Vorlesung „Mathematik für Physiker III “

Kapitel 5
Funktionalanalysis

§18. Hilberträume

Wir befassen uns i.f. mit Vektorräumen, die nicht mehr notwendig endlichdimensional sind. Beispiele für solche Räume sind Funktionenräume, etwa die stetigen Funktionen über einem Intervall $[a, b]$.

Definition 18.1: *Ein Vektorraum H über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit Skalarprodukt $(.,.)$, der vollständig ist, heißt Hilbertraum*

Skalarprodukt $(.,.)$:

$H \times H \ni \underbrace{\{x, y\}}_{=\text{Paar}} \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}$	$(x, y) \in \mathbb{C}$
$(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$	*ebenso, aber*
$x, y, z \in H,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$(x, y) = (y, x)$	$(x, y) = \overline{(y, x)}$
$(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	*ebenso*
Norm $\\|.\\|$:	
$(x, x) \geq 0$	$\mathbb{R} \ni (x, x) \geq 0$
$\\|x\\| = \sqrt{(x, x)}$	*ebenso*

Cauchy-Folgen und Vollständigkeit:
(x_n) sei eine Folge in H. (x_n) heißt Cauchy-Folge d. u. n. d., wenn gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ mit $||x_n - x_k|| < \varepsilon$ für alle $n, k \geq N(\varepsilon)$.

Wir fordern die Vollständigkeit:
Jede Cauchy-Folge konvergiert in H, d.h. bezüglich $||.||$, gegen ein $x \in H$ (das dann eindeutig bestimmt ist). Also: $||x_n - x|| \to 0$, $n \to \infty$.

Ist H Hilbertraum über $\mathbb{R}$, so ist $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

$$(z, \mu x + \lambda y) = \mu(z, x) + \lambda(z, y),$$

ist H Hilbertraum über $\mathbb{C}$, so ist jedoch $(\lambda, \mu \in \mathbb{C})$

$$(z, \mu x + \lambda y) = \overline{\mu}(z, x) + \overline{\lambda}(z, y)$$

(Antilinearität im zweiten Faktor). Für die Norm gilt

$$\begin{aligned} ||x + y|| &\leq ||x|| + ||y|| \\ ||x + y|| &\geq |\,||x|| - ||y||\,| \end{aligned}$$

(Dreiecksungleichung). Aus $||x|| = 0$ folgt $x = 0$. Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

Für $||x_n - x|| \to 0$, $n \to \infty$, schreiben wir auch

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ oder } x_n \to x,\ n \to \infty.$$

Falls $x_n \to x$, $y_n \to y$, $n \to \infty$, folgt

$$(x_n, y_n) \to (x, y),\ n \to \infty.$$

Außerdem gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|(x, y)| \leq ||x||\,||y||.$$

Der Ausgangspunkt sind Integralgleichungen. Wir kennen alle lineare Gleichungssysteme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

in den Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$. Ohne uns um Konvergenzfragen zu kümmern, können wir unendliche Gleichungssysteme

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

betrachten. Wenn $I = [a, b]$ ist, kann man zeigen, daß dies äquivalent ist zum Auffinden einer **Funktion** $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die der Integralgleichung

$$\int_a^b K(s,t)x(t)dt = b(s)$$

bei gegebenem Kern $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und gegebener rechter Seite $b : [a,b] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ genügt. Interessanter sind Integralgleichungen von der Form

$$b(s) = x(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)x(t)dt.$$

Im Fall $b \equiv 0$ spricht man von einem Eigenwert $1/\lambda$ des Integralkerns $K (\lambda \neq 0)$.

Beispiele:

1. $\mathbb{R}^n$ mit $(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ ist Hilbertraum über $\mathbb{R}$.

2. $\mathbb{C}^n$ mit $(x,y) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y_n}$ ist Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

3. $I = [a,b]$.

$$\mathcal{C}^0(I) = \{f | f : I \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}), f \text{ stetig}\}$$

ist unendlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$). Im Fall der $\mathbb{C}$-wertigen stetigen Funktionen führen wir das Skalarprodukt

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

ein, das die Norm (Beweis!)

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

liefert. Mit dieser Norm ist $\mathcal{C}^0(I)$ aber nicht vollständig. Sei $a = -1$, $b = +1$, f_n wie folgt erklärt:

$$f_n \in \mathcal{C}^0([-1,+1])$$

Sei $f(x) = 0$ für $-1 \leq x < 0$, $f(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Offenbar ist f nicht stetig, also **nicht** in $\mathcal{C}^0(I)$. Betrachten wir

$$||f_n - f||^2 = \int_{-1}^{+1} |f_n - f|^2 dx$$

$|f_n - f|^2 \leq (|f_n| + |f|)^2 \leq 4$ integr., $f_n \to f$ f. ü. in $(-1,1)$

$\Rightarrow \quad ||f_n - f||^2 \to 0, \; n \to \infty$

Satz von Lebesgue (Satz 3.2)

also $||f_n - f|| \to 0$, $n \to \infty$. Insbesondere ist (f_n) Cauchy-Folge. Da f nicht stetig ist, ist $\mathcal{C}^0(I)$ mit dieser Norm **nicht** vollständig.

4. $L^2(I) = \{f | f : I \to \mathbb{C}, Ref =: f_1, Imf =: f_2$ sind lokal integrierbar, $\int_I |f|^2 dx < +\infty\}$ ist Hilbertraum über $\mathbb{C}$, wenn man als Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_I f\overline{g}dx$$

nimmt. Genauer nimmt man nur die Äquivalenzklassen fast überall erklärter $f : I \to \mathbb{C}$, die fast überall übereinstimmen.

5. $l_2 = \{(x_n) | x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$.

Mit

$$((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

wird l_2 ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Wir kommen zum Begriff der Projektion.

Definition 18.2: *Sei H ein Hilbertraum. Sei $V \subset H$. V heißt abgeschlossen, wenn gilt: Sei (f_n) eine Folge aus V, die konvergiert. Dann ist auch $\lim_{n\to\infty} f_n$ in V. V ist also dann und nur dann abgeschlossen, wenn V seine sämtlichen Häufungspunkte enthält.*

Andere Version: V ist abgeschlossen dann und nur dann, wenn zu jedem $f \in H$, $f \notin V$ ein ε existiert, so daß

$$K_\varepsilon(f) \cap V = \emptyset$$

ist. Dabei ist $K_\varepsilon(f) = \{g | g \in H, ||f - g|| < \varepsilon\}$.

Die Äquivalenz der beiden Definitionen kann man mit Hilfe des nächsten Lemmas zeigen, was hier aber nicht geschehen soll. Zu einem abgeschlossenen **Unterraum** V existiert ein Element kleinsten Abstandes im folgenden Sinn:

Lemma 18.1: *Sei V abgeschlossener Unterraum des Hilbertraums H. Dann existiert zu jedem $f \in H$ genau ein $f_0 \in V$ mit*

$$||f - f_0|| \leq ||f - g||, \ g \in V.$$

Beweis: Sei $\delta = \inf\limits_{g \in V} ||f-g||$. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $g_n \in V$ mit

$$\delta - \frac{1}{n} < ||f - g_n|| \leq \delta.$$

Hieraus kann man schließen: (g_n) ist eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von H folgt, daß (g_n) einen limes f_0 hat. Es ist

$$\delta = ||f_0 - f||.$$

$\square$

Für Lemma 18.1 genügen bereits die folgenden Voraussetzungen: H ist Vektorraum mit Skalarprodukt, $V \subset H$ ist Untervektorraum und vollständig.

Definition 18.3: *Sei H ein Hilbertraum. $f, g \in H$ heißen (zueinander) orthogonal dann und nur dann, wenn $(f,g) = 0$ ist. In Zeichen: $f \perp g$. Sei $U \subset H$. Dann ist*

$$U^{\perp} = \{h | h \in H,\ h \perp u \text{ für alle } u \in U\}.$$

Ist U UVR von H, so auch $U^{\perp}$. Darüberhinaus ist $U^{\perp}$ abgeschlossener UVR.

$$H = U_1 \oplus U_2$$

bedeutet: U_1, U_2 sind UV-Räume von H. Jedes $h \in H$ ist auf eine und nur eine Weise in der Form

$$h = u_1 + u_2,\ u_i \in U_i,$$

darstellbar. Die Eindeutigkeit der Darstellung ist äquivalent zu $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Satz 18.1 (Projektion auf U): *Sei H ein Hilbertraum, $U \subset H$ abgeschlossener UVR. Sei*

$$P_U : H \to H,\ f \longmapsto f_0 \in U$$

nach Lemma 18.1, so gilt:

1. $P_U : H \to H$ ist linear, $P_U \circ P_U = P_U^2 = P_U$,
2. $H = U \oplus U^{\perp}$
3. Für alle $f, g \in H$ ist
$$(P_U f, g) = (f, P_U g),$$
d.h. P_U ist selbstadjungiert.

Beweis: Sei $f_1 = f - f_0$. Wir zeigen: $f_1 \in U^\perp$. Sei $u \in U, \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow f_0 + \lambda u \in U \Rightarrow$

$$\begin{aligned} ||f_1||^2 &= \delta^2 \leq ||f-(f_0+\lambda u)||^2 \\ &= ||f_1 - \lambda u||^2, \\ &= (f_1 - \lambda u,\ f_1 - \lambda u)^2, \\ &= ||f_1||^2 - 2Re(\lambda(f_1,u)) + |\lambda|^2||u||^2, \end{aligned}$$

$$0 \leq |\lambda|^2||u||^2 - 2Re(\lambda(f_1,u)).$$

Ann.: $\exists u \in U$ mit $(f_1,u) \neq 0$, insbesondere ist also $u \neq 0$. Sei

$$\lambda = \frac{\overline{(f_1,u)}}{||u||^2\ ||u|| \neq 0} \overset{(f_1,u)\neq 0}{\Rightarrow} \lambda \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \frac{|(f_1,u)|^2}{||u||^2} - 2Re \underbrace{\frac{|(f_1,u)|^2}{||u||^2}}_{\in \mathbb{R}} = -\frac{|(f_1,u)|^2}{||u||^2}.$$

Dies ist ein Widerspruch, also $f_1 \in U^\perp$. Somit haben wir

$$f = f_0 + f_1,\ f_0 \in U,\ f_1 \in U^\perp.$$

Die Darstellung ist eindeutig, denn sei

$$f = f_0 + f_1 = \widetilde{f_0} + \widetilde{f_1}$$

mit $\widetilde{f_0}, \widetilde{f_1} \in U$ bzw $U^\perp$, so ist

$$f_0 - \widetilde{f_0} = -(f_1 - \widetilde{f_1}).$$

Für ein $u \in U \cap U^\perp$ ist $(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$. Also ist

$$H = U \oplus U^\perp$$

Sei

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1, \\ g &= g_0 + g_1 \end{aligned}$$

mit eindeutig bestimmten $f_0, g_0 \in U,\ f_1, g_1 \in U^\perp$. Dann ist

$$\begin{aligned} f+g &= \underbrace{f_0+g_0}_{\in U} + \underbrace{f_1+g_1}_{\in U^\perp}, \\ \lambda f &= \underbrace{\lambda f_0}_{\in U} + \underbrace{\lambda}_{\in U^\perp}, \lambda \in \mathbb{C}, \\ \Rightarrow\ P_U(f+g) &= P_U f + P_U g, \\ P_U(\lambda f) &= \lambda P_U f, \end{aligned}$$

so daß P_U linear ist. Aus

$$\begin{aligned} Pf &= f_0, \\ f_0 &= \underbrace{f_0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in U^\perp} \end{aligned}$$

folgt $P_U f_0 = f_0$, also

$$P_U^2 f = f_0 = P_U f.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} (P_U f, g) &= (f_0, g_0 + g_1), \\ &= (f_0, g_0), \\ &= (f_0 + f_1, g_0), \\ &= (f, P_U g). \end{aligned}$$

□

Wir bringen einige **Beispiele:**

Das erste ist enthalten in

Lemma 18.2: *Sei H ein Hilbertraum, sei $U \subset H$ ein UVR endlicher Dimension. Dann ist U abgeschlossen. Sei $\dim U = n, b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis. Dann ist*

$$P_U f = \sum_{k=1}^{n} (f, b_k) b_k.$$

Beweis: Da U endlichdimensional ist ($dim U = n$) und das von H induzierte Skalarprodukt trägt, können wir eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ finden. Hieraus folgt die Abgeschlossenheit von U (Beweis!). Sei

$$f_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (f_0, b_j) &= \lambda_j, \\ (f, b_j) &= (f_0 + f_1, b_j), \\ &= (f_0, b_j) + \underbrace{(f_1, b_j)}_{=0} \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

□

Sei nun $H = L^2(]0, 2\pi[)$; dann bilden

$$b_k, b_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx},\ x \in [0, 2\pi],\ k \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem in H, d.h.

$$\begin{aligned}(b_k, b_l) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx \\ &= \left\{\begin{array}{l} 0,\ k \neq l, \\ 1,\ k = l, \end{array}\right. = \delta_{kl}\end{aligned}$$

Sei im **zweiten Beispiel** für $N \in \mathbb{N}$ der Raum $U = U_N$ der von $b_{-N}, \ldots, b_{-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_N$ aufgespannte UVR $\langle b_{-N}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_N \rangle$. Also ist

$$f_0 = P_U f = \sum_{k=-N}^{+N} \lambda_k b_k,\ f \in L^2(]0, 2\pi[),$$

mit $\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$. Die λ_k heißen die Fourierkoeffizienten von f. Sie machen den Ausdruck

$$||f - \sum_{k=-N}^{+N} \mu_k b_k||_{L^2},\ \mu_{-N}, \ldots, \mu_N \in \mathbb{C}$$

zum Minimum und liefern somit die beste Approximation von f durch Elemente von $U = U_N$.

§19. Hilbert-Basis oder vollstndige Orthonormalsysteme

Der Begriff der Basis oder Orthonormalbasis eines endlichdimensionalen Vektorraums bzw. endlichdimensionalen Vektorraums mit Skalarprodukt ist wohlbekannt. Wir verallgemeinern ihn auf Hilberträume, also Vektorräume von i. allg. unendlicher Dimension mit Skalarprodukt. I.f. sei H ein Hilbertraum.

Definition 19.1: *Eine Folge (b_k) in H heißt vollständiges Orthonormalsystem oder Hilbert-Basis in H, wenn gilt*

1. $(b_l, b_k) = \delta_{lk}$,
2. Ist $f \in H$ *und* $f \perp b_k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$, *so folgt* $f = 0$.

