23. Fourier-Transformation und Faltung

Die Fourier-Transformation ist das kontinuierliche Analogon zur Fourier-Reihe aus Satz 20.3. Für

H = L über ℂ ①

$f \in L_2(]0, 2\pi[)$ hat man zufolge dieses Satzes

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\cdot}\right)}^{a(k) :=} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

Dies muß nicht sein

bei punktweiser Konvergenz. Dabei ist

$$a(k) = \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\cdot}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) \cdot e^{-ik\eta} \, d\eta$$

für $\operatorname{Tr} f \subset \,]0, 2\pi[$.

Die Idee ist nun so: Statt $k \in \mathbb{Z}$

$/\in \mathbb{R}$

schreitet man ξ/, statt des Summenzeichens ein Integral/ von $-\infty$

/in ξ

bis $+\infty$. Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) \, e^{+i\xi x} \, d\xi,$$

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) e^{-i\xi\eta} \, d\eta$$

Statt $a(\xi)$ schreibt man $\hat{f}(\xi)$ und bezeichnet $\hat{f}$ als die Fourier-Transformierte von f. Genauer verfahren wir so:

<u>Definition 23.1</u>: <u>Sei</u> $f \in L_1(\mathbb{R})$. <u>Dann definieren wir</u>

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \, , \; \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) \, dx$$

$\hat{f}$ <u>heißt die Fourier-Transformierte von</u> f.

$\hat{f}$ ist zunächst beschränkt, da

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty \, , \quad \xi \in \mathbb{R},$$

ist. $\hat{f}$ ist auch stetig: Sei $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\hat{f}(\xi_n) - \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}) f(x) \, dx$$

$$(e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}) f(x) \to 0 \, , \quad n \to \infty, \; x \in \mathbb{R},$$

$$|(e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x})f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Daher folgt mit Satz 3.2 (Satz von Lebesgue), daß

$$\hat{f}(\xi_n) \to \hat{f}(\xi), \ n \to \infty.$$

<u>Satz 23.1 (Satz von der Umkehrformel)</u>: <u>Sei</u> $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. <u>Dann gilt</u>

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi)\, d\xi .$$

Wenn z. B. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist, ist $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Es gelten jedoch auch schärfere Aussagen. Differenzieren wir die Reihe (1) formal, so hat man

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ia(k)k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

bei punktweiser Konvergenz. Ersetzen wir wieder k durch ξ und $a(k)$ durch $\hat{f}(\xi)$, so entsteht formal

$ia(\xi)\xi = \widehat{f'}(\xi)$!

<u>Satz 23.2 (Algebraisierung der Differentiation)</u>: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig

<u>differenzierbar mit kompaktem Träger. Dann gilt</u>

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi).$$

<u>Beweis:</u> $f' \in L_1(\mathbb{R})$, also

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i\xi x} f(x) \right]_a^b -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-i\xi)\, e^{-i\xi x} f(x)\,dx,$$

$$\operatorname{Tr} f \subset [a, b],$$

$L \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $$= i\xi L \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x)\,dx. \quad \square$$

<u>Satz 23.3 (Umkehrung von Satz 23.2): Sei</u> $\cdot f(\cdot)$, <u>d.h.</u> $x \mapsto x f(x)$, <u>aus</u> $L_1(\mathbb{R})$. <u>Dann ist</u> $\hat{f}$ <u>differenzierbar und</u>

$$i\, \hat{f}' = \widehat{\cdot f(\cdot)}$$

<u>Beweis:</u> Formal ist

$$\frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\xi} e^{-i\xi x} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\, x f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{i} \; \widehat{\cdot \, f(\cdot)} \, .$$

Mit Bildung des Differenzenquotienten und Anwendung des Satzes 3.2 (Satz von Lebesgue) macht man daraus leicht einen strengen Beweis. □

[abrückt Für die Multiplikation zweier] konvergenter Reihen

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_m \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{b}_m$$

gilt bekanntlich die Cauchysche Formel

$$(2) \quad \begin{cases} P = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \quad \text{mit} \\[2ex] \tilde{c}_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k \, \tilde{b}_{n-k} \, . \end{cases}$$

