



**UNIVERSITÄT
BAYREUTH**

Fakultät für Mathematik und Physik
Lehrstuhl Angewandte Mathematik
– Partielle Differentialgleichungen
und mathematische Physik –
Prof. Dr. Wolf von Wahl

Zulassungsarbeit im Fach Mathematik

**Das Poincarésche Zentrumproblem
Nicht-degenerierter und degenerierter Fall**

Eingereicht von Matthias Brandl
Bayreuth, im August 2003

Danksagung

I see a pig broken into a beautiful garden and rooting up all flowers and trees [...] I am afraid that mathematics will perish before the end of this century if the present trend for senseless abstraction - as I call it: theory of the empty set - cannot be blocked up.¹

Carl Ludwig Siegel 1964

Im ersten Teil dieser Arbeit geht es um die Ausarbeitung einer Idee C. L. SIEGELs, die einen Beitrag zum POINCARÉschen Zentrumproblem macht. Ich hoffe, mit meiner Arbeit “die schöne Blume“, die SIEGEL in den Garten der Mathematik gepflanzt hat, nicht ausgerissen, sondern gebühlich umsorgt zu haben. Zumindest wenn ich an die Freude meines Betreuers Prof. Wolf VON WAHL über “**u mal v**“ denke², glaube ich, dass dies vielleicht gelungen sein könnte.

Nicht nur für die Begeisterung und ständige Motivation Prof. VON WAHLs möchte ich mich bei ihm bedanken, sondern auch für seine selbstlose Aufforderung “*Sie können immer zu mir kommen.*“. Die hervorragende Auswahl dieses Themas stellt eine interessante Mischung aus reiner und angewandter Mathematik dar. Durch seine historischen Wurzeln bei POINCARÉ und HILBERT streift es zudem eine faszinierende Epoche der Mathematikgeschichte.

Mein Dank geht ferner an alle (angehenden und fertigen) MathematikerInnen, PhysikerInnen und LehrerInnen aus meinem Freundeskreis, die mich im letzten halben Jahr mental unterstützt und die fertige Arbeit Korrektur gelesen haben.

Ganz besonders lieben Dank schulde ich Birgit, deren verständnisvolle Art und klarer Wille mir geholfen hat, viele Tiefen zu durchqueren und manche Höhen zu erklimmen. Ihr ist es zu verdanken, dass diese Arbeit in der vorliegenden Form zustande gekommen ist.

¹Hier wettet SIEGEL gegen die Formalisten der Gruppe Nicolas BOURBAKI. Dieser Name ist ein Pseudonym für eine Gruppe von französischen Mathematikern, die sich in den 30er Jahren des vergangenen Jahrhunderts zusammenfanden, um mit mengentheoretischer Axiomatik und Strenge die bekannte Mathematik in neuer abstrakter Zusammenfassung zu kodifizieren.

²vgl. hierzu den “Zentrumssatz“ 2.24 in Kapitel 2.2

Zu guter Letzt möchte ich meinen Eltern danken, die mir das Studium der “*Sprache der Natur*“ ermöglicht haben. Im Sinne des berühmten englischen Mathematikers G. H. HARDY fand ich in der Mathematik meine künstlerischen und literarischen Interessen miteingebunden:

A mathematician like a painter or poet, is a maker of patterns. [...] The mathematicians patterns, like the painters or the poets, must be beautiful; the ideas, like the colours or the words, must fit together in a harmonious way.

G. H. Hardy 1940

Bayreuth im August 2003

Matthias Brandl

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
1 Einleitung	1
1.1 Historische und systematische Einordnung des Problems	1
1.2 Der kleine Beitrag dieser Arbeit zum POINCARÉschen Zentrumproblem	6
2 Der nicht-degenerierte Fall	7
2.1 Die Stabilität der Gleichgewichtslösung	7
2.1.1 Das Ausgangssystem: Voraussetzungen und Definitionen	7
2.1.2 Eine notwendige Bedingung für eine Normalform	10
2.1.3 Eine vorbereitende lineare Substitution	12
2.1.4 Betrachtung des linearisierten Differentialgleichungssystems	14
2.1.5 Die beiden Hauptsätze des Artikels	18
2.1.6 Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2	32
2.1.7 Das Resultat: ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung	33
2.1.8 Spezialfall: $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Polynome	35
2.2 Die Existenz eines Zentrums im Ursprung	36
3 Der degenerierte Fall	40
3.1 Grundlagen	40
3.1.1 Das Ausgangssystem im degenerierten Fall	40
3.1.2 Betrachtung des Problems als PFAFFsche Form	41
3.1.3 Betrachtung des Problems als Differentialgleichung	43
3.2 Transformation auf Polarkoordinaten	44
3.3 Die Existenz einer periodischen Stammfunktion	45
3.3.1 Bedingung für den Wirbelfall	46
3.3.2 Lösung der Integrabilitätsbedingung	47
3.3.3 Konvergenz des EULERSchen Multiplikators	53
3.4 Beispiel für den degenerierten Fall	56
4 Ausblick	58

A Die Realitätsbedingungen	60
A.1 Erläuterungen zum Anhang A	60
A.2 Vorbemerkung	60
A.3 Die Ausgangssituation	60
A.4 Der rein imaginäre Fall	61
A.5 Die Eigenwerte und Eigenvektoren	62
A.6 Konjugiert komplexe Koeffizienten	63
A.7 Die Realitätsbedingungen	64
B Kurzbiographien	66
B.1 Henri Poincaré	67
B.2 David Hilbert	68
B.3 Carl Ludwig Siegel	68

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Historische und systematische Einordnung des Problems

Hinweis: Die Literaturangaben für dieses Kapitel sind mit Großbuchstaben im Literaturverzeichnis aufgeführt und nicht alphabetisch, sondern in der Reihenfolge sortiert, in der sie im Text verwendet werden. Dadurch wird eine Abgrenzung zu der Literatur speziell zum Thema dieser Arbeit (die mit Ziffern numeriert wird) erreicht.

Gegenstand dieser Arbeit ist das sogenannte „*POINCARÉsche Zentrumproblem*“, das seine Wurzeln in himmelsmechanischen Fragestellungen hat. Vor mehr als 100 Jahren beschäftigte die Wissenschaft die Frage, wie stabil unser Sonnensystem sei. Der damalige König Oskar II. von Schweden und Norwegen setzte im Jahr 1885 sogar einen Preis auf die Lösung des sogenannten n -Körperproblems aus.¹ Obwohl der damalige Gewinner des Preises, Henri POINCARÉ (1854-1912), das Problem nicht lösen konnte, wurde ihm 1889 der Preis für seine, die künftige Entwicklung der Mechanik stark beeinflussenden Ideen zugesprochen.² Aus heutiger Sicht gesehen waren diese himmelsmechanischen Betrachtungen des ausgehenden 19. Jahrhunderts die Geburtsstunde der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen, zu der neben POINCARÉ auch der russische Mathematiker Alexander M. LJAPUNOFF (1857-1918) beitrug. Seit Johannes KEPLERS (1571-1630) „*Astronomia Nova*“ aus dem Jahr 1609 war bekannt, dass sich die Planeten nicht, wie noch zu Zeiten KOPERNIKUS angenommen, auf Kreisen, sondern auf Ellipsen um die Sonne bewegen. Interessant war nun die Frage, unter welchen Umständen man allgemein auf (stabile) geschlossene Bahnen schließen könne.

Bei einer mathematischen Betrachtung dieses Problems erhält man ausgehend von der Kreisgleichung die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

¹Das n -Körperproblem besteht in der Beschreibung des Gesamtverlaufs aller Lösungen der Bewegungsgleichungen für n Massenpunkte im dreidimensionalen euklidischen Raum für beliebig vorgegebene Anfangswerte, vgl. [19], §5.

²Die endgültige Lösung des n -Körperproblems gelang erst 1991 dem chinesischen Mathematiker Quidong WANG (vgl. [A]).

$$y' = -\frac{x + p(x, y)}{y + q(x, y)},$$

wobei p und q Störungsterme³ sind, die im Umfeld des Ursprungs Abweichungen von konzentrischen Kreisen hervorrufen. Darüber hinaus ist $x = y = 0$ der einzige Gleichgewichtspunkt in der Nähe des Ursprungs. Aus der qualitativen Theorie der Differentialgleichungen ergibt sich nun als charakteristisches Verhalten der Lösungen dort einerseits die stabile Möglichkeit ausschließlich geschlossener Bahnen periodischer Lösungen um das Zentrum $(0,0)$ (sogenannter **Wirbelfall**)⁴ und andererseits die instabile Variante von spirilig um den Ursprung verlaufenden Bahnen (sogenannter **Strudelfall**)⁵.

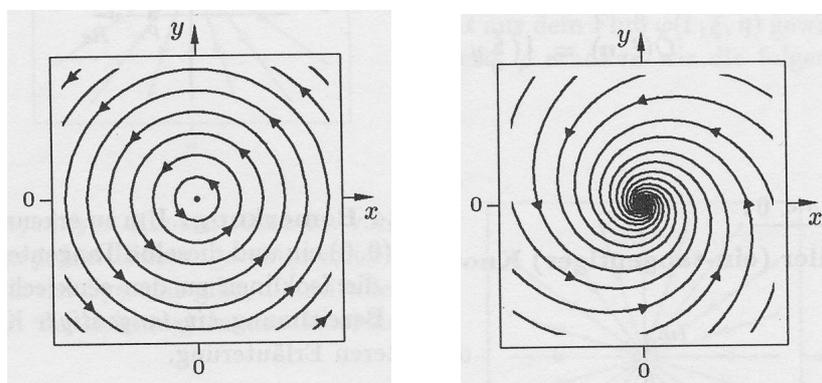


Abbildung 1.1: *Wirbel und Strudel*

Das *POINCARÉsche Zentrumproblem*, das zum erstenmal 1885 in [B] aufgeworfen wird,⁶ besteht nun darin, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür zu finden, dass der Wirbelfall eintritt, d.h. der Ursprung ein Zentrum ist - oder in himmelsmechanischer Ausdrucksweise: der Planet weder in die Sonne stürzt, noch ins weite All abdriftet. So sehr anwendungsnah und physikalisch dieses Problem anmutet, so wenig trifft es doch tatsächlich die Interessenlage der Mathematiker der Jahrhundertwende. Die vielfältigen mathematischen Erfolge hatten das bisherige Kompaktum Mathematik aufgebläht und ausgefranst. Die Anzahl der mathematischen Teilgebiete hatte sich enorm vermehrt, und die höchst unterschiedlichen Entwicklungsziele der einzelnen Disziplinen traten der Vision von einem stabilen einheitlichen Gedankengebäude entgegen. Die Sorge der Mathematiker um einen inneren Zusammenhang der Mathematik, der Ruf nach der Pflege ihrer inneren Struktur wurde laut. Auch hier spielt nun die Person Henri POINCARÉ eine bedeutende Rolle. Seine Überzeugung, die Schwierigkeiten könnten nur durch

³ p, q sind i.a. Potenzreihen in x und y , die mit quadratischen Gliedern beginnen.

⁴Für eine genaue Definition der Begriffe „Wirbelfall“, „Strudelfall“ und „Zentrumproblem“ vgl. Kapitel 2.1.1.

⁵Die folgenden Bilder wurden [2], S. 552/553 entnommen.

⁶Den Begriff „Zentrum“ definiert POINCARÉ bereits 1881 in [C].

gemeinsames Handeln überwunden werden, ließ ihn 1894 in Zürich den 1. Internationalen Mathematikerkongress einberufen. Die Sitzung endete für die knapp hundert Teilnehmer allerdings in einem zu erwartenden Desaster, da wie bei einem Familienfest tatsächlich jeder von etwas anderem sprach. Ein fruchtbarer Gedankenaustausch konnte somit nicht stattfinden. Die einzige Entscheidung, die zustande kam, war die, den nächsten Kongress besser vorzubereiten, was dann auch geschah. Unter dem Vorsitz von Henri POINCARÉ fand vom 6. bis 12. August 1900 in Paris der 2. Internationale Mathematikerkongress statt. Das gewichtigste Ereignis dieser Veranstaltung war sowohl aus damaliger wie auch aus heutiger Sicht David HILBERTs (1862-1943) Vortrag „*Mathematische Probleme*“ vom 8. August, den er in den Bereichen „*Geschichte und Bibliographie*“ und „*Didaktik und Methodologie*“ hielt. Der damals 38-jährige Professor der Universität Göttingen sprach vor gut der Hälfte der Kongressteilnehmer von seiner Überzeugung, dass spezielle Probleme die Mathematik im kommenden Jahrhundert inspirieren und formen würden.⁷ Daraufhin verlas HILBERT eine lange Liste dieser Probleme. Mehrere von ihnen konnten durch Wortmeldungen einzelner Anwesender im Auditorium sofort ad acta gelegt werden. Am Ende blieben 23 ungelöste Probleme übrig. Wir wollen unser Augenmerk hier ausschließlich auf das 16. Problem richten und verweisen für die anderen Probleme auf entsprechende Literatur (z.B. [D]). Carmen CHICONE und Tian JINGHUANG zitieren in [E] einen Auszug aus HILBERTs Problembeschreibung, den wir hier kurz wiedergeben möchten:

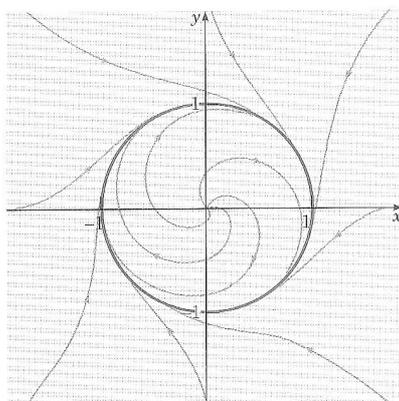
„[...] I wish to bring forward a question which, it seems to me, may be attacked by the [...] method of continuous variations of coefficients, and whose answer is of value for the topology of families of curves defined by differential equations. This is the question as to the maximum number and position of Poincaré’s boundary cycles (cycles limites) for a differential equation of the first order and degree of the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

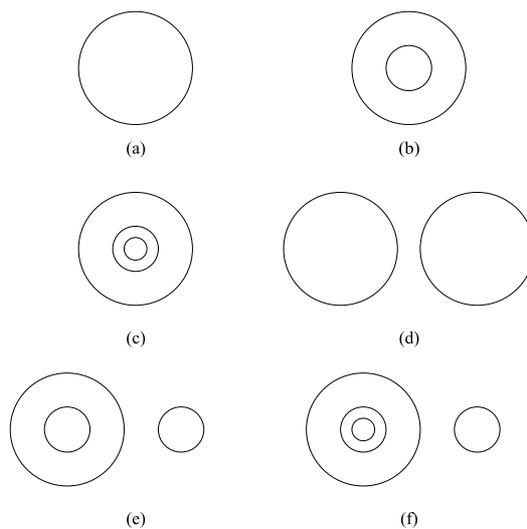
here X and Y are rational integral functions of the nth degree in x and y.“

Dieses Problem - bei dem es sich zudem nur um den zweiten Teil des 16. HILBERTschen Problems handelt (zum ersten Teil später mehr) - stellte sich als eines der schwierigsten unter HILBERTs ursprünglicher Auswahl heraus; tatsächlich ist es bis heute noch nicht einmal für quadratische Systeme gelöst. Lawrence M. PERKO gibt in [F] aus dem Jahr 1984 eine Zusammenfassung der bis dahin bekannten Konstellationen von Grenzyklen für das ebene quadratische System. Allgemein wird eine geschlossene Trajektorie auf der Phasenebene, gegen die sich für $t \rightarrow \infty$ von innen oder außen andere nicht-geschlossene Trajektorien spiralförmig bewegen, als „Grenzyklus“ bezeichnet, vgl. [2], S. 628. Dort findet sich auch das folgende Bild eines Grenzyklus:

⁷Markanterweise endete seine Einleitung mit der hochfliegenden Bekundung: „In der Mathematik gibt es kein Ignorabimus.“ [*ignorabimus*“ lat. für „wir werden niemals wissen“]

Abbildung 1.2: *Beispiel für einen Grenzzyklus*

Bekannt sind demnach konkrete Beispiele für quadratische Systeme mit den folgenden Konstellationen von Grenzzyklen:

Abbildung 1.3: *Bekannte Konfigurationen von Grenzzyklen quadratischer Systeme*

Beispiele für die Konfiguration (a) wurden von Max FROMMER [6] und Yeh YEN-CHIEN [G] gegeben. Für (b) und (c) lieferten N. BAUTIN [H] und CHIN [I] Beispiele. Sie zeigten, dass es quadratische Systeme gibt, die in einer kleinen Umgebung des Ursprungs zwei oder drei Grenzzyklen besitzen; jedoch konnten sie nichts über die Situation außerhalb dieser kleinen Umgebung sagen. Die Abbildungen (d), (e) und (f) beziehen sich jeweils auf Konstellationen mit zwei kritischen Punkten. Die Beispiele für (d) fanden Yeh YEN-CHIEN [J], Tung CHIN-CHU [K] und PERKO [L]. Tung CHIN-CHU [K] lieferte auch ein Beispiel für (e). Schließlich entdeckte Shi

SONGLING [M] ein Beispiel mit mindestens vier Grenzyklen wie in (f). Tatsächlich sind bis heute nicht mehr Konfigurationen von Grenzyklen bei ebenen quadratischen Systemen bekannt. Carmen CHICONE und Tian JINGHUANG weisen hierbei auf die Schwierigkeit hin, dass HILBERTs 16. Problem unerwarteterweise in das Gebiet der algebraischen Geometrie zu führen scheint, mit dem Mathematiker aus dem Bereich der Differentialgleichungen nicht allzu gut vertraut sind. So veröffentlichten PETROVSKII und LANDIS 1958 eine Arbeit [N], in der sie eine Lösung von HILBERTs 16. Problem vorschlugen. Insbesondere zeigten sie (fälschlicherweise), dass ein ebenes quadratisches Problem höchstens drei Grenzyklen besitzen kann. Ihr Beweis verwendete in hohem Maße Resultate aus der algebraischen Geometrie von komplexen projektiven Räumen. Die Autoren mußten allerdings bald Irrtümer in ihrer Beweisführung zugeben (vgl. [O]), und es gelang ihnen nicht, sämtliche aus dem Weg zu räumen. 1967 schließlich gaben PETROVSKII und LANDIS in [P] zu, dass der Beweis eine nicht zu füllende Lücke aufweist. Beispiel (f) von Shi SONGLING konnte 1980 dann die Ungültigkeit des Beweises noch einmal untermauern. Auch in einem 1985 veröffentlichten Beweis von Yuanshun CHIN (vgl. [Q]) fanden IL'YASHENKO und Shi SONGLING 1988 (vgl. [R], [M]) Fehler.

Das *POINCARÉsche Zentrumproblem* ist aufs engste mit HILBERTs 16. Problem verwandt. Einen möglichen Weg, um Grenzyklen zu erzeugen, beschreibt Dana SCHLOMIUK in [T] und bezieht sich dabei auf [U] und [V]:

One way to produce limit cycles is by perturbing a system which has a continuous family of closed orbits, in such a way as to create limit cycles in the perturbation from some of the closed orbits in the original system. Each system with a center has a continuous family of closed orbits and thus each system could create limit cycles in perturbations.

In [T] wird zudem eine klare Verbindung zwischen der Theorie der polynomialen Vektorfelder und der Theorie der algebraischen Kurven aufgezeigt, und zwar offenbart diese sich gerade im *POINCARÉschen Zentrumproblem*. Tatsächlich suggeriert bereits HILBERTs Formulierung des 16. Problems in zwei Teilen derartige Verbindungen. Der erste Teil des Problems wird heute nämlich ganz klar in das Gebiet der algebraischen Geometrie eingeordnet. Ausgangspunkt ist eine Arbeit von Karl Gustav Axel HARNACK aus dem Jahr 1876, die beweist, dass eine Kurve n -ten Grades in der projektiven Ebene höchstens $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 1$ Züge⁸ hat und dass dieses Maximum auch erreicht wird. Das Problem manifestiert sich nun in der Frage, wie diese Züge zueinander liegen. Bisher konnte lediglich bewiesen werden, dass mindestens einer der elf Züge einer Kurve 6. Grades im Inneren eines von einem anderen Zug umschlossenen Gebietes liegt (vgl. [D], S. 257). In [T] ergibt sich nun, dass algebraische Kurven genauso wie höher-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeiten auf ganz natürliche Weise in der Theorie der polynomialen Vektorfelder auftauchen.

⁸Unter einem Zug oder auch Kurvenzug versteht man eine aus mehreren aufeinanderfolgenden Einzelkurven zusammengesetzte Kurve mit Übergangsbedingungen. So ist zum Beispiel ein Polygonzug ein (Kurven-)Zug, der ausschließlich Linien enthält; die dazugehörige Übergangsbedingung lautet Stetigkeit.

1.2 Der kleine Beitrag dieser Arbeit zum POINCARÉschen Zentrumproblem

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei große Kapitel (Kapitel 2 und 3), die beide in Verbindung mit dem POINCARÉschen Zentrumproblem stehen, jedoch unabhängig voneinander sind.

Allgemein betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + p(x, y)}{y^{2n-1} + q(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (1.1)$$

wobei $p(x, y)$, $q(x, y)$ Potenzreihen sind, die mit Termen der Ordnung $\geq 2n$ beginnen.