Hilfssatz 19.1: *Sei (b_k) eine Folge in H, sei $b_k \perp b_l$, $k \neq l$. Dann gilt: Die Folge*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergiert dann und nur dann, wenn

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||b_k||^2 \textit{ konvergiert.}$$

In diesem Fall ist

$$||\sum_{k=1}^{\infty} b_k||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||b_k||^2$$

Beweis: Sei $\sum_k ||b_k||^2 < +\infty$. Zu $\varepsilon > 0$ ex. dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n}^{m} ||b_k||^2 < \varepsilon \text{ für } m \geq n \geq N.$$

Für $m \neq n$ ist (Pythagoras)

$$\begin{aligned} ||b_n + b_m||^2 &= (b_n + b_m, b_n + b_m) \\ &= ||b_n||^2 + ||b_m||^2. \end{aligned}$$

Allgemeiner ist

$$(1) \qquad ||\sum_{k=n}^{m} b_k||^2 = \sum_{k=n}^{m} ||b_k||^2 < \varepsilon, \; m \geq n \geq N.$$

Die Folge $(\sum_{k=1}^{n} b_k)$ ist Cauchy-Folge, sie konvergiert also. Sei nun umgekehrt $\sum_k b_k$ konvergent. Die Konvergenz von $\sum_k ||b_k||^2$ folgt aus (1). Es ist

$$\begin{aligned} ||\sum_k b_k||^2 &= (\sum_k b_k, \sum_l b_l) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k,l=1}^{N} (b_k, b_l) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} ||b_k||^2 \\ &= \sum_k ||b_k||^2. \end{aligned}$$

□

Satz 19.1 (Satz über Hilbert-Basen oder vollständige Orthonormalsysteme): *Sei (b_n) eine Folge in H mit*

$$b_n \perp b_m, n \neq m, ||b_n|| = 1.$$

Dann sind äquivalent

1. *(b_n) sind VONS.*
2. *$U := \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \langle b_1, \dots, b_N \rangle} = H$.*
3. *Für jedes $f \in H$ gilt die Fourierentwicklung*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n,\ \ \lambda_n = (f, b_n).$$

4. *Für $f, g \in H$ gilt die Parsevalsche Gleichung*

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, b_k) \cdot \overline{(g, b_k)}$$

5. *Für $f \in H$ gilt die Besselsche Gleichung*

$$||f||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(f, b_k)|^2.$$

Beweis:

$$\mathbf{1 \Rightarrow 2}$$

U ist abg. UVR von $H \Rightarrow$

$$H \ni f = f_0 + f_1,\ f_0 \in U, f_1 \in U^\perp$$

ist $U \overset{\subset}{\neq} H$, so ex. $f \in H - U$, also $f_1 \neq 0$. Wegen $f_1 \in U^\perp$ ist $f_1 \perp b_k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f_1 = 0$, Wid.

$$\mathbf{2 \Rightarrow 3}$$

$\overline{U} = H \Rightarrow$ Zu $f \in H$ ex. (f_n) mit $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$,

$$f_n = \sum_{\nu=1}^{N(n)} \lambda_{n\nu} b_\nu.$$

Zu $\varepsilon > 0$ ex. N_1 mit $||f_n - f_m|| < \varepsilon$, $n, m \geq N_1$. Sei $\lambda_{n\nu} = 0$, $\nu \geq N(n) + 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned} ||f_m - f_n||^2 &= \sum_{\nu}^{\infty} ||(\lambda_{m\nu} - \lambda_{n\nu}) b_\nu||^2, \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} |\lambda_{m\nu} - \lambda_{n\nu}|^2 < \varepsilon^2,\ m, n \geq N_1, \end{aligned}$$

also

$$|\lambda_{m\nu} - \lambda_{n\nu}| < \varepsilon,\ m, n \geq N_1,\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Daher ist $(\lambda_{n\nu})_n$ für jedes $\nu \in \mathbb{N}$ eine Cauchy-Folge. Sei

$$\lambda_\nu = \lim_{n \to \infty} \lambda_{n\nu}$$

Wir wollen nun zeigen:

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu b_\nu.$$

Für $m \geq n \geq N_1$, $S \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{\nu=1}^{S} |\lambda_{m\nu} - \lambda_{n\nu}|^2 < \varepsilon^2.$$

Mit $m \to \infty$ folgt

$$\sum_{\nu=1}^{S} |\lambda_\nu - \lambda_{n\nu}|^2 \leq \varepsilon^2, \text{ also}$$

$$|| \sum_{\nu=1}^{S} (\lambda_\nu - \lambda_{n\nu}) b_\nu ||^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{S} |\lambda_\nu - \lambda_{n\nu}|^2 \leq \varepsilon^2,$$

$$|| \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_\nu b_\nu - \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_{n\nu} b_\nu || \leq \varepsilon,$$

$$|| \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_\nu b_\nu - f || \leq \underbrace{|| \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_\nu b_\nu - \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_{n\nu} b_\nu ||}_{\leq \varepsilon} + || \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_{n\nu} b_\nu - f ||$$

$$\leq \varepsilon + || \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_{n\nu} b\nu - f ||, \; S \in \mathbb{N}, \; n \geq N_1.$$

Wegen $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ ex. ein $\widetilde{N}$ mit $||f_{\widetilde{N}} - f|| < \varepsilon$. Für $\widetilde{N} \geq N_0 \geq N_1$, $S \geq N(\widetilde{N})$ ist

$$f_{\widetilde{N}} = \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_{\widetilde{N}\nu} b_\nu, \; \lambda_{\widetilde{N}\nu} = 0, \; N(\widetilde{N}) + 1 \leq \nu \leq S$$

und

$$|| \sum_{\nu=1}^{S} \lambda_\nu b_\nu - f || \leq \varepsilon + ||f_{\widetilde{N}} - f|| < 2\varepsilon.$$

Aus $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu b_\nu$ folgt $\lambda_\nu = (f, b_\nu)$.

$\mathbf{3 \Rightarrow 4}$

$$\begin{array}{ccc} (f,g) & = & (\sum_{\nu=1}^{\infty} (f, b_\nu) b_\nu, \sum_{\widetilde{\nu}=1}^{\infty} (g, b_{\widetilde{\nu}}) \cdot b_{\widetilde{\nu}}) \\ & = & \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, b_\nu) \overline{(g, b_\nu)} \\ & \text{Stetigkeitseigenschaft des Skalarprod.} & \end{array}$$

$4 \Rightarrow 5$

Setze $f = g$

$5 \Rightarrow 1$

Sei $f \perp b_k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow ||f||^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |(f, b_\nu)|^2 = 0$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$. $\square$

Beispiel:

$H = l_2$.
$b_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{n-te Stelle}}, 0, \ldots)$
ist eine Hilbertbasis.

Satz 19.2: *Sei H ein Hilbertraum mit einer Hilbert-Basis oder einem VONS (b_n). Dann ist H Hilbertraum-isomorph zu l_2, d.h. es gilt eine Bijektion $\Phi : l_2 \to H$ derart, daß*

1. Φ *VRaum-Isomorphismus ist,*
2. $(x, y)_{l_2} = (\Phi x, \Phi y)_H$, $x, y \in l_2$.

Beweis: $\Phi : l_2 \to H$
$l_2 \ni x = (x_n) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n \in H$.

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n b_n$ konvergiert in H nach HS 19.1. Aus $\Phi(x) = 0$ folgt $x = 0$, ebenfalls nach HS 19.1. Jedes $f \in H$ hat nach Satz 19.1, 3., 5. die Fourierentwicklung

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} \underbrace{(f, b_\nu)}_{=:x_\nu} b_\nu \text{ mit}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\underbrace{(f, b_\nu)}_{=:x_\nu}|^2 < +\infty, \text{ d. h.}$$

$$f = \Phi(x_\nu).$$

Die Linearität von Φ ist klar. Es ist

$$\begin{aligned} (\Phi x, \Phi y)_H &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n, \text{ Stetigkeit des Skalarprodukts} \\ &= (x, y)_{l_2}. \end{aligned}$$

$\square$

Als mathematische Objekte sind also l_2 und ein Hilbertraum mit einem VONS nicht zu unterscheiden. Die Abbildung Φ bedeutet: Jedem $(x_n) \in l_2$ wird dasjenige $x \in H$ zugeordnet, dessen Fourierkoeffizienten (bezüglich b_n) gerade x_n sind.

§20. Fourierreihen

Sei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. In Satz 19.1 denken wir uns die Indizierung mit $n = 0, 1, \ldots$ vorgenommen. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$u_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \\ u_{2n-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \\ u_{2n}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gilt (vgl. Orthogonalität der e^{ikx})

Lemma 20.1: *Für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\int_0^{2\pi} u_m(x) u_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

Im Hilbertraum $H = L_2(]0, 2\pi[)$ über $\mathbb{R}$, ausgestattet mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx$$

und der Norm

$$||f|| = (\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$$

bilden also die n_n ein Orthonormalsystem. Ist es auch vollständig?

Satz 20.1: *Die (u_n) bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $H = L_2(]0, 2\pi[)$ (über $\mathbb{R}$). Für jedes $f \in H$ gilt dann*

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n u_n, \\ \lambda_n &= \int_0^{2\pi} f(x) u_n(x) dx \end{aligned}$$

in H, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$ so, daß

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - \sum_{n=0}^{M} \lambda_n u_n|^2 dx < \varepsilon^2$$

ist für $M \geq N = N(\varepsilon)$.

Eine andere Formulierung ist die folgende: Sei

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(.) &= \lambda_0 u_0 + \sum_{\substack{n=2k-1,\\ 1\leq k<+\infty}} \lambda_n u_n + \sum_{\substack{n=2k,\\ 1\leq k<+\infty}} \lambda_n u_n, \\ &= \lambda_0 u_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx \cdot \cos k. + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx \cdot \sin k. \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k. + b_k \sin k.). \end{aligned}$$

Diese Konvergenz ist zunächst **nicht** punktweise, sondern nur in H, d.h. wir haben

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} |f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos k_x + b_k\sin kx)\right)|^2 dx = 0$$

Nun gilt der wichtige

Satz 20.2 (Satz von Riesz-Fischer): *Sei* $f \in L_2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, (f_n) *eine Folge aus* $L_2(D)$ *mit* $||f - f_n||_{L_2^2(D)} \to 0$, $n \to \infty$. *Dann existiert eine Teilfolge* (f_{n_j}) *von* (f_n) *mit*

$$f_{n_j} \to f \textit{ f. ü. in } D.$$

Nach diesem Satz haben wir

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_j}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \to f(x)$$

für fast alle $x \in]0, 2\pi[$ und eine Indexfolge $N_1, N_2, \ldots \in \mathbb{N}$.

Zur **punktweisen** Konvergenz der **gesamten** Reihe, d.h. der **gesamten** Folge

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)_N$$

sind gesonderte Überlegungen erforderlich, die im nächsten Paragraphen dargestellt werden sollen.

Zuvor befassen wir uns noch mit dem Fall des komplexen Hilbertraums $L_2(]0,2\pi[)$.

Satz 20.3: *Sei $H=L_2(]0,2\pi[)$ der Hilbertraum über $\mathbb{C}$ der $f:]0,2\pi[\to\mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt*

$$\int_0^{2\pi} f\overline{g}dx =: (f,g).$$

Dann bilden die $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$, $k\in\mathbb{Z}$, ein VONS in H.

Beweis: Sei $f=f_1+if_2 \Rightarrow$

$$f_1=\frac{a_0^{(1)}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(1)}\cos k.+b_k^{(1)}\sin k.),$$

$$if_2=i\frac{a_0^{(2)}}{2}+i\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^{(2)}\cos k.+b_k^{(2)}\sin k.),$$

$$\begin{aligned}
f_1+if_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx\cos k.+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx\sin k.\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx+\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k=-N,\\ k\neq 0}}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx\right)\cos k.+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin kxdx\right)\sin k.\right),\\
&= \left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\lim_{N\to 0}\sum_{\substack{k=-N,\\ k\neq 0}}^{N}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kxdx\cos k.+\right.
\end{aligned}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx\right)\sin k. - \frac{i}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx\right)\cos k.$$

$$\left. +\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx \sin k.\right),$$

$$= \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k=-N,\\ k\neq 0}}^{N}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos kx - i\sin kx)dx\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos k. + i\sin k.),$$

$$= \left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{k=-N,\\ k\neq 0}}^{N}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik.}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik.}$$

$$=: \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik.}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik.}$$

$\Rightarrow$ Behauptung $\square$

Hinweis: Statt $]0, 2\pi[$ können wir $]-\pi, \pi[$ wählen. Davon werden wir im folgenden Gebrauch machen. Alle Integrationen sind dann von $-\pi$ bis π statt von 0 bis 2π auszuführen.

§21. Das Konvergenzverhalten von Fourierreihen

Wir untersuchen jetzt die punktweise Konvergenz von Fourierreihen.

Definition 21.1: *Sei* $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. f *heißt stückweise stetig dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung* $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2\pi$ *von* $[0, 2\pi]$ *gibt mit*

1. f *ist stetig in* $[x_0, x_1[,]x_1, x_2[, \ldots,]x_{n_2}, x_{n-1}[,]x_{n-1}, x_n]$.
2. *In* $x_i, 1 \leq i \leq n-1$, *besitzt* f *sowohl einen limes von rechts, d.h.*

$$f(x_i^+) := \lim_{\substack{h \to 0, \\ h > 0}} f(x_i + h)$$

existiert, als auch einen limes von links, d.h.

$$f(x_i^-) := \lim_{\substack{h \to 0, \\ h > 0}} f(x_i - h)$$

existiert.

Dann ist f insbesondere beschränkt und hat etwa folgendes Aussehen:

In $x_1, \ldots, x_{n-1}$ liegen also mögliche Sprungstellen von f. f ist Riemann-integrierbar. Sei $f(0) = f(2\pi)$. Der Einfachheit halber haben wir vorausgesetzt, daß eventuelle Sprungstellen von f im Inneren von $[0, 2\pi]$ liegen. Gegebenenfalls muß man das Periodizitätsintervall bzw. Grundgebiet ändern. Wir denken uns f aus $\mathbb{R}$ durch

$$f(x \pm 2\pi) = f(x)$$

zu einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt. Nun gilt:

Satz 21.1: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodisch.* f *sei stückweise stetig (Zerlegung:* $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 2\pi$*). In*

$$[0, 2\pi] - \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} = [x_0, x_1[\cup]x_{n-1}, x_n] \cup \bigcup_{i=2}^{n-1}]x_{i-1}, x_i[$$

sei $f|[0, 2\pi]$ *differenzierbar. In* $x_i, 1 \leq i \leq n-1$ *existiere* $f'(x_i^+)$ *und* $f'(x_i^-)$.

Sei

$$\begin{aligned} g, g(x) &= f'(x),\ x_0 \le x < x_1, \\ g(x) &= f'(x_{i-1}^+),\ x = x_{i-1}, \\ g(x) &= f'(x), x_{i-1} < x < x_i,\ 2 \le i \le n-1, \\ g(x) &= f'(x_{n-1}^+),\ x = x_{n-1}, \\ g(x) &= f'(x),\ x_{n-1} < x \le x_n \end{aligned}$$

in $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *stetig und von links nach* x_i *durch* $f'(x_i^-)$ *stetig fortsetzbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von* f *in jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gegen* $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Kurz gesagt haben wir in Satz 21.1 vorausgesetzt, daß f und f' stückweise stetig sind. Aus Satz 21.1 folgt

Satz 21.2: *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodisch und stetig. Sei* $f|[0, 2\pi]$ *differenzierbar bis auf endlich viele* $x_1, \ldots x_{n-1}$, $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < 2\pi$. *In* x_i *existiere* $f'(x_i^+)$ *und* $f'(x_i^-)$, $1 \le i \le n-1$. g *sei wie in Satz 21.1 erklärt.* g *sei in* $[x_{i-1}, x_i), i = 1, \ldots, n$ *stetig und nach* $[x_{i-1}, x_i]$ *durch* $f'(x_i^-)$ *stetig fortsetzbar. Dann konvergiert die Fourierreihe von* f *in jedem* $x \in \mathbb{R}$ *gegen* $f(x)$.

Beweis: Es ist $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) = f(x)$ wegen der Stetigkeit von f. □

Satz 21.3: *Ist* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π*-periodisch und stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von* f *gleichmäßig gegen* f.

Beispiele:

1. Sei $f(x) = x^2$, $|x| \le \pi$. f wird durch $f(x + 2\pi) = f(x)$ 2π-periodisch fortgesetzt. Dann entsteht

   f ist stetig,
   f' ist stückweise stetig.

   In der Fourierreihe ($[0, 2\pi] \to [-\pi, \pi]$)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

aus §20 ist

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx, \\
&= 0,\ n \in \mathbb{N} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{[x^2\frac{1}{n}\sin nx]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin nx dx\right\}, \\
&= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x_n \sin nx dx, \\
&= -\frac{2}{n\pi}\left\{[x\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx]_{-\pi}^{+\pi} + \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{n}\cos nx dx\right\}, \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left(\pi\cos n\pi + \pi\cos(-n\pi)\right), \\
&= \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n, \\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.
\end{aligned}$$

Also entsteht

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx,$$

und die Konvergenz ist nach Satz 21.2 punktweise in jedem $x \in \mathbb{R}$. Hieraus ergeben sich für $x = 0$ und $x = \pi$ die folgenden interessanten Formeln

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

2. Sei $E \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und abgeschlossen = kompakt mit glattem Rand ∂E. Wir betrachten die Temperaturverteilung $T(t,x)$, $x \in E$, t =Zeit≥ 0 in E. Dabei ist $T(t,x)$ sowohl für $x \in \partial E$ vorgeschrieben (Randwerte) als auch für $t = 0$ (Anfangsverteilung). Wenn λ die Wärmeleitfähigkeit, c die spezifische Wärme und ρ die Massendichte von E sind, so genügt T der Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
&\frac{c\rho}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T,\ t > 0,\ x \in \overset{\circ}{E},\\
&T \text{ stetig in } t \geq 0,\ x \in E,\\
&T(0,x) = \psi(x),\ x \in E,\\
&T(t,x) = f(x),\ t \geq 0,\ x \in \partial E.
\end{aligned}
$$

Die Randwerte f sollen also von t unabhängig sein. In einem Gleichgewichtszustand ist $\partial T/\partial t \equiv 0$ und wir erhalten das stationäre Problem $\Delta T = 0$, $x \in E$, $T(x) = f(x)$, $x \in \partial E$.