Hat man zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, ersetzt man die Reihen-

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

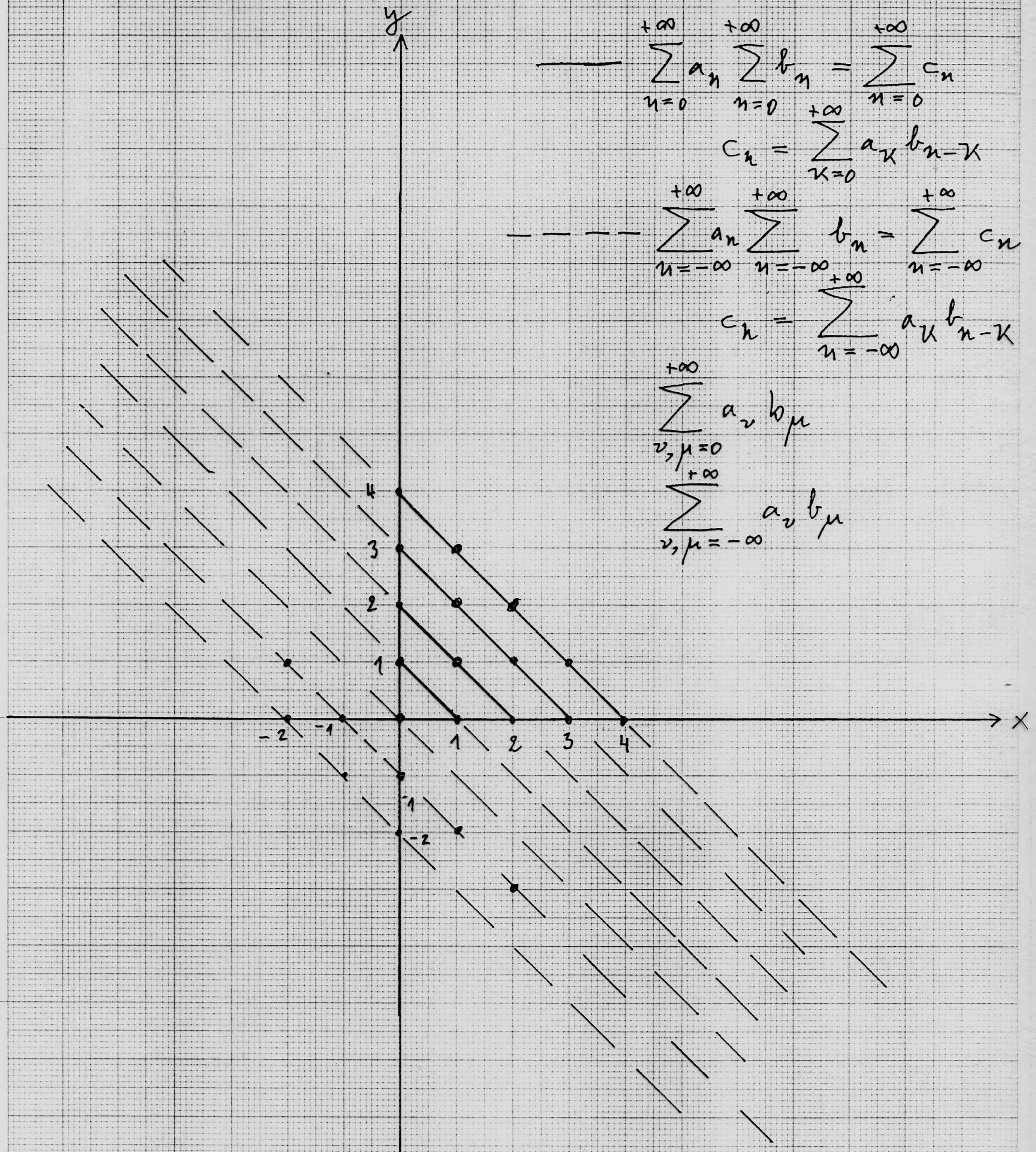
$$c_n = \sum_{\kappa=0}^{+\infty} a_\kappa b_{n-\kappa}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_\kappa b_{n-\kappa}$$

$$\sum_{\nu,\mu=0}^{+\infty} a_\nu b_\mu$$

$$\sum_{\nu,\mu=-\infty}^{+\infty} a_\nu b_\mu$$



durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$, k durch die Variable t, n durch x, $n-k$ durch $x-t$, so entsteht

$$(3)\begin{cases} P = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx \\ \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\,dt \right) dx \end{cases}$$

