$\nabla_y f(y) = \mathrm{J}_{\tilde{f}\circ F^{-1}}(y) = \nabla_{(t,\delta)}\tilde{f}(F^{-1}(y)) \cdot \mathrm{J}_{F^{-1}}(y) = \nabla_{(t,\delta)}\tilde{f}(F^{-1}(y)) \cdot \mathrm{J}_F^{-1}(F^{-1}(y)), \tag{22}$$

wobei wir $\tilde{f} := f \circ F$ gesetzt haben. Aus Stetigkeitsgründen folgt, indem wir $\xi' := y = F(t,0) = \varphi(t)$ setzen, aus (22) auf S

$$\nabla_{\xi'} f(\varphi(t)) = \nabla_{(t,\delta)}\tilde{f}(t,0) \cdot \mathrm{J}_F^{-1}(t,0). \tag{23}$$

Für den Gradienten von $\tilde{f}$ an der Stelle $(t,0)$ berechnet man

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\tilde{f}(t,0) = \frac{\partial}{\partial t_k}\frac{1}{||x-\varphi(t)||} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \delta}\tilde{f}(t,0) = \frac{\langle x-\varphi(t), n(\varphi(t))\rangle}{||x-\varphi(t)||^3}. \tag{24}$$

Nun können wir die mit -1 multiplizierte Gleichung (21) in einer Umgebung von ξ schreiben als

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I}\int_{T_j} \alpha_j(\varphi_j(t)) &\left(\sum_{k=1}^{2} m_{k,i}(t)\frac{\partial}{\partial t_k}\frac{1}{||x-\varphi_j(t)||} + m_{3,i}(t)\frac{\langle x-\varphi_j(t), n(\varphi_j(t))\rangle}{||x-\varphi_j(t)||^3}\right)\sqrt{g_j(t)}\,dt \\ &=: \sum_{j\in I}\left(\sum_{k=1}^{2} T_{k,j}(x) + T_{3,j}(x)\right) =: \sum_{j\in I}\sum_{k=1}^{2} T_{k,j}(x) + T_3(x),\end{aligned}$$

wobei wir (23) und (24) verwendet haben und $m_{i,l}(t) := \left(\mathrm{J}_F^{-1}(t,0)\right)_{i,l}$ gesetzt haben. Wir müssen nun die Beschränktheit der Terme $T_{k,j}, k \in \{1,2\}, j \in I$ und T_3 für $x \to \xi$ zeigen. Zur Beschränktheit von T_3: Es ist

$$T_3(x) = \sum_{j\in I}\int_{V_j} \frac{\langle x-\xi', n(\xi')\rangle}{||x-\xi'||^3}\alpha_j(\xi') m_{3,i}(\varphi_j^{-1}(\xi'))\,d\Omega_j(\xi').$$

Da $\xi' \mapsto m_{3,i}(\varphi_j^{-1}(\xi'))$ stetig ist, können wir abschätzen

$$\begin{aligned}|T_3(x)| &\leq \sum_{j\in I}\int_{V_j} \frac{|\langle x-\xi', n(\xi')\rangle|}{||x-\xi'||^3}|m_{3,i}(\varphi_j^{-1}(\xi'))| \cdot \alpha_j(\xi')\,d\Omega_j(\xi') \\ &\leq C\int_S \frac{|\langle x-\xi', n(\xi')\rangle|}{||x-\xi'||^3}\,d\Omega(\xi'), \quad C > 0.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist aber wegen Hilfssatz 2.14 beschränkt. Um die Beschränktheit der Terme $T_{k,j}$, $k \in \{1,2\}$, $j \in I$ zu zeigen, wenden wir den Gaußschen Satz auf das Vektorfeld

$$v(t) := \left(\alpha_j(\varphi_j(t)) m_{k,i}(t)\sqrt{g_j(t)}\right)\frac{1}{||x-\varphi_j(t)||}\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^2$$

an, wobei wir als Integrationsgebiet T_j wählen. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned}T_{k,j}(x) = \; &- \int_{T_j} \frac{\partial}{\partial t_k}\left(\alpha_j(\varphi_j(t)) m_{k,i}(t)\sqrt{g_j(t)}\right)\frac{1}{||x-\varphi_j(t)||}\,dt \\ &+ \int_0^1 \alpha_j(\varphi_j(\gamma_j(s))) m_{k,i}(\gamma_j(s))\sqrt{g_j(\gamma_j(s))}\frac{1}{||x-\varphi_j(\gamma_j(s))||}||\dot{\gamma}_j(s)||\,ds,\end{aligned} \tag{25}$$

wobei $\gamma_j(\cdot)$ die Parametrisierung von ∂T_j ist. Da α_j kompakten Träger hat, verschwindet das Linienintegral in (25). Weiter ist $\frac{1}{||x-\varphi_j(\cdot)||}$ lebesgueintegrierbar und $\frac{\partial}{\partial t_k} m_{k,i}(t)$ stetig[4] und somit ist auch das „Volumenintegral" rechts vom Gleichheitszeichen in (25) beschränkt und wir haben den Hilfssatz für

[4]Zur Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial t_k} m_{k,i}(t)$ siehe die nachfolgende Bemerkung.