Sei nun $E = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\varphi \longmapsto f(\varphi)$, $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$, d. h. f ist 2π-periodisch. Wir suchen nun ein

$$
\begin{aligned}
&T : E \to \mathbb{R} \text{ stetig}\\
&T \text{ in } \overset{\circ}{E} \text{ 2-Mal stetig differenzierbar,}\\
&\Delta T = 0 \text{ in } \overset{\circ}{E}\\
&T = f \text{ auf } \partial E.
\end{aligned}
$$

Wir schreiben ΔT auf Polarkoordinaten um. Das ergibt ($x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$):

$$
\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0}
$$

Wir setzen $\frac{\partial}{\partial r}\cdot = \cdot'$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}\cdot =\dot{\cdot}$, und versuchen den Ansatz $T(r,\varphi) = \upsilon(r)w(\varphi)$. Dies liefert

$$
\begin{aligned}
&\upsilon'' w + \frac{1}{r}\upsilon' w + \frac{1}{r^2}\upsilon\ddot{w} = 0,\\
&(\upsilon'' + \frac{1}{r}\upsilon')w = -\frac{1}{r}^2 \upsilon\ddot{w},\\
&-\frac{\ddot{w}(\varphi)}{w(\varphi)} = \frac{r^2\upsilon''(r) + r\upsilon'(r)}{\upsilon(r)},
\end{aligned}
$$

$w(\varphi) \neq 0$, $\upsilon(r) \neq 0$ einmal vorausgesetzt. Also hängt $-\ddot{w}(\varphi)/w(\varphi)$ nicht von φ und $(r^2\upsilon''(r) + r\upsilon'(r))/\upsilon(r)$ nicht von r ab. Diese Grössen sind also gleich ein und derselben Konstante λ. Damit folgt

(1) $r^2\upsilon'' + r\upsilon' - \lambda\upsilon = 0,$

(2) $\ddot{w} + \lambda w = 0$.
Dies sind zwei gewöhnliche Differentialgleichungen. Die allgemeine Lösung von (2) lautet (A, B konstant)

$$w(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi$$

Hinweis: w soll 2π-periodisch sein. Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} \lambda \underbrace{\int_0^{2\pi} w^2(\varphi) d\varphi}_{T \not\equiv 0 \Rightarrow \text{ Int. } > 0} &= -\int_0^{2\pi} \ddot{w}(\varphi) w(\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \dot{w}^2(\varphi) d\varphi \geq 0. \end{aligned}$$

Ist also $T \not\equiv 0$, so ist $\lambda \geq 0$. Weiter folgt aus der 2π-Periodizität, daß $\sqrt{\lambda} \in \mathbb{N}_0$ ist, d.h.

$$\lambda = n^2, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Damit ist

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist (c_1, c_2 konst.)

$$v = c_1 r^n + c_2 r^{-n}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Da v in $r = 0$ nach r differenzierbar sein soll, bleibt nur $v = c_1 r^n$. Zu festem, aber beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$ sind somit

$$v_n(r) = c_n r^n$$

$$w_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$$

Lösungen von (1,2), wobei

$$c_n, A_n, B_n \text{ konstant}$$

sind. Demnach sind

$$T_n(r, \varphi) = r^n(\widetilde{a}_n \cos n\varphi + \widetilde{b}_n \sin n\varphi), \ n \in \mathbb{N}_0$$

$\widetilde{a}_n, \widetilde{b}_n$ konstant, Lösungen von $\Delta T = 0$ ohne Berücksichtigung der Randwerte. Alle Ausdrücke

$$\underbrace{T_0(r,\varphi)}_{=\text{ konst.}} + \sum_{n=1}^{N} r^n(\widetilde{a}_n \cdot \cos n\varphi + \widetilde{b}_n \sin n\varphi),\ N \in \mathbb{N}$$

sind ebenfalls Lösungen von $\Delta T = 0$ in $\overset{\circ}{E}$. Unter Berücksichtigung **aller Moden** entsteht als Ansatz für die allgemeine Lösung von $\Delta T = 0$ in $\overset{\circ}{E}$ die Reihe

(3) $T(r,\varphi) = \dfrac{\widetilde{a}_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot (\widetilde{a}_n \cos n\varphi + \widetilde{b}_n \sin n\varphi)$

Von Randwerten ist noch nicht die Rede. Wir wissen auch noch nichts über die Konvergenz der Reihe in (3) für $r \leq 1$, d.h. insbesondere auf ∂E, und nichts darüber, ob T sich stetig auf E fortsetzen läßt. Hierzu bringen wir die Randwerte f ins Spiel. f läßt sich nach Satz 21.3 in die gleichmäßig (in $[0, 2\pi]$) konvergente Fourierreihe

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

entwickeln. Mit diesen a_0, a_n, b_n nehmen wir (3), d. h. $\widetilde{a}_0 = a_0$, $\widetilde{a}_n = a_n$, $\widetilde{b}_n = b_n$. T ist dann die gesuchte Lösung, insbesondere ist

$$T(1,\varphi) = f(\varphi).$$

Übung:

1. Konvergenz der Reihe für $r \leq 1$.
2. Glm. Konvergenz der Reihe für $r \leq 1$.
3. Kompakt glm. Konvergenz der Reihe und ihrer zweiten Ableitungen in $r < 1$.

Umsetzung in Zahlen: Sei etwa

$$f : \partial E \to \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto 100x^2$$

In Polarkoordinaten:

$$f(\varphi) = 100cos^2\varphi.$$

Es ist $\cos^2\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ nach dem Additionstheorem für sin., cos.. Demnach lautet die Fourierentwicklung von f:

$$\begin{aligned} &f(\varphi) = 50 + 50\cos 2\varphi, \\ &a_0 = 100,\ a_2 = 50, \\ &a_n, b_n = 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Für $T(r,\varphi)$ erhalten wir

$$\boxed{T(r,\varphi) = 50 + 50r^2\cos 2\varphi.}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100}T(r,\varphi) &= \frac{1}{2} + r^2\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\right), \\
&= \frac{1}{2} + r^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}(x^2+y^2), \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2,
\end{aligned}$$

$$\boxed{T(x,y) = 50(x^2 - y^2 + 1).}$$

$T(x,y) = 50(x^2 - y^2 + 1)$
$(grad\,T)(x,y) = 100\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$
$T(x,y) = c$ sind die Hyperbeln.
$x^2 - y^2 = \frac{c}{50} - 1$
Diese Hyperbeln sind die Linien konstanter Temperatur (=Niveaulinien). Auf ihnen steht $grad\,T$ senkrecht, denn nach §8 wird der Normalenvektorraum in $p = (x,y)$ zur eindimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$

$$M = \{(x,y)|x^2 - y^2 - \frac{c}{50} - 1 = 0\},$$

die von einer Niveaulinie gebildet wird, gerade von $grad\,f(p)$ aufgespannt. Dabei ist $p \in M$, $p \neq (0,0)$.

Übung:
4. Wie hält man Δ in Polarkoordinaten?

Umrechnen von Δ auf Polarkoordinaten:
Inversion der Funktionalmatrix. Aufpassen: Es entstehen nicht-konstante Koffizientenfkt., die man mitdifferenzieren muß.

§22. Distributionen

Auf der reellen Achse sei eine Massendichte $\rho(x)$ gegeben. Es sei $\rho(x) = 0$, $x < -\varepsilon$ oder $x > \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. ρ ist eine Sprungfunktion und hat etwa folgendes Aussehen:

Die Gesamtmasse in $]-\infty, x]$ wird durch

$$m(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt,$$

die Gesamtmasse m überhaupt durch

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\infty}^{x} \rho(t)dt, \ x \geq \varepsilon, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)dt \end{aligned}$$

gegeben.

Es ist nun ein geläufiger Idealisierungsprozess, ε gegen Null streben zu lassen und die Gesamtmasse m, etwa $m = 1$ in einem Punkt, etwa im Nullpunkt zu konzentrieren. $m = 1$ bleibt ungeändert. Die Gesamtmasse wird auf immer kleinere Intervalle zusammengeschoben. Die Massendichte $\delta(x) = \rho(x)$ würde dann $\delta(x) = 0$, $x \neq 0$, erfüllen und nach obigem Ansatz müßte

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx$$

sein. Offenbar ist aber immer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 0$, selbst wenn wir $\delta(0) = +\infty$ festsetzen. Dieser Ansatz versagt also. Er würde auch auf die **gewöhnliche** Differentiation einer Sprungfunktion hinauslaufen.

Massendichte $\delta(x) =$ Ableitung der bis x angesammelten Masse $\int_{-\infty}^{x} \delta(t)dt$.

Insbesondere ist die wie oben gewonnene Massenverteilung **keine** Funktion, sondern ein anderes mathematisches Objekt. Welches?

Im folgenden befassen wir uns mit der Idee zur Überwindung dieser Schwierigkeit und ihrer Ausbeutung. Sie läßt zahlreiche Anwendungen zu. Die Idee besteht darin, δ nicht als Funktion aufzufassen, was nicht möglich ist wie eben gesehen, sondern als ein lineares Funktional. Dies ist eine lineare Abbildung der (diffbaren) Funktionen φ in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$). Dieses Funktional soll auf (differenzierbare) Funktionen φ folgendermaßen wirken:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Woher kommt nun diese Idee: Wäre δ doch eine halbwegs vernünftige Funktion, so ließe sich das üblicherweise durch δ gegebene Funktional in der Form $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$ schreiben.

Insbesondere wäre dann $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$

Wir beginnen mit

Definition 22.1: *Für $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt die abgeschlossene Menge*

$$Tr\varphi = \overline{\{x | x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi(x) \neq 0\}}$$

der Träger von φ. φ hat also kompakten Träger, wenn es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$\varphi|(\mathbb{R}^n - K) \equiv 0.$$

Definition 22.2: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist die Menge aller $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die unendlich oft stetig differenzierbar sind und für die Menge $Tr\varphi$ kompakt ist.*

Beispiel: Wir betrachten die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x &\longmapsto e^{+\frac{1}{x^2-1}},\ |x| < 1 \\ x &\longmapsto 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Dann ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Etwas allgemeiner: Sei $\varepsilon > 0$,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-\varepsilon^2)}, |x| < \varepsilon \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $Tr\varphi = [-\varepsilon, +\varepsilon]$. Hieraus stellt man leicht ein $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ her indem man $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(|x|)$ setzt. Das heißt:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-\varepsilon^2)}, |x| < \varepsilon \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^n$. $Tr\varphi$ ist dann $\overline{K_\varepsilon(0)} \subset \mathbb{R}^n$.

Wir erinnern an Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, des $\mathbb{R}^n$.

Für hinreichend oft differenzierbare Funktion φ über offenen Mengen des $\mathbb{R}^n$ setzt man

$$D^\alpha \varphi := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

Definition 22.3: *$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ausgestattet mit folgendem Konvergenzbegriff: Eine Folge (φ_k) aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ konvergiert in $\mathcal{D}$ gegen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dann und nur dann, wenn gilt:*

1. *Es existiert ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ derart, daß $Tr\varphi_k \subset K$, $k \in \mathbb{N}$, $Tr\varphi \subset K$ sind.*
2. *Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ gilt $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$, $k \to \infty$ gleichmäßig in K und damit in $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben $\varphi_k \to \varphi$, $k \to \infty$, oder $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$, $k \to \infty$ (besonders gleichmäßig).*

Definition 22.4: *Eine Distribution T im $\mathbb{R}^n$ist eine lineare Abbildung von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $\mathbb{R}$, d.h.*

$$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi),\ a, b \in \mathbb{R},\ \varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

die folgende Stetigkeitseigenschaft besitzt: Wenn $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$, $k \to \infty$, so gilt

$$T(\varphi_k) \to T(\varphi),\ k \to \infty.$$

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist die Menge der Distributionen.

Beispiel: Die Diracsche Delta-Distribution: $\delta : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \longmapsto \varphi(0)$. Für $a \in \mathbb{R}^n$ setzt man auch $\delta_a : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \longmapsto \varphi(a)$, so daß $\delta = \delta_0$ entsteht.

Satz 22.1: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. ü. erklärt. Sei f lokal integrierbar, d.h. für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $f|K$ integrierbar, d.h. $\int_K |f|dx < +\infty$.*

1. *Durch*
$$\varphi \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$$
ist eine Distribution $T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ gegeben.
2. *Sei auch $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f. ü. erklärt und lokal integrierbar, sei $T_f = T_g$, d.h. $T_f(\varphi) = T_g(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f = g$ f. ü..*

Beweis: Zu 1.: Wegen

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |f(x)| \cdot M,\ M = \sup|\varphi(x)|,$$
$M|f(x)|$ lokal integrierbar,

ist $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx| = |\int_K f(x)\cdot\varphi(x)dx|$, $Tr\varphi \subset K$, K kompakt, $\leq \int_K |f(x)|\cdot M dx < +\infty$. Also ist $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx$ wohldefiniert. Die Linearität ist klar. Sei $\varphi_k \overset{\mathcal{D}}{\to} \varphi$, K kompakt wie in Definition 22.3. Dann ist

$$\underbrace{|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_k(x)dx|}_{=|T_f(\varphi)-T_f(\varphi_k)|} =$$

$$|\int_K f(x)\varphi(x)dx - \int_K f(x)\varphi_k(x)dx|$$
$$= |\int_K f(x)(\varphi(x)-\varphi_k(x))dx|$$
$$\leq \int_K |f(x)||\varphi(x)-\varphi_k(x)|dx$$
$$\leq \int_K |f(x)|dx \sup_{x\in K}|\varphi(x)-\varphi_k(x)|.$$

Zu 2.: **Idee:** Seien f,g lokal quadratisch integrierbar. Dann sind f,g insbesondere lokal integrierbar. Es folgt aus $T_f = T_g$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} (f-g)(x)\varphi(x)dx = \\ &= \int_{K_R(0)} (f-g)(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

$K_R(0) \supset Tr\varphi$. Also ist $(f-g)|K_R(0)\perp$ (in $L_2(K_R(0))$ über $\mathbb{R}$) zu φ, $\varphi \in C_0^\infty(K_R(0)) = \{\varphi|\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ Tr\varphi \subset K_R(0)\}$. $C_0^\infty(K_R(0))$ ist dicht in $L_2(K_R(0))$: Zu $h \in L_2(K_R(0))$ existiert eine Folge (φ_k) mit

$$\varphi_k \to h \text{ in } L_2(K_R(0)),\ k\to\infty.$$

Also ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_{K_R(0)} (f-g)(x)\varphi_k(x)dx}_{=0} \\ &= \lim_{k\to 0}((f-g)|K_R(0),\varphi_k)_{L_2(K_R(0))}, \\ &= ((f-g)|K_R(0),h)_{L_2(K_R(0))}. \end{aligned}$$

Also $(f-g)|K_R(0)\perp L_2(K_R(0)) \Rightarrow f-g=0$ f. ü. in **jeder** Kugel $K_R(0)$, $R > 0 \Rightarrow f-g = 0$ f. ü. in $\mathbb{R}^n$. □

T_f heißt die von der lokal integrierbaren Funktion f **erzeugte Distribution.**

Wir willen nun Distributionen differenzieren. Die Definition der Ableitung von T soll so gewählt werden, daß folgendes gilt: Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ etwa stetig differenzierbar, so soll für die von f erzeugte Distribution T_f gelten:

$T'_f = T_{f'}$.

Definition 22.5: *Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sei*

$$\frac{\partial T}{\partial x_\upsilon} : \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$

$$\varphi \longmapsto \underbrace{-T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right)}_{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

oder allgemeiner

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \overbrace{T(\mathcal{D}^\alpha \varphi).}^{\in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}$$

Es ist klar, daß $D^\alpha T$ aus $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist. D^α vertauscht also bis auf das Vorzeichen mit T. Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der partiellen Integration wie i.f. klar wird.

Satz 22.2: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$T'_f = T_{f'}$$

Beweis: Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $Tr\varphi \subset [a,b]$, also $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{f'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_a^b f'(x)\varphi(x)dx \\ &= \underbrace{[f\varphi]_a^b}_{=0 \text{ wegen } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -T_f(\varphi') = T'_f(\varphi). \end{aligned}$$

□

Beispiel: Wir wollen eine Sprungfunktion als Distribution auffassen und differenzieren. Sei

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(sogenannte Heavyside-Funktion). h erzeugt die Distribution $T_h =: H$. Sei $Tr\varphi \subset [a,b]$, $b > 0$. Dann haben wir

$$\begin{aligned} H'(\varphi) &= -H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\int_0^b \varphi'(x)dx = -(\varphi(b) - \varphi(0)) \\ &= \varphi(0) = \delta(\varphi). \end{aligned}$$

Im Sinne von S. V.26 ist dies die richtige Formel.

Das Ergebnis kann man sich auch anders veranschaulichen. Dazu geben wir die

Definition 22.6 (Konvergenz von Distributionen): *Sei (T_k) eine Folge aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. (T_k) heißt konvergent gegen T, wenn*

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi)$$

ist für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben: $T_k \to T$, $k \to \infty$.

