§ 24. Distributionen und Differentialgleichungen

Nr.: Rechts gegeben

In einer Variablen wollen wir zu $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Distribution S finden mit

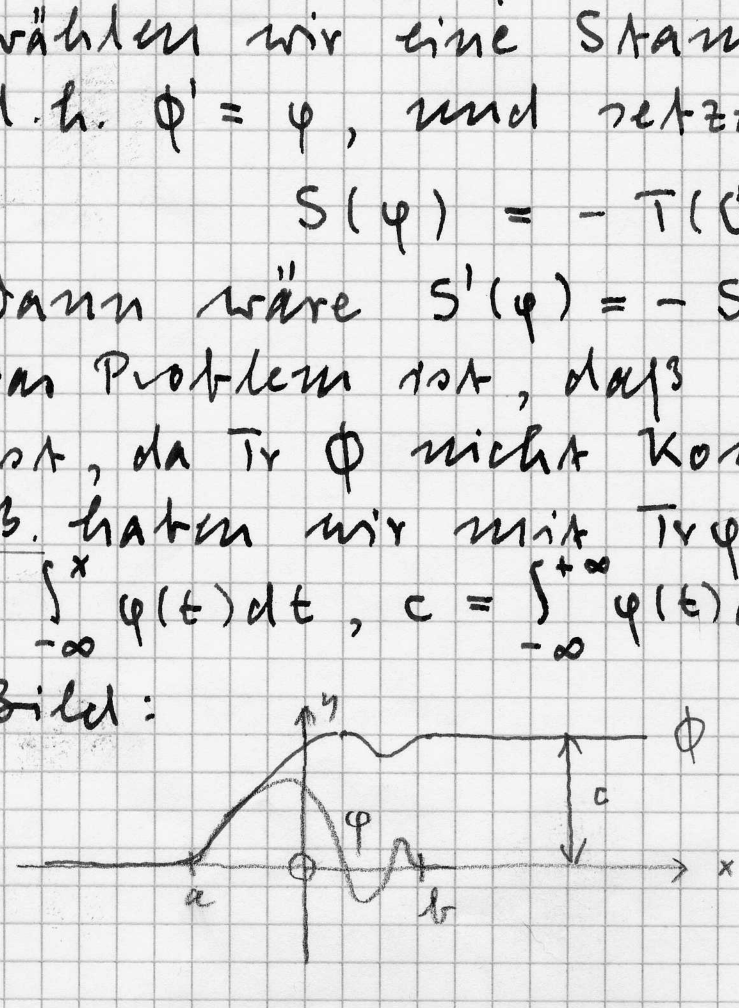
$$\frac{d}{dx}S = S' = T,$$

d.h., wir wollen die Differentialgleichung $y' = T$ im Bereich der Distributionen lösen.

Wir befassen uns zunächst mit einem <u>Ansatz</u>, der nicht unmittelbar zum Ziel führt. Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ wählen wir eine Stammfunktion Φ, d.h. $\Phi' = \varphi$, und setzen

$$S(\varphi) = -T(\Phi)$$

Dann wäre $S'(\varphi) = -S(\varphi') = T(\varphi)$.
Das Problem ist, daß i.a. $\Phi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist, da Tr Φ nicht kompakt ist. Z.B. haben wir mit $\operatorname{Tr}\varphi \subset [a,b]$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$, $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ folgendes Bild:



Definition 24.1: Wir setzen

$$\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_1 = \left\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0 \right\}$$

Beispiel: Sei $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{Tr}\varphi \subset [a, b]$. Dann ist $\varphi' \in \mathcal{D}_1$, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)\,dt = \int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a),$$
$$= 0 .$$

Hilfssatz 24.1: Sei $\varphi \in \mathcal{D}_1$, $\operatorname{Tr}\varphi \subset [a, b]$. Sei

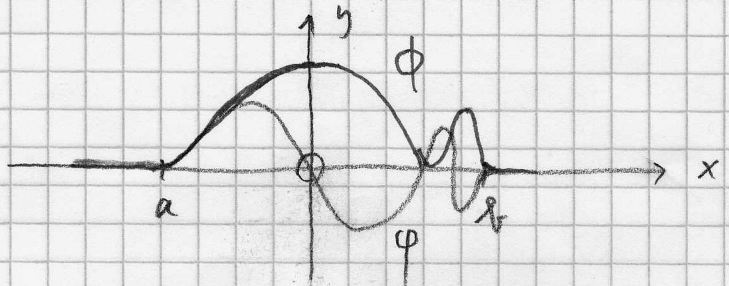
$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,dt .$$

Dann ist $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\Phi' = \varphi$, $\operatorname{Tr}\Phi \subset [a, b]$.

