§ 30. Selbstadjungierte Differentialoperatoren

Sei $L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ ein Differentialoperator mit Grundmenge $[a, b]$. Sei $a_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar, $a_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Nach Beispiel 3 nach Definition 25.3 können wir auch hier die Adjungierte L^* bilden und erhalten

$$L^* = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + (2a_2' - a_1) \frac{d}{dx} + (a_2'' - a_1' + a_0).$$

Wir werden daher sagen, L sei selbstadjungiert, wenn $a_2' = a_1$, d. h. $2a_2' = 2a_1$ und $a_2'' - a_1' = 0$ ist.

Ein einfaches Beispiel ist

$$L = \frac{d}{dx}\left(p \frac{d}{dx}\right) + q,$$

$p : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,
$q : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist nämlich $a_2 = p$, $a_1 =$

$= p' = a_2'$.

Definition 30.1: Sei $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $p(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Sei $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $d_1^2 + d_2^2 > 0$. Dann heißt

$$L = \frac{d}{dx}\left(p \frac{d}{dx}\right) + q ,$$

betrachtet auf Funktionen u mit

$$u \in \mathcal{D}_L = \{ v \mid v \text{ 2-Mal stetig differenzierbar in } [a,b], \; c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0, \; d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0 \}$$

Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$.

Für Sturm-Liouville-Operatoren gilt

Satz 30.1: Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. Im reellen Hilbert-Raum $L_2(]a,b[)$ mit Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_a^b f g \, dx$$

gilt

$$(1) \quad (Lv, u) = (v, Lu), \quad u, v \in \mathcal{D}_L.$$

Beweis: Achtung: (1) ist nicht selbstverständlich, da keins der Elemente u, v seinen Träger in]a, b[zu haben braucht. Es müssen also Randterme ausgewertet werden. Wir haben

$$v\,Lu - u\,Lv = v((pu')' + qu) - u((pv')' + qv),$$
$$= v(pu')' - u(pv')',$$

$$\frac{d}{dx}(v(pu')' - u(pv')') =$$
$$= \frac{d}{dx}(vpu' - upv'),$$
$$= v(pu')' - u(pv')',$$
$$= v((pu')' + qu) - u((pv')' + qv),$$
$$= v\,Lu - u\,Lv = v \cdot Lu - Lv \cdot u.$$

Integration über [a, b] liefert

$$\int_a^b (v\,Lu - Lv\,u)\,dx =$$
$$= \left[v(pu)' - u(pv)' \right]_a^b,$$

$$= \left[p(vu' - uv') \right]_a^b .$$

Wegen

$$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0 ,$$
$$c_1 v(a) + c_2 v'(a) = 0 ,$$

$(c_1, c_2) \neq 0$, ist die Determinante dieses Gleichungssystems in den Größen c_1, c_2 gerade 0. Ihr Wert ist $-(vu' - uv')(a)$. Entsprechendes gilt in b. Also ist

$$\int_a^b v L u = \int_a^b L v \cdot u \, dx . \quad \square$$

Satz 30.1 zieht die Symmetrie der Greenschen Funktionen nach sich. Hierzu gilt:

/ $Lu = 0$ habe in δ_L nur die Lösung $u \equiv 0$.
L zu L /

Satz 30.2: Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich δ_L. / Sei G eine Greensche Funktion / wie am Ende von § 29. Dann gilt

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \text{ in } [a, b] \times \times [a, b] .$$

Beweis: Seien $\rho_\nu : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, seien $u_\nu \in \delta_L$ mit

$$L u_\nu = \rho_\nu , \quad \nu = 1, 2 .$$

Nach Satz 30.1 ist

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2), \text{ also}$$
$$(\rho_1, u_2) = (u_1, \rho_2),$$

$$\int_a^b \rho_1(x) \int_a^b G(x,\xi)\rho_2(\xi)\,d\xi\,dx =$$
$$= \int_a^b \rho_2(x) \int_a^b G(x,\xi)\rho_1(\xi)\,d\xi\,dx,$$

$$\int_a^b \left(\int_a^b G(x,\xi)\rho_1(x)\rho_2(\xi)\,d\xi\right)dx =$$
$$= \int_a^b \left(\int_a^b G(x,\xi)\rho_2(x)\rho_1(\xi)\,dx\right)d\xi,$$
$$\overset{\substack{x\to\xi\\ \xi\to x}}{=} \int_a^b \left(\int_a^b G(\xi,x)\rho_2(\xi)\rho_1(x)\,d\xi\right)dx,$$

$$\int_a^b \left(\int_a^b (G(x,\xi) - G(\xi,x))\,\rho_1(x)\rho_2(\xi)\,d\xi\right)dx =$$
$$= 0 = \int_Q (G(x,\xi) - G(\xi,x))\,\rho_1(x)\rho_2(\xi)\,d\xi\,dx.$$

Man nimmt nun an: $G(x,\xi) - G(\xi,x) \neq 0$ in $/(x_0,\xi_0)$./ dann ist etwa

/$(x,\xi) =$ ⌈O.E. sei $(x_0,\xi_0) \in\ ]a,b[\times]a,b[$.

$$G(x,\xi) - G(\xi,x) > 0 \quad \text{in}$$
$$K_\varepsilon((x_0,\xi_0)) \cap Q,$$
$$Q = [a,b]\times[a,b]$$