Beispiele:

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2}n, & |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$. Sei

$$T_n := Tf_n.$$

Hinweis für später: Es ist $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1$. Wir wollen zeigen, daß $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \delta$ ist. Dazu ist

$$\begin{aligned} T_n(\varphi) &= T_{f_n}(\varphi) \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}\varphi(x)dx \\ &= \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}(\varphi(x) - \varphi(0))dx + \varphi(0). \end{aligned}$$

Wegen $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |\varphi'(\xi)||x| \leq D_\varphi \frac{1}{n}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\frac{1}{n}}^{1/n} \frac{n}{2}(\varphi(x) - \varphi(0))dx = 0,$$

also $T_n \to \delta$, $n \to \infty$.

2. Die Dipol-Distribution in $\mathbb{R}$. Sie ist erklärt durch

$$T_{Dipol}(\varphi) := \varphi'(0)$$

Also ist $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$, $\delta' = -T_{Dipol}$. Der Name Dipol-Distribution ist nur aus der Approximation dieser Distribution zu erklären. Jedoch ist die Analogie zum Dipol unvollkommen. Wir approximieren also die Dipol-Distribution:

$$\begin{aligned}
T_n(\varphi) : &= T_{f_n}(\varphi) = \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}\varphi(x)dx - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}\varphi(x)dx \\
&= \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}(\varphi(x) - \varphi(-\frac{1}{n}))dx + \frac{n}{2}(\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(\frac{1}{n})) - \\
&\quad - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}(\varphi(x) - \varphi(+\frac{1}{n}))dx.
\end{aligned}$$

Substitution im ersten Integral: $\begin{array}{c} -y = x \\ y = -x \end{array} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
T_{f_n}(\varphi) &= -\int_{\frac{1}{n}}^{0} \frac{n^2}{2}(\varphi(-y) - \varphi(-\frac{1}{n}))dy + \frac{n}{2}(\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(\frac{1}{n})) - \\
&\quad - \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}(\varphi(y) - \varphi(+\frac{1}{n}))dy \\
&= \int_{0}^{\frac{1}{n}} \frac{n^2}{2}(\varphi(-y) - \varphi(-\frac{1}{n}) - (\varphi(y) - \varphi(+\frac{1}{n})))dy + \\
&\quad + \frac{n}{2}(\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(\frac{1}{n}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2}(\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(\frac{1}{n})) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{\varphi(-\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{-\frac{1}{n}} + \frac{\varphi(0) - \varphi(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right] \\
&= -\varphi'(0)
\end{aligned}$$

Die Taylorentwicklung von $\varphi(-y) - \varphi(-\frac{1}{n})$ um $y = +\frac{1}{n}$ bzw. von $\varphi(y) - \varphi(\frac{1}{n})$ um $y = \frac{1}{n}$ liefern für $y \in [0, \frac{1}{n}]$ gerade

$$\begin{aligned}\varphi(-y)-\varphi(-\frac{1}{n}) &= \widetilde{\varphi}'(\eta_1)(y-\frac{1}{n}) \text{ mit}\\ &\quad\ \widetilde{\varphi}(y)=\varphi(-y),\ 0<\eta_1<\frac{1}{n}\\ &= -\varphi'(-\eta_1)(y-\frac{1}{n})\\ \varphi(y)-\varphi(\frac{1}{n}) &= \varphi'(\eta_2)(y-\frac{1}{n}),\ 0<\eta_2<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^2}{2}(\varphi(-y)-\varphi(-\frac{1}{n})-(\varphi(y)-\varphi(\frac{1}{n})))dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^2}{2}(\varphi'(\eta_2)+\varphi'(-\eta_1))(y-\frac{1}{n})dy$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{n^2}{2}(\varphi'(\eta_2)+\varphi'(-\eta_1)-2\varphi'(0))(y-\frac{1}{n})dy\to 0,\ n\to\infty$$

$$+\int_0^{\frac{1}{n}}n^2(y-\frac{1}{n})dy\cdot\varphi'(0)\to-\frac{1}{2}\varphi'(0),\ n\to\infty.$$

Also ist $(-T(\varphi)=T(-\varphi),\, T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}T_n(\varphi) &\to +\varphi'(0),\ n\to\infty,\\ -\frac{2}{3}T_n &\to T_{Dipol},\ n\to\infty.\end{aligned}$$

3. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\, x\longmapsto\begin{cases}0, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$.

f ist stetig, hat aber einen Knick bei $x=0$. Es ist

$$T_f'=H,\ \text{denn}$$

$$\begin{aligned}
T'_f(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_0^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[f\varphi]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\varphi(x)dx \\
&= T_h(\varphi),\ h = \text{Heavyside-Funktion.}
\end{aligned}$$

Die Approximation der Distributionen in den Beispielen 1. und 2. braucht keineswegs durch die von Sprungfunktionen erzeugten Distributionen zu erfolgen. Man kann auch glatte Funktionen nehmen. Das sieht dann so aus:

Zum Beispiel **1.** δ
- Funktion
- diffbare Approximation

$T_{f_n} \longrightarrow \delta$

Zum Beispiel **2.**: $-T_{Dipol}$

$T_{f_n} \longrightarrow -T_{Dipol}$

Zum Beispiel **3.**: $T_{f_n} \to T_f$

Heavyside-Funktion: $T_{f_n} \to T_h = H$

Hierauf kommen wir später im Zusammenhang mit der δ-Distribution zurück.

Satz 22.3: *Seien*

$$\begin{aligned}
f_1 :&\ \ ]-\infty, 0[&\to \mathbb{R}, \\
f_2 :&\ \ [0, +\infty[&\to \mathbb{R}
\end{aligned}$$

stetig differenzierbar, sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} f_1(x), & x < 0, \\ f_2(x), & x \geq 0. \end{cases}$$

Sei

$$h = f_2(0) - f_1(0)$$

Wenn man $f'(0)$ beliebig definiert, so gilt

$$T_f' = T_{f'} + h \cdot \delta$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
T_f'(\varphi) &= -T_f(\varphi') \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} f_1(x)\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} f_2(x)\varphi'(x)dx \\
&= -[f_1,\varphi]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f_1'(x)\varphi(x)dx - [f_2\varphi]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f_2'(x)\varphi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx + (f_2(0) - f_1(0)\cdot\varphi(0) \\
&= T_{f'}(\varphi) + h\delta(\varphi).
\end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} \overbrace{0}^{=f_1(x)}, & x < 0 \\ \underbrace{\cos x}_{=f_2(x)}, & x \geq 0 \end{cases},$$

also

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ -\sin x, \ x \geq 0 \end{cases} \\
f''(x) &= \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ -\cos x, \ x \geq 0 \end{cases} = -f(x) \\
T_f' &= T_{f'} + \delta \\
T_{f'}' &= T_{f''} = T_{-f} = -T_f.
\end{aligned}$$

2. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \sin x, \ x \geq 0 \end{cases}$, also

$$g'(x) = \left\{ \begin{matrix} 0, \ x < 0 \\ \cos x, \ x \geq 0 \end{matrix} \right\} = f(x) \text{ Beispiel 1.}$$

$$g''(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ -\sin x, \ x \geq 0 \end{cases}$$

(1)
$$T_g' = T_{g'}$$
$$T_{g'}' = T_f' = T_{f'} + \delta$$

(2)
$$\begin{aligned} &= T_{g''} + \delta = T_{-g} + \delta \\ T_g'' &= T_{g'}' = T_{-g} + \delta, \\ &= -T_g + \delta, \\ T_g'' + T_g &= \delta \end{aligned}$$

T_g löst also die Differentialgleichung

$$\boxed{y'' + y = \delta}$$

für Distributionen $y \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Wir kommen zum **Rechnen mit Distributionen.** Für $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist $T_1 + T_2$, definiert durch

$$(T_1 + T_2)(\varphi) = T_1(\varphi) + T_2(\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wieder eine Distribution. Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$, definieren wir wie schon benutzt, aT durch

$$aT(\varphi) = T(a\varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $aT \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Darüberhinaus gilt für Grenzprozesse

Satz 22.4: *Sei (T_k) eine Folge aus $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $T_k \to T$, $k \to \infty$. Dann gilt*

$$D^\alpha T_k \to D^\alpha T \text{ für jeden}$$

Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $k \to \infty$.

Konvergiert insbesondere die Folge der Partialsummen

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k \text{ gegen } T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

so ist

$$D^\alpha\left(\sum_{k=1}^\infty T_k\right)=\sum_{k=1}^\infty D^\alpha T_k.$$

Beweis: Sei $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Aus $T=\lim\limits_{k\to\infty}T_k$ folgt (Definition 22.5)

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T_k(\varphi) & = & (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}T_k(\overbrace{D^\alpha\varphi}^{\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}) \\ & \to & (-1)^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}T(D^\alpha\varphi) \\ & = & D^\alpha T(\varphi). \end{array}$$

□

Satz 22.5: *Sei (f_k) eine Folge von Funktionen $f_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften*

1. *Jedes f_k ist lokal integrierbar,*
2. *Es gibt ein lokal integrierbares $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit*
$$\int_K|f_k-f|dx\to 0,\ k\to\infty,$$
für jedes Kompaktum $K\subset\mathbb{R}^n$, d. h. $||f_k-f||_{L_1(K)}\to 0$ für jedes Kompaktum K.

Dann gilt: $T_{f_k}\to T_f$, $k\to\infty$.

Beweis: Wir haben

$$|T_{f_k}(\varphi)-T_f(\varphi)|=|\int_{\mathbb{R}^n}(f_k-f)\varphi dx|$$

$$\begin{array}{rl} \leq & \displaystyle\int_K|f_k-f|dx\cdot\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|, \\ & K\supset Tr\varphi \\ & \to 0,\ k\to\infty. \end{array}$$

□

Wenn etwa die f_k gleichmäßig in jedem Kompaktum des $\mathbb{R}^n$ gegen f konvergieren, so sind die Voraussetzungen des Satzes 22.5 erfüllt.

Definition 22.7: *Sei $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ unendlich oft stetig differenzierbar (man schreibt $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$). Sei $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann setzt man*

$$(f\cdot T)(\varphi):=T(f\varphi)$$

Durch diese Definition ist ein Element $f \cdot T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

Hinweis: $Tr(f \cdot \varphi) \subset Tr\varphi$, $f \cdot \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Wenn $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ sind, so ist $T_1 \cdot T_2$ im allgemeinen nicht definiert. Daher kann man mit Distributionen i. a. **keine** nichtlinearen Probleme behandeln.

Satz 22.6: *Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dann ist (Leibniz-Regel)*

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(fT) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T + f \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} T,\ 1 \leq \nu \leq n.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f \cdot T)(\varphi) = -(f \cdot T)(\frac{\partial}{\partial x}\varphi) = \\ = \ & -T(f\frac{\partial}{\partial x_\nu}\varphi) = -T(\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f\varphi) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot \varphi) \\ = \ & -T(\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f\varphi)) + T(\frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot \varphi) \\ = \ & \frac{\partial}{\partial x_\nu} T(f\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T(\varphi) \\ = \ & f \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu} T(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \cdot T(\varphi). \end{aligned}$$

$\square$

Wir kommen nun zur angekündigten Approximation der δ-Distribution durch von glatten Funktionen erzeugte Distributionen. Wir behandeln dieses Problem in einer Variablen. Es gilt

Satz 22.7: *Sei $a_n < 0 < b_n$, $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$. Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, $Trf_n \subset [a_n, b_n]$, $f_n \geq 0$ und*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$T_n := T_{f_n} \to \delta,\ n \to \infty.$$

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx = 1$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
T_{f_n}(\varphi) &= \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot \varphi dx \\
&= \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))dx + \varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f_n dx}_{=1} \\
&= \int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))dx + \varphi(0).
\end{aligned}$$

$$|\int_{a_n}^{b_n} f_n \cdot (\varphi - \varphi(0))dx| \leq \underbrace{\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)dx}_{=1} \cdot \underbrace{\sup_{a_n \leq x \leq b_n} |\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\to 0,\ n \to \infty}$$

$$\to 0,\ n \to \infty.$$

$\square$

Beispiel: Sei φ_ε wie im Beispiel nach Definition 22.1, also

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-\varepsilon^2)}, |x| < \varepsilon \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Sei $c_n = \dfrac{1}{\displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} e^{1/(x^2-(\frac{1}{n})^2)}dx}$,

$$f_n(x) = c_n \cdot \varphi_{1/n}(x).$$

§23. Fourier-Transformation und Faltung

Die Fourier-Transformation ist das kontinuierliche Analogon zur Fourier-Reihe aus Satz 20.3. Für $f \in H = L_2(]0, 2\pi[)$ über $\mathbb{C}$ hat man zufolge dieses Satzes

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overbrace{(f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\cdot})}^{a(k):=} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

bei punktweiser Konvergenz. Dabei ist

$$a(k) = (f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik\cdot}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) \cdot e^{-ik\eta} d\eta$$

für $Trf \subset]0, 2\pi[$.

Die **Idee** ist nun so: Statt $k \in \mathbb{Z}$ schreibt man $\xi \in \mathbb{R}$, statt des Summenzeichens ein Integral in ξ von $-\infty$ bis $+\infty$. Dann ist

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi) e^{+i\xi x} d\xi,$$

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

Statt $a(\xi)$ schreibt man $\widehat{f}(\xi)$ und bezeichnet $\widehat{f}$ als die Fourier-Transformierte von f. Genauer verfahren wir so:

Definition 23.1: *Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Dann definieren wir*

$$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \xi \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.$$

$\widehat{f}$ heißt die Fourier-Transformierte von f.

$\widehat{f}$ ist zunächst beschränkt, da

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty,\ \xi \in \mathbb{R},$$

ist. $\widehat{f}$ ist auch stetig: Sei $\xi_n \to \xi$, $n \to \infty$. Dann ist

$$\widehat{f}(\xi_n) - \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x}) f(x) dx$$

$$(e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x})f(x) \to 0,\ n \to \infty, x \in \mathbb{R},$$

$$|(e^{-i\xi_n x} - e^{-i\xi x})f(x)| \le 2|f(x)|.$$

Daher folgt mit Satz 1.2.2 (Satz von Lebesgue), daß

$$\widehat{f}(\xi_n) \to f(\xi),\ n \to \infty.$$

Satz 23.1 (Satz von der Umkehrformel): *Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Dann gilt*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Wenn z.B. $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ist, ist $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Es gelten jedoch auch schärfere Aussagen. Differenzieren wir die Reihe (1) formal, so hat man

$$f'(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ia(k)k \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

bei punktweiser Konvergenz. Ersetzen wir wieder k durch ξ und $a(k)$ durch $\widehat{f}(\xi)$, so entsteht formal

Satz 23.2 (Algebraisierung der Differentiation): *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit kompaktem Träger. Dann gilt*

$$\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

Beweis: $f' \in L_1(\mathbb{R})$, also

$$\begin{aligned}
\widehat{f'}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f'(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\xi x} f(x)]_a^b - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-i\xi) e^{-i\xi x} f(x) dx, \\
&\quad Trf \subset [a,b], \\
&= i\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 23.3 (Umkehrung von Satz 23.2): *Sei $.f(.)$, d.h. $x \longmapsto xf(x)$, aus $L_1(\mathbb{R})$. Dann ist $\widehat{f}$ differenzierbar und*

$$i\widehat{f}' = \widehat{.f(.)}$$

Beweis: Formal ist

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\xi}e^{-i\xi x}f(x)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-i)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}xf(x)dx \\
&= \frac{1}{i}\widehat{.f(.)}.
\end{aligned}
$$

Mit Bildung des Differenzenquotienten und Anwendung des Satzes 1.2.2 (Satz von Lebesgue) macht man daraus leicht einen strengen Beweis. □

Für die Multiplikation zweier absolut konvergenter Reihen

$$P = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_m \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{b}_m$$

gilt bekanntlich die Cauchysche Formel

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
P &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_n \text{ mit} \\
\widetilde{c}_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{a}_k\widetilde{b}_{n-k}.
\end{aligned}
\right.
$$

Hat man zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R})$, ersetzt man die Reihen durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$, k durch die Variable t, n durch x, $n-k$ durch $x-t$, so entsteht

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
P &= \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}g(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt)dx
\end{aligned}
\right.
$$

Definition 23.2 (Faltung): *Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Dann ist die Funktion*

$$t \longmapsto f(.)g(x-.)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ aus $L_1(\mathbb{R})$. Also ist die Funktion

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(x-t)dt$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}$ wohldefiniert. Sie heißt Faltung von f und g.