Beweis: Für $x \leq a$ ist $\Phi(x) = 0$. Für $x \geq b$ ist

$$\Phi(x) = \int_a^b \varphi(t)\,dt ,$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = 0 .$$

Also ist $\operatorname{Tr}\Phi \subset [a, b]$. Es ist klar, dass Φ unendlich oft stetig differenzierbar ist. $\square$



<u>Satz 24.1</u> : <u>Zu jeder Distribution</u> T <u>existiert eine Distribution</u> S <u>mit</u>

$$S' = T.$$

<u>Beweis:</u> Wir wählen zunächst ein $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = 1$, zum Beispiel

$$\rho(x) = c \cdot \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & , |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c = 1 / \int_{-1}^{+1} e^{1/(x^2-1)}\,dx ,$$

$$= 1 / \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1/(x^2-1)}\,dx$$

(s. das Beispiel auf S. $\underline{\overline{V}}$. 65, Ende von § 22). Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sei

$\mathcal{D} =$

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt$$

$$\varphi_1 = \varphi - a\rho .$$

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,dt - a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,dt}_{=1}$$

$$= 0 ,$$

also $\varphi_1 \in \mathcal{D}_1$. Insbesondere folgt

$$\varphi = \varphi_1 + a\rho \quad \text{mit } \varphi_1 \in \mathcal{D}_1 .$$

Sei

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt .$$

Dann ist nach Hilfssatz 24.1 die Funktion Φ aus $\mathcal{D}$ mit $\Phi' = \varphi_1$. Wir setzen

$$S : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \ \varphi \mapsto -T(\Phi).$$

Wir wollen zeigen: $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d. h. S ist eine Distribution. Zur Linearität der Abbildung S: Sei

$$\varphi = a\rho + \varphi_1,$$
$$\psi = b\rho + \psi_1,$$

a = Mittelwert von φ, b = Mittelwert von ψ, $\varphi_1 \in \mathcal{D}_1$, $\psi_1 \in \mathcal{D}_1$. Dann ist

$$\varphi + \psi = (a+b)\rho + \underbrace{\varphi_1 + \psi_1}_{\in \mathcal{D}_1}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)\,dt, \quad \Phi \in \mathcal{D},$$

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi_1(t)\,dt, \quad \Psi \in \mathcal{D},$$

$$S(\varphi + \psi) = -T(\Phi + \Psi),$$
$$= -T(\Phi) - T(\Psi).$$
$$= S(\varphi) + S(\psi).$$

Zur Stetigkeitseigenschaft aus Definition 22.4: Sei

$$\varphi_m = a_m \rho + \varphi_{1m},$$
$$a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(t)\,dt,$$
$$\varphi_m \Rightarrow \varphi, \quad m \to \infty$$

(s. Definition 22.3). Dann folgt

$$a_m \to a, \quad m \to \infty$$

$$\varphi_{1m} = \varphi_m - a_m \rho \Rightarrow \varphi_1 = \varphi - a\rho, \quad m \to \infty$$

$$\phi_m = \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi_{1m}(t)\,dt$$

$\mathrm{Tr}\,\varphi_m \subset K \Rightarrow \bigwedge \mathrm{Tr}\,\phi_m \subset K$ nach Bew. HS 24.1

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi_1(t)\,dt = \phi$$

$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\phi_m = \frac{d^{\nu-1}}{dx^{\nu-1}}\varphi_{1m} \to \frac{d^\nu}{dx^\nu}\phi$ glm. in K, $m \to \infty$, $\nu \in \mathbb{N}$

$$S(\varphi_m) = -T(\phi_m) \underset{m \to \infty}{\to} -T(\phi) = S(\varphi).$$

Endlich haben wir

$$S'(\varphi) = -S(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Nach dem Beispiel auf S. $\overline{V}$.76, unmittelbar nach Definition 24.1, ist $\varphi' \in \mathcal{D}_1$, also $(\varphi')_1 = \varphi'$, also

$$-S(\varphi') \overset{\text{Def.}}{\underset{\text{von } S}{=}} T\left(\int_{-\infty}^{\cdot} \varphi'(t)\,dt\right),$$

$$= T(\varphi),$$

$$S'(\varphi) = T(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \qquad \square$$

<u>Satz 24.2:</u> <u>Sei</u> $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T' = 0$.
<u>Dann existiert eine Konstante Funktion</u> c <u>mit</u>

$$T = T_c,$$

<u>d.h.</u>

$$T(\varphi) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Beweis: a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}_1$, dann finden wir ein $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\Phi' = \varphi$. Also ist $T(\varphi) = T(\Phi') = -T'(\Phi) = 0$.

b) Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ beliebig. Wir benutzen die Zerlegung $\varphi = a\rho + \varphi_1$. Sei $c = T(\rho)$. Dann folgt

$$T(\varphi) = T(\varphi_1) + aT(\rho) \underset{\text{nach a)}}{\overset{T(\varphi_1)=0}{=}} a \cdot c$$
$$= c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx . \qquad \square$$

