§ 28. Greensche Funktionen

Der Operator L hatte bisher konstante Koeffizienten. Wir wenden uns jetzt dem Fall variabler Koeffizienten zu. Seien

$$a_0, a_1 : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{stetig},$$

sei

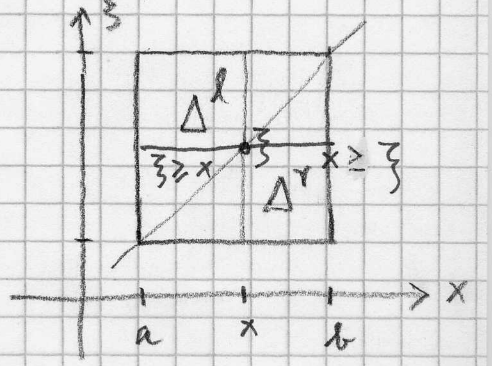
$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 .$$

Wir suchen eine Funktion $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, daß für jede stetige Funktion $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \rho(\xi)\, d\xi$$

Lösung von $Ly = \rho$ ist.

Dazu machen wir folgenden Ansatz: $Q := [a, b] \times [a, b]$.



$$\Delta^l := \{ (x, \xi) \mid (x, \xi) \in Q,\ x \leq \xi \},$$

$$\Delta^r := \{ (x, \xi) \mid (x, \xi) \in Q,\ x \geq \xi \},$$

$$G^l := G \mid \Delta^l,$$

$$G^r := G \mid \Delta^r .$$

Definition 28.1: Sei $L = d^2/dx^2 + a_1 \cdot d/dx + a_0$ mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_1, a_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion

$$G : Q \to \mathbb{R}$$

heißt eine Greensche Funktion zu L, wenn gilt:

1. G ist stetig,
2. G^l, G^r sind [in Δ^l bzw. Δ^r] 2-Mal partiell [nach x] differenzierbar. $\partial G^l/\partial x$, $\partial G^r/\partial x$, $\partial^2 G^l/\partial x^2$, $\partial^2 G^r/\partial x^2$ sind in Δ^l bzw. Δ^r stetig.
3. Für jedes [feste] $\xi \in [a,b]$ gilt

$$\frac{\partial^2 G^l}{\partial x^2}(x,\xi) + a_1(x)\frac{\partial G^l}{\partial x}(x,\xi) + a_0[(x)] G^l(x,\xi) = : L_x G^l(x,\xi) = 0, \quad \xi \geq x,$$

$$\frac{\partial^2 G^r}{\partial x^2}(x,\xi) + a_1(x)\frac{\partial G^r}{\partial x}(x,\xi) + a_0[(x)] G^r(x,\xi) = : L_x G^r(x,\xi) = 0, \quad x \geq \xi.$$

4. Es ist

$$\frac{\partial G^r}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial G^l}{\partial x}(x,x) = 1, \quad x \in [a,b].$$

Wir haben bereits Greensche Funktionen konstruiert, denn es gilt der

Satz 28.1: Ist $L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, setzt man für beliebiges $Q = [a, b] \times [a, b]$

$$G(x, \xi) := g(x - \xi),$$

wobei g aus dem Beweis von Satz 26.2 stammt, so ist g eine Greensche Funktion zu L.

Beweis: 1. $g = h \cdot f$ ist wegen $f(0) = 0$ stetig, also auch G.

2. Es ist $g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$.

Also ist $G^l \equiv 0$, $G^r(x, \xi) = f(x - \xi)$. Also genügen G^l, G^r der Forderung 2. in Definition 28.1.

3. Forderung 3 ist für G^l klar, für G^r folgt sie aus $(Lf)(x) = 0$ in $\mathbb{R}$.

4. $(\partial G^r / \partial x)(x, x) = f'(0) = 1$, $(\partial G^l / \partial x)(x, x) = 0$. $\square$

Satz 28.2 (G liefert eine Lösung von $Ly = \rho$): Sei $L = d^2/dx^2 + a_1 d/dx + a_0$ mit stetigen Koeffizienten

$$a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

LL Sei G eine Greensche Funktion zu L, $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi$$