Aus (3) sieht man sofort $f * g \in L_1(\mathbb{R})$,

$$||f * g||_{L_1(\mathbb{R})} \leq ||f||_{L_1(\mathbb{R})} \cdot ||g||_{L_1(\mathbb{R})}$$

Wenden wir (2) auf Fourierreihen an mit Fourierkoeffizienten $a(m)$ von f, $b(m)$ von g und nehmen wir die Fourierreihen als absolut konvergent an, so entsteht für die Fourierkoeffizienten des Produkts

$$c(n) = (\sqrt{2\pi})^{-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)b(n-k)$$

Ersetzen wir $c(n)$ durch $c(\xi)$, $a(k)$ durch $a(t)$, $b(n-k)$ durch $b(\xi-t)$, die Reihe durch Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ in t, so entsteht $\widehat{f \cdot g} = (\sqrt{2\pi})^{-1} \widehat{f} * \widehat{g}$. Bezeichnen wir die Umkehrabbildung zur Fouriertransformation mit $\check{\ }$ (s. Satz 23.1), so folgt

$$f \cdot g = (\sqrt{2\pi})^{-1} \check{\widehat{f} * \widehat{g}}, \ \widehat{f}, \widehat{g} \in L_1(\mathbb{R}).$$

Dies ist, wie man mit $\check{f} = \widehat{\widehat{f}}$ zeigen kann, eine Umformulierung von

Satz 23.4: *Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Dann ist*

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Beweis: Es ist $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ nach (3),

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt \cdot e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)e^{-i(x-t)\xi} dx \right)}_{\Rightarrow = \widehat{g}(\xi) \text{ Translationsinvarianz}} \cdot f(t) e^{-it\xi} dt \\
&= \widehat{g}(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it\xi} dt \\
&= \sqrt{2\pi} \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Im nächsten Schritt wollen wir eine Distribution mit einer Funktion aus $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ falten. Das Ergebnis ist eine Funktion.

Definition 23.3: *Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir*

$$\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto \varphi(x-t).$$

Also ist

$$\varphi_x(t) = \varphi(x-t),\ x, t \in \mathbb{R}.$$

Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dann ist $T * \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, definiert durch

$$x \longmapsto T(\varphi_x)$$

Zur Faltung $T * \varphi$ gilt

Satz 23.5: *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt*

$$T_f * \varphi = f * \varphi,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

mit

$$(f * \varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt$$

Obwohl f nicht in $L_1(\mathbb{R})$ zu sein braucht, ist das Integral rechts wohldefiniert, da φ kompakten Träger hat.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
(T_f * \varphi)(x) &= T_f(\varphi_x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi_x(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)dt \\
&= (f * \varphi)(x)
\end{aligned}$$

□

Satz 23.6: *Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist*

$$\delta * \varphi = \varphi.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned}
(\delta * \varphi)(x) &= \delta(\varphi_x) = \varphi_x(0) \\
&= \varphi(x-0) = \varphi(x).
\end{aligned}$$

□

Übungen: Die Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R})$.

§24. Distributionen und Differentialgleichungen

In einer Variablen wollen wir zu $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ eine Distribution S finden mit

$$\frac{d}{dx} S = S' = T,$$

d. h., wir wollen die Differentialgleichung $y' = T$ im Bereich der Distributionen lösen.

Wir befassen uns zunächst mit einem Ansatz, der nicht unmittelbar zum Ziel führt. Zu $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ wählen wir eine Stammfunktion Φ, d.h. $\Phi' = \varphi$, und setzen

$$S(\varphi) = -T(\Phi)$$

Dann wäre $S'(\varphi) = -S(\varphi') = T(\varphi)$. Das Problem ist, daß i.a. $\Phi \notin \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ist, da $Tr\Phi$ nicht kompakt ist. Z. B. haben wir mit $Tr\varphi \subset [a, b]$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$, $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$ folgendes Bild:

Definition 24.1: Wir setzen

$$\mathcal{D}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_1 = \{\varphi | \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0\}$$

Beispiel: Sei $\varphi \in \mathcal{D}$, $Tr\varphi \subset [a, b]$. Dann ist $\varphi' \in \mathcal{D}_1$, denn

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)dt &= \int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Hilfssatz 24.1: *Sei $\varphi \in \mathcal{D}_1$, $Tr\varphi \subset [a, b]$. Sei*

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x \varphi(t)dt.$$

Dann ist $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\Phi' = \varphi$, $Tr\Phi \subset [a, b]$.

Beweis: Für $x \leq a$ ist $\Phi(x) = 0$. Für $x \geq b$ ist

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_a^b \varphi(t)dt, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Also ist $Tr\Phi \subset [a,b]$. Es ist klar, dass Φ unendlich oft stetig differenzierbar ist. $\square$

Satz 24.1: *Zu jeder Distribution T existiert eine Distribution S mit*

$$S' = T.$$

Beweis: Wir wählen zunächst ein $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)dx = 1$, zum Beispiel

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= c \cdot \begin{cases} e^{1/(x^2-1)}, |x| < 1 \\ \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}, \\
c &= 1/\int_{-1}^{+1} e^{1/(x^2-1)}dx, \\
&= 1/\int_{-1}^{+1} e^{1/(x^2-1)}dx
\end{aligned}$$

(s. das Beispiel auf S. 39, Ende von §22). Für $\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sei

$$a = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$$

$$\varphi_1 = \varphi - a\rho.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt - a\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also $\varphi_1 \in \mathcal{D}_1$. Insbesondere folgt

$$\varphi = \varphi_1 + a\rho \text{ mit } \varphi_1 \in \mathcal{D}_1.$$

Sei

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)dt.$$

Dann ist nach Hilfssatz 24.1 die Funktion Φ aus $\mathcal{D}$ mit $\Phi' = \varphi_1$. Wir setzen

$$S : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ \varphi \longmapsto -T(\Phi).$$

Wir wollen zeigen: $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.h. S ist eine Distribution. Zur Linearität der Abbildung S: Sei

$$\begin{aligned}\varphi &= a\rho + \varphi_1,\\ \psi &= b\rho + \psi_1,\end{aligned}$$

$a =$ Mittelwert von φ, $b =$ Mittelwert von ψ, $\varphi_1 \in \mathcal{D}_1$, $\psi_1 \in \mathcal{D}_1$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi + \psi &= (a+b)\rho + \underbrace{\varphi_1 + \psi_1}_{\in \mathcal{D}_1}\\ \Phi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(t)dt,\ \Phi \in \mathcal{D}\\ \Psi(x) &= \int_{-\infty}^{x} \psi_1(t)dt,\ \Psi \in \mathcal{D},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S(\varphi + \psi) &= -T(\Phi + \Psi),\\ &= -T(\Phi) - T(\Psi),\\ &= S(\varphi) + S(\psi).\end{aligned}$$

Zur Stetigkeitseigenschaft aus Definition 22.4: Sei

$$\begin{aligned}\varphi_m &= a_m\rho + \varphi_{1m},\\ a_m &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(t)dt,\\ \varphi_m &\Rightarrow \varphi,\ m \to \infty\end{aligned}$$

(s. Definition 22.3). Dann folgt

$$a_m \to a,\ m \to \infty$$

$$\varphi_{1m} = \varphi_m - a_m\rho \Rightarrow \varphi_1 = \varphi - a\rho,\ m \to \infty$$

$$\Phi_m = \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi_{1m}(t)dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\cdot} \varphi_1(t)dt = \Phi$$

$$S(\varphi_m) = -T(\Phi_m) \to_{m\to\infty} -T(\Phi) = S(\varphi).$$

Endlich haben wir

$$S'(\varphi) = -S(\varphi'),\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Nach dem Beispiel auf Seite 45, unmittelbar nach Definition 24.1, ist $\varphi' \in \mathcal{D}_1$, also $(\varphi')_1 = \varphi'$, also

$$
\begin{aligned}
-S(\varphi') &= T(\int_{-\infty}^{\cdot} \varphi'(t)dt), \\
&= T(\varphi), \\
S'(\varphi) &= T(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 24.2: *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T' = 0$. Dann existiert eine konstante Funktion c mit*

$$T = T_c,$$

d.h.

$$T(\varphi) = c \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx,\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Beweis:

a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}_1$, dann finden wir ein $\Phi \in \mathcal{D}$ mit $\Phi' = \varphi$. Also ist $T(\varphi) = T(\Phi') = -T'(\Phi) = 0$.

b) Sei $\varphi \in \mathcal{D}$ beliebig. Wir benutzen die Zerlegung $\varphi = a\rho + \varphi_1$. Sei $c = T(\rho)$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
T(\varphi) &= T(\varphi_1) + aT(\rho) = a \cdot c \\
&= c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx.
\end{aligned}
$$

$\square$

Satz 24.3: *Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit*

$$T' = T.$$

Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ derart, daß für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto c \cdot e^x$ gilt

$$T = T_f.$$

Beweis: Sei $h(x) = e^{-x}$, $S = hT$. Dann ist

$$S' = h'T + hT'$$

(Definition 22.7, Satz 22.6). Also haben wir

$$S' = -hT + hT = 0.$$

Nach Satz 24.2 ist

$$\begin{aligned} S &= T_c, \text{ also } hT = T_c, \\ T &= \frac{1}{h}T_c, \\ T(\varphi) &= T_c(\frac{1}{h}\varphi) = T_f(\varphi). \end{aligned}$$

□

Die Verallgemeinerung des letzten Satzes besteht in
Satz 24.4: *Sei $n \in \mathbb{N}$, A eine $n \times n$-Matrix mit reellen Koeffizienten. Sei $\underline{T} = (T_1, \dots, T_n)^t$. Sei*

$$\underline{T}' = A\underline{T}, \text{ d. h.} T_i'(\varphi) = \overbrace{(A\underline{T})_i}^{\substack{i\text{-te Zeile} \\ \text{der Spalte } A\underline{T}}} (\varphi), \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Dann ist $\underline{T}$ eine klassische (=stetig differenzierbare) Lösung, d.h. es gilt ein n-Tupel f von (unendlich oft) stetig differenzierbaren Funktionen mit $\underline{f}' = A\underline{f}$ und

$$\underline{T} = T_{\underline{f}} := (T_{f_1}, \dots, T_{f_n})^t.$$

Beweis: Wir wählen ein Fundamentalsystem im üblichen Sinn zur Gleichung $\underline{f}' = A\underline{f}$ und bilden die unendlich oft differenzierbare Matrix Y mit dem Fundamentalsystem als Spalten. Dann ist

$$Y' = AY = \text{ Matrixgleichung}$$

(Y': Jede Spalte wird differenziert.)
Sei $\underline{S} = Y^{-1}\underline{T}$. Es ist $Y^{-1}Y = E$, also $(Y^{-1}Y)' = 0$, $(Y^{-1})'Y = -Y^{-1}Y'$, $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$,

$$\begin{aligned} \underline{S}' &= (Y^{-1})'\underline{T} + Y^{-1}\underline{T}', \\ &= -Y^{-1}Y'Y^{-1}\underline{T} + Y^{-1}\underline{T}', \\ &= -Y^{-1}AYY^{-1}\underline{T} + Y^{-1}A\underline{T}, \\ &= -Y^{-1}A\underline{T} + Y^{-1}A\underline{T} = 0, \end{aligned}$$

also nach Satz 24.2

$$\begin{aligned} \underline{S} &= Y^{-1}\underline{T} = T_{\underline{c}}, \ \underline{c} = (c_1, \dots, c_n)^t, \\ & \quad T_{\underline{c}} = (T_{c_1}, \dots, T_{c_n})^t \\ \underline{T} &= YT_{\underline{c}}; \end{aligned}$$

dann ist

$$\underline{T}(\varphi) = (\int_{-\infty}^{+\infty} f_1\varphi dx, \dots, \int_{-\infty}^{+\infty} f_n\varphi dx)^t$$

mit $\underline{f} = Y\underline{c}$ und $Y = (y_{ik})$,

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} c_k y_{ik},\ 1 \leq i \leq n.$$

Also ist $\underline{T} = T_{Y_{\underline{c}}} = T_{\underline{f}} = (T_{f_1}, \ldots, T_{f_n})^t$. Wegen $\underline{T}' = T_{\underline{f}'}$ (Satz 22.2) und $\underline{T}' = A\underline{T}$ folgt

$$T_{\underline{f}'} = A\underline{T} = AT_{\underline{f}} = T_{A\underline{f}}$$
$$\underline{f}' = A\underline{f}$$

$\square$

Bekanntlich kann man eine (lineare zumindest mit konstanten Koeffizienten) gewöhnliche Differentialgleichung $n-$ter Ordnung auf ein System erster Ordnung mit n Komponenten umschreiben. Daraus folgt: Sei $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1,\ a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$. Sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

(1) $$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu T^{(\nu)} = 0$$

Dann ist $T = T_f$ und f ist n-Mal stetig differenzierbare Lösung von (1).

§25. Lineare Differentialoperatoren.

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar. Für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ war

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi$$

Wir bezeichnen $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ als Ordnung des Differentialoperators D^α. Allgemeiner geben wir die

Definition 25.1: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für jeden Multiindex α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leq k$ sei eine unendlich oft stetig differenzierbare Funktion $b_\alpha : U \to \mathbb{R}$ gegeben. Ein Ausdruck*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha$$

heißt linearer Differentialoperator. Er heißt von der Ordnung k, wenn wenigstens ein b_α mit $|\alpha| = k$ nicht identisch verschwindet. Für $f : U \to \mathbb{R}$, f k-Mal stetig differenzierbar, setzen wir demnach

$$Lf = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha D^\alpha f, \text{ d.h.}$$

$$(Lf)(x) = \sum_{|\alpha \leq k|} b_\alpha(x)(D^\alpha f)(x), x \in U.$$

Zwei Differentialoperatoren

$$L_2 = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha^{(2)} D^\alpha,$$

$$L_1 = \sum_{|\alpha| \leq l} b_\alpha^{(1)} D^\alpha,$$

für die etwa $l \geq k$ gelte, heißen gleich, wenn sie gleiche Koeffizienten haben, d.h. $b_\alpha^{(1)} - b_\alpha^{(2)} \equiv 0$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, $b_\alpha^{(1)} \equiv 0$, $k + 1 \leq |\alpha| \leq l$.

Beispiele:

1. $L := b_0 = b, b \not\equiv 0$, d.h. $Lf = bf$. Ordnung 0. Hinweis: $b \equiv 0$. Ordnung von $L = -\infty$.
2. $L := \frac{\partial}{\partial x_\nu}$. Ordnung 1. Jeder Differentialoperator baut sich aus den Operatoren nach 1. und 2. auf.

3. $L = \Delta = \partial^2/\partial^2 x_1 + \ldots + \partial^2/\partial^2 x_n$. Ordnung 2.

4. $L = xy + x^2\partial/\partial x + e^{xy}\partial^2/\partial x\partial y$. Ordnung 2.

Wie üblich setzen wir

$$\begin{aligned}
(L_1 + L_2)f &= L_1 f + L_2 f, \\
(cL)f &= c \cdot Lf \\
(L_2 \circ L_1)f &= L_2(L_1 f).
\end{aligned}$$

Dies liefert das folgende Beispiel:
Sei $n = 1$. Sei $L_1 = \frac{d}{dx}$, $L_2 = b_0 = b$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(L_2 \circ L_1)f &= b \cdot f', \\
(L_1 \circ L_2)f &= \frac{d}{dx}(bf) = bf' + b'f.
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß Differentialoperatoren bezüglich „$\circ$ “ i.a. nicht kommutativ sind. Daher geben wir die

Definition 25.2: *Seien L_1, L_2 zwei Differentialoperatoren wie in Definition 25.1. Dann heißt*

$$[L_2, L_1] = L_2 \circ L_1 - L_1 \circ L_2$$

der Kommutator von L_2, L_1.

Zum Kommutator, der also den Fehler darstellt, den man bei Vertauschung von L_1 mit L_2 bezüglich „$\circ$ “macht, gilt:

Lemma 25.1: *Seien L_2, L_1 zwei Differentialoperatoren wie in Definition 25.1. L_2, L_1 mögen die Ordnung k bzw. l besitzen. Dann ist $[L_2, L_1]$ ein Differentialoperator höchstens der Ordnung $k+l-1$. Insbesondere erhalten wir für*

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial x_\nu},\ L_1 = b_\mu,\ b_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \longmapsto x_\mu$$

die Gleichung

$$[\frac{\partial}{\partial x_\nu}, x\mu] = \delta_{\nu\mu},$$

wobei wir x_μ statt b_μ schreiben.