In **Kapitel 2** leiten wir für den **nicht-degenerierten Fall**, also den Fall, dass in (1.1) $n = 1$ ist, ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung eines Differentialgleichungssystems der Art (1.1) her, das auf den Überlegungen von C. L. SIEGEL in seinem Buch „*Vorlesungen über Himmelsmechanik*“ [19], §25 basiert. Im zweiten Teil von Kapitel 2 beweisen wir dann einen Satz, der eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Zentrums im Ursprung formuliert. Dieser Satz stellt zusammen mit dem Stabilitätskriterium aus Unterkapitel 2.1 das wichtigste Resultat des zweiten Kapitels dar.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem **degenerierten Fall**, d.h. dem Fall, für den in (1.1) $n \geq 2$ gilt. Das wesentliche Ergebnis dort ist Satz 3.14. Es wird die Periodizität einer Stammfunktion $F(\varphi, r)$ in Polarkoordinaten von (1.1) auf die Periodizität der Koeffizienten $M_\lambda(\varphi, r)$ eines EULERSchen Multiplikators zurückgeführt. Eine Bedingung für die 2π -Periodizität der $M_\lambda(\varphi, r)$ wird in Satz 3.19 bewiesen und Satz 3.22 sichert durch die Anwendung der rein-reellen Methode von Oskar PERRON die Konvergenz des EULERSchen Multiplikators. Ein Beispiel schließt dieses Kapitel ab.

Im Ausblick (**Kapitel 4**) haben wir kurz interessante (unseres Wissens nach) ungelöste Fragen bzw. Probleme zusammengestellt, die sich im Rahmen des behandelten Themas aktuell ergeben haben.

Im **Anhang** befinden sich schließlich technische sowie historische Addita. Die Realitätsbedingungen stellen klar, wann die Lösungen von (1.1) in dem Verfahren von C.L. SIEGEL aus Kapitel 2 reell sind (Anhang A). Daran fügt sich ein kurzer Abriss von Biographien der Mathematiker an, deren Werke für die vorliegende Arbeit von zentraler Bedeutung sind (Anhang B).

Kapitel 2

Der nicht-degenerierte Fall

2.1 Die Stabilität der Gleichgewichtslösung

2.1.1 Das Ausgangssystem: Voraussetzungen und Definitionen

Wie in der Einleitung erwähnt, leistet diese Arbeit einen kleinen Beitrag auf dem Weg zur Lösung des „*POINCARÉ'schen Zentrumproblems*“. Wir klären daher zunächst, was darunter zu verstehen ist:

Definition 2.1 (POINCARÉ'sches Zentrumproblem) *Für die Differentialgleichung (1.1) sind diejenigen Potenzreihen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ gesucht, bei denen alle in einer hinreichend kleinen Umgebung des Ursprungs verlaufenden Lösungskurven geschlossen sind (Wirbelfall).*¹

Es geht also darum, diejenigen Potenzreihen $P(x, y)$, $Q(x, y)$ zu finden, für die alle Lösungskurven, die in einer hinreichend kleinen ε -Umgebung

$$U_\varepsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon\}$$

des Ursprungs verlaufen, geschlossen sind.² In diesem Fall ist der Ursprung ein sog. stabiler Gleichgewichtspunkt. Genauer formuliert stellt sich der mathematische Sachverhalt wie folgt dar:

Es sei $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten zunächst etwas allgemeiner ein System von m Differentialgleichungen

$$\dot{x}_k = f_k(x) \quad (k = 1, \dots, m). \tag{2.1}$$

Definition 2.2³ *Es sei $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges System von m Differentialgleichungen 1. Ordnung. Existiert ein $x^0 \in \mathbb{R}^n$ mit $f(x^0) = 0$, dann bezeichnet man die Lösung $x = x(t) = x^0$*

¹Zur Definition von „Wirbelfall“ vgl. Definition 2.4.

²Bei den gesuchten Lösungskurven handelt es sich also um sog. JORDANKurven.

³Diese Definition ist [17], Kapitel 1 entnommen.

als Gleichgewichtslösung oder Gleichgewichtspunkt.

Das System (2.1) besitze $x = (x_1, \dots, x_m) = 0$ als Gleichgewichtslösung.⁴ Die Funktionen $f_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) seien von der reellen Variablen t unabhängig und werden in der Umgebung von $x = 0$ als konvergente Potenzreihen der Variablen x_1, \dots, x_m mit reellen Koeffizienten vorausgesetzt. Die $f_k(x)$ ($k = 1, \dots, m$) sind daher in einer Umgebung $U(0) \subset \mathbb{C}$ von 0 holomorph und enthalten kein konstantes Glied, da $x = 0$ Gleichgewichtspunkt ist, also $f(0) = 0$ gelten muss.

Mit $x(t, 0, \xi)$ werde die Lösung von (2.1) zur Anfangsbedingung $x(0, \xi) = \xi$ bezeichnet. Zur Untersuchung der Stabilität von (2.1) in $x = 0$ benötigen wir eine Abbildung S_t in einer genügend kleinen Umgebung U des Ursprungs, die jedem $\xi \in U$ ein $x(t, 0, \xi)$ zuordnet.

Definition 2.3⁵ Eine Abbildung S_t heißt **stabil in 0**, wenn zu jeder hinreichend kleinen Umgebung $U_\varepsilon(0)$ mit $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $B_\delta(0)$ mit $\delta > 0$ existiert derart, dass

$$S_t = x(t, 0, \xi), \quad \xi \in B_\delta(0), \quad (2.2)$$

in $U_\varepsilon(0)$ bleibt für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $\xi \in B_\delta(0)$.

Dabei handelt es sich um *Stabilität schlechthin*, d.h. der Gleichgewichtspunkt ist sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft stabil. Andere Autoren wie z.B. [VON WAHL] definieren Stabilität nur als *zukünftige Stabilität*.

Für die Untersuchung, wann der Gleichgewichtspunkt $x = 0$ stabil ist, muss $S_t(\cdot)$ in der Umgebung U von 0 für alle reellen t (also sowohl positive als auch negative) betrachtet werden. Dazu wird (2.1) im folgenden durch eine geeignete Variablensubstitution

$$x_k = \varphi_k(u) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.3)$$

in eine möglichst einfache Form gebracht. Der Nullpunkt muss dabei erhalten bleiben.

Die Lösungskurven, die um den kritischen Punkt verlaufen, lassen sich in zwei verschiedene Typen einteilen: in Wirbel und in Strudel. Diese bisher intuitiv verwendeten Bezeichnungen definieren wir nun genauer:

Definition 2.4 Sind in der in Definition 2.1 betrachteten Umgebung des Ursprungs (die Null sei ausgenommen) alle Lösungskurven von (1.1) geschlossen, so spricht man von einem **Wirbel** oder **Zentrum**; es liegt der **Wirbelfall** in Null vor. Andernfalls erhält man einen **Strudel**; analog spricht man von **Strudelfall**.

⁴Die Beschränkung auf die Gleichgewichtslösung $x = 0$ stellt dabei keine wesentliche Einschränkung dar. Ein Beweis dieser Behauptung findet sich in [23], Kapitel 3 (LJAPUNOV-Stabilität).

⁵Dies ist die Definition von Stabilität, die SIEGEL z.B. in [19] verwendet.

Nach Klärung der für diese Arbeit zentralen Begriffe kommen wir nun zum Inhalt des 2. Kapitels. Es stellt im ersten Teil im wesentlichen eine Ausarbeitung des Kapitels „§25. Das POINCARÉsche Zentrumproblem“ aus dem Buch „Vorlesungen über Himmelsmechanik“ [19] von Carl Ludwig SIEGEL dar. Kleine Ungenauigkeiten in SIEGELs Argumentation führen wir aus. SIEGEL stellt in diesem Kapitel ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung der Gleichgewichtslösung $(x, y) = (0, 0)$ des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

vor. Die Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ werden dabei als konvergente Potenzreihen mit reellen Koeffizienten vorausgesetzt.

Den Ausführungen in Kapitel 1 stellen wir ein Flussdiagramm voran, das die wesentlichen Schritte auf dem Weg zu den beiden Hauptresultaten des ersten Kapitels, dem Stabilitätskriterium (Satz 2.18) und dem Zentrumssatz (Satz 2.24), schematisch darstellt und die Orientierung in den Überlegungen und Beweisen erleichtern soll. Die genauen Definitionen und Formulierungen der Sätze finden sich in den jeweiligen Unterkapiteln.

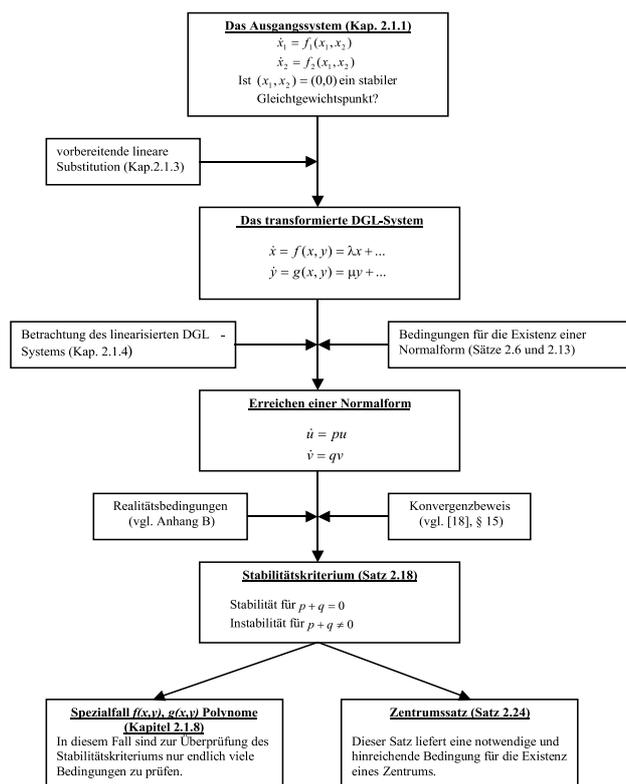


Abbildung 2.1: Flussdiagramm zu Kapitel 2

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form (2.11), das mittels einer linearen Substitution transformiert wird. Dadurch beginnen die Potenzreihen $f(x, y)$, $g(x, y)$ mit den Gliedern λx bzw. μy , wobei λ, μ die Eigenwerte der linearen Anteile von $(f(x, y), g(x, y))^t$ sind.

Im nächsten Schritt wird das System (2.13) in eine möglichst einfache Form („Normalform“) gebracht. Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Normalform wird schon in Abschnitt 2.1.2 hergeleitet. Außerdem ergibt sich aus der Betrachtung des linearisierten Systems, dass die Eigenwerte λ, μ rein imaginär und $\neq 0$ sein müssen.

Das erste wesentliche Resultat ist das Stabilitätskriterium (Satz 2.18), zu dessen Beweis die sog. Realitätsbedingungen und ein Konvergenzbeweis notwendig sind. Da zur Stabilitätsprüfung i.a. unendlich viele Bedingungen zu prüfen sind, ist dieses Ergebnis nur von theoretischer Bedeutung. Beschränkt man sich hingegen darauf, dass $f(x, y)$, $g(x, y)$ Polynome sind, wird das Problem theoretisch in endlich vielen Schritten lösbar (Abschnitt 2.1.8).

Im zweiten Teil von Kapitel 2 wird das zweite zentrale Ergebnis, das wir „Zentrumssatz“ genannt haben, formuliert und bewiesen. Der Zentrumssatz enthält eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Zentrums.

2.1.2 Eine notwendige Bedingung für eine Normalform

Das Stabilitätskriterium (Satz 2.18), das das wesentliche Ergebnis von Kapitel 2.1 darstellt, geht von einem Differentialgleichungssystem in einer besonderen Form aus, die wir in dieser Arbeit als *Normalform* bezeichnen werden:

$$\dot{u}_k = p_k u_k \quad (k = 1, \dots, m), \quad (2.5)$$

wobei die $p_k = p_k(u_1, \dots, u_m)$ für $k = 1, \dots, m$ Potenzreihen mit näher zu bestimmenden Eigenschaften sind.

Bevor wir den Satz 2.13, der sich mit dem Erzeugen eben dieser Normalform beschäftigt, formulieren können, leiten wir eine notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen Normalform her, die aus dem System (2.1) entstehen soll.

Die $\varphi_k(u) = \varphi_k(u_1, \dots, u_m)$ seien wieder Potenzreihen, die ebenfalls kein konstantes Glied enthalten. Sonst bliebe 0 als Gleichgewichtspunkt nicht erhalten. Wir rechnen mit formalen Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten und nehmen dabei auf die Konvergenz der Operationen Addition, Multiplikation und Differentiation zunächst keine Rücksicht.⁶ Die Differentiation lässt sich im Ring der formalen Potenzreihen für (2.3) folgendermaßen formalisieren:

⁶Das Rechnen mit formalen Potenzreihen erweist sich an dieser Stelle als zweckmäßig. Definieren wir für die formalen Potenzreihen, die endlich viele Unbestimmte und außerdem komplexe Koeffizienten haben, Gleichheit, Summe und Produkt nach den Regeln, die im konvergenten Fall gelten, so bilden die Potenzreihen einen Ring ohne Nullteiler, den wir hier mit $R(z)$ bezeichnen. Die partiellen Ableitungen nach den Variablen erklären wir gliedweise. Dabei ist die Differentiation eines Polynoms rein algebraisch erklärt. Weiter gelten in $R(z)$ die Kettenregel und die üblichen Ableitungsregeln für Summen und Produkte. Für genauere Ausführungen vgl. [19], §14.

$$\frac{d}{dt} x_k = \dot{x}_k = \sum_{l=1}^m \varphi_{ku_l} \cdot \dot{u}_l \quad (2.6)$$

Wir setzen voraus, dass die Substitution (2.3) umkehrbar ist. Daher hat die Koeffizientenmatrix der linearen Anteile von $\varphi_k(\cdot)$ eine von 0 verschiedene Determinante. Dies ist äquivalent dazu, dass die Funktionaldeterminante $|\varphi_u|$ als Potenzreihe ein nicht verschwindendes konstantes Glied hat (= nicht-degenerierter Fall). φ_u ist somit invertierbar.

Lemma 2.5 (2.1) geht durch die Substitution (2.3) über in

$$\dot{u} = \varphi_u^{-1} f(\varphi(u)). \quad (2.7)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m \varphi_{ku_l} \cdot \dot{u}_l &= f_k(x) \quad (k = 1, \dots, m) \\ \Leftrightarrow \varphi_u \dot{u} &= f(\varphi(u)) \\ \Leftrightarrow \dot{u} &= \varphi_u^{-1} f \circ \varphi(u) \end{aligned}$$

□

Umgekehrt führt die inverse Substitution (2.7) in (2.1) über.

Die Substitution (2.3) soll nun so bestimmt werden, dass (2.7) in Normalform dargestellt werden kann.

Satz 2.6 (notwendige Bedingung für die Existenz einer Normalform) *Mittels einer umkehrbaren Substitution (2.3) sei das Ausgangssystem (2.1) bereits in (2.7) überführt worden. Weiter sei ein zweites System*

$$\dot{u}_k = h_k(u) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (2.8)$$

gegeben, wobei die $h_k(\cdot)$ Potenzreihen in u_1, \dots, u_m ohne konstantes Glied seien.

Eine notwendige Bedingung dafür, dass eine umkehrbare Substitution (2.3) existiert, die (2.1) in (2.8) überführt, ist, dass F und H gleiche Elementarteiler⁷ haben. F und H bezeichnen dabei die Matrizen, die den linearen Anteilen von $f(x)$ und $h(u)$ entsprechen.

Beweis:

⁷Zur Definition von „Elementarteilern“ vgl. [5], S. 186

Einerseits ist $\dot{u} = \varphi_u^{-1} f \circ \varphi(u)$, andererseits soll $\dot{u} = h(u)$ sein. Damit erhalten wir folgendes System von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die unbekanntenen Reihen φ_k :

$$f(\varphi(u)) = \varphi_u h(u) \quad (2.9)$$

Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit von (2.9) ergibt sich aus dem Vergleich der linearen Glieder. Sind F, H, C die Matrizen, die den linearen Teilen von $f(x), h(u), \varphi(u)$ entsprechen, so folgt:

$$\begin{aligned} FC &= CH \\ C \overset{\text{invertierbar}}{\iff} C^{-1}FC &= H \end{aligned} \quad (2.10)$$

Gleichung (2.10) bedeutet, dass F und H äquivalent, ja sogar ähnlich zueinander sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn F und H gleiche Elementarteiler haben, vgl. [5], Seite 186. \square

2.1.3 Eine vorbereitende lineare Substitution

Bevor wir zu den beiden zentralen Sätzen des Kapitels 2.1 kommen, beschränken wir uns auf den Spezialfall $m = 2$. In diesem Fall stellt sich das Differentialgleichungssystem (2.1) wie folgt dar:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{R}_1(x_1, x_2) \\ \hat{R}_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei die Matrix F die linearen Anteile des Differentialgleichungssystems beinhaltet und die Summanden $\hat{R}_1(x_1, x_2)$ und $\hat{R}_2(x_1, x_2)$ die Glieder der Ordnung ≥ 2 in x_1, x_2 repräsentieren. Für dieses System führen wir nun eine lineare Substitution durch, die sich als zweckmäßig erweisen wird.

Die Eigenwerte von F , die wir mit λ und μ bezeichnen, mögen verschieden sein. Daher ist F diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T aus Eigenvektoren von F , so dass TFT^{-1} Diagonalgestalt hat:

$$D := TFT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Unser Ziel ist es nun, durch eine lineare Transformation das System (2.11) auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + R_1(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y) = \mu y + R_2(x, y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

zu bringen. $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ stehen für die Terme von der Ordnung ≥ 2 , und $f(x, y)$ und $g(x, y)$ sind diejenigen Funktionen, die durch die Transformation aus $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ hervorgegangen sind.

Als lineare Transformation wählen wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

und formen (2.11) unter der Ausnutzung von $T^{-1}T = I_2$, I_2 die 2×2 -Einheitsmatrix, äquivalent um:

$$\begin{aligned} T^{-1}T \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= FT^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1}T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \quad | \cdot T \text{ von links} \\ \stackrel{(2.14)}{\iff} TT^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= TFT^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda x + t_{11} \cdot \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + t_{12} \cdot \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ \mu y + t_{21} \cdot \hat{R}_1 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) + t_{22} \cdot \hat{R}_2 (T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{pmatrix}, \quad (2.15) \end{aligned}$$

wenn

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

ist.

Vergleichen wir jetzt (2.15) mit Gleichung (2.13), so stimmen die beiden Systeme überein, wenn wir $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ jeweils mit den letzten beiden Summanden auf der rechten Seite von (2.15) identifizieren.

2.1.4 Betrachtung des linearisierten Differentialgleichungssystems

Da es sich bei der Untersuchung der Stabilität der Gleichgewichtslösung $(x_1, x_2)^t = (0, 0)^t$ bezüglich der Variablen x_1, x_2 um ein lokales Problem handelt, ist es sinnvoll, zunächst jeweils nur den linearen Anteil von $f(x, y), g(x, y)$, den wir weiterhin mit F bezeichnen, zu berücksichtigen, da uns das Verhalten des linearen Systems Hinweise auf das Verhalten des Gesamtsystems (2.13) geben kann. Das linearisierte Differentialgleichungssystem, das aus (2.13) hervorgeht, ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x \\ \dot{y} &= \mu y \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Im folgenden müssen wir in bezug auf die Eigenwerte λ, μ von F drei Fälle unterscheiden:

- (i) λ und μ haben Realteile, die sämtlich $\neq 0$ sind (reeller Fall),
- (ii) λ und μ sind rein imaginär und $\neq 0$ (imaginärer Fall) und
- (iii) ein Eigenwert ist 0.

(i) Der reelle Fall

Bemerkung 2.7 *Der Vollständigkeit halber behandeln wir an dieser Stelle kurz den reellen Fall, d.h. den Fall, für den λ und μ reell sind. Im folgenden zeigt sich dann aber, dass die zugehörigen Lösungen unbeschränkt wachsen und damit für unsere Stabilitätsbetrachtung nicht relevant sind.*

Lemma 2.8 *Im reellen Fall $\lambda = \bar{\lambda} \neq 0, \mu = \bar{\mu} \neq 0$ können wir $f(x, y) = \bar{f}(x, y)$ und $g(x, y) = \bar{g}(x, y)$ voraussetzen.*

Beweis:

$$\begin{aligned} \overline{f(x, y)} &= \overline{\lambda x + \dots} \\ &\stackrel{\lambda = \bar{\lambda}}{=} \overline{\lambda x + \dots} \\ &\stackrel{\text{Koeffizienten reell } (*)}{=} f(x, y) \end{aligned}$$

Analog zeigt man $g(x, y) = \bar{g}(x, y)$. □

Bemerkung zu (*): Nach Voraussetzung waren die Koeffizienten von $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ reell. Es stellt sich die Frage, ob diese Eigenschaft durch die lineare Substitution erhalten bleibt. Dies ist der Fall, da wegen Gleichung (2.15) die Koeffizienten von $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ durch

die lineare Substitution lediglich mit t_{ij} ($i, j = 1, 2$) und einem Vielfachen von $\frac{1}{\det T}$ (aus T^{-1}) multipliziert werden. T besitzt aber nur rein reelle Einträge. Damit ist der letzte Schritt in obigem Beweis gerechtfertigt. \square

Betrachten wir also das lineare System (2.16). Eine vollständige Lösung von (2.13) ist

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{\lambda t} = ae^{Re(\lambda)t} e^{iIm(\lambda)t} \text{ mit } \lambda = Re(\lambda) + iIm(\lambda) \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= be^{\mu t} = be^{Re(\mu)t} e^{iIm(\mu)t} \text{ mit } \mu = Re(\mu) + iIm(\mu) \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da die Lösungen wegen der reellen Exponenten $Re(\lambda) \cdot t, Re(\mu) \cdot t$ unbeschränkt wachsen, kommen sie als periodische Lösungen für das linearisierte System (2.16) nicht in Frage. Die Lösung des linearen Systems legt die Vermutung nahe, dass auch das nicht-lineare System (2.13) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Null keine periodischen Lösungen besitzen kann. Genauer gilt:

Satz 2.9 (Fehlende Periodizität bei reellen Eigenwerten) *Sind die Realteile der Eigenwerte der Matrix der linearen Anteile von (2.1) sämtlich von 0 verschieden, so gibt es für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ im Gebiet $U_\varepsilon(0)$ keine periodischen Lösungen von (2.1).* \square

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [20], S. 193 oder ausführlicher in [17], S. 10 f.