$x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{G}$ bewiesen. Ist $x \in G$, so wendet man dasselbe Verfahren auf den einseitigen Randstreifen auf der Innenseite von G an. □

Bemerkung: Aus der Cramerschen Regel sieht man sofort, daß $m_{1,i}(t)$ und $m_{2,i}(t)$ gegeben sind durch

$$m_{1,i}(t) = \frac{\det\left(e_i, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t), n(\varphi(t))\right)}{\det \mathrm{J}_F(t,0)} \quad \text{und} \quad m_{2,i}(t) = \frac{\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t), e_i, n(\varphi(t))\right)}{\det \mathrm{J}_F(t,0)}.$$

Aus der Definition der Determinante,

$$\det A(t) := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}(t),$$

folgt sofort, daß die Determinante eine stetig differenzierbare Funktion ihrer Argumente ist. Wegen $\det \mathrm{J}_F(t,0) \neq 0$ für $t \in T$, sind somit $m_{k,i}(t)$, $k = 1,2$, als Quotienten stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar und somit ist $\frac{\partial}{\partial t_k} m_{k,i}(t)$ stetig.

2.16 Hilfssatz *Sei S eine Fläche, $\xi \in S$ und $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$(26) \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to\xi} \lambda(x) \sum_{i=1}^{3} \int_S -\frac{x_i - \xi_i'}{\|x-\xi'\|^3}(n_i(\pi(x)) - n_i(\xi'))\,d\Omega(\xi') &= \lambda(\xi) \int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi') \\ &+ \lambda(\xi) \int_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right) d\Omega(\xi'), \end{aligned}$$

wobei im Limes $x \in \mathbb{R}^3$ beliebig ist und π die Projektion aus Lemma 2.6 bezeichnet.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß das Integral links vom Gleichheitszeichen in (26) im Sinn von Lebesgue existiert. Dies folgt aus (11) und aus

$$(27) \qquad |n_i(\pi(x)) - n_i(\xi')| \le L\|\pi(x) - \xi'\|, \quad L \ge 0,$$

durch die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left|\int_S -\frac{x_i - \xi_i'}{\|x-\xi'\|^3}(n_i(\pi(x)) - n_i(\xi))\,d\Omega(\xi')\right| &\le L \int_S \frac{\|x-\xi'\|}{\|x-\xi'\|^3}\|\pi(x) - \xi'\|\,d\Omega(\xi') \\ &\le \int_S \frac{1}{\|x-\xi'\|^2}\|x-\xi'\|\,d\Omega(\xi') = \int_S \frac{1}{\|x-\xi'\|}\,d\Omega(\xi'). \end{aligned}$$

Die Existenz des letzten Integrals folgt aus Satz 2.4. Gleichung (27) gilt, da S kompakt und $n(\cdot)$ stetig ist und somit $n(\cdot)$ lipschitzstetig ist. Nun definieren wir wieder eine Folge stetiger Funktionen wie schon in den Beweisen von Satz 2.7 und von Hilfssatz 2.11 und zeigen, daß diese gleichmäßig gegen

$$x \mapsto \int_{S\cap K_{\varepsilon_0}(x_0)} -\frac{x_i - \xi_i'}{\|x-\xi'\|^3}(n_i(\pi(x)) - n_i(\xi'))\,d\Omega(\xi'), \quad x_0 \in S, x \in \mathbb{R}^3,$$

konvergiert. Sei also

$$F_{\delta,\varepsilon_0} : \overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \int_F K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi')(n_i(\pi(x)) - n_i(\xi'))\,d\Omega(\xi'),$$

$$K_{\delta,\varepsilon_0}(x,\xi') := \begin{cases} -\dfrac{x_i - \xi_i'}{\|x-\xi'\|^3}, & \text{falls} \quad \delta \le \|x-\xi'\| \\ -\dfrac{x_i - \xi_i'}{\delta^3}, & \text{falls} \quad \|x-\xi'\| \le \delta \end{cases},$$

wobei wir $F := S \cap K_{\varepsilon_0}(x_0)$ gesetzt haben und ε_0, δ und ϱ wieder wie im Beweis von Satz 2.7 gewählt haben. Dann ist F_{δ,ε_0} stetig in $\overline{K_{\varepsilon_0}(x_0)}$ und es folgt nach einer kleinen Rechnung

$$\begin{aligned} G_{\delta,\varepsilon_0}(x) &:= \left|F_{\delta,\varepsilon_0}(x) - \int_F -\frac{x_i - \xi_i'}{\|x-\xi'\|^3}(n_i(\pi(x)) - n_i(\xi'))\,d\Omega(\xi')\right| \\ &\le L \int_{F\cap K_\delta(x)} \frac{1}{\|\pi(x) - \xi'\|}\,d\Omega(\xi') + \frac{L}{\delta} \int_{S\cap K_\delta(x)} d\Omega(\xi'). \end{aligned}$$