Beweis: Mit

$$L_2 f = \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha^{(2)} D^\alpha f,$$
$$L_1 f = \sum_{|\alpha|\leq l} b_\beta^{(1)} D^\beta f$$

folgt

$$(L_2 \circ L_1)f = L_2(L_1 f) = \sum_{\substack{|\alpha|=k,\\ |\beta|=l}} b_\alpha^{(2)} b_\beta^{(1)} D^{\alpha+\beta} f +$$
$$+ \text{Terme niedrigerer Ordnung} \leq k+l-1,$$

$$(L_1 \circ L_2)f = L_1(L_2 f) = \sum_{\substack{|\beta|=l,\\ |\alpha|=k}} b_\beta^{(1)} b_\alpha^{(2)} D^{\beta+\alpha} f +$$
$$+ \text{Terme niedrigerer Ordnung} \leq k+l-1.$$

Bei der Bildung von $(L_2 \circ L_1)f - (L_1 \circ L_2)f$ heben sich die Terme von höchster Ordnung also heraus. Im konkreten Fall des Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned} L_2(L_1 f) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu}(x_\mu f) = \delta_{\mu\nu} f + x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \\ L_1(L_2 f) &= x_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} f. \end{aligned}$$

Definition 25.3: *Jedem Differentialoperator L wie in Definition 25.1 ordnen wir einen Differentialoperator*

$$\begin{aligned} L^* f &= \sum_{|\alpha|\leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha f) \\ &= \sum_{|\alpha|=k} (-1)^{|\alpha|} b_\alpha D^\alpha f + \textit{ Terme niedrigerer Ordnung} \end{aligned}$$

zu. L^* heißt der zu L adjungierte Differentialoperator. Hat L die Ordnung k, so auch L^*.

Beispiele:

1. $(\frac{\partial}{\partial x_\nu})^* = -\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, insbesondere $(\frac{d}{dx})^* = -\frac{d}{dx}$ im Fall $n=1$.
2. Sei $L = \sum_{\nu=1}^n b_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$. Dann ist

$$L^* f = -\sum_{\nu=1}^n (b_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + \frac{\partial b_\nu}{\partial x_\nu} f)$$

3. Sei $L = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
L^* f &= \sum_{i\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(a_{ij} f) \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} f), \\
L^* f &= Lf + \text{ Terme niedrigerer Ordnung}
\end{aligned}
$$

Für $L = \Delta$, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij}$, folgt $\Delta^* = \Delta$. Man sagt, Δ sei symmetrisch oder selbstadjungiert. Im Fall $n = 1$, $L = ad^2/dx^2$ folgt aus obiger Formel

$$
L^* = a\frac{d^2}{dx^2} + 2(\frac{d}{dx}a)\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}a.
$$

Der Name „zu L adjungierter Operator “ stammt aus

Satz 25.1: *Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, eine der beiden unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen f, g besitze kompakten Träger. Dann ist*

$$
\begin{aligned}
(Lf, g) &= \int_{\mathbb{R}^n} Lf g dx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f L^* g dx.
\end{aligned}
$$

Für den adjungierten Differntialoperator gelten die folgenden Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
(L_1 + L_2)^* &= L_1^* + L_2^* \\
(cL)^* &= cL^*,\ c = \text{Konstante}, \\
(L_1 \circ L_2)^* &= L_2^* \circ L_1^*,\ (L^*)^* = L.
\end{aligned}
$$

Beweis: Es habe etwa f kompakten Träger. Der Ausdruck $\int_{\mathbb{R}^n} Lf g dx$ ist dann wohldefiniert.

Ist auch $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$, so handelt es sich dabei um da reelle $L_2(\mathbb{R}^n)$-Skalarprodukt, und wir wollen also in diesem Skalarprodukt den Differentialoperator L vom ersten Faktor auf den zweiten abwälzen. Es ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} Lfgdx &= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^n} b_\alpha D^\alpha f \cdot gdx \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \int_{K_R(0)} D^\alpha f \cdot b_\alpha gdx,\ Trf \subset K_R(0), \\
&= \sum_{|\alpha|\le k} \int f \cdot (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (b_\alpha g)dx, \\
&= \int_{K_R(0)} fL^* gdx, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} fL^* gdx.
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Rechenregeln sind klar. Idee zur dritten: Es ist

$$
\int_{\mathbb{R}^n} (L_1 \circ L_2)f \cdot gdx = \int_{\mathbb{R}^n} f(L_1 \circ L_2)^* gdx
$$

und

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (L_1 \circ L_2)f \cdot gdx &= \int_{\mathbb{R}^n} L_1(L_2 f) \cdot gdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} L_2 f \cdot L_1^* gdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot L_2^*(L_1^* g)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot (L_2^* \circ L_1^*)gdx,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}
$$

Also ist (s. Beweis Satz 22.1)

$$
(L_1 \circ L_2)^* g = (L_2^* \circ L_1^*)g,\ g \in C^\infty(\mathbb{R}^n).
$$

Jetzt müßte man noch zeigen, dass die Koeffizientenfunktionen der Differenzialoperatoren $(L_1 \circ L_2)^*$ und $L_2^* \circ L_1^*$ übereinstimmen. Dies geschieht durch Einsetzen von Polynomen für g und soll hier nicht vorgeführt werden. Idee zur vierten Rechenregel: Analog:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} Lf\cdot g dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot L^* g dx,\ Trg \text{ kompakt},\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} L^* g f dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(L^*)^* f dx,\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (L^*)^* f g dx,\end{aligned}$$

und daraus wie eben $Lf = (L^*)^* f$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $(L^*)^* = L$. □

Satz 25.2: *Sei L ein Differentialoperator, T eine Distribution, so gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Formel*

$$(LT)(\varphi) = T(L^*\varphi).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(LT)(\varphi) &= \sum_{|\alpha|\le k} b_\alpha \cdot (D^\alpha T)(\varphi)\\ &= \sum_{|\alpha|\le k} (D^\alpha T)(b_\alpha \varphi)\\ &= \sum_{\alpha\le k} (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(b_\alpha\cdot\varphi))\\ &= T(L^*\varphi).\end{aligned}$$

□

Satz 25.3: *Sei L ein Differentialoperator, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Dann ist*

$$LT_f = T_{Lf}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}LT_f(\varphi) &= T_f(L^*\varphi)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} fL^*\varphi dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} Lf\varphi dx\\ &= T_{Lf(\varphi)},\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

□

Insbesondere erkennt man, daß Def. 22.5 von $D^\alpha T$ eine Verallgemeinerung der partiellen Integration ist:
$D^\alpha T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha T \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^n} T(-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi dx = T((-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi)$. Man nimmt den Wert, der nach partieller Integration herauskommen würde, wenn T eine Funktion wäre.

§26. Die Grundlösung einer Differentialgleichung

Wenn L ein Differentialoperator ist, φ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt, so wollen wir versuchen, eine Lösung von $Lu = \varphi$, also einer inhomogenen Differentialgleichung, zu finden.

Definition 26.1: *Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Grundlösung (Fundamentallösung, Elementarlösung) des Differentialoperators L wie in Definition 25.1, wenn gilt*

$$LT = \delta.$$

Wir können hier unser Ziel nur im Fall $m = 1$ verfolgen. Zusätzlich habe L bis §27 einschließlich die einfache Gestalt

$$L = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu},\ a_n = 1,\ a_\nu = \text{ konstant}, 0 \le \nu \le n-1.$$

Also ist

$$Lf = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{d^\nu f}{dx^\nu}.$$

Sei also i.f. $m = 1$, L wie oben.

Satz 26.1 (Die Grundlösung liefert die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung): *Sei T eine Grundlösung des Differentialoperators L. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die folgende Aussage: Setzt man*

$$u = T * \varphi,$$

so ist u unendlich oft (stetig) differenzierbar und genügt der Gleichung

$$Lu = \varphi$$

Beweis: Wir zeigen: u ist differenzierbar mit $u' = T' * \varphi$. Es ist

$$\begin{aligned}
u(x) &= T(\varphi_x) \text{ mit} \\
\varphi_x(t) &= \varphi(x-t), \\
u(x+h) &= T(\varphi_{x+h}) \text{ mit} \\
\varphi_{x+h}(t) &= \varphi(x+h-t), \\
&= \varphi(x-(t-h)), \\
&= \varphi_x(t-h).
\end{aligned}$$

Sei $\lim\limits_{m\to\infty} h_m = 0$, $h_m \in \mathbb{R} - \{0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{u(x+h_m)-u(x)}{h_m} &= \frac{T(\varphi_{x+h_m})-T(\varphi_x)}{h_m}, \\ &= T\left(\frac{\varphi_{x+h_m}-\varphi_x}{h_m}\right). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left(\frac{\varphi_{x+h_m}-\varphi_x}{h_m}\right)(t) = -\frac{\varphi_x(t-h_m)-\varphi_x(t)}{-h_m} \to -\varphi_x{}'(t),\ m\to\infty.$$

Man sieht nun leicht, daß sogar für jedes feste, aber beliebige $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{\varphi_{x+h_m}-\varphi_x}{h_m} \Rightarrow -\varphi_x{}',\ m\to\infty$$

(besonders gleichmäßig oder Konvergenz in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). Mit der Stetigkeitseigenschaft der Distributionen aus Definition 22.4, die übrigens hier zum ersten Mal benutzt wird, folgt für $m \to \infty$ gerade

$$\begin{aligned} u'(x) &= T(-\varphi_x{}') = -T(\varphi_x{}'), \\ &= T'(\varphi_x) = (T' * \varphi)(x). \end{aligned}$$

Wiederholung dieses Arguments zeigt:

$$u^{(\nu)}(x) = (T^{(\nu)} * \varphi)(x).$$

Also ist

$$\begin{aligned} Lu &= (LT) * \varphi = \delta * \varphi, \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

$\square$

Es ist nur konsequent, wenn wir jetzt eine Grundlösung herstellen wollen. Dazu dient

Satz 26.2 (Herstellung einer Grundlösung): *Sei L ein gewöhnlicher Differentialoperator der Ordnung n wie vorhin eingeführt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (beliebig oft differenzierbar und) die eindeutig bestimmte Lösung von*

$$Lf = 0 \text{ mit den Anfangswerten } f(0) = f'(0) = f^{(n-2)}(0) = 0, \text{ aber } f^{(n-1)}(0) = 1.$$

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \left\{\begin{smallmatrix} 0,\, x<0 \\ 1,\, x\geq 0 \end{smallmatrix}\right.$. *Sei* $g = hf$. *Dann ist*

$$T := T_g$$

eine Grundlösung von L.

Beweis: Wir führen den Beweis für $n = 2$ durch. Es ist also

$$\begin{aligned} L &= \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \\ g(x) &= \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0, \\ f(x) \text{ für } x \geq 0, \end{cases} \\ Lf &= 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1. \end{aligned}$$

h ist die Heavyside-Funktion, die von ihr erzeugte Distribution hatten wir mit H bezeichnet (Beispiel nach Satz 22.2). Also ist

$$\begin{aligned} T &= T_{hf} = T_{fh} = f \cdot T_h = f \cdot H, \\ T' &= f'H + f \cdot H' = f'H + f \cdot \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \cdot \delta)(\varphi) &= \delta(f \cdot \varphi) = f(0)\varphi(0), \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T' &= f'H, \\ T'' &= f''H + f'H' = f''H + f'\delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f' \cdot \delta)(\varphi) &= \delta(f'\varphi) = f'(0)\varphi(0), \\ &= \varphi(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'' &= f''H + \delta, \\ LT &= T'' + a_1 T' + a_0 T \\ &= (f'' + a_1 f' + a_0 f)H + \delta \\ &= (Lf) \cdot H + \delta = \delta. \end{aligned}$$

□

Beispiele:

1. Wir befassen uns mit dem Beispiel 2. nach Satz 22.3. Es sei $Ly = y'' + y$. Die Lösung f von $y'' + y = 0$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ist $f(x) = \sin x$. Demnach haben wir folgende graphische Darstellung:

Es ist (s. wieder Beispiel 2 nach Satz 22.3):

$$\begin{aligned} T_g' &= T_{g'}, \\ T_g'' &= T_{g'}' = T_{g''} + \delta, \\ &= T_{-g} + \delta = -T_g + \delta, \end{aligned}$$

$$LT = T_g'' + T_g = \delta.$$

2. $Ly = y'' - 3y' + 2y$. Aus der Faktorisierung

$$L = (\frac{d}{dx} - 1)(\frac{d}{dx} - 2)$$

gewinnt man als allgemeine Lösung von $Ly = 0$ die Funktionen

$$ae^x + be^{2x},\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Hieraus bestimmt man f mit $Lf = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ zu

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} - e^x, \ \ f(0) = 0, \\ f'(x) &= 2e^{2x} - e^x, \ \ f'(0) = 1. \end{aligned}$$

Sei also

$$g(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ \\ e^{2x} - e^x,\ x \geq 0 \end{cases}$$

T_g ist eine Fundamentallösung.

3. Wir betrachten den Differentialoperator 1. Ordnung $Ly = y' - y$. Die Lösung von $Lf = 0$, $f(0) = 1$, ist $f(x) = e^x$. Demnach ist T_g mit $g(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ e^x, x\geq 0 \end{cases}$, eine Fundamentallösung.

4. Bei einem Differentialoperator 3. Ordnung bestimmt man f mit $Lf = 0$, $f(0) = f'(0) = 1$, $f''(0) = 1$.

§27. Inhomogene Differentialgleichungen

Die Fundamentallösung T aus Satz 26.1 operierte bisher auf $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Es erweist sich als nötig, diesen Bereich zu erweitern. Im Fall der Ordnung 2 von L, d.h.

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0,\ a_1, a_0 \text{ reelle Konstanten},$$

suchen wir demnach eine Lösung von $Ly = \rho$ für ein stetiges $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$. Hierzu gilt:

Satz 27.1: *Sei L wie oben. Sei g die erzeugende Funktion der Fundamentallösung aus Satz 26.2. Dann gilt für beliebiges $\rho \in C^0([a,b])$ mit reellen Werten: Die Funktion*

$$u : [a,b] \to \mathbb{R} \quad mit$$

$$u(x) = \int_a^b g(x-\xi)\rho(\xi)d\xi$$

ist 2-Mal stetig differenzierbar in $[a,b]$. Es ist

$$Lu = \rho \ in \ [a,b]$$

$$u(a) = u'(a) = 0.$$

Hinweise:

1. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $Tr\varphi \subset [a,b]$ haben wir als Lösung von $Lu = \varphi$ gerade

$$\begin{aligned}(Tg * \varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(t)\varphi(x-t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x-\eta)\varphi(\eta)d\eta \\ &= \int_a^b g(x-\eta)\varphi(\eta)d\eta\end{aligned}$$

Satz 27.1 ist also die genaue Verallgemeinerung von Satz 26.2.

2. Es ist entscheidend, daß g gerade nicht 2-Mal stetig differenzierbar ist, sondern, daß g' möglicherweise auch g'', in 0 Sprungstellen besitzen, nicht aber g. Wäre nämlich g durchgehend 2-Mal stetig differenzierbar, so wäre mit $Lg(x) = 0$ für $x < 0$, $Lg(x) = 0$ für $x > 0$ aus Stetigkeitsgründen $Lg \equiv 0$. Dann würde für das u des Satzes 27.1 folgen

$$
\begin{aligned}
Lu(x) &= \int_a^b (Lg)(x-\xi)\rho(\xi)d\xi \\
&= 0,\ x \in [a,b],
\end{aligned}
$$

und ebenso für $T_g * \varphi$:

$$L(T_g * \varphi)(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

g ist also eine Singularitätenfunktion, und die Singularitäten äußern sich in Sprungstellen. In höheren Dimensionen geschieht dies durch Unendlichwerden (vgl. Übungen zur „Mathematik für Physiker III", Blatt 12, Aufgabe 1). Zum Beweis des Satzes 27.1 wird man also die Integration über $[a,b]$ in eine Integration über $[a,x]$ und eine über $[x,b]$ aufspalten müssen. Daher brauchen wir

Hilfssatz 27.1: *Sei $F : x \in [a,b] \times \xi \in [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\partial F/\partial x$ existiere in $x \neq \xi$, sei dort stetig und beschränkt. Dann ist die Funktion*

$$x \longmapsto \int_a^x F(x,\xi)d\xi$$

in $[a,b]$ stetig differenzierbar und für die Ableitung gilt die Formel

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dx}\int_a^x F(x,\xi)d\xi = F(x,x) + \int_a^x (\partial F/\partial x)(x,\xi)d\xi.$$

(1) *gilt sinngemäß für* $\displaystyle\int_b^x F(x,\xi)d\xi,\ x \in [a,b]$.