Bemerkung 2.10 *Der Fall, dass ein Eigenwert einen Imaginärteil $\neq 0$ und der andere Eigenwert einen Imaginärteil $= 0$ besitzt, kann nicht eintreten, da im zwei-dimensionalen Fall mit λ auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von F sein muss. Das bedeutet, dass entweder $\lambda = a+ib$ und $\mu = \bar{\lambda} = a-ib$ Eigenwerte von F mit $a, b \neq 0$ sind oder λ und μ rein reell sind. In beiden Fällen greift jedenfalls Satz 2.9.*

Da in unserem Fall die Voraussetzungen des Satzes 2.9 erfüllt sind, kann es keine periodischen Lösungen geben. Der reelle Fall wird daher im folgenden nicht mehr betrachtet. Interessant für uns ist hingegen der rein imaginäre Fall:

(ii) Der rein imaginäre Fall $\lambda = \bar{\mu} \neq 0$

Zunächst beweisen wir einen Satz, den wir im Laufe der Arbeit an verschiedenen Stellen benötigen werden:

Satz 2.11 *Im imaginären Fall $\lambda = \bar{\mu}$ kann $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ vorausgesetzt werden.*

Beweis:

Wir leiten jetzt Bedingungen her, unter denen $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \bar{g}(y, x) \\
 \stackrel{(2.15)}{\Leftrightarrow} & \begin{aligned}
 (I) \quad & t_{11} = \overline{t_{21}}, t_{12} = \overline{t_{22}} \quad \text{und} \\
 (II) \quad & \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

falls T wie oben $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$ ist.

Wegen (I) können wir T also in der Form

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.17)$$

schreiben.

Die zu T inverse Matrix T^{-1} ergibt sich damit zu

$$T^{-1} = \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} & -\beta \\ -\bar{\alpha} & \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Wir formen jetzt Bedingung (II) um. Damit muss

$$\begin{aligned}
 T^{-1} &= \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow T &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{T}
 \end{aligned}$$

gelten. Diese Bedingung ist für die Matrix T aus (2.17) erfüllt, da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{=\overline{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} = T$$

ist.

Wegen $TFT^{-1} = D$ mit einer Diagonalmatrix D besteht T^{-1} aus den Eigenvektoren von F . Mit der Abkürzung $\rho := \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta}$ ergeben sich die Eigenvektoren x_λ und x_μ zu den Eigenwerten λ bzw. μ zu

$$x_\lambda = \rho \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} \\ -\bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_\mu = \rho \cdot \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Da die Eigenvektoren zu konjugiert komplexen Eigenwerten ebenfalls zueinander konjugiert komplex sein müssen, folgt die Behauptung, da $x_\lambda = \overline{x_\mu}$, wie in der Rechnung gezeigt, äquivalent zu $f(x, y) = \bar{g}(y, x)$ ist. \square

Betrachten wir das zu (2.1) gehörige lineare System (2.16), so erhalten wir folgenden Satz:

Satz 2.12 *Das lineare System (2.16) besitzt nur im Fall rein imaginärer Eigenwerte periodische Lösungen.* \square

Beweis:

Annahme: $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$ oder $\operatorname{Re}(\mu) \neq 0$.

O.B.d.A. sei $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ mit $\lambda_r, \lambda_i \in \mathbb{R}$, $\mu \in i\mathbb{R}$. Dann findet sich die vollständige Lösung von (2.16) zu

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{\lambda t} = a e^{\lambda_r t} e^{i\lambda_i t} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}, \\ y(t) &= b e^{\mu t} \quad \text{mit } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_r t} = \infty$ ist, ist die Lösung $(x(t), y(t))^T$ nicht beschränkt, kommt also als periodische Lösung nicht in Frage. λ und μ müssen daher im linearen System (2.16) rein imaginär gewählt werden. \square

(iii) Ein Eigenwert ist 0

In diesem Fall ist auch der zweite Eigenwert 0. Mit diesem Problem beschäftigt sich C.L. SIEGEL in [20], Abschnitt 2. Die Beweise sind so umfangreich, dass deren Ausarbeitung den hier gewählten Rahmen sprengen würde.

Die Betrachtung des linearen Systems (2.16) gibt uns Hinweise darauf, dass periodische Lösungen des nicht-linearen Systems (2.13) nur für den Fall konjugierter rein imaginärer Eigenwerte existieren können. Wir setzen daher im folgenden voraus, dass die Eigenwerte λ und μ von F konjugiert-komplex, rein imaginär und $\neq 0$ sind.

2.1.5 Die beiden Hauptsätze des Artikels

Nachdem wir das Ausgangssystem (2.4) mittels einer linearen Substitution in die Gestalt (2.13) überführt haben, bringen wir das so erhaltene System auf Normalform. Dazu gilt Satz 2.13. Bis hierher werden Konvergenzfragen ausgeklammert, und es wird ausschließlich mit formalen Potenzreihen gerechnet. Mittels des Stabilitätskriteriums (Satz 2.18) lässt sich dann prüfen, ob die Gleichgewichtslösung stabil ist. Stabilität liegt vor, wenn die Summe $p + q$ der in der Normalform auftretenden Potenzreihen p, q verschwindet.

Satz 2.13 (Erzeugen einer Normalform) *Das System (2.13) kann durch eine geeignete Substitution der Gestalt*

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

auf die Normalform

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pu, \\ \dot{v} &= qv \end{aligned} \quad (2.20)$$

gebracht werden, wenn $\lambda = -\mu$ die beiden rein imaginären Eigenwerte $\neq 0$ von F sind. Dabei sind p, q Potenzreihen in dem Produkt $w = uv$ allein und $\varphi_k(u, v), \psi_k(u, v)$ homogene Polynome in u, v vom Grad k ($k = 2, 3, \dots$). Wenn die Reihen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ für $k > 0$ enthalten, ist die Substitution eindeutig bestimmt.

Beweis:

Im folgenden setzen wir die Normalform (2.20) in (2.19) ein und verifizieren dann mittels eines Koeffizientenvergleichs, dass solche Potenzreihen $p(u, v), q(u, v)$ existieren und eindeutig bestimmt sind.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ \Rightarrow \dot{x} &= \frac{d}{dt} \varphi(u, v) = \varphi_u(u, v) \dot{u} + \varphi_v(u, v) \dot{v} = \varphi_u pu + \varphi_v qv \\ \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \\ \Rightarrow \dot{y} &= \frac{d}{dt} \psi(u, v) = \psi_u(u, v) \dot{u} + \psi_v(u, v) \dot{v} = \psi_u pu + \psi_v qv \end{aligned}$$

Es sind also wegen $g(\varphi, \psi) = \bar{f}(\psi, \varphi)$ (vgl. Satz 2.11) die (2.9) entsprechenden partiellen Differentialgleichungen

$$\varphi_u p u + \varphi_v q v = f(\varphi, \psi) = \lambda \varphi + f_2(\varphi, \psi) + f_3(\varphi, \psi) + \dots \quad (2.21)$$

$$\psi_u p u + \psi_v q v = \bar{f}(\psi, \varphi) = -\lambda \psi + \bar{f}_2(\psi, \varphi) + \bar{f}_3(\psi, \varphi) + \dots \quad (2.22)$$

durch Potenzreihen φ, ψ, p, q der Form (2.19) zu lösen, wobei $f_l(\varphi, \psi)$ homogene Polynome in φ, ψ vom Grad l sind. Für p, q ist der Ansatz

$$p = \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} w^r, \quad q = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} w^r \quad (2.23)$$

zu machen. Es werde also $a_{2r+1} = b_{2r+1} = 0$ für $r = 0, 1, 2, \dots$ vorausgesetzt.

Koeffizientenvergleich in (2.21) und (2.22):

Bevor wir einen Koeffizientenvergleich in (2.21) und (2.22) durchführen können, sind einige Vorbetrachtungen notwendig:

Mit

$$\varphi_u = 1 + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} + \dots$$

$$\varphi_v = \varphi_{2v} + \varphi_{3v} + \dots$$

$$\psi_u = \psi_{2u} + \psi_{3u} + \dots$$

$$\psi_v = 1 + \psi_{2v} + \psi_{3v} + \dots$$

hat man

$$\begin{aligned} \varphi_u p u &= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{ku}\right) \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ &= a_0 u + \sum_{r=1}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u + \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{ku} \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ \varphi_v q v &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{kv}\right) \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v \\ \psi_u p u &= \left(\sum_{k=2}^{\infty} \psi_{ku}\right) \sum_{r=0}^{\infty} a_{2r} (uv)^r u \\ \psi_v q v &= \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{kv}\right) \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v \\ &= b_0 v + \sum_{r=1}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v + \sum_{k=2}^{\infty} \psi_{kv} \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} (uv)^r v. \end{aligned}$$

φ_{ku} bedeutet dabei die partielle Ableitung von φ_k nach u in der Entwicklung $\varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots$. Mit $\varphi_{kv}, \psi_{ku}, \psi_{kv}$ ($k = 2, 3, \dots$) verhält es sich entsprechend.

Durch Induktion wird jetzt bewiesen, dass in (2.21) und (2.22) auf beiden Seiten die Glieder vom Grad k jeweils zur Übereinstimmung gebracht werden können ($k = 1, 2, \dots$):

- Induktionsanfang: $k = 1$

Setzt man die oben gefundenen Beziehungen in (2.21) und (2.22) ein, so ergibt ein Vergleich der linearen Glieder:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda \\ b_0 &= -\lambda \end{aligned}$$

- Induktionsschritt: $k-1 \rightarrow k$

Induktionsvoraussetzung: In (2.21), (2.22) stimmen auf beiden Seiten die Glieder bis zum Grad $k-1$ ($k \geq 2$) überein. Hierdurch sind bereits $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$), a_κ, b_κ ($\kappa < k-1$) eindeutig festgelegt.

Terme k -ten Grades in (2.21):

$$\begin{aligned} a_{2r}(uv)^r u + \varphi_{ku} \underbrace{a_0}_{=\lambda} (uv)^0 u + \sum_{l=2}^{k-1} \varphi_{lu} a_{k-l} w^{\frac{k-l}{2}} u + \varphi_{kv} \underbrace{b_0}_{=-\lambda} v + \sum_{l=2}^{k-1} \varphi_{lv} b_{k-l} w^{\frac{k-l}{2}} v \\ = \lambda \varphi_k + \sum_{l=2}^k \{f_l(\varphi, \psi)\}_k \quad \text{mit} \quad r = \frac{k-1}{2} \end{aligned}$$

Für gerades k ist $2r$ wegen $r = \frac{k-1}{2}$ ungerade. Nach Voraussetzung ist in diesem Fall $a_{2r} = b_{2r} = 0$. Daher genügt es, den Fall „ k ungerade“ zu betrachten.

Mit $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ seien dabei die Anteile k -ten Grades von $f_l(\varphi, \psi)$ aus (2.21) für $l = 1, \dots, k$ bezeichnet. Die anderen Anteile liefern keinen Beitrag. Wir betrachten jetzt die $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ genauer:

Für $l = 2, \dots, k$ ist

$$\begin{aligned} f_l(\varphi, \psi) &= \sum_{i+j=l} \gamma_{ij}(\varphi(u, v))^i (\psi(u, v))^j \\ &= \sum_{i+j=l} \gamma_{ij} (u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots)^i (v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots)^j. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die $\{f_l(\varphi, \psi)\}_k$ ($l = 2, \dots, k$) die folgende Beziehung:

$$\{f_l(\varphi, \psi)\}_k = \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d},$$

wobei $i + j = l$ und $\varphi_1 \equiv u$, $\psi_1 \equiv v$ ist und die $\varphi_k(u, v)$, $\psi_k(u, v)$ homogene Polynome in den Veränderlichen u, v vom Grad k sind.

Summieren wir über alle Glieder k -ten Grades in $f_2(\varphi, \psi), \dots, f_k(\varphi, \psi)$, ergibt sich

$$\sum_{l=2}^k \{f_l(\varphi, \psi)\}_k = \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d},$$

wobei die Bezeichnungsweise von oben weiter gültig sein möge.

Insgesamt können wir diese gefundene Beziehung nun in (2.21) einsetzen und erhalten damit:

$$\lambda(\varphi_{ku}u - \varphi_{kv}v - \varphi_k) + a_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}u = P_k, \quad (2.24)$$

worin

$$\begin{aligned} P_k := & - \sum_{l=2}^{k-1} [\varphi_{lu}a_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}u + \varphi_{lv}b_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}v] + \\ & + \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \gamma_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \varphi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \psi_{c_d} \end{aligned} \quad (2.25)$$

ist.

Terme k -ten Grades in (2.22):

Analog zu den Termen k -ten Grades in (2.22) erhält man hier

$$\lambda(\psi_{ku}u - \psi_{kv}v + \psi_k) + b_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}v = Q_k, \quad (2.26)$$

worin

$$\begin{aligned} Q_k := & - \sum_{l=2}^{k-1} [\psi_{lu}a_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}u + \psi_{lv}b_{k-l}w^{\frac{k-l}{2}}v] + \\ & + \sum_{\substack{l=2 \\ i+j=l}}^k \sum_{s=1}^{k-1} \delta_{ij} \prod_{\substack{b=1 \\ a_1+\dots+a_i=k-s}}^i \psi_{a_b} \prod_{\substack{d=1 \\ c_1+\dots+c_j=s}}^j \varphi_{c_d} \end{aligned} \quad (2.27)$$

ist.

Zusammenfassung:

Mittels des Koeffizientenvergleichs erhält man also die Beziehungen (2.24) und (2.26):

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi_{ku}u - \varphi_{kv}v - \varphi_k) + a_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}u &= P_k \\ \lambda(\psi_{ku}u - \psi_{kv}v + \psi_k) + b_{k-1}w^{\frac{k-1}{2}}v &= Q_k\end{aligned}$$

Dabei sind P_k, Q_k die in (2.25) und (2.27) angegebenen homogenen Polynome in u, v vom Grad k , deren Koeffizienten sich durch die Koeffizienten der schon bekannten $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$) und a_κ, b_κ ($\kappa < k - 1$) ausdrücken lassen.

Bestimmung der a_{k-1}, b_{k-1} ($k = 2, 3, \dots$):

Fall 1: k gerade

Nach Voraussetzung ist dann $a_{k-1} = b_{k-1} = 0$.

Fall 2: $k = 2r + 1$ ungerade

Da in φ_k, ψ_k nach Voraussetzung keine Glieder der Form uw^r bzw. w^rv enthalten sind, folgt, dass in (2.24) die a_{k-1} ($k = 2, 3, \dots$) sind demnach eindeutig bestimmt. Analog ergibt sich aus (2.26), dass auch die b_{k-1} eindeutig bestimmt sind.

Bestimmung der φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$):

Die homogenen Polynome φ_k, ψ_k lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \sum_{g+h=k} \alpha_{gh}u^g v^h \\ \psi_k &= \sum_{g+h=k} \beta_{gh}u^g v^h\end{aligned}\tag{2.28}$$

Damit werden die Koeffizienten der entsprechenden Glieder auf den linken Seiten von (2.24), (2.26) gleich

$$\lambda(g - h - 1) \alpha_{gh}\tag{2.29}$$

$$\lambda(g - h + 1) \beta_{gh}\tag{2.30}$$

sein. Da die Reihen φ und ψ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ ($k > 0$) enthalten, gilt $g \neq h + 1$ bzw. $g \neq h - 1$.

Damit sind die φ_k, ψ_k eindeutig bestimmt. \square

Insgesamt ist gezeigt, dass die Gleichungen (2.21), (2.22) durch formale Potenzreihen φ, ψ, p, q erfüllt werden können.

Bemerkung 2.14 *Im Fall der Konvergenz von f, g sind auch φ, ψ konvergent, falls $p + q = 0$ ist.*⁸

Im Satz 2.18 verwenden wir folgende Schreibweise:

Schreibweise 2.15 *Für eine Potenzreihe $h(\xi, \eta) = \sum_{\nu, \mu} a_{\nu, \mu} \xi^\nu \eta^\mu$ mit komplexen Koeffizienten $a_{\nu, \mu} \in \mathbb{C}$ möge*

$$\bar{h}(\xi, \eta) := \sum_{\nu, \mu} \bar{a}_{\nu, \mu} \xi^\nu \eta^\mu$$

bedeuten.

Zum Beweis der Instabilität in Satz 2.18 benötigen wir zwei Resultate, die wir der Übersicht halber vor den eigentlichen Satz stellen:

Lemma 2.16 (Realitätsbedingungen für \dot{u} und \dot{v}) *Die Polynome $\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)$ bzw. $\tilde{p}(u, v), \tilde{q}(u, v)$ mögen aus $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ bzw. $p(u, v), q(u, v)$ hervorgehen, indem $\varphi(u, v), \psi(u, v)$ bzw. $p(u, v), q(u, v)$ nach den Gliedern der Ordnung $2n-1$ bzw. $2n-2$ abgebrochen werden. Weiter sei*

$$\Phi(u, v) := \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(u, v) \\ \tilde{\psi}(u, v) \end{pmatrix}.$$

(a) *Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J_\Phi(u, v)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R_1(u, v) \\ R_2(u, v) \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

mit

$$J_\Phi(u, v)^{-1} = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_v(u, v) & -\tilde{\varphi}_v(u, v) \\ -\tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_u(u, v) \end{pmatrix},$$

der (invertierten) Jacobimatrix von $\Phi(u, v)$.

⁸Den Beweis dieser Behauptung findet man in [19], §15.

(b) Weiter erhält man als Realitätsbedingungen im „abgebrochenen Fall“:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{u}} &= R_2(\bar{v}, \bar{u}) \\ \dot{\tilde{v}} &= R_1(\bar{v}, \bar{u})\end{aligned}\tag{2.32}$$

Beweis:

(a) Wir führen in (2.13) eine konvergente Substitution (d.h. eine Substitution mit konvergenten Potenzreihen) mit den „abgebrochenen Variablentransformationen“

$$\begin{aligned}x &= \tilde{\varphi}(u, v) \\ y &= \tilde{\psi}(u, v)\end{aligned}\tag{2.33}$$

durch und erhalten

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(u, v) &= \tilde{\varphi}_u(u, v) \cdot \dot{u} + \tilde{\varphi}_v(u, v) \cdot \dot{v} = f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \dot{\tilde{y}}(u, v) &= \tilde{\psi}_u(u, v) \cdot \dot{u} + \tilde{\psi}_v(u, v) \cdot \dot{v} = g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_v(u, v) \\ \tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\psi}_v(u, v) \end{pmatrix}}_{=J_{\Phi}(u, v)} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} &= J_{\Phi}^{-1}(u, v) \cdot \begin{pmatrix} f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} R_1(u, v) \\ R_2(u, v) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$\text{mit } J_{\Phi}^{-1}(u, v) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_v(u, v) & -\tilde{\varphi}_v(u, v) \\ -\tilde{\psi}_u(u, v) & \tilde{\varphi}_u(u, v) \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix $J_{\Phi}(u, v)$ von Φ ist invertierbar, da wegen $\tilde{\varphi}(u, v) = u + \dots$ und $\tilde{\psi}(u, v) = v + \dots$ ihre Determinante $J_{\Phi}(u, v) = 1 + O(|\check{u}|^2) \neq 0$ mit $\check{u} = (u, v)^t$ ist.

Daher wird (2.31) zu

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \rho [\tilde{\psi}_v(u, v) \cdot f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) - \tilde{\varphi}_v(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))] \\ \dot{v} &= \rho [-\tilde{\psi}_u(u, v) \cdot f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) + \tilde{\varphi}_u(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))]\end{aligned}\tag{2.35}$$

$$\text{mit } \rho := \rho(u, v) = \frac{1}{\tilde{\varphi}_u(u, v)\tilde{\psi}_v(u, v) - \tilde{\varphi}_v(u, v)\tilde{\psi}_u(u, v)}.\tag{2.36}$$

(b) Aus den Realitätsbedingungen (vgl. A.7 im Anhang A)

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u, v) &= \tilde{\psi}(v, u), \\ \tilde{\psi}(u, v) &= \tilde{\varphi}(v, u),\end{aligned}\tag{2.37}$$

die - wie man leicht sieht - auch für $\tilde{\varphi}(u, v)$ und $\tilde{\psi}(u, v)$ gelten, weiß man, dass $\tilde{\psi}(u, v)$ aus $\tilde{\varphi}(u, v)$ hervorgeht, indem man $\tilde{\varphi}(u, v)$ konjugiert und u und v (und damit auch ∂u und ∂v) vertauscht. Daher erhält man als Realitätsbedingungen für die partiellen Ableitungen von $\tilde{\varphi}(u, v)$ und $\tilde{\psi}(u, v)$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_u(u, v) &= \tilde{\psi}_v(v, u), \\ \tilde{\varphi}_v(u, v) &= \tilde{\psi}_u(v, u).\end{aligned}\tag{2.38}$$

Mit Satz 2.11 folgt dann

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= \bar{\rho} [\tilde{\varphi}_u(\bar{v}, \bar{u}) \cdot g(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u})) - \tilde{\psi}_u(\bar{v}, \bar{u}) \cdot f(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u}))] = R_2(\bar{v}, \bar{u}) \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{\rho} [-\tilde{\varphi}_v(\bar{v}, \bar{u}) \cdot g(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u})) + \tilde{\psi}_v(\bar{v}, \bar{u}) \cdot f(\tilde{\varphi}(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\psi}(\bar{v}, \bar{u}))] = R_1(\bar{v}, \bar{u})\end{aligned}$$

$$\text{mit } \bar{\rho} = \frac{1}{\tilde{\psi}_v(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\varphi}_u(\bar{v}, \bar{u}) - \tilde{\psi}_u(\bar{v}, \bar{u})\tilde{\varphi}_v(\bar{v}, \bar{u})} = \rho(\bar{v}, \bar{u}).$$

□

Lemma 2.17 (Lemma von GRONWALL) Gegeben sei ein Intervall der Form $I = [0, b)$ mit $0 < b \leq \infty$ und zwei Konstanten $\delta \geq 0$, $\varepsilon > 0$. Genügt dann eine auf I stetige Funktion $y : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralungleichung

$$0 \leq y(t) \leq \delta + \varepsilon \left| \int_0^t y(\sigma) d\sigma \right| \quad \forall t \in I,\tag{2.39}$$

so folgt hieraus die Abschätzung

$$0 \leq y(t) \leq \delta e^{\varepsilon t} \quad \forall t \in I.$$

Beweis:

Vgl. z.B. [1], Beweis von Satz 7.6.2, S. 315.