Dies sind (bis auf andere Konstanten) genau dieselben Terme wie im Beweis von Satz 2.7. Damit ist die gleichmäßige Konvergenz nachgewiesen und wir dürfen in (26) Limesbildung und Integration vertauschen. □

Mit diesen Hilfssätzen sind wir nun in der Lage, eine Vorstufe des angekündigten Hauptsatzes zu beweisen.

2.17 Normalensprungrelationen hölderstetiger Belegungen *Sei G ein Normalgebiet und $S := \partial G$ seine Oberfläche. Wenn $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine hölderstetige Funktion zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$ ist, dann existieren für alle $\xi \in S$ die Grenzwerte*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_-(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in G}} \langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle \quad \textit{und} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{G}}} \langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle\,,$$

und es gilt

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_-(\xi) = \int_S \left\langle \frac{\xi'-\xi}{||\xi'-\xi||^3}, n(\xi)\right\rangle \lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') + 2\pi\lambda(\xi),$$
$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+(\xi) = \int_S \left\langle \frac{\xi'-\xi}{||\xi'-\xi||^3}, n(\xi)\right\rangle \lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') - 2\pi\lambda(\xi).$$

Beweis: Sei $\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$. Wir betrachten einen festen Punkt $\xi \in S$ und berechnen für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3\setminus S$

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\lambda(\xi')}{||x-\xi'||}\,d\Omega(\xi') = \int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\lambda(\xi')\,d\Omega(\xi'),$$

da man, wie man im Beweis von Satz 2.3 sieht, die Ableitung mit dem Integral vertauschen darf. Nun fügen wir künstlich eine Null ein und erhalten

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}(\lambda(\xi')-\lambda(x))\,d\Omega(\xi') + \lambda(x)\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\,d\Omega(\xi'). \tag{28}$$

Mit Hilfssatz 2.11 folgt dann aus (28)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)_*(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ *}} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) &= \int_S -\frac{\xi_i-\xi_i'}{||\xi-\xi'||^3}(\lambda(\xi')-\lambda(\xi))\,d\Omega(\xi') \\ &+ \lim_{\substack{x\to\xi \\ *}} \lambda(x)\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\,d\Omega(\xi'),\end{aligned} \tag{29}$$

wobei wir an dieser Stelle noch nicht wissen, ob der angeschriebene Grenzwert existiert. Der Stern in (29) steht für eine der beiden Möglichkeiten $x \in G$ oder $x \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{G}$. Nun multiplizieren wir (29) mit $n_i(\xi)$ und summieren über i von 1 bis 3. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_*(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi \\ *}} \langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle &= \int_S \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi)\right\rangle (\lambda(\xi')-\lambda(\xi))\,d\Omega(\xi') \\ &+ \sum_{i=1}^3 \lim_{\substack{x\to\xi \\ *}} \lambda(x)\int_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3} n_i(\xi)\,d\Omega(\xi').\end{aligned} \tag{30}$$

Dabei ist das erste Integral in (30) nach Hilfssatz 2.12 wohldefiniert. Um den Grenzwert in (30) zu berechnen, vereinfachen wir weiter:

$$
\begin{aligned}
(31) \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_*(\xi) &= \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\tilde r}\bigg|_{x:=\xi}\right)\lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') - \lambda(\xi)\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\tilde r}\bigg|_{x:=\xi}\right)d\Omega(\xi') \\
&+ \sum_{i=1}^{3}\lim_{\substack{x\to\xi\\ *}}\lambda(x)\Bigg[(n_i(\xi)-n_i(\pi(x)))\int\limits_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}\,d\Omega(\xi') \\
&+ \int\limits_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}(n_i(\pi(x))-n_i(\xi'))\,d\Omega(\xi') \\
&+ \int\limits_S -\frac{x_i-\xi_i'}{||x-\xi'||^3}n_i(\xi')\,d\Omega(\xi')\Bigg].
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren die eckige Klammer aus und bezeichnen die Terme von links nach rechts mit T_1, T_2 und T_3. Nach Hilfssatz 2.15 konvergiert T_1 für $x \to \xi$ gegen 0. T_2 konvergiert nach Hilfssatz 2.16 gegen

$$
(32) \qquad \lambda(\xi)\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r'}\right)d\Omega(\xi') + \lambda(\xi)\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right)d\Omega(\xi').
$$