/ $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $\Gamma \cap$ Sind / $\rho_1(x)\rho_2(\xi) > 0$ in $K_{\varepsilon/4}((x_0,\xi_0))$/ $\cap\, Q$, $\operatorname{Tr} \rho_1\rho_2 \subset K_\varepsilon((x_0,\xi_0))$, so folgt

$$0 < \int_Q (G(x,\xi) - G(\xi,x))\,\rho_1(x)\,\rho_2(\xi)\,d\xi\,dx,$$

und dies ist ein Widerspruch. $\square$

Ein Argument, ähnlich dem / Beweis von im/ Satz 30.2 verwendeten, zeigt

<u>Satz 30.3:</u> <u>Sei</u> L <u>S-L-Operator mit Definitionsbereich</u> $\mathfrak{D}_L$. $Lu = 0$ <u>habe in</u> $\mathfrak{D}_L$ <u>nur die Lösung</u> $u \equiv 0$. <u>Dann gibt es genau eine Greensche Funktion zu</u> L <u>wie am Ende von</u> § 29.

<u>Beweis:</u> Sei $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien G_1, G_2 zwei Greensche Funktionen zu L. Sei

$$u_1(x) = \int_a^b G_1(x,\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi,$$

$$u_2(x) = \int_a^b G_2(x,\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi,$$

also $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}_L$, $Lu_1 = \rho$, $Lu_2 = \rho$. Nach Annahme ist $u_1 \equiv u_2$, also

$$\int_a^b (G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi))\,\rho(\xi)\,d\xi = 0,$$

$$x \in [a, b],$$
$$\rho \in C^0([a, b]).$$

Ein Argument, ähnlich dem im Beweis von Satz 30.2 verwendeten, zeigt $G_1 \equiv G_2$. □

<u>Beispiele</u>: <u>1</u>. $Ly = y''$ in $[0, 1]$, $y(0) = y(1) = 0$. $Lu = 0$ hat in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Die allgemeine Lösung von $y'' = 0$ ist

$$\eta(x) = c_1 x + c_0 .$$

Sei

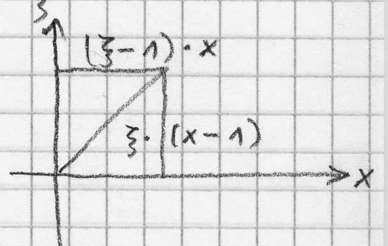
$$\eta_1(x) = x , \quad \eta_2(x) = x - 1$$
$$\eta_1'(x) = 1 \quad \eta_2'(x) = 1$$

(vgl. Beweis Satz 29.1). Dann ist

$$W(x) = 1 ,$$

also nach (1, Beweis Satz 29.1)

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G^l(x, \xi) = (\xi - 1)x , & \xi \geq x, \\ G^r(x, \xi) = \xi \cdot (x - 1), & x \geq \xi \end{cases}$$



Für stetiges $\rho : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist die Lösung von $u'' = \rho$ mit $u(0) = 0 = u(1)$ also gegeben durch

$$u(x) = (x - 1) \cdot \int_0^x \xi \rho(\xi) \, d\xi \; + $$
$$+ \; x \int_x^1 (\xi - 1) \rho(\xi) \, d\xi .$$

Starte mit Satz 26.1

Ziel: In 4 Doppelstunden fertig

S. V. 105: Beweis des Hilfssatzes 27.1 fortlassen

S. V. 111 unten bis S. V. 112 oben fortlassen

S. V. 114 oben – S. V. 115 oben (Bew. Satz 28.3) entfällt

S. V. 130 unten bis S. V. 132 oben entfällt (Beweis Satz 30.2)

S. V. 132 unten bis S. V. 133 oben entfällt (Beweis Satz 30.3)

Fakultativ: Allgemeinere Randbedingungen auf S. 125:

$\underset{\text{fest}}{u(a) = 0}, \; \underset{\text{frei}}{u'(t) = 0}$;

Für $\rho(x) = \sin x$ erhält man z. B.

$$u(x) = (x-1)\cdot\int_0^x \xi\cdot\sin\xi\, d\xi \; +$$
$$+\; x\cdot\int_x^1 (\xi - 1)\sin\xi\, d\xi \,,$$

$$= (x-1)\cdot\left[-\xi\cos\xi + \sin\xi\right]_0^x \;+$$
$$+\; x\left[-\xi\cos\xi + \sin\xi\right]_x^1 - x\left[-\cos\xi\right]_x^1 \,,$$
$$= (-1)\cdot\left[-\xi\cos\xi + \sin\xi\right]_0^x \;+$$
$$+\; x\left[-\cos 1 + \sin 1\right] + x\cos 1 - x\cos x \,,$$
$$= -\sin x + x\sin 1 \,.$$

2. $Ly = y''$ in $[0,1]$ mit $y(0)=0$, $y'(1) = 0$. $Lu = 0$ hat in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Ein Fundamentalsystem wie in § 29, Ende (allgemeinere Randbedingungen) ist gegeben durch $\eta_1(x) = x$, $\eta_2(x) = 1$. Dann ist

NR.: $a=0$, $b=1 \Rightarrow c_1 = 1$, $c_2 = 0$
$d_1 = 0$, $d_2 = 1$

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Dann ist

$$\boxed{G(x,\xi) = \begin{cases} G^l(x,\xi) = -x \,, & \xi \geq x \,, \\ G^r(x,\xi) = -\xi \,, & x \geq \xi \,. \end{cases}}$$