□

Satz 2.18 (Stabilitätskriterium) Die Gleichgewichtslösung ist dann und nur dann stabil, wenn

$$p + q = \sum_{r=1}^{\infty} (a_{2r} + b_{2r}) w^r = 0 \quad (2.40)$$

ist, also wenn

$$a_{2r} + b_{2r} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}^* \quad (2.41)$$

ist.

Instabilität liegt hingegen vor, wenn $p + q \neq 0$ ist.

(i) Beweis der Instabilität:

(2.41) sei nicht für alle $r \in \mathbb{N}^*$ erfüllt. Daher kann man ein $c \neq 0$ und ein $n > 1$ finden, so dass für die Potenzreihen p, q aus (2.23)

$$p + q = cw^{n-1} + \dots \quad (2.42)$$

ist. Wegen der Realitätsbedingung (vgl. (A.8) im Anhang A)

$$p(uv) = \bar{q}(uv)$$

ist

$$p + q = \bar{q} + q = 2 \operatorname{Re}(q) \in \mathbb{R}$$

und $w = uv = u\bar{u} = |u|^2 \in \mathbb{R}$. Daher muss c reell sein.

Nach [19], S. 177 können wir nun t durch $\frac{2}{c}t$ ersetzen. Damit wird der Vorfaktor c zu 2.

Übergang zu Polynomen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{p}, \tilde{q}$:

Um die Konvergenzuntersuchung zu umgehen, brechen wir die Reihen φ, ψ bzw. p, q wie in Lemma 2.16 nach den Gliedern der Ordnung $2n - 1$ bzw. $2n - 2$ ab, wodurch sie in $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{p}, \tilde{q}$ übergehen.⁹

⁹Hinweis: Im Falle der Instabilität stellt die Untersuchung der Konvergenz der Reihen φ, ψ, p, q noch ein offenes Problem dar.

Die Realitätsbedingungen für den Fall abgebrochener Potenzreihen:

- (a) Der Vollständigkeit halber nennen wir an dieser Stelle noch einmal die Realitätsbedingungen (2.37) (vgl. Lemma Beweis von 2.16 (b)):

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u, v) &= \tilde{\psi}(v, u), \\ \tilde{\psi}(u, v) &= \tilde{\varphi}(v, u).\end{aligned}$$

- (b) Behauptung: Es gilt die folgende Aussage:

Ist

$$v(0) = \bar{u}(0), \tag{2.43}$$

so folgt

$$v(t) = \bar{u}(t)$$

für $t \in [0, T] \subset I_{max}$.¹⁰ Dabei ist I_{max} das maximale Existenzintervall von (2.34).

Beweis:

Wegen (2.34) und (2.32) gilt:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}} &= R_2(\bar{v}, \bar{u}) = R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) \\ \dot{v} &= R_2(u, v) = R_2(t, u(t), v(t))\end{aligned}$$

Dabei ist

$$R_2(u, v) = J_{\mathbb{F}}^{-1}(u, v) \cdot g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)).$$

Nach Voraussetzung ist $g : U_\varepsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$ in einer ε -Umgebung des Ursprungs holomorph. Da außerdem $J_{\mathbb{F}}^{-1}(u, v)$ stetig differenzierbar ist, ergibt sich $R_2(u, v)$ ebenfalls als stetig differenzierbar auf $U_\varepsilon(0)$. Folglich ist für $R_2(u, v)$ die LIPSCHITZ-Bedingung für alle $(u, v), (\bar{v}, \bar{u}) \in U_\varepsilon(0)$ und $t \in [0, T] \subset I_{max}$, I_{max} maximales Existenzintervall von (2.34), mit einer LIPSCHITZ-Konstanten L erfüllt, die von $u, v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$ abhängt.

¹⁰Um eine für den Beweis notwendige LIPSCHITZ-Bedingung für $R_2(u(t), v(t))$ zu erhalten, müssen wir uns auf das kompakte Intervall $[0, T]$ beschränken.

Sei $y(t) := |\bar{u}(t) - v(t)|$, wobei $|\cdot|$ die l_1 -Norm (Summennorm) ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 0 \leq y(t) &= \left| \int_0^t [R_2(\sigma, \bar{v}(\sigma), \bar{u}(\sigma)) - R_2(\sigma, u(\sigma), v(\sigma))] d\sigma \right| \\
 &\leq \int_0^t |R_2(\sigma, \bar{v}(\sigma), \bar{u}(\sigma)) - R_2(\sigma, u(\sigma), v(\sigma))| d\sigma \\
 &\leq \int_0^t L \cdot \left| \begin{pmatrix} \bar{v}(\sigma) \\ \bar{u}(\sigma) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(\sigma) \\ v(\sigma) \end{pmatrix} \right| d\sigma \\
 &= L \cdot \int_0^t (|\bar{v}(\sigma) - u(\sigma)| + |\bar{u}(\sigma) - v(\sigma)|) d\sigma \\
 &\stackrel{|\bar{x}|=|x|}{=} 2L \cdot \left(\int_0^t y(\sigma) d\sigma \right) \\
 &\leq L^* \cdot \left| \int_0^t y(\sigma) d\sigma \right|
 \end{aligned}$$

mit $L^* := 2L > 0$.

Damit sind die Voraussetzungen des Lemmas von GRONWALL (Lemma 2.17) für $\delta = 0$ und $\varepsilon = L^*$ erfüllt. Es gilt also die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 0 \leq |R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) - R_2(t, u(t), v(t))| &\leq 0 \cdot e^{L^*t}, \quad t \in [0, T] \subset I_{max} \\
 \Leftrightarrow R_2(t, \bar{v}(t), \bar{u}(t)) - R_2(t, u(t), v(t)) &= 0, \quad t \in [0, T] \subset I_{max}
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zwangsweise, dass

$$\bar{u}(t) = v(t), \quad t \in [0, T] \subset I_{max}.$$

□

Die „abgebrochene Normalform“:

In diesem Zusammenhang benötigen wir die beiden folgenden Aussagen, die wir anschließend beweisen:

Behauptung:

(a) Durch den Abbruch der Potenzreihen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ und p, q nach den Gliedern der Ordnung $2n - 1$ bzw. $2n - 2$ für ein $n \geq 2$ erhält man als neue Normalform, die wir im folgenden als „abgebrochene Normalform“ bezeichnen werden:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \tilde{p}u + O(|\check{u}|^{2n}) \\
 \dot{v} &= \tilde{q}v + O(|\check{u}|^{2n})
 \end{aligned}
 \quad \text{mit } \check{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

(b) Außerdem gilt

$$\tilde{p} + \tilde{q} = c(uv)^{n-1} = cw^{n-1} \stackrel{(*)}{=} 2w^{n-1} \text{ mit } c \in \mathbb{R}. \quad (2.45)$$

(*) Diese Wahl von c ist möglich, vgl. dazu [19], S. 177.

Beweis:

(a) Setzen wir die abgebrochenen Polynome $\tilde{\varphi}(u, v)$, $\tilde{\psi}(u, v)$ in das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_u(u, v) \dot{u} + \tilde{\varphi}_v(u, v) \dot{v} &= f(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \\ \tilde{\psi}_u(u, v) \dot{u} + \tilde{\psi}_v(u, v) \dot{v} &= g(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Führen wir analog zum Beweis von Satz 2.13 einen Koeffizientenvergleich durch, so erhalten wir (2.44). Setzen wir nämlich in (2.46) die Normalform

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{p} u \\ \dot{v} &= \tilde{q} v \end{aligned}$$

ein, so gibt es für die Anteile vom Grad $\geq 2n$ in $f_k(\tilde{\varphi}(u, v), \tilde{\psi}(u, v))$ auf der linken Seite keine entsprechenden Summanden. Daher muss die Normalform zu (2.44) modifiziert werden.

(b) Dies folgt aus (2.42) und der Definition von \tilde{p}, \tilde{q} . \square

Der Ursprung als instabile Gleichgewichtslage

Behauptung:

Sei $c \neq 0$. Dann ist der Ursprung instabile Gleichgewichtslage von

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Beweis:

Sei $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$ die zugehörige Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{p}u + O(|\tilde{u}|^{2n}) \\ \dot{v} &= \tilde{q}v + O(|\tilde{v}|^{2n}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

mit $\check{u} := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

O.E. sei wieder $c = 2$. Für eine reelle Lösung von (2.11) ist wegen der Realitätsbedingung (A.9) im Anhang A $v = \bar{u}$ und daher $w = uv = u\bar{u} = |u|^2 \geq 0$. Dann ist wegen $w = |u|^2 \geq 0$ zumindest

$$\dot{w} = 2w^n + O(w^{n+\frac{1}{2}}),$$

denn für $w = uv$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{u}v + u\dot{v} \\ &= (\tilde{p}u + O(|\check{u}|^{2n})v + u(\tilde{q}v + O(|\check{u}|^{2n}))) \\ &\stackrel{w=|u|^2}{=} (\tilde{p} + \tilde{q})w + O(w^{n+\frac{1}{2}}) \\ &\stackrel{(2.45)}{=} 2w^n + O(w^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Man wähle nun eine positive Zahl r so, dass für $w < r$ Konvergenz der rechten Seite von (2.49) eintritt und (2.49) die Ungleichung

$$\dot{w} - w^n \geq 0 \tag{2.50}$$

erfüllt, wobei $t \geq 0$ und t im Existenzintervall von (2.48) liegt.

Annahme: Der Nullpunkt von (2.47) ist stabil.

Dann muss, da alle verwendeten Transformationen den Nullpunkt invariant lassen, für alle hinreichend kleinen $u_0 := u(0)$, $v_0 := \bar{u}(0)$ der Ausdruck

$$w(t) = |u(t)|^2 < r$$

bleiben, und die Lösung $(u(t), v(t))^t$ insbesondere für alle $t \geq 0$ existieren.

Dies ist jedoch ein Widerspruch: Wegen $w \geq 0$ ist auch $w^n \geq 0$. Für $w < r$ ist $\dot{w} \geq w^n \geq 0$. Damit ist w für $w < r$ eine monoton wachsende Funktion von t .

Behauptung: Für $t = 0$ sei $0 < w(0) =: w_0 < r$. Dann ergibt (2.50), dass

$$w - w_0 \geq w_0^n t \quad (t > 0) \tag{2.51}$$

ist.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &\geq w^n && \Big| \int_0^t \dots dt \\
 \Rightarrow \int_0^t \dot{w} dt &\geq \int_0^t w^n dt \\
 \Leftrightarrow w(t) - w_0 &\geq w_0^n t && (2.52)
 \end{aligned}$$

□

(2.51) gilt für alle $t \in \mathbb{R}^+$, also auch für $t = \frac{r}{w_0^n} \in \mathbb{R}^+$. Einsetzen dieses speziellen t -Wertes in (2.52) ergibt:

$$\begin{aligned}
 w - w_0 &\geq w_0^n \frac{r}{w_0^n} = r \\
 \Leftrightarrow w &\geq r + \underbrace{w_0}_{>0} > r
 \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu $w < r$.

Insgesamt liegt somit für $p + q \neq 0$ Instabilität vor.

(ii) Beweis der Stabilität:

Nun sei (2.41) für alle $r \in \mathbb{N}^*$ erfüllt, d.h. es gilt $p = -q$. Damit tritt der Konvergenzbeweis aus [19], §15 inkraft. Dort wird mittels Majorantenkriterium bewiesen, dass für konvergente Potenzreihen f, g unter der Zusatzbedingung $p + q = 0$ die Funktionen φ und ψ ebenfalls konvergente Potenzreihen sind.

Aus $\dot{u} = pu$, $\dot{v} = qv$ und $p + q = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
 \dot{w} &= \dot{u}v + \dot{v}u \\
 &= pu v + qv u = (p + q)w = 0
 \end{aligned}$$

Also ist w zeitlich konstant.

Wegen $p = \sum a_{2r} w^r$ und $q = \sum b_{2r} w^r$ sind p, q dann ebenfalls zeitlich konstant. Als Lösungen der Differentialgleichung $\dot{u} = pu$ und $\dot{v} = qv$ erhalten wir jetzt:

$$u = u_0 e^{pt}, \quad v = v_0 e^{qt} \quad (2.53)$$

Aus der Realitätsbedingung (A.9) im Anhang A folgt, dass wir für reelle Lösungen des Systems (2.11) $v = \bar{u}$, also $v_0 = \bar{u}_0$ wählen müssen.

Wegen der Realitätsbedingung (A.8) im Anhang A und (2.41) ist $\bar{q} = -q \in i\mathbb{R}$, also auch $p \in i\mathbb{R}$. p ist also rein imaginär. Jetzt ist wegen $p \in i\mathbb{R}$, also $p = |p|i$,

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{pt} \\ &= u_0 e^{i|p|t} \\ &= u_0 (\cos |p|t + i \sin |p|t) \\ &= \underbrace{u_0 \cos |p|t}_{=:r \in \mathbb{R}} + i \underbrace{u_0 \sin |p|t}_{=:s \in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Dies entspricht einem Kreis um den Ursprung mit Radius u_0 , der in der Zeit $\frac{2\pi}{|p|}$ einmal durchlaufen wird. Wählt man r, s wie angegeben, so stellt die Gleichung für $u(t)$ in der (r, s) -Ebene konzentrische Kreise dar, die in der Zeit $\frac{2\pi}{|p|}$ gleichförmig durchlaufen werden.

Dies zeigt Stabilität und motiviert den Namen „Zentrumproblem“.

2.1.6 Rücktransformation auf die ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2

Wir transformieren die Lösungen (2.53) zunächst zurück auf die Koordinaten x, y .¹¹

Lemma 2.19 *Mittels (2.19) und (2.53) ergeben sich die Koordinaten x und y als konvergente FOURIERsche Reihen in der Veränderlichen $|p|t$.*

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{pt} = u_0 e^{i|p|t} \\ v(t) &= v_0 e^{qt} = v_0 e^{-pt} = v_0 e^{-i|p|t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x = \varphi(u, v) &= u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y = \psi(u, v) &= v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots, \end{aligned}$$

¹¹Die Koordinaten x, y hatten wir nach der linearen Substitution in Abschnitt 2.1.3 aus x_1, x_2 erhalten.

wobei die φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$) homogene Polynome in den u, v vom Grad k sind. Für die Gestalt der φ_k, ψ_k ($k = 2, 3, \dots$) ergab sich im Koeffizientenvergleich (vgl. (2.28)):

$$\begin{aligned}\varphi_k(u, v) &= \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u^g v^h = \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u_0^g e^{i|p|tg} v_0^h e^{-i|p|th} = \sum_{g+h=k} \alpha_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \\ \psi_k(u, v) &= \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u^g v^h = \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u_0^g e^{i|p|tg} v_0^h e^{-i|p|th} = \sum_{g+h=k} \beta_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t}\end{aligned}$$

für $k > 1$, $|g - h| \neq 1$ nach Voraussetzung.¹² Damit erhalten wir:

$$x(|p|t) = u_0 e^{i|p|t} + \sum_{g+h=2}^{\infty} \alpha_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \quad (2.54)$$

$$y(|p|t) = \bar{u}_0 e^{-i|p|t} + \sum_{g+h=2}^{\infty} \beta_{gh} u_0^g v_0^h e^{i(g-h)|p|t} \quad (2.55)$$

Diese FOURIERreihen für x, y in der Veränderlichen $|p|t$ sind konvergent, da aus dem Konvergenzbeweis wegen $p + q = 0$ folgt, dass φ, ψ ebenfalls konvergent sind und $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ ist.

□

Um die Lösung nun in den ursprünglichen Koordinaten x_1, x_2 aus (2.11) zu erhalten, müssen wir die lineare Substitution (2.14) rückgängig machen, d.h. die Lösungen $x_1(|p|t), x_2(|p|t)$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1(|p|t) \\ x_2(|p|t) \end{pmatrix} &= T^{-1} \begin{pmatrix} x(|p|t) \\ y(|p|t) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta} & -\beta \\ -\bar{\alpha} & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(|p|t) \\ y(|p|t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\beta}x(|p|t) - \beta y(|p|t) \\ -\bar{\alpha}x(|p|t) + \alpha y(|p|t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2.1.7 Das Resultat: ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung

In diesem Abschnitt wird das Verfahren in knapper Weise zusammengefasst, ohne im Detail auf die genauen Voraussetzungen einzugehen.

¹²Vgl. dazu Satz 2.13: dort wird vorausgesetzt, dass in $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein Glied der Form uw^k bzw. $w^k v$ für $k > 0$ enthalten sein darf.

Um über die Stabilität der Gleichgewichtslösung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + \dots \\ \dot{y} &= g(x, y) = \mu y + \dots \end{aligned} \quad ,$$

das durch eine lineare Substitution aus

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

hervorgegangen ist, in dem Fall zu entscheiden, dass $\lambda = -\mu$ rein imaginär und $\neq 0$ ist, haben wir also folgendes Verfahren gefunden:

1. Berechne die Koeffizienten a_{2r}, b_{2r} ($r = 1, 2, \dots$) der Potenzreihen p, q rekursiv.
2. Überprüfe, ob $c_r = a_{2r} + b_{2r} = 0$ ist für alle $r = 1, 2, \dots$.

Wir haben somit bisher gezeigt, dass es eindeutig bestimmte Potenzreihen φ, ψ, p, q gibt, so dass wir mit geeigneter Festlegung der Zeiteinheit die rechte Seite unseres Systems schreiben können als

$$\begin{aligned} f(x, y) &= ix + \sum_{g+h>1} \alpha_{gh} x^g y^h \\ g(x, y) &= -iy + \sum_{g+h>1} \beta_{gh} x^g y^h \quad \text{mit } \beta_{gh} = \overline{\alpha_{hg}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Im Koeffizientenvergleich werden die a_k, b_k durch die Koeffizienten der schon bekannten $\varphi_\kappa, \psi_\kappa$ ($\kappa < k$) und a_κ, b_κ ($\kappa < k-1$) ausgedrückt.

Speziell ergibt sich aus dem Koeffizientenvergleich im Beweis zu Satz 2.13 mit der abkürzenden Schreibweise $\alpha_k = \{\alpha_{gh} | g+h=k\}$ für $a_{k-1} = a_{2r}$:

- $k = 3$
 a_2 und b_2 sind Linearkombinationen von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ und $a_0 = \lambda, b_0 = -\lambda$.
 Also: $a_2, b_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2]$
- $k = 5$ ¹³
 a_4 ist Linearkombination von $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ und $a_0 = \lambda, b_0 = -\lambda, a_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2], b_2 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2]$.
 Also: $a_4, b_4 \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4]$
- Mittels vollständiger Induktion erhalten wir demnach:
 $a_{k-1} = a_{2r}, b_{k-1} = b_{2r} \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2r}, \beta_{2r}]$

Somit ergibt sich für die c_r :

$$c_r = a_{2r} + b_{2r} \in \mathbb{C}[\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2r}, \beta_{2r}] := \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq k-1=2r} \quad (2.57)$$

¹³Erinnerung: für gerades k gilt per definitionem $a_{k-1}, b_{k-1} = 0$

2.1.8 Spezialfall: $f(x, y)$ und $g(x, y)$ Polynome

Speziell werde nun noch angenommen, dass f und g aus (2.56) Polynome eines festen Grades l sind. Damit werden alle c_r Polynome der endlich vielen α_{gh}, β_{gh} ($g + h \leq l$). Zu erwarten ist offensichtlich, dass eine nun endliche Anzahl an Koeffizienten zu einer endlichen Anzahl an zu verifizierenden Bedingungen $c_k = 0, \quad k = 1, \dots, m(l) < \infty$ führt. Tatsächlich ermöglicht uns die Voraussetzung eines endlichen Grades eine iterative Anwendung des HILBERTschen (Ideal-) Basissatzes.

Satz 2.20 (HILBERTscher Basissatz, 1. Variante) *Ist R ein NOETHERscher Ring, so auch der Polynomring $R[X]$.*

Beweis:

vgl. [11], S. 66, Satz 6.6

□

Durch Induktion ergibt sich aus dem HILBERTschen Basissatz, dass für jeden NOETHERschen Ring R auch $R[X_1, \dots, X_n]$ NOETHERsch ist. Dabei gilt folgende Definition:

Definition 2.21 (NOETHERscher Ring) ¹⁴

R heißt NOETHERscher Ring, wenn jedes Ideal von R endlich erzeugt ist.