Beweis des Hilfssatzes 27.1:

$$
\begin{aligned}
\text{(2)} \qquad & \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} F(x+h,\xi) - \int_a^x F(x,\xi)d\xi\right) = \\
& \frac{1}{h}\int_a^x (F(x+h,\xi) - F(x,\xi))d\xi + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(x+h,\xi)d\xi
\end{aligned}
$$

Wegen der Stetigkeit von F konvergiert der letzte Term für $h \to 0$ gegen $F(x,x)$. Es ist, ξ fest,

$$\frac{1}{h}(F(x+h,\xi) - F(x,\xi)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\vartheta h,\xi),\ \xi \neq x,$$

$$|\frac{1}{h}(F(x+h,\xi) - F(x,\xi))| \leq D,\ \xi \neq x.$$

Mit Satz 1.2.2 (Satz von Lebesgue) folgt, daß der erste Term in (2) rechts gegen $\int_a^x (\partial F/\partial x)(x,\xi)d\xi$ konvergiert. Damit folgt die Formel (1). Die Stetigkeit der rechten Seite in (1) folgt mit Satz 1.2.2 (Satz von Lebesgue). $\square$

Beweis des Satzes 27.1: Sei $G(x,\xi) = g(x-\xi)$, also $G : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$, $(x,\xi) \longmapsto \left\{ \begin{smallmatrix} 0, \, \xi>x \\ f(x-\xi), \xi\leq x \end{smallmatrix} \right.$. Dann genügt $G\rho$ den Voraussetzungen des Hilfssatzes 27.1 Es ist

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \\ &= \int_a^x G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \\ u'(x) &= \int_a^x \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi)\rho(\xi)d\xi + G(x,x)\rho(x), \\ &= \int_a^x f'(x-\xi)\rho(\xi)d\xi + f(0)\rho(x); \end{aligned}$$

wir wollen jetzt HS 27.1 noch einmal anwenden. Dazu müssen wir $F(x,\xi) = f'(x-\xi)\rho(\xi)$ auf $[a,b]\times[a,b]$ stetig fortsetzen; am einfachsten ist es, wir setzen

$$F(x,\xi) = \begin{cases} f'(x-\xi)\rho(\xi), \ \xi \leq x(\text{ entspricht } \Delta^r) \\ \qquad \rho(\xi), \ \xi \geq x(\text{ entspricht } \Delta^l) \end{cases}$$

Wegen $f'(0) = 1$ ist dann F stetig in $[a,b]\times[a,b]$. Natürlich kann man auch jede andere stetige Fortsetzung der in Δ^r erklärten Funktion $f'(x-\xi)\rho(\xi)$ nehmen. Das Ergebnis ist immer das gleiche.

$$u''(x) = \int_a^x f''(x-\xi)\rho(\xi)d\xi + f'(0)\rho(x).$$

Also ist

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \int_a^x (Lf)(x-\xi)\rho(\xi)d\xi + \rho(x), \\ &= \rho(x). \end{aligned}$$

Offenbar ist $u(a) = u'(a) = 0$. $\square$

Hilfssatz 27.1 ist etwas stärker als wir ihn jetzt benötigt haben.

Beispiel: $\rho(x) = x$, $x \in [a,b] = [0,\pi]$. Sei $Ly = y'' + y$. Dann ist nach Beispiel 1 nach Satz 26.2

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 0, \ x < \xi, \\ \sin(x-\xi), \ \xi \leq x \end{cases}$$

(vgl. Beweis Satz 27.1). Eine Lösung von $y'' + y = x$ erhält man also durch

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \sin(x-\xi)\xi d\xi \\ &= -\int_x^0 (x-t)\sin t dt \\ &= x\int_0^x \sin t dt - \int_0^x t\sin t dt \\ &= [-x\cdot\cos t]_0^x - [-t\cos t + \sin t]_0^x \\ &= -x\cdot\cos x + x - [-x\cos x + \sin x] \\ &= x - \sin x. \end{aligned}$$

Offenbar ist $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.

Zusammenfassung §27:

$LT = \delta$	$Lu = \psi$
$T =$ Fundamentallösung	$\Rightarrow u = T * \psi$ ist Lösung

$\Rightarrow$ Also konstruieren wir eine Fundamentallösung um das inhomogene Problem zu lösen

Gew. Diff. Op. $L \overset{FLT_g}{\Rightarrow}$	$g = hf$
	mit $h =$ Heavysidef.,
	f Lösung von $L = 0$ mit spez. A'werten

Fundamentallösung wird also von Funkt. erzeugt.

§28. Greensche Funktionen

Der Operator L hatte bisher konstante Koeffizienten. Wir wenden uns jetzt dem Fall variabler Koeffizienten zu. Seien

$$a_0, a_1 : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig,}$$

sei

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0.$$

Wir suchen eine Funktion $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, daß für jede stetige Funktion $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi)\rho(\xi)d\xi$$

Lösung von $Ly = \rho$ ist.

Dazu machen wir folgenden Ansatz: $Q := [a, b] \times [a, b]$.

$$\begin{aligned}
\Delta^l : &= \{(x, \xi) | (x, \xi) \in Q,\ x \leq \xi\}, \\
\Delta^r : &= \{(x, \xi) | (x, \xi) \in Q,\ x \geq \xi\}, \\
G^l : &= G|\Delta^l, \\
G^r : &= G|\Delta^r.
\end{aligned}$$

Definition 28.1: *Sei $L = d^2/dx^2 + a_1 \cdot d/dx + a_0$ mit stetigem Koeffizientenfunktionen $a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion*

$$G : Q \to \mathbb{R}$$

heißt eine Greensche Funktion zu L, wenn gilt:

1. *G ist stetig,*
2. *G^l, G^r sind in Δ^l bzw. Δ^r 2-Mal partiell nach x differenzierbar. $\partial G^l/\partial x$, $\partial G^r/\partial x$, $\partial^2 G^l/\partial x^2$, $\partial^2 G^r/\partial x^2$ sind in Δ^l bzw. Δ^r stetig.*
3. *Für jedes feste $\xi \in [a, b]$ gilt*

$$\frac{\partial^2 G^l}{\partial x^2}(x, \xi) + a_1(x)\frac{\partial G^l}{\partial x}(x, \xi) + a_0(x)G^l(x, \xi) =: L_x G^l(x, \xi) = 0,\ \xi \geq x,$$

$$\frac{\partial^2 G^r}{\partial x^2}(x, \xi) + a_1(x)\frac{\partial G^r}{\partial x}(x, \xi) + a_0(x)G^r(x, \xi) =: L_x G^r(x, \xi) = 0,\ x \geq \xi.$$

4. *Es ist*

$$\frac{\partial G^r}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial G^l}{\partial x}(x,x) = 1, \ x \in [a,b].$$

Wir haben bereits Greensche Funktionen konstruiert, denn es gilt der

Satz 28.1: *Ist $L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$ ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, setzt man für beliebiges $Q = [a,b] \times [a,b]$*

$$G(x,\xi) := g(x-\xi),$$

wobei g aus dem Beweis von Satz 26.2 stammt, so ist g eine Greensche Funktion zu L.

Beweis:

1. $g = h \cdot f$ ist wegen $f(0) = 0$ stetig, also auch G.
2. Es ist $g(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ f(x), x \geq 0 \end{cases}$. Also ist $G^l \equiv 0$, $G^r(x,\xi) = f(x-\xi)$. Also genügen G^l, G^r der Forderung 2. in Definition 28.1.
3. Forderung 3 ist für G^l klar, für G^r folgt sie aus $(Lf)(x) = 0$ in $\mathbb{R}$.
4. $(\partial G^r/\partial x)(x,x) = f'(0) = 1$, $(\partial G^l/\partial x)(x,x) = 0$. □

Satz 28.2 (G liefert eine Lösung von $Ly = \rho$): *Sei $L = d^2/dx^2 + a_1 d/dx + a_0$ mit stetigen Koeffizienten*

$$a_1, a_0 : [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Sei G eine Greensche Funktion zu L, $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$u : [a,b] \to \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi$$

2-Mal stetig differenzierbar und erfüllt

$$(Ln)(x) = \rho(x).$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_a^x G^r(x,\xi)\rho(\xi)d\xi + \int_x^b G^l(x,\xi)\rho(\xi)d\xi \\
&= \int_a^x G^r(x,\xi)\rho(\xi)d\xi - \int_b^x G^l(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \\
u'(x) &= G^r(x,x)\rho(x) + \int_a^x (\partial G^r/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi)d\xi - G^l(x,x)\rho(x) \\
&\quad - \int_b^x \frac{\partial G^l}{\partial x}(x,\xi)\rho(\xi)d\xi \\
&= \int_a^x (\partial G^r/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi)d\xi - \int_b^x (\partial G^l/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$F_1(x,\xi) = \begin{cases} (\partial G^r/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi), \ x \geq \xi, \\ ((\partial G^l/\partial x)(x,\xi)+1)\rho(\xi), \ x \leq \xi \end{cases},$$

genügt wegen Eigenschaften 2. und 4. in Definition 28.1 den Voraussetzungen des Hilfssatzes 27.1. Entsprechendes gilt für

$$F_2(x,\xi) = \begin{cases} ((\partial G^r/\partial x)(x,\xi)-1)\rho(\xi), \ x \geq \xi, \\ (\partial G^l/\partial x)(x,\xi)\rho(\xi), \ x \leq \xi. \end{cases}$$

Damit liefert Hilfssatz 27.1 gerade die Stetigkeit von u'' und

$$\begin{aligned}
u''(x) &= (\partial G^r/\partial x)(x,x)\rho(x) + \int_a^x (\partial^2 G^r/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi) - \\
&\quad -(\partial G^l/\partial x)(x,x)\rho(x) - \int_b^x (\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi)d\xi \\
&= \rho(x) + \int_a^x (\partial^2 G^r/\partial x^2)(x,\xi)\cdot\rho(\xi)d\xi + \int_x^b (\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi)\rho(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Also ist

$$Lu(x) = \rho(x) + \int_a^x L_x G^r(x,\xi)\rho(\xi)d\xi + \int_x^b L_x G^l(x,\xi)\rho(\xi)d\xi,$$

$L_x = L$, genommen bezüglich der Variablen x.

Also ist mit Eigenschaft 3. aus Definition 28.1 gerade

$$Lu(x) = \rho(x).$$

□

Wir befassen uns nun mit der Herstellung einer Greenschen Funktion. Hierzu gilt

Satz 28.3: *Sei* $L = d^2/dx^2 + a_1 d/dx + a_0$ *ein Differentialoperator mit stetigen Koeffizienten*

$$a_0, a_1 : [a, b] \to \mathbb{R}.$$

Seien

$$\eta_1, \eta_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$$

ein Fundamentalsystem zu $Ly = 0$*. Wählt man stetige Funktionen*

$$r_1, r_2, l_1, l_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$$

mit

(1) $(r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 = 0$

(2) $(r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' = 1$

und setzt

$$\begin{aligned} G^r(x,\xi) &= r_1(\xi)\eta_1(x) + r_2(\xi)\eta_2(x), \\ G^l(x,\xi) &= l_1(\xi)\eta_1(x) + l_2(\xi)\eta_2(x), \end{aligned}$$

so ist

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G^r(x,\xi) \text{ für } (x,\xi) \in \Delta^r, \\ G^l(x,\xi) \text{ für } (x,\xi) \in \Delta^l \end{cases}$$

eine Greensche Funktion zu L.

Beweis: Die Determinante in (1,2) ist die Wronski-Determinante

$$\begin{vmatrix} \eta_1(x) & \eta_2(x) \\ \eta_1'(x) & \eta_2'(x) \end{vmatrix}, \ x \in [a, b],$$

die in $[a, b]$ niemals verschwindet, da nach Annahme η_1, η_2 ein Fundamentalsystem bilden. Zum Beispiel kann man $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ wählen und dann r_1, r_2 aus (1,2) bestimmen. Nun ist wegen (1) gerade

$$G^r(x,x) = G^l(x,x).$$

Also ist G stetig. Damit folgt Eigenschaft 1. in Definition 28.1. Eigenschaft 2. folgt aus der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von η_1, η_2. Eigenschaft 3 folgt daraus, daß bei festem ξ gerade

$$L_x G^r(x,\xi) = r_1(\xi) L\eta_1(x) + r_2(\xi) \cdot L\eta_2(x) = 0,$$

$$L_x G^l(x,\xi) = l_1(\xi) L\eta_1(x) + l_2(\xi) \cdot L\eta_2(x) = 0$$

ist. Eigenschaft 4. folgt aus (2). □

MIt dem Konstruktionsverfahren des Satzes 28.3 erhält man alle Greenschen Funktionen: Da für festes ξ die Funktionen $G^r(.,\xi)$, $G^l(.,\xi)$ die Gleichung $Ly = 0$ lösen, lassen sie sich in der Form

$$\begin{aligned} G^r(x,\xi) &= r_1(\xi)\eta_1(x) + r_2(\xi)\eta_2(x), \\ G^l(x,\xi) &= l_1(\xi)\eta_1(x) + l_2(\xi)\eta_2(x) \end{aligned}$$

darstellen. Wählen wir wie im Beweis des Satzes 28.3 angedeutet $l_1 = l_2 \equiv 0$, so ist $G^l(x,\xi) = 0$ in Δ^l. Für $G^r(.,\xi)$ folgt

$$\begin{aligned} G^r(x = \xi, \xi) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} G^r(x = \xi, \xi) &= 1. \end{aligned}$$

$G^r(.,\xi)$ ist also die eindeutig bestimmte Lösung von $Ly = 0$, die in $x = \xi$ die Cauchy-Daten (= „Anfangswerte “) $y(\xi) = 0$, $y'(\xi) = 1$ hat. Hat L konstante Koeffizienten, ist f die eindeutig bestimmte Lösung von $Ly = 0$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, so finden wir zu beliebigem, aber festem $\xi \in \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung g von $Ly = 0$ mit $g(\xi) = 0$, $g'(\xi) = 1$, indem wir

$$g(x) = f(x - \xi)$$

setzen. Dies sehen wir auch am folgenden **Beispiel**: Sei $[a,b]$ beliebig,

$$Ly = y'' + y.$$

Ein Fundamentalsystem ist gegeben durch

$$\eta_1(x) = \cos x, \quad \eta_2(x) = \sin x,$$

also

$$\eta_1'(x) = -\sin x, \quad \eta_2'(x) = \cos x.$$

Aus $l_1 = l_2 = 0$ folgt

$$\begin{aligned} r_1(x)\cos x + r_2(x)\sin x &= 0, \\ -r_1(x)\sin x + r_2(x)\cos x &= 1. \end{aligned}$$

Dies sind also die Gleichungen (1,2) aus Satz 28.3. Auflösung liefert

$$\begin{aligned} r_1(x) &= -\sin x, \\ r_2(x) &= \cos x, \end{aligned}$$

$G^l(x,\xi) = 0,$

$$\begin{aligned} G^r(x,\xi) &= -\sin\xi\cos x + \cos\xi\sin x, \\ &= \sin(x-\xi). \end{aligned}$$

Wir gehen nun kurz auf den Fall ein, daß in L auch die Ableitung höchster Ordnung mit einem $x-$abhängigen Koeffizienten behaftet ist, so daß L die Form

$$L = a_2\frac{d^2}{dx^2} + a_1\frac{d}{dx} + a_0$$

mit

$$a_0, a_1, a_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

stetig hat. Sei

$$a_2(x) > 0,\ x \in [a,b].$$

Eine **Greensche Funktion** zu L ist zunächst durch die Forderungen 1. bis 3. aus Definition 28.1 erklärt, also:

1. $G : Q = [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

2. Differenzierbarkeit (2-Mal) von $G^l(.,\xi), G^r(.,\xi)$. Stetigkeit der Ableitungen in Δ^l bzw. Δ^r.

3.

$$\begin{aligned} L_x G^l(x,\xi) &= a_2(x)(\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi) + \ldots, \\ &= 0, \\ L_x G^r(x,\xi) &= a_2(x)(\partial^2 G^l/\partial x^2)(x,\xi) + \ldots, \\ &= 0, \end{aligned}$$

aber

4.

$$(\partial G^r/\partial x)(x,x) - (\partial G^l/\partial x)(x,x) = 1/a_2(x),\ x \in [a,b].$$

Dann gilt

Satz 28.4: *Sei L wie eben eingeführt, also mit x-abhängigem Koeffizienten a_2 vor d^2/dx^2. Sei G eine Greensche Funktion zu L. Dann ist für jedes stetige $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi$$

2-Mal stetig differenzierbar und erfüllt

$$(Lu)(x) = \rho(x),\ x \in [a,b].$$

Wenn η_1, η_2 ein Fundamentalsystem von $Ly = 0$ bilden, gewinnt man alle Greenschen Funktionen wie in Satz 28.3. Dabei ist zu beachten, daß man statt (1,2) jetzt

(3)
$$(r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 = 0$$

(4)
$$(r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' = 1/a_2$$

fordern muß.

Beweis: Wie Sätze 28.3, 3. Der variable Koeffizient a_2 vor d^2/dx^2 drückt sich also nur in der veränderten Sprungrelation von $\partial G/\partial x$ aus. $\square$

§29. Randwertprobleme

Wir geben zunächst einige **Beispiele:**

1. Sei $Ly = y'' + y$ in $[a, b]$. Wir suchen eine Lösung y von $Ly = 0$ mit $y(a) = y(b) = 0$. Sei $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$. Die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ ist

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x,\ c_1, c_2 = \text{ Konstanten.}$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $c_1 = 0$. Aus $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ folgt $c_2 = 0$. Die einzige Lösung des obigen Randwertproblems ist also die triviale Lösung $y \equiv 0$.