Der Term T_3 konvergiert schließlich für $x \to \xi, x \in G$ gegen $4\pi\lambda(\xi)$ bzw. gegen 0 für $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}$ (siehe Hilfssatz 2.14). Damit ist die Existenz des Grenzwerts in (30) und somit auch in (29) gezeigt. Setzen wir dies und (32) in (31) ein, so folgt

$$
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_*(\xi) = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\tilde r}\bigg|_{x:=\xi}\right)\lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') + \lambda(\xi)\int\limits_S \frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{r'}\right)d\Omega(\xi') + \begin{cases} 4\pi\lambda(\xi) & \text{falls } x \in G \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}. \end{cases}
$$

Wendet man nun noch Hilfssatz 2.13 an, so folgt nach insgesamt endlicher Rechnung

$$
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_\mp(\xi) = \int\limits_S \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi)\right\rangle \lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') \pm 2\pi\lambda(\xi).
$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Zum Schluß dieses Abschnitts zitieren wir noch ein schwerer zu beweisendes Resultat. Es wurde u. a. von Michael Wiegner bewiesen. Eine weitere Quelle ist [5].

2.18 Satz *Sei G ein Normalgebiet und $S := \partial G$ seine Oberfläche. Wenn $\lambda : S \to \mathbb{R}$ hölderstetig zum Exponenten $\alpha \in (0,1)$ ist, dann existieren für alle $\xi \in S$ und $i \in \{1,2,3\}$ die Grenzwerte*

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}U_-(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in G}} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}U_+(\xi) := \lim_{\substack{x\to\xi\\ x\in\mathbb{R}^3\backslash\overline{G}}} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x),
$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}U_-(\xi) &= \fint\limits_S \frac{\xi_i'-\xi_i}{||\xi'-\xi||^3}\lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') + 2\pi\lambda(\xi)n_i(\xi), \\
\frac{\partial}{\partial x_i}U_+(\xi) &= \fint\limits_S \frac{\xi_i'-\xi_i}{||\xi'-\xi||^3}\lambda(\xi')\,d\Omega(\xi') - 2\pi\lambda(\xi)n_i(\xi),
\end{aligned}
$$

wobei $n(\xi)$ die äußere Einheitsnormale in ξ ist.

Beweis: Siehe [9]. □

Wiegner zeigt in [9] weiter, daß die stetige Fortsetzung von ∇U auf $\overline{G}$ aus $(C^\alpha(\overline{G}))^3$ ist, mit dem Exponenten α aus Satz 2.18.

2.3 Der Hauptsatz für stetige Flächenbelegungen

Im vorigen Abschnitt wurden die Normalensprungrelationen für hölderstetige Funktionen gezeigt. Durch ein Approximationsverfahren zeigen wir jetzt, daß dieser Satz auch für stetige Flächenbelegungen gilt. Sei also $\lambda : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf der Oberfläche S eines Normalgebiets G. Aus dem Beweis des Projektionslemmas 2.6 folgt: Zu jedem $x_0 \in S$ gibt es ein $\varepsilon_0(x_0) > 0$, so daß in $K_{\varepsilon_0(x_0)}(x_0)$ die Funktion F C^1-invertierbar ist. Weiter gilt

$$S \subset \bigcup_{x_0 \in S} K_{\varepsilon_0(x_0)}(x_0).$$

Da S kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_N \in S$ mit

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_{\varepsilon_0(x_i)}(x_i),$$

und somit existiert ein $R > 0$, so daß in dem äußeren Randstreifen

$$\tilde{S} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \,\text{Karte}\, \varphi \,\exists\, (t_x, \delta_x) : x = F(t_x, \delta_x),\, 0 < \delta_x < R\}$$

nach Lemma 2.6 die Projektionseigenschaft gilt. Nun definieren wir

$$\tilde{\lambda} : \tilde{S} \to \mathbb{R}, \quad x = F(t_x, \delta_x) \mapsto \lambda(\varphi(t_x))$$

und

$$\hat{S} := \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \,\text{Karte}\, \varphi \,\exists\, (t_x, \delta_x) : x = F(t_x, \delta_x),\, \tfrac{1}{4}R \le \delta_x \le \tfrac{1}{2}R\right\}.$$