In unserem Kontext ist $R[X_1, \dots, X_n] = \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq l}$. (\mathbb{C} ist ein Körper, dadurch Hauptidealring und somit NOETHERsch.)

HILBERT formulierte seinen Satz unter anderem für den NOETHERschen Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$, K ein Körper, in einer scheinbar allgemeineren Fassung (siehe z.B. [22], §115):

Satz 2.22 (HILBERTscher Basissatz, 2. Variante) *In jeder Untermenge C eines Rings R mit Einselement (nicht nur in jedem Ideal) gibt es endlich viele Elemente c_1, \dots, c_m so, dass jedes Element c von C sich in der Gestalt*

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_m c_m, \quad \gamma_m \in \mathbb{R}$$

schreiben lässt.

Dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folge des HILBERTschen Basissatzes, 1.Variante. Denn wenn I das von C erzeugte Ideal ist, so hat zunächst I eine Basis:

$$I = (a_1, \dots, a_s).$$

Jedes Element a_r ($r = 1, \dots, s$) hängt (als Element des von C erzeugten Ideals) von endlich vielen Größen von C ab:

¹⁴Diese Definition ist ebenfalls [11], S. 65 entnommen.

$$a_r = \sum_{k=1}^m \gamma_{rk} c_k.$$

Also hängen alle Elemente von I von den endlich vielen c_k linear ab; das gilt nun insbesondere für die Elemente von C .

Demnach sind nun alle c_r endlich erzeugt, d.h. es gibt ein $m = m(l)$, so dass sich alle c_r in der Form

$$c_r = \sum_{k=1}^m \gamma_{rk} c_k \quad (r = 1, 2, \dots) \quad \text{mit } \gamma_{rk} \in \mathbb{C}[\alpha_{gh}, \beta_{gh}]_{g+h \leq l}$$

schreiben lassen.

Um zu untersuchen, ob die c_r sämtlich verschwinden, was für die Stabilität notwendig und hinreichend ist, haben wir also nur die endlich vielen Gleichungen $c_k = 0$ für $k = 1, \dots, m$ nachzuprüfen. Allerdings ergibt sich aus dem Beweis des HILBERTschen Basissatzes noch keine obere Schranke für m als Funktion von l . Lediglich der quadratische Fall $l = 2$, auch bekannt als DULACsches Problem, konnte dahingehend komplett gelöst werden, dass nicht nur $m(2) = 7$ bestimmt wurde, sondern man auch endlich viele Bedingungen für die Existenz eines Zentrums in den Koeffizienten von p und q explizit angeben kann. Dazu beigetragen haben neben vielen anderen Mathematikern DULAC (1908), KAPTEYN (1911, 1912), FROMMER (1934) und BAUTIN (1952).

2.2 Die Existenz eines Zentrums im Ursprung

Betrachtet werde das zweidimensionale System von Differentialgleichungen (2.11) aus Abschnitt 2.1.3, das - wie dort ausgeführt - bereits durch eine lineare Substitution auf die Form (2.13) gebracht wurde. Zusätzlich sei im Hinblick auf die Anwendung von Satz 2.13 $\lambda = -\mu$, $\lambda, \mu \neq 0$ rein imaginär. Konkret beschäftigen wir uns nun also mit dem folgenden System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = \lambda x + R_1(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) = -\lambda y + R_2(x, y), \end{aligned} \tag{2.58}$$

mit $(x, y) = (0, 0)$ als Gleichgewichtslösung, $f(x, y)$, $g(x, y)$ konvergente Potenzreihen mit komplexen Koeffizienten in einer Umgebung von $(x, y) = (0, 0)$, $R_1(x, y)$ und $R_2(x, y)$ Terme von der Ordnung ≥ 2 .

Definition 2.23 (Konstante der Bewegung) *Eine Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{C}$, $U = U_\varepsilon(0) - \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ offen, heißt Konstante der Bewegung auf U von (2.58), falls $F(x(t), y(t)) = \text{const.}$ für alle Zeiten t und Lösungskurven $(x(t), y(t))^t$ von (2.58) gilt.*

Damit können wir jetzt den zweiten zentralen Satz dieses Kapitels formulieren:

Satz 2.24 (Zentrumssatz) ¹⁵ *Das analytische System (2.58) hat genau dann ein Zentrum im Ursprung, wenn das System in einer Umgebung des Ursprungs eine Konstante der Bewegung $F(x, y)$ besitzt, die den Term xy enthält, holomorph und keine Konstante ist.*

Beweis:¹⁶

Das System (2.58) besitze ein Zentrum im Ursprung, d.h. der Wirbelfall trete ein. Gemäß Satz 2.18 ist dann Bedingung (2.41) erfüllt. Damit tritt der Konvergenzbeweis aus [19], §15 in Kraft, und für $w(t) = u(t) \cdot v(t)$ folgt

$$\dot{w}(t) = 0. \quad (2.59)$$

$w(t)$ ist also zeitlich konstant auf den Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= pu, \\ \dot{v} &= qv \end{aligned}$$

und kommt als Kandidat für die gesuchte Konstante der Bewegung in Frage. Wir betrachten nun noch einmal die Substitution (2.19) aus Satz 2.13:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) = u + \varphi_2(u, v) + \varphi_3(u, v) + \dots \\ y &= \psi(u, v) = v + \psi_2(u, v) + \psi_3(u, v) + \dots \end{aligned}$$

Die φ_k, ψ_k ($k = 2, \dots$) sind dabei homogene Polynome vom Grad k in den Variablen u, v . Wir schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} =: \phi(u, v).$$

Unter Ausnutzung des Wirbelfalls sind φ und ψ konvergente (komplexe) Potenzreihen und damit beliebig oft (komplex) differenzierbar. Die Substitution ϕ ist also holomorph. Ihre JACOBI-Matrix ergibt sich zu

$$J_\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \varphi_{2u} + \varphi_{3u} + \dots & \psi_{2u} + \psi_{3u} + \dots \\ \varphi_{2v} + \varphi_{3v} + \dots & 1 + \psi_{2v} + \psi_{3v} + \dots \end{pmatrix}.$$

Da $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ kein konstantes Glied enthalten, bleibt der Ursprung als Gleichgewichtspunkt von (2.4) erhalten. Wir erhalten somit

¹⁵Dieser Name wurde von uns gewählt und stellt somit keine allgemein gebräuchliche Bezeichnung dar.

¹⁶Der folgende Beweis greift stark auf Satz 2.18 zurück. Die Bezeichnungen werden hier übernommen, ohne noch einmal definiert zu werden.

$$J_\phi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da demnach die Funktionaldeterminante im Ursprung nicht verschwindet, ist nach dem **lokalen Biholomorphiekriterium** (vgl. [15], S. 223) die inverse Substitution ϕ^{-1} holomorph in einer Umgebung des Ursprungs. Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \phi^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$

Wählen wir nun $w(t)$ aus (2.59) als Konstante der Bewegung, so ergibt sich durch Rücktransformation von u, v auf x, y :

$$\begin{aligned} F(x(t), y(t)) &:= w(t) = w(u(t), v(t)) = w(u(x(t), y(t)), v(x(t), y(t))) \\ &= u(x(t), y(t)) \cdot v(x(t), y(t)) = x(t) y(t) + \dots \end{aligned}$$

Wir haben also eine Konstante der Bewegung $F(x, y)$ gefunden, die den Term xy enthält, holomorph und keine Konstante ist.

Für den Fall, dass man bereits über eine derartige Konstante der Bewegung $F(x, y)$ verfügt, die den Term xy enthält, verweisen wir auf [20], Seite 197. Dort wird gezeigt, dass dann Bedingung (2.41) erfüllt ist, was nach Satz 2.18 bedeutet, dass der Wirbelfall eintritt, d.h. das System (2.4) ein Zentrum im Ursprung hat.

□

Es bleibt noch die Frage zu klären, wie wir nun aus den bisherigen Ergebnissen eine *reelle* Konstante der Bewegung erhalten. Dies wollen wir nun zeigen:

Es ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

gemäß (2.14), wobei T eine komplexe 2×2 -Matrix ist,

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(2.17)}{=} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ \overline{t_{11}} & \overline{t_{12}} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $(x_1(t), x_2(t))^t$ die reelle Lösung.

Allgemein gilt für reelle x_1, x_2 :

$$F(x, y) = \sum_{\nu+\mu \geq 2} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu = \sum_{\nu+\mu \geq 2} \operatorname{Re} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu + i \sum_{\nu+\mu \geq 2} \operatorname{Im} \tilde{F}_{\nu\mu} x_1^\nu x_2^\mu$$

mit $x = t_{11}x_1 + t_{12}x_2, y = t_{21}x_1 + t_{22}x_2$. Also sind $\sum Re\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu, \sum Im\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu$ reelle Konstanten der Bewegung.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= t_{11}t_{21}x_1^2 + (t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21})x_1x_2 + t_{12}t_{22}x_2^2 \\ &\stackrel{(2.17)}{=} |t_{11}|^2x_1^2 + (t_{11}\overline{t_{12}} + t_{12}\overline{t_{11}})x_1x_2 + |t_{22}|^2x_2^2 \end{aligned}$$

Da T nach Voraussetzung invertierbar ist, ist $\det T = t_{11}\overline{t_{12}} - t_{12}\overline{t_{11}} \neq 0$, und mit $t_{11} := a_1 + ia_2, t_{12} := b_1 + ib_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\begin{aligned} \det T &= (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) - (b_1 + ib_2)(a_1 - ia_2) \\ &= a_1b_1 - ia_1b_2 + ia_2b_1 + a_2b_2 - a_1b_1 + ia_2b_1 - ia_1b_2 - a_2b_2 \\ &= -2i(a_1b_2 - a_2b_1) \neq 0 \end{aligned}$$

Aus $\det T \neq 0$ folgt auch $t_{11}, t_{12} \neq 0$, also $|t_{11}|^2 > 0, |t_{22}|^2 > 0$. Damit ist klar, dass die Reihe der Realteile $\sum_{\nu+\mu \geq 2} Re\tilde{F}_{\nu\mu}x_1^\nu x_2^\mu$ die gesuchte reelle Konstante der Bewegung ist. Die reelle quadratische Form $|t_{11}|^2x_1^2 + (t_{11}\overline{t_{12}} + t_{12}\overline{t_{11}})x_1x_2 + |t_{22}|^2x_2^2$ ist also positiv definit, woraus wiederum die Geschlossenheit der Integralkurven sofort zu ersehen ist.

Hinweis:

Dana SCHLOMIUK et al. gaben in ihrer Arbeit „Integrability of plane quadratic vector fields“ bereits eine schwächere Version von Satz (2.24) an; sie verwendeten anstelle der komplexen eine reelle Konstante der Bewegung (vgl. [16], p. 5-7).

Kapitel 3

Der degenerierte Fall

Wir betrachten jetzt den degenerierten Fall, d.h. den Fall, für den die **Polynome** $P(x, y)$, $Q(x, y)$ in der Differentialgleichung

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = -\frac{x^{2n-1} + p(x, y)}{y^{2n-1} + q(x, y)} \quad (3.1)$$

nicht mehr mit linearen Gliedern, sondern erst mit Gliedern der Ordnung $2n - 1$ ($n \geq 2$) beginnen. Die $p(x, y), q(x, y)$ sind also Polynome der Ordnung $\geq 2n$ in x, y . Nach der Darstellung der theoretischen Grundlagen für dieses Kapitel (Unterkapitel 3.1) wird im Teil 3.2 zur Vereinfachung der Periodizitätsuntersuchungen die Differentialgleichung (3.1) auf Polarkoordinaten transformiert.

Die Frage nach der Existenz einer periodischen Stammfunktion führt im Unterkapitel 3.3 zu einer hinreichenden Bedingung für den Wirbelfall (vgl. dazu Satz 3.19). Notwendig für diese Betrachtungen ist die Existenz eines konvergenten EULERSchen Multiplikators, wie sie im Abschnitt 3.3.3 mit Hilfe der rein-reellen Methode von PERRON nachgewiesen wird.

3.1 Grundlagen¹

Das folgende Kapitel stellt die theoretischen Grundlagen dar, die für die Ausführungen im daran anschließenden Teil notwendig sind. Die Ausführungen sind - soweit nicht anders angegeben - stark an [7], Kapitel VI und VII angelehnt.

3.1.1 Das Ausgangssystem im degenerierten Fall

Im degenerierten Fall lässt sich (3.1) schreiben als

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + p(x, y)}{y^{2n-1} + q(x, y)} = -\frac{\sum_{i+j \geq 2n-1} p_{ij} x^i y^j}{\sum_{i+j \geq 2n-1} q_{ij} x^i y^j}, \quad (n \geq 2) \quad (3.2)$$

¹Die Betrachtungen in diesem Kapitel gelten auch für den nicht-degenerierten Fall $n = 1$. Da dieser im folgenden aber nicht von Interesse sein soll, beschränken wir uns schon hier auf den degenerierten Fall $n \geq 2$.

mit $p_{2n-1,0} = q_{0,2n-1} = 1$ und $p_{ij} = q_{ij} = 0$ für $i + j = 2n - 1$ sonst.

Es sei

$$(P(x, y), Q(x, y)) \neq (0, 0) \quad \forall (x, y) \in U_\epsilon(0) - \{0\}. \quad (3.3)$$

Weiter sei

$$G(x, y) := xP(x, y) - yQ(x, y) \quad (3.4)$$

das zu (3.1) gehörige **charakteristische Polynom**. Weil $G(x, y)$ in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ definit ist, laufen die Lösungskurven von (3.1) in der Nähe des Ursprungs um diesen herum (vgl. dazu [10], Satz 3.3).

3.1.2 Betrachtung des Problems als PFAFFsche Form

Die Formulierung von (3.1) als PFAFFsche Form stellt sich bei der Behandlung geometrischer Probleme (Lösungskurven) als angemessen dar, da kein Parameter der Kurve ausgezeichnet ist. Genauer gilt folgende Definition:

Definition 3.1 (PFAFFsche Form) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $T_p^*(U)$ für $p \in U$ der zugehörige Cotangentialraum an U im Punkt p . Eine Abbildung

$$\alpha : U \rightarrow \bigcup_{p \in U} T_p^*(U) \quad \text{mit } \alpha(p) \in T_p^* \quad (3.5)$$

heißt PFAFFsche Form auf U .

Die zu (3.1) gehörige PFAFFsche Form α lautet

$$\alpha = P(x, y)dx - Q(x, y)dy. \quad (3.6)$$

Der folgende Satz rechtfertigt die weitergehende Betrachtung unseres Problems in der Darstellung einer PFAFFschen Form.

Satz 3.2 (Gleiche Lösungen) Die Differentialgleichung (3.1) und die zugehörige PFAFFsche Form (3.6) haben für $\alpha = 0$ die gleichen Lösungen.

Beweis:

vgl. [7], Beweis von Satz 1.1 in Kapitel VII, §1

□

Der Satz 3.2 ist nicht präzise formuliert, denn die Lösungen der Differentialgleichung (3.1) sind Funktionen, die von $\alpha = 0$ hingenen Kurven. Dabei gilt:

Definition 3.3 (Kurve) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine glatte Kurve W heißt Lösung der Gleichung $\alpha = 0$, wenn es eine glatte Parametrisierung $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ von W gibt mit

1. $\phi(I) \subseteq U_\epsilon(0) - \{0\}$,

2. $\alpha \circ \phi \equiv 0$.

Dabei bedeutet

$$\begin{aligned} \alpha \circ \phi &= (P(x, y)dx - Q(x, y)dy) \circ (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &= P(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot \dot{\varphi}_1(t) - Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \cdot \dot{\varphi}_2(t). \end{aligned}$$

Weiterhin versteht man unter einer glatten Parametrisierung bzw. einer glatt parametrisierten Kurve im \mathbb{R}^2 ein Tripel $(I, \phi, \phi(I))$ mit einer stetig differenzierbaren Abbildung $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eines offenen Intervalls I in den \mathbb{R}^2 , deren Ableitungsvektor $\dot{\phi}$ in keinem Punkt von I verschwindet. Zwei glatte Parametrisierungen $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\hat{\phi} : \hat{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sind äquivalent, wenn es eine umkehrbar stetig differenzierbare Abbildung $g : \hat{I} \rightarrow I$ mit $\hat{\phi} = \phi \circ g$ gibt. Demnach ist eine glatte Kurve eine Äquivalenzklasse von glatt parametrisierten Kurven bzw. glatten Parametrisierungen.

Definition 3.4 (Regularität PFAFFscher Formen) Die PFAFFsche Form

$$\alpha = P(x, y)dx - Q(x, y)dy$$

sei in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ stetig. Sie heißt in einem Punkt $(x_0, y_0) \in U_\epsilon(0) - \{0\}$ regulär, wenn $P(x_0, y_0)$ und $Q(x_0, y_0)$ nicht beide verschwinden. Sie heißt in einer Teilmenge $M \subset U_\epsilon(0) - \{0\}$ regulär, wenn sie in jedem Punkt von M regulär ist. Ein Punkt, in dem α nicht regulär ist, heißt singulärer Punkt von α .

Satz 3.5 (Die Gleichheit der Lösungen von α und $h\alpha$) α sei eine in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ stetige PFAFFsche Form und h eine in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ stetige und nirgends verschwindende Funktion. Dann haben $\alpha = 0$ und $h\alpha = 0$ die gleichen Lösungen.

Beweis:

vgl. [7], Kapitel VII, §2, Satz 2.1

□

Definition 3.6 (Exaktheit einer PFAFFschen Form) Eine in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ definierte stetige PFAFFsche Form α heißt exakt (oder total), wenn es in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ eine stetig differenzierbare Funktion F mit $\alpha = dF$ gibt.

Es gilt dabei das in $U_\epsilon(0) - 0$ global lediglich notwendige Kriterium:

Satz 3.7 (Exaktheitskriterium) Sind $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stetig differenzierbar in $U_\epsilon(0) - \{0\}$, so folgt aus $\alpha = 0$ exakt, dass $\text{rot}(P, -Q) = -Q_x - P_y \equiv 0$ in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ ist.

Beweis:

vgl. [8], Kapitel II, §6, Satz 6.1 (Lemma von POINCARÉ)²

□

²Anstelle von $U_\epsilon(0) - \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ werden dort allgemein sternförmige Mengen im \mathbb{R}^n betrachtet.

Die Gleichung $P_y = -Q_x$ heißt auch **Integrabilitätsbedingung**. Sie ist **lokal notwendig und hinreichend** dafür, dass eine stetig differenzierbare PFAFFsche Form exakt ist (vgl. [8], Kapitel II, §6, Satz 6.2).

Definition 3.8 (EULERScher Multiplikator) *Es sei α eine stetige PFAFFsche Form in $U_\epsilon(0) - \{0\}$ und h eine stetige, nirgends verschwindende Funktion in $U_\epsilon(0) - \{0\}$. Wenn $h\alpha$ eine exakte PFAFFsche Form ist, heißt h EULERScher Multiplikator für α .*

Die Bedeutung der exakten PFAFFschen Formen und damit der EULERSchen Multiplikatoren beruht auf dem folgenden Satz:

Satz 3.9 (Stammfunktion einer PFAFFschen Form) *Die PFAFFsche Form α sei stetig und regulär in $U_\epsilon(0) - \{0\}$. Ist $\alpha = dF$, so ist F eine **Stammfunktion** der Gleichung $\alpha = 0$.*

Beweis:

vgl. [7], Kapitel VII, §3, Satz 3.1

□

Der Begriff „Stammfunktion von $\alpha = 0$ “ ist äquivalent zum Begriff „Stammfunktion einer Differentialgleichung“ [vgl. [7], Kapitel VII, §3, Bemerkung nach Satz 3.1]. Dieser wird im nächsten Abschnitt in Definition 3.11 behandelt.

3.1.3 Betrachtung des Problems als Differentialgleichung

Wir wollen nun wieder die Differentialgleichung (3.1) betrachten.

Definition 3.10 (lokal-endlich) *Ein System $\{M_\iota : \iota \in J \text{ Indexmenge}\}$ von Teilmengen des \mathbb{R}^n heißt lokal-endlich, wenn jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung $U(p)$ besitzt, so dass nur für endlich viele $\iota \in J$ der Durchschnitt $M_\iota \cap U(p)$ nicht leer ist.*

Definition 3.11 (Stammfunktion einer Differentialgleichung) $F(x, y) : U_\epsilon(0) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $y' = f(x, y)$, wenn für jedes $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{(x, y) \in U_\epsilon(0) - \{0\} \mid F(x, y) = c\}$ Vereinigung einer lokal endlichen Menge von Integralkurven der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ist.

Die A-priori-Existenz einer Stammfunktion F ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz 3.12 (Existenz einer Stammfunktion) *Die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ besitzt lokal stets eine Stammfunktion $F(x, y)$. Falls $f(x, y)$ stetig partiell nach y differenzierbar ist, gibt es eine Stammfunktion F mit $F_y(x, y) \neq 0$.*

Beweis:

vgl. [7], Kapitel VI, §7, Satz 7.1 und §6, Beweis von Satz 6.7

□

3.2 Transformation auf Polarkoordinaten

Im folgenden erweist es sich als zweckmäßig, das System (3.2) auf Polarkoordinaten zu transformieren und dabei φ als Kurvenparameter zu wählen. Dies ist wegen der Definitheit des charakteristischen Polynoms $G(x, y)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ zulässig (vgl. [21], Satz 3.1).

