§ 27. Inhomogene Differentialgleichungen

Die Fundamentallösung T aus Satz 26.1 operierte bisher auf $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Es erweist sich als nötig, diesen Bereich zu erweitern. Im Fall der Ordnung 2 von L, d.h.

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 ,$$

a_1, a_0 reelle Konstanten,

suchen wir demnach eine Lösung von $Ly = \rho$ für ein stetiges $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$. Hierzu gilt:

<u>Satz 27.1: Sei L wie oben. Sei g die erzeugende Funktion der Fundamentallösung aus Satz 26.2. Dann gilt für beliebiges $\rho \in C^0([a,b])$ mit reellen Werten: Die Funktion</u>

$u : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>mit</u>

$$u(x) = \int_a^b g(x-\xi)\rho(\xi)\,d\xi$$

<u>ist 2-mal stetig differenzierbar in</u>

$[a, b]$. Es ist

$$Lu = \rho \quad \text{in} \quad [a, b]$$
$$u(a) = u'(a) = 0 .$$

$\subset [a, b]$ Hinweise: 1. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}\varphi$ haben wir als Lösung von $Lu = \varphi$ gerade

(x)
$$(T_g * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\, \varphi(\underbrace{x - t}_{\text{Subst. } \eta = x - t})\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(x-\eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta$$
$$= \int_a^b g(x-\eta)\, \varphi(\eta)\, d\eta$$

Satz 27.1 ist also die genaue Verallgemeinerung von Satz 26.2.

2. Es ist entscheidend, daß g gerade nicht 2-Mal stetig differenzierbar ist, sondern, daß g', möglicherweise auch g'', in 0 Sprungstellen besitzen, nicht aber g. Wäre nämlich g durchgehend 2-Mal stetig differenzierbar, so wäre mit $Lg(x) = 0$ für $x < 0$, $Lg(x) = 0$ für $x > 0$ aus Stetigkeitsgründen $Lg \equiv 0$. Dann

würde für das u des Satzes 27.1 folgen

$$L u(x) = \int_a^b \underbrace{(Lg)}_{=0}(x-\xi)\,\rho(\xi)\,d\xi$$
$$= 0, \quad x \in [a,b],$$

und ebenso für $T_g * \varphi$:

$$L(T_g * \varphi)(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

g ist also eine Singularitätenfunktion, und die Singularitäten äußern sich in Sprungstellen. In höheren Dimensionen geschieht dies durch Unendlichwerden (vgl. Übungen zur "Math. für Physiker III", Blatt 12, Aufgabe 1). Zum Beweis des Satzes 27.1 wird man also die Integration über $[a,b]$ in eine Integration über $[a,x]$ und eine über $[x,b]$ aufspalten müssen. Daher brauchen wir

Hilfssatz 27.1: Sei $F : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\partial F/\partial x$ existiere in $x \neq \xi$, sei dort stetig und beschränkt. Dann ist die Funktion

$$x \mapsto \int_a^x F(x,\xi)\,d\xi$$

in $[a,b]$ stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt die Formel

$$(1)\quad \frac{d}{dx}\int_a^x F(x,\xi)\,d\xi = F(x,x) + \int_a^x (\partial F/\partial x)(x,\xi)\,d\xi .$$

[s. links ←]

Beweis des Hilfssatzes 27.1:

$$(2)\quad \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} F(x+h,\xi) - \int_a^x F(x,\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_a^x (F(x+h,\xi) - F(x,\xi))\,d\xi$$

$$+ \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(x+h,\xi)\,d\xi$$

Wegen der Stetigkeit von F konvergiert der letzte Term für $h \to 0$ gegen $F(x,x)$. Es ist, ξ fest,

$$\frac{1}{h}(F(x+h,\xi) - F(x,\xi)) \underset{\exists\vartheta,\,0<\vartheta<1,}{\overset{\text{MWS}}{=}}$$

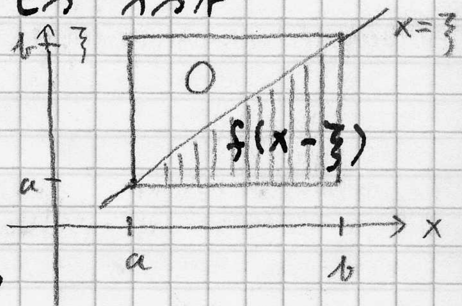
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x+\vartheta h,\xi),\quad \underset{h\text{ klein},}{\xi \neq x},$$

$$\left|\frac{1}{h}(F(x+h,\xi) - F(x,\xi))\right| \le D,\quad \underset{h\text{ klein}.}{\xi \neq x},$$

Mit Satz 3.2 (Satz von Lebesgue)

folgt, daß der erste Term in (2) rechts gegen $\int_a^x (\partial F/\partial x)(x,\xi)\,d\xi$ konvergiert. Damit folgt die Formel (1). Die Stetigkeit der rechten Seite in (1) folgt mit Satz 3.2 (Satz von Lebesgue). $\square$

<u>Beweis des Satzes 27.1:</u> Sei $G(x,\xi) = g(x-\xi)$, also $G : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, $(x,\xi) \mapsto \begin{cases} 0, & \xi > x \\ f(x-\xi), & \xi \le x \end{cases}$. Dann genügt $G\rho$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 27.1. Es ist



$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi,$$
$$= \int_a^x \overbrace{G(x,\xi)}^{=f(x-\xi)}\rho(\xi)\,d\xi,$$
$$u'(x) = \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)\rho(\xi)\,d\xi + G(x,x)\rho(x),$$
$$= \int_a^x f'(x-\xi)\rho(\xi)\,d\xi + \underbrace{f(0)}_{=0,\ \text{Annahme}}\rho(x);$$

Γ s. links ← Γ

$$u''(x) = \int_a^x f''(x-\xi)\rho(\xi)\,d\xi + \underbrace{f'(0)}_{=1,\ \text{Annahme}}\rho(x).$$

Also ist

$$(Lu)(x) = \int_a^x \underbrace{(Lf)(x-\xi)}_{=0}\rho(\xi)\,d\xi + \rho(x),$$
$$= \rho(x).$$

Offenbar ist $u(a) = u'(a) = 0$. $\square$

Hilfssatz 27.1 ist etwas stärker als wir ihn jetzt benötigt haben.

Beispiel: $\rho(x) = x$, $x \in [a,b] = [0,\pi]$. Sei $Ly = y'' + y$. Dann ist nach Beispiel 1 nach Satz 26.2

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 0, & x < \xi, \\ \sin(x-\xi), & \xi \le x \end{cases}$$

(vgl. Beweis Satz 27.1). Eine Lösung von $y'' + y = x$ erhält man also durch

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-\xi)\,\xi\,d\xi$$

$$= -\int_x^0 (x-t)\sin t\,dt \qquad \begin{array}{l} t = x-\xi \\ \xi = x-t \end{array}$$

$$= x\int_0^x \sin t\,dt - \int_0^x t\sin t\,dt$$

$$= [-x\cdot\cos t]_0^x - [-t\cos t + \sin t]_0^x$$

$$= -x\cdot\cos x + x - [-x\cos x + \sin x]$$

$$= x - \sin x.$$

Offenbar ist $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.