Da $\hat{S}$ kompakt ist, folgt mit Hilfe einer Teilung der Eins (Corollar zu Satz 1, Paragraph 3 in [2]), daß es eine stetige Funktion $\hat{\lambda} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt mit Träger in $\tilde{S}$ und $\hat{\lambda}|_{\hat{S}} = \tilde{\lambda}|_{\hat{S}}$.
Ausgehend von $\hat{\lambda}$ konstruieren wir nun mit Hilfe der Friedrichsschen Glättung eine Folge hölderstetiger Funktionen $\lambda_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die gegen λ konvergiert (siehe [3]). Sei dazu $\varrho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp} \varrho \subseteq K_1(0)$, $\varrho \ge 0$ und $\int_{\mathbb{R}^3} \varrho(x)\, dx = 1$. Für $m \in \mathbb{N}$ definieren wir nun

$$\lambda_m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto m^3 \int_{\mathbb{R}^3} \varrho\left(\frac{x-y}{\frac{1}{m}}\right) \hat{\lambda}(y)\, dy.$$

Dann ist $\lambda_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ und somit ist λ_m hölderstetig und es gilt

$$\lambda_m(x) = \int_{|z| \le 1} \varrho(z) \hat{\lambda}(x - \tfrac{1}{m} z)\, dz.$$

Ausgehend von diesen λ_m und λ setzen wir nun

$$U_m(x) := \int_S \frac{\lambda_m(\xi')}{||x - \xi'||}\, d\Omega(\xi') \quad \text{und} \quad U(x) := \int_S \frac{\lambda(\xi')}{||x - \xi'||}\, d\Omega(\xi').$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
||\lambda_m - \lambda||_{C^0(S)} &:= \sup_{\xi \in S} |\lambda_m(\xi) - \lambda(\xi)| = \sup_{\xi \in S} \left| \int_{|z| \le 1} \varrho(z) (\hat{\lambda}(\xi - \tfrac{1}{m} z) - \lambda(\xi))\, dz \right| \\
&\le M \cdot \sup_{\xi \in S} \int_{|z| \le 1} |\hat{\lambda}(\xi - \tfrac{1}{m} z) - \lambda(\xi)|\, dz, \quad M := \max_{|z| \le 1} \varrho(z) \\
&\le ML \cdot \sup_{\xi \in S} \int_{|z| \le 1} ||\pi(\xi - \tfrac{1}{m} z) - \xi||\, dz, \quad L \ge 0 \qquad (33) \\
&\le \frac{4\pi}{3} ML \cdot \sup_{\xi \in S} \left(\sup_{|z| \le 1} ||\pi(\xi - \tfrac{1}{m} z) - \xi|| \right) =: K \frac{1}{m} \to 0, \quad m \to \infty.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in (33) $\hat{\lambda}(\xi - \frac{1}{m}z) = \lambda(\pi(\xi - \frac{1}{m}z))$ verwendet. Wir berechnen nun für festes $\xi \in S$

$$\left| \frac{\partial U}{\partial n}(x) - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+ (\xi) \right| \leq T_1 + T_2 + T_3 \tag{34}$$

mit

$$T_1 = \left| \frac{\partial U}{\partial n}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial n}(x) \right|, \quad T_2 = \left| \frac{\partial U_m}{\partial n}(x) - \left(\frac{\partial U_m}{\partial n}\right)_+ (\xi) \right|, \quad T_3 = \left| \left(\frac{\partial U_m}{\partial n}\right)_+ (\xi) - \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+ (\xi) \right|.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \geq M$ gilt $||\lambda_m - \lambda|| < \varepsilon$.
Zu T_1: Durch einsetzen der Definitionen und anwenden der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned}
T_1 &= |\langle \nabla U(x), n(\xi)\rangle - \langle \nabla U_m(x), n(\xi)\rangle| \leq ||\nabla(U(x) - U_m(x))|| \\
&\leq \int_S \frac{1}{||x-\xi'||^2} |\lambda(\xi') - \lambda_m(\xi')| \, d\Omega(\xi') \leq K|S| \cdot \sup_{\xi \in S} |\lambda_m(\xi) - \lambda(\xi)| \\
&= K|S| \cdot ||\lambda_m - \lambda||_{C^0(S)} < K|S|\varepsilon, \quad K := \sup_{\xi \in S} \frac{1}{||x-\xi||^2}, \ |S| := \int_S d\Omega(\xi').
\end{aligned}$$

Zu T_2: Aus den Normalensprungrelationen für hölderstetige Belegungen (Satz 2.17) folgt sofort, daß für x genügend nahe bei ξ gilt $T_2 < \varepsilon$.
Zu T_3: Wir setzen zur Abkürzung $K(\xi, \xi') := \left\langle -\frac{\xi - \xi'}{||\xi - \xi'||^3}, n(\xi) \right\rangle$ und berechnen

$$\begin{aligned}
T_3 &= \left| \int_S K(\xi,\xi')\lambda_m(\xi') \, d\Omega(\xi') - 2\pi\lambda_m(\xi) - \int_S K(\xi,\xi')\lambda(\xi') \, d\Omega(\xi') + 2\pi\lambda(\xi) \right| \\
&\leq \left| \int_S K(\xi,\xi') \, d\Omega(\xi') \right| \cdot ||\lambda_m - \lambda||_{C^0(S)} + 2\pi|\lambda_m(\xi) - \lambda(\xi)| \\
&\leq \left(\left| \int_S K(\xi,\xi') \, d\Omega(\xi') \right| + 2\pi \right) ||\lambda_m - \lambda||_{C^0(S)} < \tilde{C}\varepsilon.
\end{aligned} \tag{35}$$