Für die Transformation auf Polarkoordinaten setzt man

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= r(\varphi) \cos(\varphi) \\y(\varphi) &= r(\varphi) \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Transformation nach dem Kurvenparameter φ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\varphi}(\varphi) &= r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi) \\ \frac{dy}{d\varphi}(\varphi) &= r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi).\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}Z &:= -\sum_{i+j \geq 2n-1} p_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j \\ N &:= \sum_{i+j \geq 2n-1} q_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j\end{aligned}\tag{3.7}$$

erhalten wir dann:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi)}{r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi)} = \frac{Z}{N}$$

Diesen Ausdruck formen wir jetzt äquivalent um:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad (r'(\varphi) \sin(\varphi) + r(\varphi) \cos(\varphi))N &= (r'(\varphi) \cos(\varphi) - r(\varphi) \sin(\varphi))Z \\ \Leftrightarrow \quad r'(N \sin \varphi - Z \cos \varphi) &= -r(Z \sin \varphi + N \cos \varphi) \\ \Leftrightarrow \quad r'(\varphi) &= -r(\varphi) \frac{N \cos \varphi + Z \sin \varphi}{N \sin \varphi - Z \cos \varphi}.\end{aligned}$$

Schließlich setzen wir noch die Abkürzungen (3.7) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow r'(\varphi) &= -r(\varphi) \frac{\sum_{i+j \geq 2n-1} q_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j \cos \varphi - \sum_{i+j \geq 2n-1} p_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j \sin \varphi}{\sum_{i+j \geq 2n-1} q_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j \sin \varphi - \sum_{i+j \geq 2n-1} p_{ij} (r \cos \varphi)^i (r \sin \varphi)^j \cos \varphi} \\ \Leftrightarrow r'(\varphi) &= r(\varphi) \frac{-r^{2n-1} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{i+j \geq 2n-1+k} (\cos \varphi)^i (\sin \varphi)^j [p_{ij} \sin \varphi - q_{ij} \cos \varphi]}{-r^{2n-1} \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{i+j \geq 2n-1+k} (\cos \varphi)^i (\sin \varphi)^j [p_{ij} \cos \varphi - q_{ij} \sin \varphi]} \\ \Leftrightarrow r'(\varphi) &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} p_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{\sum_{k=0}^{\infty} r^k q_k(\cos \varphi, \sin \varphi)}\end{aligned}\tag{3.8}$$

mit

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \sum_{i+j \geq 2n-1+k} (\cos \varphi)^i (\sin \varphi)^j [p_{ij} \sin \varphi - q_{ij} \cos \varphi] \\ q_k &= \sum_{i+j \geq 2n-1+k} (\cos \varphi)^i (\sin \varphi)^j [p_{ij} \cos \varphi - q_{ij} \sin \varphi]. \end{aligned}$$

Die p_k, q_k sind also homogene Polynome in $\cos \varphi, \sin \varphi$ vom Grad $2n+k-1$. Für $k=0$ ist wegen $p_{2n-1,0} = 1, q_{0,2n-1} = 1$ und $q_{ij} = p_{ij} = 0$ sonst

$$\begin{aligned} p_1 &= -(\sin \varphi)^{2n-1} \cos \varphi + (\cos \varphi)^{2n-1} \sin \varphi \\ q_0 &= (\cos \varphi)^{2n} + (\sin \varphi)^{2n}. \end{aligned}$$

3.3 Die Existenz einer periodischen Stammfunktion

Zum Ziel einer besseren Übersichtlichkeit führen wir mit einem geeigneten $N \in \mathbb{N}$ in (3.8) folgende Schreibweise ein:

$$r'(\varphi) = \frac{\sum_{k=0}^N r^{k+1} p_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{\sum_{k=0}^N r^k q_k(\cos \varphi, \sin \varphi)} = \frac{\sum_{k=1}^N r^k p_k(\varphi)}{\sum_{k=0}^N r^k q_k(\varphi)} =: \frac{P(\varphi, r)}{Q(\varphi, r)} =: f(\varphi, r) \quad (3.9)$$

$Q(\varphi, r)$ verschwindet dabei nicht im Ursprung, da q_0 keine reellen Nullstellen besitzt. $f(\varphi, r)$ ist stetig partiell nach r differenzierbar.

Die zu (3.9) gehörige PFAFFSche Form findet sich zu:

$$\alpha = P(\varphi, r)d\varphi - Q(\varphi, r)dr. \quad (3.10)$$

Da durch Satz 3.2 die Differentialgleichung (3.9) und die PFAFFSche Form (3.10) für $\alpha = 0$ dieselben Lösungen besitzen und Satz 3.12 die a-priori-Existenz einer Stammfunktion $F(\varphi, r)$ gewährleistet, besitzt auch (3.10) dieselbe Stammfunktion, wenn (3.10) zusätzlich regulär, d.h. $(P, Q) \neq (0, 0)$ in einer Umgebung des Ursprungs ist. Dies ist allerdings bereits durch Forderung (3.3) erfüllt.

Für eine Stammfunktion $F(\varphi, r)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \alpha = dF(\varphi, r) &= F_\varphi d\varphi + F_r dr = 0 \\ \Leftrightarrow r'(\varphi) &= -\frac{F_\varphi}{F_r} = \frac{P(\varphi, r)}{Q(\varphi, r)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dabei ist $F_r \neq 0$ wegen Satz 3.12 und $Q \neq 0$, da q_0 keine reellen Nullstellen besitzt. (3.11) ist gegenüber einer Multiplikation mit einer stetigen und in einer Umgebung des Ursprungs nirgends verschwindenden Funktion $\mu(\varphi, r)$ invariant. Die Gleichheit der Lösungen von $\mu\alpha = 0$ und $\alpha = 0$ sichert Satz 3.5.

Da F_r und Q nicht verschwinden, gibt es also einen sogenannten EULERSchen Multiplikator $\mu(\varphi, r) \neq 0$ gemäß Definition 3.8, so dass wir schreiben können:

$$-F_\varphi(\varphi, r) = \mu(\varphi, r) \cdot P(\varphi, r) \quad (3.12)$$

$$F_r(\varphi, r) = \mu(\varphi, r) \cdot Q(\varphi, r) \quad (3.13)$$

Bemerkung 3.13 *Da stets $\mu \neq 0$ gilt, sind in unserer Umgebung von Null die Regularität der PFAFFschen Form α , d.h. $(P, Q) \neq (0, 0)$, und $\nabla F = (F_\varphi, F_r) \neq (0, 0)$ identische Forderungen für die Existenz einer Stammfunktion von (3.9) bzw. (3.10).*

Damit die für die Existenz einer Stammfunktion notwendige Exaktheit von $\mu\alpha$ gewährleistet ist, muss nach dem Exaktheitskriterium 3.7 die Rotation des Vektorfeldes $(\mu P, \mu Q)$ in einer Umgebung des Ursprungs verschwinden. Damit befasst sich der folgende Abschnitt.

3.3.1 Bedingung für den Wirbelfall

Für die Existenz einer Stammfunktion F mit $\partial_r F \neq 0$ ergibt sich als notwendige und lokal hinreichende Bedingung an $\mu(\varphi, r)$:³

$$\text{rot}(\mu(\varphi, r) \cdot P(\varphi, r), \mu(\varphi, r) \cdot Q(\varphi, r)) \equiv 0 \quad (3.14)$$

in einer Umgebung des Ursprungs.

Damit alle Lösungskurven in einer Umgebung um den Ursprung geschlossen sind, benötigen wir zudem die 2π -Periodizität von $F(\varphi, r)$ in Bezug auf φ . Insbesondere benötigen wir F etwa in einer Umgebung der Form $|\varphi| \leq 4\pi$, $|r| < \varepsilon$ und $\partial_r F \neq 0$ in dieser Umgebung. Wir kommen darauf später zurück. Die 2π -Periodizität können wir erreichen, indem wir zeigen, dass in einer Potenzreihenentwicklung von $\mu(\varphi, r)$,

$$\mu(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 0} M_\lambda(\varphi) r^\lambda, \quad (3.15)$$

alle M_λ 2π -periodisch gewählt werden können. Denn es gilt der folgende Satz:

Satz 3.14 (Periodizität der Stammfunktion) 1. $F(\varphi, r)$ ist genau dann φ -periodisch, wenn $\mu(\varphi, r)$ φ -periodisch ist.

2. $\mu(\varphi, r)$ ist genau dann φ -periodisch, wenn jedes $M_\lambda(\varphi, r)$ φ -periodisch ist.

3. Jedes $M_\lambda(\varphi, r)$ ist genau dann φ -periodisch, wenn der Wirbelfall vorliegt, d.h. wenn alle Lösungen geschlossene Bahnen um den Ursprung darstellen.

³vgl. [9], Teil A, §1, 4.13

Beweis:

1. Dies folgt daraus, dass

$$P(\varphi, r) = \sum_{k \geq 1} r^k p_k(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

und

$$Q(\varphi, r) = \sum_{k \geq 0} r^k q_k(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

in (3.12) und (3.13) φ -periodisch sind.

2. Zu betrachten ist:

$$\mu(2\pi, r) - \mu(0, r) = \sum_{\lambda \geq 0} (M_\lambda(2\pi) - M_\lambda(0)) r^\lambda = 0 \quad \forall r, |r| < \varepsilon$$

„ \Rightarrow “ durch Induktion nach λ

„ \Leftarrow “ klar

3. klar mit 2. und 1. □

Das bedeutet, dass wir (3.14) mit Hilfe nicht identisch verschwindender 2π -periodischer Funktionen lösen müssen. (3.14) führt auf die Differentialgleichung (**Integrabilitätsbedingung**)

$$-Q(\varphi, r) \cdot \frac{\partial \mu(\varphi, r)}{\partial \varphi} - P(\varphi, r) \cdot \frac{\partial \mu(\varphi, r)}{\partial r} = \mu(\varphi, r) \cdot \left(\frac{\partial P(\varphi, r)}{\partial r} + \frac{\partial Q(\varphi, r)}{\partial \varphi} \right). \quad (3.16)$$

3.3.2 Lösung der Integrabilitätsbedingung

Unter Verwendung der (endlichen) Potenzreihenentwicklungen von $Q(\varphi, r), P(\varphi, r)$ wie in (3.9) und $\mu(\varphi, r)$ wie in (3.15) erhalten wir dann aus (3.16):

$$\begin{aligned} & - \sum_{\lambda \geq 0} q_\lambda(\varphi) r^\lambda \cdot \sum_{\lambda \geq 0} M'_\lambda(\varphi) r^\lambda - \sum_{\lambda \geq 1} p_\lambda(\varphi) r^\lambda \cdot \sum_{\lambda \geq 1} \lambda M_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} \\ & = \sum_{\lambda \geq 0} M_\lambda(\varphi) r^\lambda \cdot \left(\sum_{\lambda \geq 1} \lambda p_\lambda(\varphi) r^{\lambda-1} + \sum_{\lambda \geq 0} q'_\lambda(\varphi) r^\lambda \right) \end{aligned}$$

Unter Anwendung des CAUCHY-Produkts für absolut konvergente Reihen (insbesondere Polynome) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi) r^\lambda - \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot \kappa \cdot M_\kappa(\varphi) r^\lambda \\ & = \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} (\lambda - \kappa + 1) \cdot p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \cdot r^\lambda + \sum_{\lambda \geq 0} \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q'_{\lambda-\kappa}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \cdot r^\lambda \quad (3.17) \end{aligned}$$

Wir gehen nun in (3.17) von der Reihendarstellung auf die einzelnen Summanden über und kürzen zudem r^λ :

$$\begin{aligned} & \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda} p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot \kappa \cdot M_\kappa(\varphi) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\lambda} (\lambda - \kappa + 1) \cdot p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) + \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q'_{\lambda-\kappa}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Im Fall $\lambda = 0$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} -q_0(\varphi) \cdot M'_0(\varphi) - p_1(\varphi) \cdot M_0(\varphi) \cdot 0 &= M_0(\varphi) \cdot p_1(\varphi) \cdot 1 + M_0(\varphi) q'_0(\varphi) \\ \Leftrightarrow M'_0(\varphi) + \frac{p_1(\varphi) + q'_0(\varphi)}{q_0(\varphi)} M_0(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für $\lambda \geq 1$ wird (3.18) zu

$$\begin{aligned} & - \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} p_{\lambda-\kappa+1} \cdot \kappa \cdot M_\kappa(\varphi) - p_1 \cdot \lambda \cdot M_\lambda(\varphi) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} (\lambda - \kappa + 1) p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) + 1 \cdot p_1 \cdot M_\lambda(\varphi) \cdot + \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q'_{\lambda-\kappa}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \\ \Leftrightarrow & - \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q_{\lambda-\kappa}(\varphi) M'_\kappa(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} (\lambda + 1) p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) M_\kappa(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda} q'_{\lambda-\kappa}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \\ &= (\lambda + 1) p_1(\varphi) \cdot M_\lambda(\varphi) \\ \Leftrightarrow & (-q_0(\varphi) \cdot M'_\lambda(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} q_{\lambda-\kappa}(\varphi) \cdot M'_\kappa) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} (\lambda + 1) p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) \cdot M_\kappa(\varphi) \\ &+ (-q'_0(\varphi) \cdot M_\lambda(\varphi) - \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} q'_{\lambda-\kappa}(\varphi) M_\kappa(\varphi)) \\ &= (\lambda + 1) p_1(\varphi) M_\lambda(\varphi) \\ \Leftrightarrow & M'_\lambda(\varphi) + \frac{(\lambda + 1) p_1(\varphi) + q'_0(\varphi)}{q_0(\varphi)} M_\lambda(\varphi) \\ &= -\frac{1}{q_0(\varphi)} \sum_{\kappa=0}^{\lambda-1} \{(\lambda + 1) p_{\lambda-\kappa+1}(\varphi) M_\kappa(\varphi) + [q_{\lambda-\kappa}(\varphi) M_\kappa(\varphi)]'\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zumindest der Fall $\lambda = 0$ lässt sich lösen:

Für $A(\varphi) := -\frac{p_1(\varphi)+q_0'(\varphi)}{q_0(\varphi)}$ gilt wegen $p_k(\varphi) = p_k(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $k \geq 1$, und $q_k(\varphi) = q_k(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $k \geq 0$, dass $A(\varphi)$ 2π -periodisch ist. Dann gilt auch

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} A(\varphi)d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} A(\varphi)d\varphi \\ &= \int_{-\pi}^0 A(\varphi)d\varphi + \int_0^{\pi} A(\varphi)d\varphi. \end{aligned}$$

Nun ist $q_0(\varphi)$ nach Definition gerade und dadurch $q_0'(\varphi)$, ebenso wie $p_1(\varphi)$, ungerade. Insgesamt ist $A(\varphi)$ also ungerade und es gilt

$$\int_0^{2\pi} A(\varphi)d\varphi = 0. \quad (3.21)$$

Zur Anwendung kommt nun folgender Satz:

Satz 3.15 (Periodische Lösungen) *Betrachtet werde das inhomogene Problem*

$$M'(\varphi) = A(\varphi)M(\varphi) + C(\varphi) \quad (3.22)$$

mit $A(\varphi)$ und $C(\varphi)$ ω -periodisch.

Sei

$$\begin{aligned} L_\omega &= \{M \mid M \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), M'(\varphi) = A(\varphi)M(\varphi), M \text{ } \omega\text{-periodisch}\}, \\ L_\omega^* &= \{M \mid M \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), M'(\varphi) = -A(\varphi)^T M(\varphi), M \text{ } \omega\text{-periodisch}\}. \end{aligned}$$

Dann besitzt das inhomogene Problem (3.22) zu gegebenem $C(\varphi)$ genau dann eine ω -periodische Lösung, wenn

$$\int_0^\omega \langle C(\rho), K(\rho) \rangle d\rho = 0 \quad \forall K \in L_\omega^*. \quad (3.23)$$

Beweis:

siehe [23], Satz 2.2.1 .

□

Wir verwenden obigen Satz im folgenden stets im Spezialfall $n = 2$ und $\omega = 2\pi$. Zunächst gilt außerdem $C = 0$.

Aus dem Beweis des Satzes ergibt sich folgendes, für uns relevantes Korollar: t

Korollar 3.16 (Alle Lösungen 2π -periodisch) *Falls*

$$\int_0^{2\pi} A(\varphi)d\varphi = 0$$

gilt, so sind **alle** Lösungen von (3.22) 2π -periodisch.

Beweis:

siehe [14], Beweis von Satz 2.1.1 .

□

Wegen (3.21) besitzt die Differentialgleichung $M'_0(\varphi) = A(\varphi)M_0(\varphi)$ nach Korollar 3.16 nur 2π -periodische Lösungen. Durch Trennung der Variablen ergeben sich diese zu

$$M_0(\varphi) = c \cdot \exp \left\{ \int_0^\varphi A(\psi) d\psi \right\} \text{ mit } M_0(\varphi) = c. \quad (3.24)$$

Der Fall $\lambda \geq 1$ führt hingegen zu unendlich vielen Bedingungen für ein Zentrum:

Analog zum Fall $\lambda = 0$ gilt für $B(\varphi) := -\frac{(\lambda+1)p_1(\varphi)+q'_0(\varphi)}{q_0(\varphi)}$, dass $B(\varphi)$ 2π -periodisch ist.

Sei nun außerdem $C(\varphi) := -\frac{1}{q_0(\varphi)} \cdot \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} \{(\lambda+1)p_{\lambda+1-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi) + [q_{\lambda-\kappa}(\varphi)M_\kappa(\varphi)]'\}$.

Die Lösung von (3.20) erfolgt über den Ansatz von LAGRANGE (Variation der Konstanten):

Sei $M_{\lambda,hom}(\varphi)$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $M'_\lambda(\varphi) = B(\varphi)M_\lambda(\varphi)$ mit $M_{\lambda,hom}(\varphi) \neq 0 \forall \varphi \in \mathbb{R}$. Dann lässt sich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $M'_\lambda(\varphi) = B(\varphi)M_\lambda(\varphi) + C(\varphi)$ schreiben als $M_\lambda(\varphi) = M_{\lambda,hom}(\varphi) \cdot u(\varphi)$ mit stetig differenzierbarem $u :] - 4\pi, 4\pi[\rightarrow \mathbb{R}$.

Genauer gilt:

Satz 3.17 (Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung)

Für ein Intervall $I =] - 4\pi, 4\pi[\subseteq \mathbb{R}$ und stetige Funktionen $B(\varphi), C(\varphi) : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt es zu beliebigem $\varphi_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $M_\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $M'_\lambda = B(\varphi)M_\lambda + C(\varphi)$ mit der Anfangsbedingung $M_\lambda(\varphi_0) = c$, nämlich

$$M_\lambda(\varphi) = M_{\lambda,hom}(\varphi) \cdot \left(c + \int_{\varphi_0}^\varphi M_{\lambda,hom}^{-1}(\psi) \cdot C(\psi) d\psi \right)$$

mit

$$M_{\lambda,hom}(\varphi) = \exp \left\{ \int_{\varphi_0}^\varphi B(\psi) d\psi \right\}.$$

Beweis:

siehe [23], Satz 1.2.4

□

Im folgenden sei o.B.d.A. $\varphi_0 = 0$. Mit denselben Argumenten, die (3.21) lieferten, erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} B(\varphi) d\varphi = 0.$$

Im Hinblick auf die Anwendung von Satz 3.15 bemerken wir:

Bemerkung 3.18 *Es ist*

$$M_{\lambda, hom}^{-1}(\varphi) = \exp \left\{ \int_0^\varphi -B(\psi) d\psi \right\}$$

die 2π -periodische Lösung von

$$M_\lambda'(\varphi) = -B(\varphi)M_\lambda(\varphi).$$

Mit Bedingung (3.23) aus Satz 3.15 hat nun die Differentialgleichung (3.20) genau dann eine 2π -periodische Lösung $M_\lambda(\varphi)$, wenn

$$\int_0^{2\pi} M_{\lambda, hom}^{-1}(\psi) \cdot C(\psi) d\psi = 0 \quad (3.25)$$

und

$$C(\varphi) \quad 2\pi - \text{periodisch} \quad (3.26)$$

ist.