2-Mal <u>stetig differenzierbar und erfüllt</u>

$$(Lu)(x) = \rho(x).$$

⌟

<u>Beweis:</u> Es ist

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^x G^r(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi + \\ &\quad + \int_x^b G^l(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \\ &= \int_a^x G^r(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi - \\ &\quad - \int_b^x G^l(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi\,, \\ u'(x) &\underset{27.1}{\overset{\text{Hilfss.}}{=}} G^r(x,x)\rho(x) + \int_a^x (\partial G^r/\partial x) \\ &\quad (x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi - G^l(x,x)\rho(x) \\ &\quad - \int_b^x \frac{\partial G^l}{\partial x}(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \\ &\underset{\text{Def. 28.1}}{\overset{\text{Eigensch. 1}}{=}} \int_a^x (\partial G^r/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi - \\ &\quad - \int_b^x (\partial G^l/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Die Funktion

$$F_1(x,\xi) = \begin{cases} (\partial G^r/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi), & x \geq \xi \\ ((\partial G^l/\partial x)(x,\xi) + 1)\rho(\xi), & x \leq \xi \end{cases}$$

genügt wegen Eigenschaften 2. und 4. in Definition 28.1 den Voraussetzungen des Hilfssatzes 27.1. Entsprechendes gilt für

$$F_2(x,\xi) = \begin{cases} ((\partial G^r/\partial x)(x,\xi) - 1)\rho(\xi), & x \geq \xi, \\ (\partial G^l/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi), & x \leq \xi. \end{cases}$$

Damit liefert Hilfssatz 27.1 gerade die Stetigkeit von u'' und

$$\begin{aligned} u''(x) &= (\partial G^r/\partial x)(x,x)\rho(x) + \\ &\quad + \int_a^x (\partial^2 G^r/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi) - \\ &\quad - (\partial G^l/\partial x)(x,x)\rho(x) - \\ &\quad - \int_b^x (\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \\ &= \rho(x) + \int_a^x (\partial^2 G^r/\partial x^2)(x,\xi)\cdot \\ &\quad \cdot\rho(\xi)\,d\xi + \\ &\quad + \int_x^b (\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \rho(x) + \int_a^x L_x G^r(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi \\ &\quad + \int_x^b L_x G^l(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi, \end{aligned}$$

$L_x = L$, genommen bezüglich der Variablen x.

Also ist mit Eigenschaft 3. aus Definition 28.1 gerade

$$L u(x) = \rho(x). \qquad \square$$

Wir befassen uns nun mit der Herstellung einer Greenschen Funktion. Hierzu gilt

Satz 28.3: Sei $L = d^2/dx^2 + a_1 d/dx + a_0$ ein Differentialoperator mit stetigen Koeffizienten

$$a_0, a_1 : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Seien

$$\eta_1, \eta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem zu $Ly = 0$. Wählt man stetige Funktionen

$$r_1, r_2, l_1, l_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

mit

Nummern durchschreiben!

(1) $\quad (r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 = 0$

(2) $\quad (r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' = 1$

und setzt

$$G^r(x,\xi) = r_1(\xi)\eta_1(x) + r_2(\xi)\eta_2(x),$$
$$G^l(x,\xi) = l_1(\xi)\eta_1(x) + l_2(\xi)\eta_2(x),$$

so ist

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G^r(x,\xi) & \underline{\text{für}}\ (x,\xi) \in \Delta^r, \\ G^l(x,\xi) & \underline{\text{für}}\ (x,\xi) \in \Delta^l \end{cases}$$

eine Greensche Funktion zu L.

Beweis: Die Determinante in (1,2) ist die Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) \\ \eta_1'(x) & \eta_2'(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [a,b],$$

die in $[a,b]$ niemals verschwindet, da nach Annahme η_1, η_2 ein Fundamentalsystem bilden. Zum Beispiel kann man $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ wählen und dann r_1, r_2 aus (1,2) bestimmen. Nun ist wegen (1) gerade

$$G^r(x,x) = G^l(x,x).$$

Also ist G stetig. Damit folgt Eigenschaft 1. in Definition 28.1. Eigenschaft 2. folgt aus der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von η_1, η_2. Eigenschaft 3 folgt daraus, daß bei festem ξ gerade

$$L_x G^r(x,\xi) = r_1(\xi) \overbrace{L\eta_1(x)}^{=0} + r_2(\xi) \cdot \overbrace{L\eta_2(x)}^{=0} = 0,$$

$$L_x G^l(x,\xi) = l_1(\xi) L\eta_1(x) + l_2(\xi) \cdot L\eta_2(x) = 0$$

ist. Eigenschaft 4. folgt aus (2). $\square$

Mit dem Konstruktionsverfahren des Satzes 28.3 erhält man <u>alle</u> Greenschen Funktionen: Da für festes ξ die Funktionen $G^r(\cdot,\xi)$, $G^l(\cdot,\xi)$ die Gleichung $Ly = 0$ lösen, lassen sie sich in der Form

$$G^r(x,\xi) = r_1(\xi)\,\eta_1(x) + r_2(\xi)\,\eta_2(x),$$
$$G^l(x,\xi) = l_1(\xi)\,\eta_1(x) + l_2(\xi)\,\eta_2(x)$$

darstellen. Wählen wir wie im Beweis des Satzes 28.3 angedeutet $l_1 = l_2 \equiv 0$, so ist $G^l(x,\xi) = 0$ in Δ^l. Für $G^r(\cdot,\xi)$ folgt