Die große runde Klammer in (35) ist dabei wegen Hilfssatz 2.12 und der Kompaktheit von S beschränkt. Damit folgt insgesamt, daß für $x \to \xi$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}$ die Normalenableitung in $\xi \in \partial G$ in (34) existiert. Ein analoges Resultat gilt für $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- (\xi)$, wenn man einen inneren Randstreifen verwendet. Somit haben wir die Normalensprungrelationen für stetige Flächenbelegungen gezeigt:

2.19 Normalensprungrelationen stetiger Belegungen *Sei G ein Normalgebiet und $S := \partial G$ seine Oberfläche. Wenn $\lambda : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Flächenbelegung ist, dann existieren für alle $\xi \in S$ die Grenzwerte*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- (\xi) := \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in G}} \langle \nabla U(x), n(\xi) \rangle \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+ (\xi) := \lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{G}}} \langle \nabla U(x), n(\xi) \rangle,$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- (\xi) &= \int_S \left\langle \frac{\xi' - \xi}{||\xi' - \xi||^3}, n(\xi) \right\rangle \lambda(\xi') \, d\Omega(\xi') + 2\pi\lambda(\xi), \\
\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_+ (\xi) &= \int_S \left\langle \frac{\xi' - \xi}{||\xi' - \xi||^3}, n(\xi) \right\rangle \lambda(\xi') \, d\Omega(\xi') - 2\pi\lambda(\xi).
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Das Neumannsche Problem für stetige Randvorgaben

Nachdem im letzten Kapitel die Normalensprungrelationen für stetige Flächenbelegungen bewiesen wurden, soll dies nun auf die Lösung des Neumannschen Problems angewandt werden. Um das abstrakte Neumannsche Problem zu motivieren, machen wir in Kapitel 3.1 zunächst einen kleinen Exkurs in die Elektrostatik und wenden uns dann in Kapitel 3.2 der mathematischen Formulierung zu.

3.1 Das Neumannsche Problem in der Elektrostatik

Um den streng mathematischen Aufbau etwas aufzulockern, befassen wir uns in diesem Abschnitt mit dem Neumannschen Problem in der Elektrostatik. Dabei werden wir ausschließlich heuristisch argumentieren und auf Beweise verzichten.

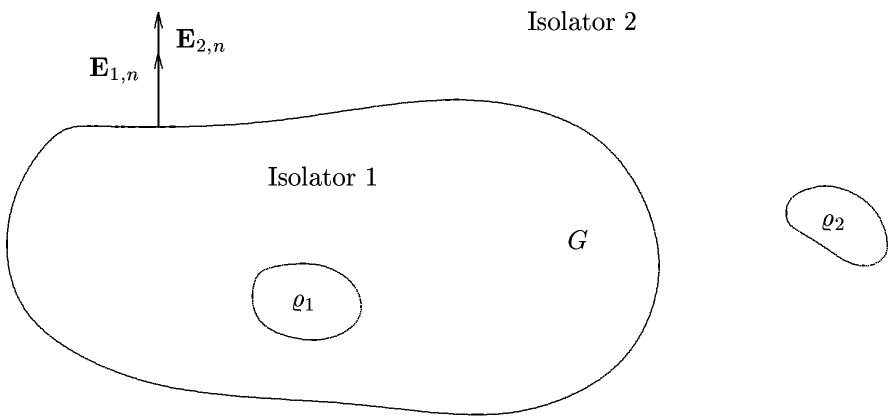

Abbildung 3.1: Sprungbedingungen an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien.