Im folgenden sei stets $\lambda \geq 1$.

$$\begin{aligned} & \int_0^\varphi M_{\lambda, hom}(\psi)^{-1} \cdot C(\psi) d\psi \\ = & \int_0^\varphi \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \left(- \frac{1}{q_0(\varphi)} \right) \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} \{ [(\lambda+1)p_{\lambda+1-\kappa}(\psi)M_\kappa(\psi)] + [q_{\lambda-\kappa}(\psi)M_\kappa(\psi)]' \} d\psi \\ = & \int_0^\varphi \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \cdot \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} [(\lambda+1)p_{\lambda+1-\kappa}(\psi) \cdot q_0(\psi)] \cdot \left(- \frac{M_\kappa(\psi)}{q_0^2(\psi)} \right) d\psi + \\ & + \int_0^\varphi \underbrace{\exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\}}_{=:u} \cdot \left(- \frac{1}{q_0(\psi)} \right) \cdot \underbrace{\sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} [q_{\lambda-\kappa}(\psi)M_\kappa(\psi)]'}_{=:v'} d\psi \\ \stackrel{\text{part.Int.}}{=} & \int_0^\varphi \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \cdot \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} [(\lambda+1)p_{\lambda+1-\kappa}(\psi) \cdot q_0(\psi)] \cdot \left(- \frac{M_\kappa(\psi)}{q_0^2(\psi)} \right) d\psi + \\ & + \left[\exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \cdot \left(- \frac{1}{q_0(\psi)} \right) \cdot \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} q_{\lambda-\kappa}(\psi)M_\kappa(\psi) \right]_0^\varphi \\ - & \int_0^\varphi \left[\left(\frac{(\lambda+1)p_1(\psi) + q_0'(\psi)}{q_0(\psi)} \right) \cdot \left(- \frac{1}{q_0(\psi)} \right) \cdot \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} + \left(\frac{q_0'(\psi)}{q_0^2(\psi)} \right) \cdot \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \right] \cdot \\ & \cdot \sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} q_{\lambda-\kappa}(\psi)M_\kappa(\psi) d\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^\varphi \left[\sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} (\lambda+1) [p_{\lambda+1-\kappa}(\psi) q_0(\psi) - p_1(\psi) q_{\lambda-\kappa}(\psi)] \cdot \frac{M_\kappa}{q_0^2(\psi)} \cdot \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \right] d\psi \\
 &\quad - \underbrace{\left[\sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} \frac{q_{\lambda-\kappa}(\psi) M_\kappa(\psi)}{q_0(\psi)} \cdot \exp \left\{ - \int_0^\psi B(\xi) d\xi \right\} \right]_0^\varphi}_{=0 \text{ f\"ur } \varphi=2\pi, \text{ da } q_k, M_k, B (k \geq 0) \text{ } 2\pi\text{-periodisch}}
 \end{aligned}$$

Bedingung (3.25) ergibt sich nun mit $\varphi = 2\pi$ als:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\lambda-1 \geq \kappa \geq 0} \int_0^{2\pi} (\lambda+1) [p_{\lambda+1-\kappa}(\varphi) q_0(\varphi) - p_1(\varphi) q_{\lambda-\kappa}(\varphi)] \cdot \frac{M_\kappa(\varphi)}{q_0^2(\varphi)} \cdot \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\lambda+1)p_1(\psi) + q_0'(\psi)}{q_0(\psi)} d\psi \right\} d\varphi = 0 \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$M_0(\varphi)$ ist wie bereits gezeigt immer 2π -periodisch. Nun ist $M_1(\varphi)$ ebenfalls 2π -periodisch, wenn (3.27) für $\lambda = 1$ erfüllt ist. Dann ist $M_2(\varphi)$ 2π -periodisch, wenn (3.27) für $\lambda = 2$ gilt, usw. Damit erhalten wir, dass $M_0(\varphi), \dots, M_{\lambda-1}(\varphi)$ nach Voraussetzung 2π -periodisch sind. (Die 2π -Periodizität von $C(\varphi)$ folgt jeweils sofort, da $C(\varphi)$ nur $p_{\lambda+1-\kappa}$, $q_{\lambda-\kappa}$ und insbesondere M_κ für lediglich $\kappa \leq \lambda - 1$ beinhaltet.)

Wir formulieren somit folgenden Satz:

Satz 3.19 (2 π -Periodizität der M_λ) *Ist*

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\tilde{\lambda}-1 \geq \kappa \geq 0} \int_0^{2\pi} (\tilde{\lambda}+1) [p_{\tilde{\lambda}+1-\kappa}(\varphi) q_0(\varphi) - p_1(\varphi) q_{\tilde{\lambda}-\kappa}(\varphi)] \cdot \frac{M_\kappa(\varphi)}{q_0^2(\varphi)} \cdot \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ \int_0^\varphi \frac{(\tilde{\lambda}+1)p_1(\psi) + q_0'(\psi)}{q_0(\psi)} d\psi \right\} d\varphi = 0
 \end{aligned}$$

für $\lambda \in \mathbb{N}$, $\lambda \geq \tilde{\lambda} \geq 1$ erfüllt, so ist $M_\lambda(\varphi)$ 2π -periodisch.

□

Bemerkung 3.20 *Eine offensichtliche Bedingung⁴, die (3.27) erfüllt, ist*

$$p_{\tilde{\lambda}}(\varphi) q_0(\varphi) = q_{\tilde{\lambda}-1}(\varphi) p_1(\varphi) \quad \forall \lambda+1 \geq \tilde{\lambda} \geq 1. \quad (3.28)$$

Allerdings führt diese Bedingung zurück auf den ungestörten Fall

$$y' = - \frac{x^{2n-1}}{y^{2n-1}},$$

denn es gilt der Satz:

⁴Für eine ausführliche Diskussion dieser Bedingung sei auf [14] verwiesen.

Satz 3.21 (gleiche Richtungsfelder) *Es gelte (3.28) für alle $\lambda \geq 1$. Dann sind die Vektorfelder*

$$\begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^{2n-1} \\ y^{2n-1} \end{pmatrix}$$

linear abhängig, d.h. $y' = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ und $y' = -\begin{pmatrix} x^{2n-1} \\ y^{2n-1} \end{pmatrix}$ haben dasselbe Richtungsfeld.

Beweis:

siehe [14], Satz 5.1.1

□

3.3.3 Konvergenz des EULERSchen Multiplikators

Noch zu klären bleibt die Existenz einer konvergenten Potenzreihenentwicklung des EULERSchen Multiplikators in der Form (3.15):

$$\mu(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 0} M_\lambda(\varphi) r^\lambda.$$

Diese folgt nur über Umwege. Wir verwenden dafür die Darstellungen (3.12) und (3.13):

$$\begin{aligned} -F_\varphi(\varphi, r) &= \mu(\varphi, r) \cdot P(\varphi, r) \\ F_r(\varphi, r) &= \mu(\varphi, r) \cdot Q(\varphi, r) \end{aligned}$$

Da $P(\varphi, r)$ und $Q(\varphi, r)$ nach Voraussetzung analytisch und $Q(\varphi, r), F_r(\varphi, r) \neq 0$ sind, haben wir die Analytizität von $\mu(\varphi, r)$ gezeigt, wenn wir nachweisen können, dass $F(\varphi, r)$ etwa für $|\varphi| \leq 4\pi$ nach Potenzen von r entwickelbar ist. Für den nicht-degenerierten Fall $n = 1$ lässt sich eine Entwicklung nach Potenzen von r_0 gewinnen, indem man (3.9) als komplexe Differentialgleichung auffasst. Da sich $q_0 = \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$ ergibt und der Rest des Nenners gleich $O(r)$ ist, treten keine weiteren Schwierigkeiten auf. Im degenerierten Fall $n \geq 2$ kann der Nenner von (3.9) nun allerdings komplexe Nullstellen besitzen. Um diese Komplikation zu umgehen, wird die rein-reelle Methode nach PERRON (vgl. [13]) verwendet, die auf die Idee POINCARÉs zurückgeht, zunächst nach einer rein-reellen Lösung einer Differentialgleichung $dx(t, \mu)/dt = f(t, \mu, x)$ zu suchen, um diese schließlich bezüglich μ holomorph fortzusetzen. Die Kernaussage des Verfahrens aus [13] lässt sich dabei etwa wie folgt zusammenfassen:

Ist ein reelles System von Differentialgleichungen durch Reihenentwicklungen der rechten Seite mit in der unabhängigen Variablen t stetigen Koeffizientenfunktionen gegeben, die in einem gewissen Bereich absolut konvergieren, so existiert eine Entwicklung der Lösung nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte.

Zunächst muss mittels der Methode von PERRON die allgemeine Lösung $r(\varphi; \varphi_0, r_0)$ ⁵ von (3.9) in die Form

$$r(\varphi; \varphi_0, r_0) = \sum_{\lambda \geq 0} \phi_\lambda(\varphi, \varphi_0) r_0^\lambda$$

entwickelt werden. Wir entwickeln nach $r(\varphi_0) = r_0$, da bei PERRON nach den Anfangswerten entwickelt wird. Dann folgt die Existenz einer Stammfunktion $F(\varphi_0, r_0) = r(0; \varphi_0, r_0)$ nach Satz 3.12. Bei PERRON in [13] gilt jedoch stets $\varphi_0 = 0$. Wir benötigen φ_0 allerdings in einem hinreichend großen Intervall. Der folgende Satz stellt daher eine Verallgemeinerung von [13] auf beliebige Anfangswerte φ_0 dar.

Satz 3.22 (Methode von PERRON für beliebige Anfangsbedingungen) Sei $\varepsilon > 0$. Es sei die reelle Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varphi}(\varphi) = f(\varphi, r) = \sum_{\lambda \geq 1} f_\lambda(\varphi) r^\lambda, \quad r(\varphi_0) = 0 \quad (3.29)$$

für komplexwertige Funktionen r im Bereich $|\varphi_0| \leq 2\pi$, $|\varphi - \varphi_0| \leq 2\pi$, $\varphi, \varphi_0 \in \mathbb{R}$, $|r| < \varepsilon$ aus $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ gegeben. Mit der rechten Seite $f(\varphi, r)$ aus (3.9) ist $|f(\varphi, r)| \leq M\varepsilon$. Dann läßt sich die Lösung von (3.29), die für $\varphi = \varphi_0$ den Anfangswert $r(\varphi_0) = r_0$ annimmt, nach den Potenzen von r_0 entwickeln:

$$r(\varphi; \varphi_0, r_0) = \sum_{\lambda \geq 1} \phi_\lambda(\varphi; \varphi_0) r_0^\lambda$$

Die $\phi_\lambda(\varphi; \varphi_0)$ sind dabei stetig partiell nach φ, φ_0 differenzierbar. Diese Reihe konvergiert im Bereich

$$\begin{aligned} |\varphi_0| &\leq 2\pi, & |\varphi - \varphi_0| &\leq 2\pi \\ \frac{|r_0|}{\varepsilon} &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} e^{-n[4\pi M+1]} \end{aligned} \quad (3.30)$$

kompakt gleichmässig absolut.

Beweis:

$f(\varphi, r)$ ist offensichtlich in $U_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}$ holomorph in r .

Da in der auf Polarkoordinaten transformierten Differentialgleichung (3.9) der Nenner für reelles φ keine Nullstellen hat und somit Zähler wie Nenner für $|\varphi| \leq 4\pi$, $|r| < \varepsilon$ beschränkt sind, gilt wegen (3.9) $f(\varphi, r) = O(r)$ und somit $|f(\varphi, r)| \leq M\varepsilon$ mit einem geeigneten M .

⁵ $r(\varphi; \varphi_0, r_0)$ bezeichnet im folgenden immer eine Funktion, die von φ abhängt und für $\varphi = \varphi_0$ den Wert $r(\varphi_0) = r_0$ annimmt.

Gemäß den CAUCHYschen Ungleichungen⁶ erhalten wir für die Koeffizienten $f_\lambda(\varphi)$ aus (3.29) die Abschätzung

$$|f_\lambda(\varphi)| \leq \frac{M\varepsilon}{\xi^\lambda} \quad \forall \xi \in U_\varepsilon(0).$$

Indem wir nun ξ gegen ε konvergieren lassen, ergibt sich

$$|f_\lambda(\varphi)| \leq \frac{M\varepsilon}{\varepsilon^\lambda}.$$

Damit sind für den eindimensionalen Fall ohne Parameter die Voraussetzungen von [13], §3 erfüllt. Dieser liefert die Behauptung. \square

Ohne Einschränkungen können wir voraussetzen, dass $r(\varphi; \varphi_0, r_0)$ stetig partiell nach φ, φ_0 differenzierbar ist. Wir erhalten dann eine analytische Stammfunktion in der gewünschten Form

$$F(\varphi_0, r_0) = \sum_{\lambda \geq 1} \phi_\lambda(\psi, \varphi_0) r_0^\lambda$$

mit $|\varphi_0| \leq 2\pi$, $r_0 < \varepsilon$ wie in (3.30), wenn

$$\psi \in \bigcap_{|\varphi_0| \leq 2\pi} \{\varphi \mid |\varphi - \varphi_0| \leq 2\pi\} = \{0\},$$

also für $\psi = 0$. Durch diese Wahl befinden wir uns in jedem Fall im Definitionsbereich der allgemeinen Lösung.

⁶vgl. z.B. [15] Kapitel 8, §3, S. 190

3.4 Beispiel für den degenerierten Fall

Ausgangspunkt sei zunächst der allgemeine degenerierte Fall (3.2)

$$y' = -\frac{x^{2n-1} + p(x, y)}{y^{2n-1} + q(x, y)} = f(x, y), \quad n \geq 2,$$

wobei p und q Polynome oder Potenzreihen seien, die mit Grad $2n$ starten.

Wir wollen nun im speziellen den folgenden Fall betrachten, der sich im wesentlichen durch Symmetrie auszeichnet:

Satz 3.23 (Beispiel für den degenerierten Fall) Falls in (3.2) eine der folgenden Konstellationen vorliegt, ist der Ursprung ein Zentrum:

1. $p(x, y)$ beinhaltet nur ungerade Potenzen von x ,
 $q(x, y)$ beinhaltet nur gerade Potenzen von x (d.h. q ist symmetrisch zur y -Achse);
2. $q(x, y)$ beinhaltet nur ungerade Potenzen von y ,
 $p(x, y)$ beinhaltet nur gerade Potenzen von y (d.h. p ist symmetrisch zur x -Achse).

Beweis:

Nach Transformation auf Polarkoordinaten ergibt sich die Differentialgleichung (3.9)

$$r'(\varphi) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+1} p_{k+1}(\cos \varphi, \sin \varphi)}{\sum_{k=0}^{\infty} r^k q_k(\cos \varphi, \sin \varphi)} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} r^k p_k(\varphi)}{\sum_{k=0}^{\infty} r^k q_k(\varphi)} =: \frac{P(\varphi, r)}{Q(\varphi, r)} =: f(\varphi, r).$$

$f(\varphi, r)$ ist offensichtlich 2π -periodisch in φ , d.h. es ist $f(\varphi + 2\pi m, r) = f(\varphi, r)$, $m \in \mathbb{Z}$. Wir wollen uns nun mit der Frage nach einer 2π -periodischen Lösung $r(\varphi)$ beschäftigen. Gemäß [23], 2.2.5 erhalten wir eine 2π -periodische Lösung von (3.9), wenn gilt:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi, r(\varphi)) d\varphi = 0 \tag{3.31}$$

Die einfachste Form des Integranden $f(\varphi, r(\varphi))$, die 2π -periodisch ist, ist eine bezüglich Null ungerade Funktion⁷ (wie zum Beispiel $\sin(\varphi)$). Nach Voraussetzung ist Forderung (3.31) zunächst für festes r erfüllt:

1. Fall aus der Behauptung: $f(x, y)$ ist ungerade in x ;
2. Fall aus der Behauptung: $f(x, y)$ ist ungerade in y .

⁷Vgl. dazu die Überlegung, die zu Bedingung (3.21) führte.

Demnach ist $f(\varphi, r)$ für festes r eine ungerade Funktion in φ , die (3.9) erfüllt. Wir betrachten nun (3.9) als Anfangswertproblem

$$r'(\varphi) = f(\varphi, r(\varphi)) \quad \text{mit} \quad r(0) = r_0. \quad (3.32)$$

Da $f(\varphi, r(\varphi))$ stetig und lokal LIPSCHITZ-stetig bzgl. $r(\varphi)$ ist, konvergiert die durch das PICARDsche Iterationsverfahren⁸

$$r_{k+1}(\varphi) := r_0 + \int_0^\varphi f(\psi, r_k(\psi)) d\psi, \quad k \geq 0,$$

definierte Funktionenfolge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in einer ε -Umgebung von Null gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung $r(\varphi)$ des Anfangswertproblems (3.32).

Konkret erhalten wir:

$$r_1(\varphi) = r_0 + \underbrace{\int_0^\varphi f(\psi, r_0) d\psi}_{(*)}$$

Da die Aufintegration einer TAYLORreihe mit ungeraden Potenzen eine Reihe mit geraden Potenzen ergibt, ist (*) gerade und dadurch auch $r_1(\varphi)$. Weiter gilt:

$$r_2(\varphi) = r_0 + \underbrace{\int_0^\varphi f(\psi, r_1(\psi)) d\psi}_{(**)}$$

ist ebenfalls wieder gerade, da das gerade Argument $r_1(\psi)$ von f nichts daran ändert, dass f in ψ ungerade ist. Demnach ist (**) wieder gerade.

Das PICARDsche Iterationsverfahren reproduziert also stets gerade Funktionen $r_k(\varphi)$, $k \in \mathbb{N}$, und liefert somit die eindeutig bestimmte Lösung $r(\varphi)$ als gerade Funktion in φ . Nach Voraussetzung (3.31) ist $r(\varphi)$ zudem 2π -periodisch.

Dies bedeutet nun, dass $f(\varphi, r(\varphi))$ in unserem Fall stets ungerade und somit Forderung (3.31) generell (in einer ε -Umgebung des Ursprungs) erfüllt ist. Also sind die Lösungskurven von (3.9) geschlossen, und es liegt der Wirbelfall vor. \square

Bemerkung 3.24 *Die Beschäftigung mit Differentialgleichungen der Form (1.1) ist, wie in der Einleitung betont, nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch vor allem durch Problemfälle aus den Naturwissenschaften motiviert. Zu deren Illustration liefert B. SIEBE in [18], Kapitel 3, signifikante Anwendungen bzw. Problemstellungen aus sechs verschiedenen Teildisziplinen: Elektrodynamik, Ökologie, Plasmaphysik, Chemie, Hydrodynamik und Astrophysik. Sämtliche Beispiele beschränken sich dabei auf höchstens kubische rechte Seiten von (1.1).*

⁸vgl. z.B. [23], Beweis von Satz 1.7.1 (PICARD-LINDELÖF).

Kapitel 4

Ausblick

Im Zuge dieser Arbeit traten einige (alte und neue) Probleme zutage, die bisher noch nicht (vollständig) gelöst sind und an denen es sich lohnen könnte zu arbeiten:

- Als neue Herausforderung kann die Übertragung der Aussage von Satz (2.24) auf den degenerierten Fall (3.2) angesehen werden. Dabei gilt es, die Rolle des EULERSchen Multiplikators zu berücksichtigen. Wie erfolgreich ein derartiges Unterfangen sein kann, ist allerdings nicht abzusehen.
- Es weist bereits SIEGEL in [19] darauf hin, dass im Falle der Instabilität, also für $p+q \neq 0$, die Untersuchung der Konvergenz der Reihen φ , ψ , p , q noch ein offenes Problem darstellt.
- Wir bemerkten bereits in Kapitel 2, dass SIEGEL seine Ausführungen in [20] sehr knapp hält. In diesem Zusammenhang machte zudem SCHMATZ in [17] auf die von SIEGEL betonten Schwierigkeiten aufmerksam, sobald mehrere Paare von rein imaginären Eigenwerten auftreten.
- Am Ende von Unterkapitel 2.1 hatten wir schon erwähnt, dass im zweidimensionalen Fall für Polynome zur Stabilitätsuntersuchung letztendlich nur sieben Bedingungen ($m(l=2) = 7$) zu prüfen sind. Für $l > 2$ ist die Bestimmung einer solchen Schranke für $m(l)$ ein interessantes Problem.
- Und natürlich die Lösung von POINCARÉs Zentrumproblem und HILBERTs 16. Problem ...

..., wobei das Zentrumproblem ohne Bescheidenheit einen gewissen Vorsprung vor HILBERTs 16. Problem genießt: zumindest der quadratische Fall ist für ersteres vollständig gelöst. So zitiert zum Beispiel COPPEL 1966 in [4] hinreichende und notwendige Bedingungen an die Koeffizienten eines quadratischen Systems. COLLINS gibt 2001 in [3] für das spezielle kubische System

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y + x(\alpha x + \beta y + Ax^2 + Bxy + Cy^2) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(\alpha x + \beta y + Ax^2 + Bxy + Cy^2),\end{aligned}$$

mit $\alpha, \beta, A, B, C \in \mathbb{R}$, die Bedingungen

$$\begin{aligned}A + C &= 0, \\A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 &= 0\end{aligned}$$

an. VON WAHL liefert 2003 in [24] die Bedingungen für ein spezielles System beliebigen Grads. Für HILBERTs 16. Problem kann PERKO in [12] immerhin eine Lösung¹ für quadratische Systeme angeben, deren Trajektorien im Phasenraum für $t \geq 0$ begrenzt sind.

Da der “Vorsprung“ des Zentrumproblems allerdings marginal scheint, bleibt es weiterhin spannend, welches Problem zuerst gelöst werden wird.

¹Allerdings mitunter nicht in Form algebraischer, sondern analytischer Bedingungen an die Koeffizienten.

Anhang A

Die Realitätsbedingungen

A.1 Erläuterungen zum Anhang A

Im Teil A des Anhangs findet sich im wesentlichen ein Teil eines Handouts, das wir zu einem Vortrag zum POINCARÉschen Zentrumproblem in einem Hauptseminar an der Universität Bayreuth¹ geschrieben haben. Es werden die sog. Realitätsbedingungen gemäss [19], §14 hergeleitet, die in Kapitel 2 benötigt werden. Im Vergleich zum Seminar wurde die Bezeichnungsweise an die in dieser Arbeit verwendete angepasst.

A.2 Vorbemerkung

Am Ende dieses Abschnitts über die Realitätsbedingungen steht eine Beziehung der Form

$$\text{Lösung} = \overline{\text{Lösung}},$$

woraus folgt, dass die Lösung reell ist. Auf dem Weg dorthin ergeben sich sukzessive drei Bedingungen, die dafür notwendig sind.

A.3 Die Ausgangssituation

Wie in Kapitel 2 betrachten wir das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{A.1}$$

das auch hier die in Kapitel 2 genannten Voraussetzungen erfüllen möge. Die lineare Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

¹Hauptseminar zum POINCARÉschen Zentrumproblem, Wintersemester 2002/03 bei Prof. Wolf VON WAHL

führt uns (A.1) genau wie in Kapitel 2.1.3 über in

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2}. \quad (\text{A.2})$$

A.4 Der rein imaginäre Fall

Gemäß Satz 2.12 beschränken wir uns nun auf den rein imaginären Fall $\mu = \bar{\lambda}$. In Satz 2.13 wird gezeigt, dass es dann eine eindeutig bestimmte Substitution der Gestalt $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ gibt, so dass (A.2) auf die Normalform

$$\dot{u} = pu, \quad \dot{v} = qv$$

gebracht werden kann, wobei p, q Potenzreihen in dem Produkt $u \cdot v$ sind. Dies sei hier vorausgesetzt.