Definition 23.2 (Faltung): Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion

$$t \mapsto f(.)\, g(x-.)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ aus $L_1(\mathbb{R})$. Also ist die Funktion

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\,dt$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sie heißt Faltung von f und g.

Aus (3) sieht man sofort:

$f * g \in L_1(\mathbb{R})$,

$$\| f * g \|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \| f \|_{L_1(\mathbb{R})} \cdot \| g \|_{L_1(\mathbb{R})}$$

1. Tonelli mit den Betr.
2. Dann Fubini

Wenden wir (2) auf Fourierreihen an mit Fourierkoeffizienten $a(m)/\Gamma$, $b(m)/\Gamma$ und nehmen wir die Fourier-

Γ von f

Γ von g

reihen als absolut konvergent an, so entsteht für die Fourierkoeffizienten des Produkts

$$c(n) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)\, b(n-k)$$

Ersetzen wir $c(n)$ durch $c(\xi)$, $a(k)$

[s. links ← durch $a(t)$, $b(n-k)$ durch $b(\xi - t)$, [so entsteht $\widehat{f \cdot g} = (\sqrt{2\pi})^{-1}\, \hat{f} * \hat{g}$

Bezeichnen wir die Umkehrabbildung zur Fouriertransformation mit $\vee$ (s. Satz 23.1), so folgt

$$f \cdot g = (\sqrt{2\pi})^{-1}\, \left(\hat{f} * \hat{g}\right)^{\vee}, \quad \hat{f}, \hat{g} \in L_1(\mathbb{R}).$$

[Art Dies ist, wie man zeigen kann, eine [Umformulierung von

<u>Satz 23.4</u>: <u>Seien</u> $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. <u>Dann ist</u>

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\; \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

<u>Beweis:</u> Es ist $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ nach (3),

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(x-t)\, dt \cdot e^{-i\xi x}\, dx$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\, e^{-i(x-t)\xi}\, dx}_{\overset{\text{Translationsinvarianz}}{\Rightarrow} = \hat{g}(\xi)} \Big) \cdot f(t)\, e^{-it\xi}\, dt$$

$$= \hat{g}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-it\xi}\, dt$$

$$= \sqrt{2\pi}\; \hat{g}(\xi)\, \hat{f}(\xi). \qquad \square$$

Im nächsten Schritt wollen wir eine Distribution mit einer Funktion aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ falten. Das Ergebnis ist eine Funktion.

Definition 23.3: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varphi(x-t).$$

Also ist

$$\varphi_x(t) = \varphi(x-t), \quad x, t \in \mathbb{R}.$$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dann ist $T * \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert durch

$$x \longmapsto T(\varphi_x)$$

Zur Faltung $T * \varphi$ gilt

Satz 23.5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$T_f * \varphi = f * \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

mit

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt$$

Obwohl f nicht in $L_1(\mathbb{R})$ zu sein braucht, ist das Integral rechts wohldefiniert, da φ kompakten Träger hat.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}(T_f * \varphi)(x) &= T_f(\varphi_x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi_x(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(x-t)\,dt \\ &= (f * \varphi)(x) \qquad \square\end{aligned}$$

Satz 23.6: Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist

$$\delta * \varphi = \varphi.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}(\delta * \varphi)(x) &= \delta(\varphi_x) = \varphi_x(0) \\ &= \varphi(x-0) = \varphi(x). \qquad \square\end{aligned}$$

Übungen: Die Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R})$.