Satz 24.3: Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit
$$T' = T .$$
Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, daß für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c \cdot e^x$ gilt
$$T = T_f .$$

Beweis: Sei $h(x) = e^{-x}$, $S = hT$. Dann ist
$$S' = h'T + hT'$$
(Definition 22.7, Satz 22.6). Also haben wir
$$S' = -hT + hT = 0 .$$

NR.:
$S(\varphi) = hT(\varphi) = T(h\varphi)$
$\frac{1}{h} S(\varphi) = S(\frac{1}{h}\varphi) \overset{\text{s.o.}}{=} T(\varphi)$

Nach Satz 24.2 ist
$$S = T_c , \text{ also } hT = T_c ,$$
$$T = \frac{1}{h} T_c ,$$
$$T(\varphi) = T_c\left(\frac{1}{h}\varphi\right) \overset{f(x) = ce^x}{=} T_f(\varphi) . \qquad \square$$

Die Verallgemeinerung des letzten Satzes besteht in

Satz 24.4: Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine $n \times n$-Matrix mit reellen Koeffizienten. Sei $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)^t$ ein n-Tupel von Distributionen aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sei $\underline{T}' = (T_1', \dots, T_n')^t$. Sei

$$\underline{T}' = A\underline{T}, \text{ d.h. } \underbrace{T_i'(\varphi)}_{i\text{-te Zeile der Spalte}} = \underbrace{(A\underline{T})_i}_{A\underline{T}}(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\underline{T}$ eine klassische (= stetig differenzierbare) Lösung, d.h. es gibt ein n-Tupel $\underline{f}$ von (unendlich oft) stetig differenzierbaren Funktionen mit $\underline{f}' = A\underline{f}$ und

$$\underline{T} = T_{\underline{f}} := (T_{f_1}, \dots, T_{f_n})^t.$$

Beweis: Wir wählen ein Fundamentalsystem im üblichen Sinn zur Gleichung $\underline{f}' = A\underline{f}$ und bilden die (unendlich oft differenzierbare) Matrix Y mit dem Fundamentalsystem als Spalten. Dann ist

$$Y' = AY = \text{Matrixgleichung}$$

(Y': Jede Spalte wird differenziert).

Sei $\underline{S} = Y^{-1}\underline{T}$. Es ist $Y^{-1}Y = E$, also $(Y^{-1}Y)' = 0$, $(Y^{-1})'Y = -Y^{-1}Y'$, $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$,

$$\underline{S}' = (Y^{-1})'\underline{T} + Y^{-1}\underline{T}'$$

$$= -Y^{-1}Y'Y^{-1}\underline{T} + Y^{-1}\underline{T}',$$

$$= -Y^{-1} A Y Y^{-1} \underline{T} + Y^{-1} A \underline{T},$$

$$= -Y^{-1} A \underline{T} + Y^{-1} A \underline{T} = 0,$$

also nach Satz 24.2

$$\underline{S} = Y^{-1} \underline{T} = T_{\underline{c}}, \quad \underline{c} = (c_1, \ldots, c_n)^t,$$

$$T_{\underline{c}} = (T_{c_1}, \ldots, T_{c_n})^t,$$

$$\underline{T} = Y T_{\underline{c}};$$

dann ist

$$\underline{T}(\varphi) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 \varphi \, dx, \ldots, \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi \, dx \right)^t$$

NR.: S, li.

/ und $Y = (y_{ik})$, mit $\underline{f} = Y\underline{c}$ /

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{c_k}_{\text{Konst.}} \underbrace{y_{ik}}_{\text{Funkt.}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

$/ = T_{Y\underline{c}} = T_{\underline{f}}$

Also ist $\underline{T} \,/= (T_{f_1}, \ldots, T_{f_n})^t$. Wegen

$\underline{T}' = T_{\underline{f}'}$ (Satz 22.2) und $\underline{T}' = A\underline{T}$

folgt

$$T_{\underline{f}'} = A\underline{T} = AT_{\underline{f}} \overset{\text{Rechnung}}{\underset{\text{wie eben}}{=}} T_{A\underline{f}}$$

Zeilenweise Anwdg. v. Satz 22.1

$$\underline{f}' = A\underline{f} \qquad \square$$

Stetigkeit von $\underline{f}'$, $A\underline{f}$

Bekanntlich kann man eine

[zumindest mit Konstanten Koeffizienten

(lineare[) gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung auf ein System erster Ordnung mit n Komponenten umschreiben.
Daraus folgt: Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$, $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu T^{(\nu)} = 0$$

Dann ist $T = T_f$ und f ist n-mal stetig differenzierbare Lösung von (1).