Man erhält dann:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u pu + \varphi_v qv \\ \psi_u pu + \psi_v qv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv.$$

Also mit (A.2):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv &= D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}_{\text{Grad} \geq 2} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\ &\quad - D \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} pu + \begin{pmatrix} \varphi_v \\ \psi_v \end{pmatrix} qv = T \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dt} \left[T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix}. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

Gleichung (A.3) besitzt also die Lösung $T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix}$, $p(u, v)$, $q(u, v)$, die nach dem Koeffizientenvergleich in Satz 2.13 eindeutig bestimmt ist.

A.5 Die Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Spalten von T^{-1} bestehen aus den Eigenvektoren x_λ , x_μ zu den Eigenwerten λ , μ der Matrix F . Wir schreiben also $T^{-1} = (x_\lambda | x_\mu)$.

Berücksichtigt man, dass $\mu = \bar{\lambda}$, $\bar{I}_2 = I_2$, I_2 die zweireihige Einheitsmatrix, und $\bar{F} = F$, dann erhält man

$$(\mu I_2 - F)x_\mu = 0 \tag{A.5}$$

$$(\mu I_2 - F)\bar{x}_\lambda = 0. \tag{A.6}$$

Aus (A.5) und (A.6) folgt:

$$x_\mu = \bar{x}_\lambda \varrho_\lambda,$$

$$x_\lambda = \bar{x}_\mu \varrho_\mu,$$

wobei ϱ_λ und ϱ_μ skalare Faktoren sind.

Indem man nun $x_\lambda \sqrt{\varrho_\mu}$ für x_λ und $x_\mu \sqrt{\varrho_\lambda}$ für x_μ schreibt, kann man nach [19], S. 85 erreichen, dass $\varrho_\lambda = \varrho_\mu = 1$ wird, also $x_\mu = \bar{x}_\lambda$.

Damit kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
 \overline{TT^{-1}} &= (x_\lambda | x_\mu)^{-1} (\bar{x}_\lambda | \bar{x}_\mu) \\
 &= (x_\lambda | \bar{x}_\lambda)^{-1} (\bar{x}_\lambda | x_\lambda) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =: J
 \end{aligned}$$

A.6 Konjugiert komplexe Koeffizienten

Wir gehen nun in Gleichung (A.3) zu konjugiert komplexen Koeffizienten über, wobei die Unbestimmten u, v fest bleiben mögen:

$$\begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix}, \quad p \rightsquigarrow \overline{p}, \quad q \rightsquigarrow \overline{q}$$

Damit wird die rechte Seite von (A.3) zu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{f_1} \left(\overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ \overline{f_2} \left(\overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \left((T^{-1} J) \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \\ f_2 \left((T^{-1} J) \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1 \left(T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right] \right) \\ f_2 \left(T^{-1} \left[J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(u, v) \\ \overline{\psi}(u, v) \end{pmatrix} \right] \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ersetzt man also in (A.3)

$$\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} & \text{durch} \quad J \begin{pmatrix} \overline{\varphi} \\ \overline{\psi} \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \overline{\psi} \quad \text{bzw.} \quad \psi = \overline{\varphi}, \\ p & \text{durch} \quad \overline{p}, \\ q & \text{durch} \quad \overline{q}, \end{array}$$

so bleibt (A.3) gültig. Allerdings erhalten wir noch keine eindeutige Lösung, weil die Bedingung, dass $\varphi(u, v) - u, \psi(u, v) - v$ mit quadratischen Gliedern beginnen (vgl. die Voraussetzungen zu Satz 2.13), nicht erfüllt ist. Wir formulieren diese Bedingung jetzt noch einmal in der Schreibweise des zweidimensionalen Problems:

(B) Die Reihen $\overline{\psi}(u, v) - u$ und $\overline{\varphi}(u, v) - v$ mögen mit quadratischen Gliedern beginnen.

Nun gilt explizit:

$$\begin{aligned} \overline{\psi}(u, v) - u &= (v + \overline{\psi_2} + \overline{\psi_3} + \dots) - u \\ \overline{\varphi}(u, v) - v &= (u + \overline{\varphi_2} + \overline{\varphi_3} + \dots) - v \end{aligned}$$

Um Bedingung **(B)** zu erfüllen, müssen demnach u und v in (A.3) vertauscht werden. Damit ergibt sich offenbar, dass die $J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\psi}(v, u) \\ \overline{\varphi}(v, u) \end{pmatrix}$, $\overline{q}(v, u)$, $\overline{p}(v, u)$ ebenfalls eine Lösung von (A.3) darstellen.

A.7 Die Realitätsbedingungen

Wegen der im Koeffizientenvergleich von [19], §25 bzw. §14 bewiesenen Eindeutigkeit der Substitution folgen nun die drei Bedingungen, die für eine reelle Lösung von (A.3) notwendig sind:

1. Bedingung

Es ist

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \quad | \cdot T \text{ von links} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} &= J \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(v, u) \\ \overline{\psi}(v, u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{\psi}(v, u) \\ \overline{\varphi}(v, u) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \overline{\psi}(v, u) \\ \psi(u, v) &= \overline{\varphi}(v, u). \end{aligned} \tag{A.7}$$

2. Bedingung

Es gilt

$$p(u, v) = \overline{q}(v, u). \tag{A.8}$$

Speziell für $p(u, v) = p(uv)$ und $q(v, u) = q(uv)$ hat man dann:

$$p(uv) = \overline{q}(uv)$$

3. Bedingung

Wählt man nun noch

$$v = \overline{u}, \tag{A.9}$$

so ist im Falle der Konvergenz $p(u, v) = \bar{q}(\bar{u}, \bar{v})$, also p und q komplex konjugiert und

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix} = \overline{T^{-1}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}) \\ \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) \end{pmatrix},$$

also $T^{-1} \begin{pmatrix} \varphi(u, v) \\ \psi(u, v) \end{pmatrix}$ zwangsweise reell.

Anhang B

Kurzbiographien

In diesem Abschnitt stellen wir die Kurzbiographien dreier bedeutender Mathematiker vor, deren Arbeiten für unser Thema maßgeblich waren.¹



Abbildung B.1: *Henri Poincaré (links), David Hilbert (Mitte) und Carl Ludwig Siegel (rechts)*

¹Die Bilder stammen aus dem Internet:

Links: <http://www.univ-nancy2.fr/ACERHP/chp/hpcoinvh.html>

Mitte: <http://www2.evansville.edu/ck6/bstud/hilbert.html>

Rechts: <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Siegel.html>

B.1 Henri Poincaré (1854-1912)²

Jules Henri POINCARÉ wurde am 29. April 1854 in Nancy geboren und starb am 17. Juli 1912 in Paris. Er stammte aus einer einflussreichen Familie: sein Cousin Raymond war Präsident und Premierminister von Frankreich und sein Vater war Professor für Medizin an der Universität von Nancy.

POINCARÉ wird gemeinhin als der führende Mathematiker seiner Zeit angesehen. Er entdeckte Grundlegendes auf mehreren Gebieten der Mathematik, insbesondere auf den Gebieten der komplexen Funktionentheorie, der partiellen Differentialgleichungen und der Himmelsmechanik.

Er studierte Bergbau, Mathematik und Physik in Paris. Mit dem Jahr 1881 übernahm er eine Lehrtätigkeit an der dortigen Universität. Dort hatte er die Lehrstühle für experimentelle Mechanik, mathematische Physik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Himmelsmechanik und Astronomie inne.

In seiner Dissertation aus dem Jahr 1879 stellt POINCARÉ einen Weg zur Untersuchung der Eigenschaften von Differentialgleichungen dar. Er bestimmte nicht nur die Integrale solcher Gleichungen, sondern er war auch der Erste, der die allgemeinen geometrischen Eigenschaften solcher Funktionen untersuchte. Er erkannte, dass diese Methode nützlich für die Lösung von Problemen wie dem der Stabilität des Sonnensystems ist. Während seiner Beschäftigung mit Differentialgleichungen benutzte POINCARÉ LOBACHEVSKYs nicht-euklidische Geometrie. Später wendete POINCARÉ die Methoden, die er in seiner Doktorarbeit vorgestellt hatte, auf die Himmelsmechanik an. Seine Arbeiten zur Untersuchung der Stabilität des Sonnensystems ermöglichten die Untersuchungen von chaotisch-deterministischen Systemen. Die Methoden, die er dabei verwendete, gaben den Anstoß für die Entwicklung der Topologie.

Auf dem Gebiet der Differentialgleichungen war er ein Pionier in der Anwendung asymptotischer Reihen, einem der mächtigsten Mittel der gegenwärtig angewandten Mathematik. Er verwendete unter anderem asymptotische Reihenentwicklungen, um Lösungen an irregulären, singulären Punkten zu bestimmen.

POINCARÉ skizzierte eine vorbereitende Version der speziellen Relativitätstheorie und erkannte, dass die Lichtgeschwindigkeit die größt mögliche Geschwindigkeit ist und dass die Masse eines Teilchens von seiner Geschwindigkeit abhängt. Er formulierte das Relativitätsprinzip und leitete die LORENTZ-Transformationen her. Sein wichtigstes Theorem, dass jedes isolierte mechanische System nach einer endlichen Zeit (POINCARÉ Recurrence Time) zu seinem Ausgangszustand zurückkehrt, ist der Ausgangspunkt vieler philosophischer und naturwissenschaftlicher Entropieanalysen. Außerdem verstand er, wie radikal sich die Quantentheorie von der klassischen Physik unterscheidet. POINCARÉ interessierte sich sehr für die Philosophie der Naturwissenschaften und die Grundlagen der Mathematik. Er setzte sich für die traditionellen Darstellungsweisen

²Quellen: [2] und [W]

und gegen den Formalismus ein. In diesem Zusammenhang kritisierte er CANTORs Mengenlehre. Während seines Lebens schrieb er verschiedene Artikel zur philosophischen Interpretation mathematischer Logik.

B.2 David Hilbert (1862-1943)³

David HILBERT (23.01.1862 - 14.02.1943) wurde in Königsberg geboren. Sein Vater und sein Großvater waren Richter. Im Jahre 1885 promovierte er mit einer Dissertation über Invariantentheorie. Nachdem er 1892 zunächst Professor in Königsberg wurde, erhielt er 1895 einen Lehrstuhl in Göttingen, wo er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1930 blieb. HILBERTs mathematische Interessen waren weit gestreut, von der Invariantentheorie über die algebraische Zahlentheorie, Grundlagen der Geometrie, Analysis bis hin zur Relativitätstheorie. Seine herausragenden längeren Arbeiten enthalten den 370 Seiten starken Zahlbericht (1895-97), in dem er einen großen Teil der algebraischen Zahlentheorie überarbeitete, und seinen axiomatischen Zugang zur euklidischen Geometrie (1899). Auf dem Internationalen Mathematikerkongreß 1900 in Paris stellte HILBERT seine berühmte Liste von 23 Problemen vor, denen sich seiner Meinung nach die Mathematiker verstärkt zuwenden sollten. Einige dieser Probleme sind noch immer ungelöst.

Nach seinen Arbeiten zur Geometrie war sein größter Wunsch, die Widerspruchsfreiheit der elementaren Zahlentheorie zu beweisen und dadurch die Mathematik aus der Grundlagenkrise zu führen, die auch Philosophen wie Bertrand RUSSELL stark interessierte. Einige Mathematiker lehnten seine Methode zur Behebung dieser Grundlagenkrise ab, und im Jahre 1931 zerschlug Kurt GÖDEL alle Hoffnungen auf einen Erfolg, indem er zeigte, daß in einer widerspruchsfreien Formalisierung der natürlichen Zahlen ein Satz A existiert, so dass weder A noch Nicht-A in dieser Formalisierung bewiesen werden können. Um 1903 führte HILBERT bei der Untersuchung eines Problems von Integralgleichungen den unendlichdimensionalen euklidischen Raum ein, der heute nach ihm benannt wird.

B.3 Carl Ludwig Siegel (1896-1981)⁴

Carl Ludwig SIEGEL wurde am 31. Dezember 1896 in Berlin geboren. Er studierte dort und in Göttingen Mathematik, Physik und Astronomie und wurde schon mit 25 Jahren als ordentlicher Professor an die Universität Frankfurt berufen. 1938 folgte er einem Ruf an die Georgia Augusta in Göttingen. 1940 nutzte er eine Dienstreise nach Norwegen, um von dort mit dem letzten Schiff vor der deutschen Besetzung des Landes in die USA zu emigrieren, wo er zusammen mit Albert EINSTEIN am Institute for Advanced Study in Princeton lehrte. Als einer der ganz wenigen Mathematiker kehrte SIEGEL nach dem Zweiten Weltkrieg nach Deutschland zurück und lehrte von 1951 bis zu seiner Emeritierung 1959 an seiner alten Wirkungsstätte in

³Quelle: [X]

⁴Quelle: [Y]

Göttingen. Hier starb Carl Ludwig SIEGEL am 4. April 1981.

Das wissenschaftliche Werk Carl Ludwig SIEGELs ist ungewöhnlich umfangreich und tiefeschürfend. Es umfasst drei klassische Gebiete der Mathematik. Im Mittelpunkt steht die *analytische Zahlentheorie*, in der er die große Tradition des 19. Jahrhunderts fortsetzte und seine in Fachkreisen berühmte Theorie der quadratischen Formen schuf. Bei diesen Forschungen entdeckte er als sein zweites Arbeitsfeld *wichtige Funktionen in mehreren komplexen Variablen* - die heute nach ihm benannten „SIEGELschen Modulfunktionen“. Schließlich beschäftigte sich SIEGEL intensiv mit der *Himmelsmechanik*, die ihm insbesondere durch seine Untersuchungen zum Dreikörperproblem und zu Stabilitätsfragen wichtige Fortschritte verdankt. Seine Leistungen fanden Anerkennung durch die Verleihung zahlreicher Auszeichnungen, unter anderen den israelischen Wolf-Preis und die Aufnahme in den Orden Pour le mérite für Wissenschaften und Künste. Neben seiner wissenschaftlichen Bedeutung ist besonders hervorzuheben, dass SIEGEL einerseits, ohne direkt persönlich bedroht zu sein, sich dem nationalsozialistischen Regime durch Emigration entzog und andererseits nach dem Zweiten Weltkrieg nach Deutschland zurückkehrte.

Literaturverzeichnis

- [1] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, 1997
- [2] W.E. Boyce/R.C. DiPrima. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Spektrum Verlag, 1995
- [3] C. B. Collins. *Poincaré's Reversibility Condition*, J. of Math. Analysis and Applications 259, 2001, pp. 168-187
- [4] W. Coppel. *A survey of quadratic systems*, J. Differential Equations 2, 1966, pp. 293-304
- [5] G. Eisenreich. *Algebra Lexikon*, Akademie-Verlag Berlin, 1989
- [6] M. Frommer. *Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln (geschlossener und spiraliger Integralkurven) in der Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen* in *Mathematische Annalen 109*, Springer Verlag Berlin, 1935
- [7] H. Grauert, W. Fischer. *Differential- und Integralrechnung II*, 2. Auflage Springer Verlag, 1973
- [8] H. Grauert, I. Lieb. *Differential- und Integralrechnung III*, 1. Auflage, Springer Verlag, Jahr 1968
- [9] E. Kamke. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I*, 9. Auflage, B.G. Teubner Stuttgart, 1977
- [10] H. Klein. *Der Verlauf der Integralkurven von $y' = \frac{P}{Q}$ in der Nähe der Null für homogene Polynome P, Q von ungeradem Grad*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2001
- [11] E. Kunz. *Algebra*, 2. Auflage, Vieweg Verlag Braunschweig/Wiesbaden, 1994
- [12] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Texts in Applied Mathematics 7, 2nd. ed., 1996, Springer-Verlag New York, Inc.
- [13] O. Perron. *Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte*, in: *Mathematische Annalen 113*, Springer Verlag, 1937

- [14] A. Prell. *Periodische Lösungen von $y' = -\frac{A(x,y)}{B(x,y)}$ mit Anfangsbedingungen höherer Ordnung in $A(x, y)$ und $B(x, y)$* , Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2003
- [15] R. Remmert. *Funktionentheorie I*, 2. Auflage, Springer Verlag, 1995
- [16] D. Schlomiuk. *Integrability of plane quadratic vector fields*, Expositiones Mathematicae 8 (1990), S. 3-25
- [17] J. Schmatz. *Bemerkungen zur Hopf-Verzweigung bei analytischen Systemen $\dot{x} = f(x)$ bei einem Paar mehrfach konjugierter rein imaginärer Eigenwerte der Linearisierung*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2000
- [18] B. Siebe. *Das POINCARÉsche Zentrumproblem - Anwendungen ebener autonomer nicht-degenerierter Systeme*, Diplomarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2003
- [19] C.L. Siegel. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*, Springer Verlag 1956
- [20] C.L. Siegel. *Gesammelte Abhandlungen. Band IV. Kapitel 94 „Periodische Lösungen von Differentialgleichungen“*, herausgegeben von K. Chandrasekharan und H. Maaß, Springer Verlag, 1979
- [21] A. Teichert. *Die Strudelbedingungen für $y' = \frac{P}{Q}$ an der Stelle einer Unbestimmtheit*, Zulassungsarbeit an der Universität Bayreuth bei Prof. Wolf von Wahl, 2001
- [22] B.L. van der Waerden. *Algebra II*, 5. Auflage, Springer Verlag Berlin, Jahr 1967
- [23] W. von Wahl. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Vorlesung an der Universität Bayreuth im Sommersemester 2001
- [24] Wolf von Wahl. *Remarks on Poincaré's Center Problem*, Vortrag, Zürich, 07.02.2003
- [A] Q. Wang. *The global solution of the n-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 50 (1991), pp. 73-88
- [B] Henri Poincaré. *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, séries 4, v.1, 1885, pp. 167-244
- [C] H. Poincaré. *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Journal de Mathématiques, séries 3, v. 7, 1881, pp. 375-422
- [D] Marek Kordos. *Streifzüge durch die Mathematikgeschichte*, 1. Auflage, Klett, 1999
- [E] C. Chicone, Tian Jinguang. *On general properties of quadratic systems*, Am. Math. Monthly, 89 (1982), pp. 167-178
- [F] L. M. Perko. *Limit cycles of quadratic systems in the plane*, Rocky Mountain J. of Math., Vol. 14, Number 3, Summer 1984

- [G] Yeh Yen-chien. *A qualitative study of the integral curves of the differential equation $dy/dx = \dots, I$, Uniqueness of limit cycles II*, Chinese Math., 1-18 (1963), pp. 62-70
- [H] N. N. Bautin. *On the number of limit cycles which appear with a variation of coefficients from equilibrium position of focus or center type*, Math. Sb., 30 (1952), 181-196; Am. Math. Soc. Transl., No. 100 (1954), pp. 3-19
- [I] Chin Yuan-Shun et al. *Concrete examples of the existence of three limit cycles for the system $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$* , Acta Math. Sinica, 9 (1959), pp. 213-226
- [J] Yeh Yen-chien. *Periodic solutions and limit cycles of certain nonlinear differential systems*, Sci. Record N.S., 1 (1957), pp. 391-394
- [K] Tung Chin-chu. *Positions of limit cycles of the system $dx/dt = \sum a_{ik}xy^k$, $dy/dt = \sum b_{ik}xy^k$, $0 \leq i + k \leq 2$* , Sci. Sinica, 8 (1959), pp. 151-171
- [L] L. M. Perko and Shu Shih-lung. *Existence, uniqueness, and non-existence of limit cycles for a class of quadratic systems in the plane*, J. Diff. Eq. 53 (1984), pp. 1-26
- [M] Shi Songling. *A concrete example of the existence for limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica, 23 (1980), pp. 153-158
- [N] I. Petrovskii and E. Landis. *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 10 (1958), pp. 177-221
- [O] I. Petrovskii and E. Landis. *Corrections to the articles On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree und On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials*, Mat. Sb., 48 (90) (1959) pp. 253-255
- [P] E. Landis and I. Petrovskii. *Letter to the editor*, Mat. Sb. 73 (1967), p. 160
- [Q] Yuanshun Chin. *On surfaces defined by ordinary differential equations*, Lecture Notes in Math., vol. 1151, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1985, pp. 115-131
- [R] Ju. S. Il'yashenko. *Perturbations of the polynomial Hamiltonian equations in the real and complex domains*, Sympos. Methods of the Qualitative Theory and the Theory of Bifurcations, Gorky, 1988, pp. 63-67
- [S] Shi Songling. *A counterexample to Chins proposed solution to Hilberts 16th problem*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), pp. 597-599
- [T] Dana Schlomiuk. *Algebraic particular integrals, integrability and the problem of the center*, Transactions of the American mathematical society, Volume 338, Number 2, August 1993
- [U] L. S. Pontrjagin. *Über Autoschwingungssysteme, die den hamiltonschen nahe liegen.*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 6, Heft 1-2, 1934, pp. 25-28

- [V] J. Guckenheimer, R. Rand, D. Schlomiuk. *Degenerate homoclinic cycles in perturbations of quadratic hamiltonian systems*, Nonlinearity 2, 1989, pp. 405-418
- [W] <http://www.utm.edu/research/iep/p/poincare.htm>
- [X] <http://www.mathe.tu-freiberg.de/hebisch/cafe/hilbert.html>
- [Y] <http://www.stadtarchiv.goettingen.de/personen/siegel.htm>

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Bayreuth, den 12. August 2003

(Matthias Brandl)