Wir gehen von der in Abbildung 3.1 skizzierten Situation aus: In einem Raumgebiet G befinde sich ein Isolator 1 mit dielektrischer Konstante ε_1 und eine vorgegebene Raumladungsdichte ϱ_1. Das Außenraumgebiet $\mathbb{R}^3\backslash\overline{G}$ werde von dem Isolator 2 mit dielektrischer Konstante $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$ durchsetzt. Im Außenraumgebiet befinde sich die Ladungsdichte ϱ_2. Gesucht ist das elektrostatische Potential Φ (und damit das elektrische Feld $\mathbf{E} := -\nabla\Phi$) in ganz $\mathbb{R}^3\backslash\partial G$. Wir machen für Φ den Ansatz

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & \text{falls} \quad x \in G \\ \Phi_2(x), & \text{falls} \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{G}. \end{cases}$$

Aus physikalischen Überlegungen ist bekannt, daß auf dem Rand von G das elektrische Feld in Normalenrichtung den Sprung

(1) $$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}$$

macht. Wir beginnen, indem wir die inhomogene Gleichung

$$\Delta\Phi_i = \varrho_i, \quad i = 1,2 \tag{2}$$

lösen. Eine sogenannte partikuläre Lösung von (2) wird bekanntlich durch das Poissonsche Integral

$$\Phi_{p,i}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\varrho_i(x')}{||x-x'||}\,dx', \quad i = 1,2, \tag{3}$$

gegeben, wobei das Integrationsgebiet G bzw. $\mathbb{R}^3\backslash G$ ist. (3) erfüllt im allgemeinen die Randbedingung (1) nicht. Die Idee ist nun, zu (3) eine geeignete Lösung U von

$$(NP)\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{in} \quad \mathbb{R}^3\backslash\partial G \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = g & \text{auf} \quad \partial G \end{cases}$$

zu addieren, so daß die Randbedingung erfüllt ist. Wir setzen dann

$$\Phi_1 := \Phi_{p,1} + U \quad \text{und} \quad \Phi_2 := \Phi_{p,2} + U.$$

Dann erfüllt Φ_i die inhomogene Gleichung (2) und für die Normalenableitungen gilt

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_{p,1}}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_{p,2}}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n}. \tag{5}$$

Multiplizieren wir (4) mit ε_1 und (5) mit ε_2, so folgt aus (1) nach einer kleinen Umformung

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}\left(\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_{p,1}}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\Phi_{p,2}}{\partial n}\right) =: g.$$

Damit haben wir die Lösung dieses physikalischen Problems auf die Lösung des Neumannschen Problems (NP) zurückgeführt.

3.2 Die mathematische Formulierung

In diesem Abschnitt werden wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz über das Neumannsche Problem bei stetigen Randvorgaben formulieren und beweisen. Dabei werden wir fast alles aus [6] und [8] zitieren.

3.1 Das Neumannsche Problem *Sei G ein Normalgebiet und $g : \partial G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit*

$$\int\limits_{\partial G} g(\xi)\,d\Omega(\xi) = 0. \tag{6}$$

Wir setzen nun

$$C^1_n(\overline{G}) := \left\{ u \in C^1(G)\cap C^0(\overline{G}) \;\middle|\; \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_-(\xi) \textit{ existiert für alle } \xi \in \partial G \textit{ und ist stetig auf } \partial G \right\}.$$

Dann gibt es ein $U \in C^2(G)\cap C^1_n(\overline{G})$ mit

$$(NP)\begin{cases} \Delta U = 0 & \textit{in} \quad G \\ \dfrac{\partial U}{\partial n} = g & \textit{auf} \quad \partial G, \end{cases}$$

wobei $\frac{\partial U}{\partial n}$ im Sinn von $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_-$ zu verstehen ist. Ist V eine weitere Lösung von (NP), so unterscheiden sich U und V nur um eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, das heißt

$$U - V = c \quad \textit{auf} \quad G.$$

Beweis: Wir definieren für $x \in G$ das Potential U durch

$$U(x) := \int_{\partial G} \frac{\lambda(\xi')}{||x-\xi'||}\, d\Omega(\xi'), \tag{7}$$

wobei $\lambda : \partial G \to \mathbb{R}$ eine zunächst noch unbestimmte stetige Funktion ist. Nach Satz 2.3 erfüllt dann (7) die Laplacegleichung $\Delta U = 0$ in G. Nun erklären wir einen Integralkern $K(\cdot,\cdot)$ durch

$$K : \partial G \times \partial G \backslash \{(\xi,\xi') \in \partial G \times \partial G \,|\, \xi = \xi'\} \to \mathbb{R}, \quad (\xi,\xi') \mapsto \left\langle \nabla_\xi \frac{1}{||\xi-\xi'||}, n(\xi) \right\rangle. \tag{8}$$

Dann ist K stetig und nach (4) in Kapitel 2.1 gilt

$$|K(\xi,\xi')| = \frac{1}{||\xi-\xi'||^3} |\langle \xi-\xi', n(\xi)\rangle| \leq \frac{M}{||\xi-\xi'||^\alpha}, \quad \alpha = 1.$$