$L = \xi$ $$G^r(x|_L,\xi) = 0,$$

$L = \xi$ $$\frac{\partial}{\partial x} G^r(x|_L,\xi) = 1.$$

$G^r(\cdot,\xi)$ ist also die <u>eindeutig bestimmte Lösung</u> von $Ly = 0$, die in $x = \xi$ die Cauchy-Daten (= "Anfangswerte") $y(\xi) = 0$, $y'(\xi) = 1$ hat. Hat L konstante Koeffizienten, ist f die eindeutig bestimmte Lösung von $Ly = 0$ mit $f(0) = 0$,

$f'(0) = 1$, so finden wir zu beliebigem aber festem $\xi \in \mathbb{R}$ die / Lösung / von $Ly = 0$ mit $g(\xi) = 0$, $g'(\xi) = 1$, indem wir

/ eindeutig Γ g bestimmte

$$g(x) = f(x - \xi)$$

setzen. Dies sehen wir auch am folgenden Beispiel: Sei $[a, b]$ beliebig,

$$Ly = y'' + y .$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$\eta_1(x) = \cos x \, , \quad \eta_2(x) = \sin x \, ,$$

also

$$\eta_1'(x) = -\sin x \, , \quad \eta_2'(x) = \cos x \, .$$

Aus $l_1 = l_2 = 0$ folgt

/ (x) Γ(x)

$$r_1 / \cos x + r_2 Γ \sin x = 0 \, ,$$

/1 / (x) Γ(x)

$$-r_1 / \sin x + r_2 Γ \cos x = 0 \, .$$

Dies sind also die Gleichungen (1, 2) aus Satz 28.3. Auflösung liefert

$$r_1(x) = -\sin x \, ,$$

$$r_2(x) = \cos x \, ,$$

$$G^l(x, \xi) = 0 \, ,$$

$$G^r(x, \xi) = -\sin \xi \cos x + \cos \xi \sin x \, ,$$

$$= \sin(x - \xi) \, .$$

Wir gehen nun kurz auf den Fall ein, daß in L auch die Ableitung höchster Ordnung mit einem x-abhängigen Koeffizienten behaftet ist, so daß L die Form

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

mit

$$a_0, a_1, a_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$$

stetig hat. Sei

$$a_2(x) > 0 \ , \ x \in [a, b] .$$

Eine <u>Greensche Funktion</u> zu L ist zunächst durch die Forderungen 1. bis 3. aus Definition 28.1 erklärt, also:

1. $G : Q = [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig
2. Differenzierbarkeit (2-Mal) von $G^l(\cdot, \xi)$, $G^r(\cdot, \xi)$. Stetigkeit der Ableitungen in Δ^l bzw. Δ^r.
3. $$\begin{aligned} L_x G^l(x, \xi) &= a_2(x)(\partial^2 G^l / \partial x^2)(x, \xi) + \\ &\quad + \ldots , \\ &= 0 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_x G^r(x, \xi) &= a_2(x)(\partial^2 G^l / \partial x^2)(x, \xi) + \\ &\quad + \ldots , \\ &= 0 , \end{aligned}$$

aber

4. $(\partial G^r/\partial x)(x,x) - (\partial G^l/\partial x)(x,x) =$

$$= 1/a_2(x)\ ,\quad x \in [a,b].$$

Dann gilt

Satz 28.4: Sei L wie eben eingeführt, also mit x-abhängigem Koeffizienten a_2 vor d^2/dx^2. Sei G eine Greensche Funktion zu L.

/ stetige Dann ist für jedes/ $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi$$

2-Mal stetig differenzierbar und erfüllt

$$(Lu)(x) = \rho(x)\ ,\quad x \in [a,b].$$

Wenn η_1, η_2 ein Fundamentalsystem von $Ly = 0$ bilden, gewinnt man alle Greenschen Funktionen wie in Satz 28.3. Dabei ist zu beachten, daß man statt (1,2) jetzt

(3) $\quad (r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 = 0$

(4) $\quad (r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' = 1/a_2$

fordern muß.

/a_2 __Beweis:__ Wie Sätze 28.2,3. Der variable Koeffizient/von d^2/dx^2 drückt sich also nur in der veränderten Sprungrelation von $\partial G/\partial x$

L aus. $\square$