Somit wurde K aus (8) als schwach singulärer Integralkern bezüglich des zweidimensionalen Flächenmaßes $d\Omega(\cdot)$ nachgewiesen ($\alpha < n = 2$). Durch

$$K : L^2(\partial G) \to L^2(\partial G), \quad \lambda \mapsto -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} K(\xi,\xi')\lambda(\xi')\, d\Omega(\xi') \tag{9}$$

wird nach den Hilfssätzen 2.5.8 und 2.5.9 aus [6] ein linearer, beschränkter und kompakter Operator gegeben. Jetzt berechnen wir nach Satz 2.19 die Normalensprungrelation der stetigen Belegung λ und erhalten

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_- = 2\pi(I-K)\lambda \qquad \text{auf} \quad \partial G.$$

Da $\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_-$ auf ∂G andererseits gleich g sein soll, folgt

$$(I-K)\lambda = \frac{1}{2\pi} g \qquad \text{auf} \quad \partial G. \tag{10}$$

Die Fredholmsche Alternative (Satz 2.5.15 in [6]) besagt nun: (10) ist zu gegebenem $\frac{1}{2\pi}g \in C^0(\partial G)$ genau dann lösbar, wenn für alle $f \in \mathcal{N}(I-K^*) := \{f \in L^2(\partial G) \,|\, (I-K^*)f = 0\}$

$$\int_{\partial G} g(\xi) f(\xi)\, d\Omega(\xi) = 0 \tag{11}$$

gilt. In diesem Fall ist die Lösung λ aus $C^0(\partial G)$.
Wir haben nun den Nullraum $\mathcal{N}(I-K^*)$ zu charakterisieren. Nach Hilfssatz 2.5.14 in [6] ist der zu K adjungierte Integralkern K^* gegeben durch $K^*(\xi,\xi') = K(\xi',\xi)$. Aus dem Beweis von Satz 2.5.15 in [6] entnimmt man ferner $L^2(\partial G) \subset L^1(\partial G)$ und somit ist ein $f \in \mathcal{N}(I-K^*)$ automatisch in $C^0(\partial G)$. Für ein $f \in \mathcal{N}(I-K^*)$ muß

$$f(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \left\langle \frac{\xi-\xi'}{||\xi-\xi'||^3}, n(\xi') \right\rangle f(\xi')\, d\Omega(\xi') = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r'}\right) f(\xi')\, d\Omega(\xi')$$

gelten. Aus Hilfssatz 2.13 sieht man sofort

$$\{f : \partial G \to \mathbb{R}, \xi \mapsto c \,|\, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{N}(I-K^*). \tag{12}$$

Durch wesentlich tiefliegendere topologische Betrachtungen, wie sie in Satz I.2.2 in [8] angestellt werden, sieht man, daß in (12) auch die umgekehrte Mengeninklusion gilt, da unsere Normalgebiete nach Definition 2.1 nur aus einer Zusammenhangskomponente bestehen.
Insgesamt haben wir damit $\mathcal{N}(I-K^*) = \{f : \partial G \to \mathbb{R}, \xi \mapsto c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ und die Lösbarkeitsbedingung (11) ist äquivalent zur Voraussetzung (6). Damit ist die Existenz einer Lösung von (NP) gezeigt.
Zur Eindeutigkeit der Lösungen: Für eine zweite Lösung V von (NP) setzen wir $\varphi := U-V$ und bemerken, daß nach dem starken Hopfschen Maximumprinzip [1, Seite 151, III] $\varphi = c$ in G, c eine Konstante, gilt, da die in [1] definierte Normalenableitung mit unserer übereinstimmt. Damit ist der Satz bewiesen. □

Literaturverzeichnis

[1] Lipman Bers, Fritz John, Martin Schechter: *Partial Differential Equations.* Interscience Publishers. New York 1964

[2] Otto Forster: *Analysis 3.* Vieweg-Verlag. 3. Auflage. Braunschweig 1984

[3] Avner Friedman: *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston. New York 1969.

[4] Erich Martensen: *Potentialtheorie.* B. G. Teubner-Verlag. Stuttgart 1968

[5] V. I. Smirnov: *A Course of Higher Mathematics.* Vol. IV. Integral Equations and Partial Differential Equations. Pergamon Press. Oxford 1964

[6] Wolf von Wahl: *Funktionalanalysis.* Vorlesungsausarbeitung. Fachschaft Mathematik und Physik. Universität Bayreuth

[7] Wolf von Wahl: *Potentialtheorie.* Vorlesungsskriptum

[8] Wolf von Wahl: *Vorlesung über das Außenraumproblem für die instationären Gleichungen von Navier-Stokes.* Rudolph-Lipschitz-Vorlesung. Sonderforschungsbereich 256: Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen **11**. Bonn 1989

[9] Michael Wiegner: *Schauder Estimates for Boundary Layer Potentials.* Math. Meth. Appl. Sci. **16**. 877-894. (1993)

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

....

Stefan Friedrich