2. Sei L wie in Beispiel 1., aber statt $[0, \frac{\pi}{2}]$ wählen wir jetzt $[0, 2\pi]$. Die Randbedingungen sind wieder $y(0) = y(2\pi) = 0$. Dann folgt $c_1 = 0$, $c_2 =$ beliebig. Wir haben also die unendlich vielen Lösungen $y(x) = c \cdot \sin x$, $c \in \mathbb{R}$. Wir haben in Wahrheit die Frage untersucht, ob -1 Eigenwert von $L_0 = d^2/dx^2$ unter Randbedingungen 0 ist, d.h., ob es ein $y \not\equiv 0$ gibt mit

$$L_0 y = (-1)y,$$
$$y(a) = y(b) = 0.$$

Die Antwort hängt offenbar von der Grundmenge $[a, b]$ ab.

Wir befassen uns zunächst mit der Frage, wann $Lu = \rho$ unter Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ lösbar ist. Hierzu gilt

Satz 29.1: *Sei*

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

mit stetigen Funktionen

$$a_2, a_1, a_0 : [a, b] \to \mathbb{R},\ a_2 > 0 \text{ in } [a, b].$$

Wenn das homogene Randwertproblem

$$Ly = 0,\ y(a) = y(b) = 0$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$ besitzt, dann existiert eine Greensche Funktion G von L mit

$$G(a, \xi) = 0 = G(b, \xi),\ \xi \in [a, b].$$

Für jedes stetige $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ hat

$$Lu = \rho,\ u(a) = 0 = u(b)$$

genau eine 2-Mal stetig differenzierbare Lösung, nämlich

$$u : [a,b] \to \mathbb{R},$$

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi.$$

Beweis: Wir haben alle Greenschen Funktionen in Satz 28.4 konstruiert. Es genügt, eine zu finden mit $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0,\ \xi \in [a,b]$. Dann ist $u(a) = u(b) = 0$. Die Eindeutigkeit von u folgt aus unserer Annahme.

Seien η_1, η_2 Lösungen von $Ly = 0$ mit

$$\begin{aligned} \eta_1(a) &= 0, \quad & \eta_1'(a) &= 1, \\ \eta_2(b) &= 0, \quad & \eta_2'(b) &= 1. \end{aligned}$$

Dann sind η_1, η_2 linear unabhängig. Wäre etwa $\eta_1 = c\eta_2$, so wäre $\eta_1(b) = 0$. Nach Annahme ist dann $\eta_1 \equiv 0$, im Widerspruch zu $\eta_1'(a) = 1$. η_1, η_2 bilden also ein Fundamentalsystem von $Ly = 0$, und die Wronski-Determinante

$$W = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \\ \eta_1' & \eta_2' \end{vmatrix}$$

ist immer $\neq 0$ in $[a,b]$. Zur Konstruktion der Greenschen Funktion benutzen wir den Ansatz (3,4) in Satz 28.4. Sei

$$\begin{gathered} r_1 = 0,\ r_2 = \eta_1/N, \\ l_1 = \frac{\eta_2}{N},\ l_2 = 0 \end{gathered}$$

mit einem zunächst unbekannten Nenner N. Dann ist

$$(r_1 - l_1)\eta_1 + (r_2 - l_2)\eta_2 = -\frac{\eta_2}{N}\eta_1 + \frac{\eta_1}{N}\eta_2 = 0,$$

$$(r_1 - l_1)\eta_1' + (r_2 - l_2)\eta_2' = -\frac{\eta_2}{N}\eta_1' + \frac{\eta_1}{N}\eta_2' = \frac{W}{N}.$$

Mit $N = a_2 W$ erfüllen wir also (3,4 in §28) und nach Satz 28.3 ist

$$(1) \quad G(x,\xi) = \begin{cases} G^r(x,\xi) &= \frac{\eta_1(\xi)\eta_2(x)}{a_2(\xi)W(\xi)}, \quad x \geq \xi, \\ \\ G^l(x,\xi) &= \frac{\eta_2(\xi)\eta_1(x)}{a_2(\xi)W(\xi)}, \quad \xi \geq x. \end{cases}$$

Nach Konstruktion haben wir $G(a,\xi) = G(b,\xi) = 0$, $\xi \in [a,b]$. □

Wir bringen für die Konstruktion einer Greenschen Funktion unter Randbedingungen ein **Beispiel:** Sei

$$Ly = y'' + y \text{ in } [0, \frac{\pi}{2}].$$

Vergleiche Beispiel 1 zu Beginn dieses Paragraphen zur Eindeutigkeit von $Ly = 0$, $y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$\eta_1(x) = \sin x, \quad \eta_1(0) = 0, \quad \eta_1'(0) = 1,$$
$$\eta_2(x) = -\cos x, \quad \eta_2(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad \eta_2'(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Wegen

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \sin\xi & -\cos\xi \\ \\ \cos\xi & \sin\xi \end{vmatrix} = 1$$

können wir η_1, η_2 für die Konstruktion der Greenschen Funktion gemäß dem Beweis von Satz 29.1 verwenden. Es folgt

$$G(x,\xi) \begin{cases} = \ G^r(x,\xi) &= -\sin\xi\cos x, \quad x \geq \xi, \\ \\ = \ G^l(x,\xi) &= -\cos\xi\sin x, \quad \xi \geq x. \end{cases}$$

Man erkennt, daß $G(x,\xi) = G(\xi,x)$ ist. Dies liegt daran, daß L selbstadjungiert ist. Wir kommen später darauf zurück.

Wir gehen noch kurz auf **allgemeinere Randbedingungen** ein. L sei wie vorher. Es seien c_1, c_2, d_1, d_2 reelle Konstanten mit

$$\begin{aligned} (c_1, c_2) &\neq (0,0) \\ (d_1, d_2) &\neq (0,0) \end{aligned}$$

Wir wollen $Lu = \rho$ lösen unter den Randbedingungen

$$(2) \qquad c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0$$

$$(3) \qquad d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0.$$

$Lu = 0$ habe unter den Randbedingungen (2,3) nur die Lösung $u \equiv 0$. Dann finden wir Lösungen η_1, η_2 von $Ly = 0$ mit

$$\begin{aligned} c_1\eta_1(a) + c_2\eta_1'(a) &= 0, \\ d_1\eta_2(b) + d_2\eta_2'(b) &= 0, \end{aligned}$$

die ein Fundamentalsystem bilden. G bilden wir gemäß (1, Beweis Satz 29.1). Dann ist

$$c_1 G(a,\xi) + c_2(\partial G/\partial x)(a,\xi) = 0 \tag{4}$$

$$d_1 G(b,\xi) + d_2(\partial G/\partial x)(b,\xi) = 0 \tag{5}$$

und

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi$$

löst **1.** $Lu = \rho$ und erfüllt **2.** die Randbedingungen

$$\begin{aligned} c_1u(a) + c_2u'(a) &= 0, \\ d_1u(b) + d_2u'(b) &= 0 \end{aligned}$$

Zusammenfassung: Seien $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $d_1^2 + d_2^2 > 0$.

$$\mathcal{D}_L : [a,b] \to \mathbb{R} = \{u | u : [a,b] \to \mathbb{R}\, \text{2-Mal stetig differenzierbar in } [a,b],$$
$$c_1u(a) + c_2u'(a) = 0,\ d_1u(b) + d_2u'(b) = 0\}$$

$$C^0([a,b]) = \{\rho | \rho : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}.$$

Dann ist offenbar $L : \mathcal{D}_L \to C^0([a,b])$. Dies ist trivial. Weniger trivial ist das folgende Resultat, das wir bewiesen haben: Wenn

$$L : \mathcal{D}_L \to C^0([a,b])$$

injektiv ist, so ist L surjektiv. In diesem Fall besitzt L eine überall in $C^0([a,b])$ erklärte Inverse $L^{-1} = G$ mit

$$(G\rho)(x) = \int_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)d\xi,$$

$G =$ Greensche Funktion zu L mit (4,5),

$$\begin{aligned} L \circ G &= id : C^0([a,b]) \to C^0([a,b]), \\ G \circ L &= id : \mathcal{D}_L \to \mathcal{D}_L. \end{aligned}$$

§30. Selbstadjungierte Differentialoperatoren

Sei $L = a_2\frac{d^2}{dx^2} + a_1\frac{d}{dx} + a_0$ ein Differentialoperator mit Grundmenge $[a,b]$. Sei $a_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbar, $a_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ 2-Mal stetig differenzierbar. Nach Beispiel 3 nach Definition 25.3 können wir auch hier die Adjungierte L^* bilden und erhalten

$$L^* = a_2\frac{d^2}{dx^2} + (2a_2' - a_1)\frac{d}{dx} + (a_2'' - a_1' + a_0).$$

Wir werden daher sagen, L sei selbst adjungiert, wenn $a_2' = a_1$, d.h. $2a_2' = 2a_1$ und $a_2'' - a_1' = 0$ ist. Ein einfaches Beispiel ist

$$\begin{aligned} L &= \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) + q, \\ & p : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}, \\ & q : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}. \end{aligned}$$

Dann ist nämlich $a_2 = p$, $a_1 = p' = a_2'$.

Definition 30.1: *Sei $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, sei $p(x) > 0$, $x \in [a,b]$. Sei $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $d_1^2 + d_2^2 > 0$. Dann heißt*

$$L = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}) + q,$$

betrachtet auf Funktionen u mit

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{D}_L &= \{v | v \text{ 2-mal stetig differenzierbar in } [a,b], \\ & c_1 v(a) + c_2 v'(a) = 0, \\ & d_1 v(b) + d_2 v'(b) = 0\} \end{aligned}$$

Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$.

Für Sturm-Liouville-Operatoren gilt

Satz 30.1: *Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. Im reellen Hilbert-Raum $L_2(]a,b[)$ mit Skalarprodukt*

$$(f,g) = \int_a^b fg\,dx$$

gilt

$$(1) \qquad (Lv, u) = (v, Lu), \ u, v \in \mathcal{D}_L.$$

Beweis: Achtung: (1) ist nicht selbstverständlich, da keins der Elemente u, v seinen Träger in $]a, b[$ zu haben braucht. Es müssen also Randterme ausgewertet werden. Wir haben

$$\begin{aligned}
vLu - uLv &= v((pu')' + qu) - u((pv')' + qv), \\
&= v(pu')' - u(pv')',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(v(pu)' - u(pv)') &= \frac{d}{dx}(vpu' - upv'), \\
&= v(pu')' - u(pv')', \\
&= v((pu') + qu) - u((pv')' + qv), \\
&= vLu - uLv = v \cdot Lu - Lv \cdot u.
\end{aligned}$$

Integration über [a,b] liefert

$$\begin{aligned}
\int_a^b (vLu - Lvu)dx &= [v(pu)' - u(pv)']_a^b \\
&= [p(vu' - uv')]_a^b.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
c_1u(a) + c_2u'(a) &= 0, \\
c_1v(a) + c_2v'(a) &= 0,
\end{aligned}$$

$(c_1, c_2) \neq 0$, ist die Determinante dieses Gleichungssystems in den Größen c_1, c_2 gerade 0. Ihr Wert ist $-(vu' - uv')(a)$. Entsprechendes gilt in b. Also ist

$$\int_a^b vLu = \int_a^b Lv \cdot udx.$$

$\square$

Satz 30.1 zieht die Symmetrie der Greenschen Funktionen nach sich. Hierzu gilt:

Satz 30.2: *Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. $Lu = 0$ habe* *in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Sei G eine Greensche Funktion zu L wie am Ende von §29. Dann gilt*

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \text{ in } [a, b] \times [a, b].$$

Beweis: Seien $\rho_\nu : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, seien $u_\nu \in \mathcal{D}_L$ mit

$$Lu_\nu = \rho_\nu, \ \nu = 1, 2.$$

Nach Satz 30.1 ist

$$\begin{aligned} (Lu_1, u_2) &= (u_1, Lu_2), \text{ also} \\ (\rho_1, u_2) &= (u_1, \rho_2), \end{aligned}$$

$$\int_a^b \rho_1(x) \int_a^b G(x, \xi)\rho_2(\xi) d\xi dx = \int_a^b \rho_2(x) \int_a^b G(x, \xi)\rho_1(\xi) d\xi dx,$$

$$\begin{gathered} \textstyle\int_a^b (\int_a^b G(x, \xi)\rho_1(x)\rho_2(\xi) d\xi) dx = \\ = \textstyle\int_a^b (\int_a^b G(x, \xi)\rho_2(x)\rho_1(\xi) dx) d\xi, \\ = \textstyle\int_a^b (\int_a^b G(\xi, x)\rho_2(\xi)\rho_1(x) d\xi) dx, \\ \textstyle\int_a^b (\int_a^b (G(x, \xi) - G(\xi, x))\rho_1(x)\rho_2(\xi) d\xi) dx = 0 = \\ = \textstyle\int_Q (G(x, \xi) - G(\xi, x))\rho_1(x)\rho_2(\xi) d\xi dx. \end{gathered}$$

Man nimmt nun an: $G(x, \xi) - G(\xi, x) \neq 0$ in $(x, \xi) = (x_0, \xi_0)$. O. E. sei $(x_0, \xi_0) \in]a, b[\times]a, b[$. Dann ist etwa

$$G(x, \xi) - G(\xi, x) > 0 \text{ in } K_\varepsilon((x_0, \xi_0)) \cap Q, \ Q = [a, b] \times [a, b]$$

Sind $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, $\rho_1(x)\rho_2(\xi) > 0$ in $K_{\varepsilon/4}((x_0, \xi_0)) \cap Q$, $Tr\rho_1\rho_2 \subset K_\varepsilon((x_0, \xi_0))$, so folgt

$$0 < \int_Q (G(x, \xi) - G(\xi, x))\rho_1(x)\rho_2(\xi) d\xi dx,$$

und dies ist ein Widerspruch. □

Ein Argument, ähnlich dem im Beweis von Satz 30.2 verwendeten, zeigt
Satz 30.3: *Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. $Lu = 0$ habe in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Dann gibt es genau eine Greensche Funktion zu L wie am Ende von §29.*

Beweis: Sei $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Seien G_1, G_2 zwei Greensche Funktionen zu L. Sei

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int_a^b G_1(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \\ u_2(x) &= \int_a^b G_2(x,\xi)\rho(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

also $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_L$, $Lu_1 = \rho$, $Lu_2 = \rho$. Nach Annahme ist $u_1 \equiv u_2$, also

$$\int_a^b (G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi))\rho(\xi)d\xi = 0,\ x \in [a,b],\ \rho \in C^0([a,b]).$$

Ein Argument, ähnlich dem im Beweis von Satz 30.2 verwendeten zeigt $G_1 \equiv G_2$. □

Beispiele:

1. $Ly = y''$ in $[0,1]$, $y(0) = y(1) = 0$. $Lu = 0$ hat in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Die allgemeine Lösung von $y'' = 0$ ist

$$\eta(x) = c_1 x + c_0.$$

Sei

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= x, &\quad \eta_2(x) &= x - 1 \\ \eta_1'(x) &= 1, &\quad \eta_2'(x) &= 1 \end{aligned}$$

(vgl. Beweis Satz 29.1). Dann ist

$$W(x) = 1,$$

also nach (1, Beweis Satz 29.1)

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G^l(x,\xi) &= (\xi - 1)x, \xi \geq x, \\ & \\ G^r(x,\xi) &= \xi \cdot (x-1),\ x \geq \xi \end{cases}$$

Für stetiges $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist die Lösung von $u'' = \rho$ mit $u(0) = 0 = u(1)$ also gegeben durch

$$u(x) = (x-1) \cdot \int_0^x \xi\rho(\xi)d\xi + x\int_x^1 (\xi - 1)\rho(\xi)d\xi.$$

Für $\rho(x) = \sin x$ erhält man z.B.

$$u(x) = (x-1) \cdot \int_0^x \xi \cdot \sin\xi d\xi + x \cdot \int_x^1 (\xi - 1)\sin\xi d\xi,$$

$$= (x-1)\cdot[-\xi\cos\xi+\sin\xi]_0^x + x[-\xi\cos\xi+\sin\xi]_x^1 - x[-\cos\xi]_x^1,$$

$$= (-1)\cdot[-\xi\cos\xi+\sin\xi]_0^x + x[-\cos 1+\sin 1] + x\cos 1 - x\cos x,$$

$$= -\sin x + x\sin 1.$$

2. $Ly = y''$ in $[0,1]$ mit $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$. $Lu = 0$ hat in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Ein Fundamentalsystem wie in §29, Ende (allgemeinere Randbedingungen) ist gegeben durch $\eta_1(x) = x$, $\eta_2(x) = 1$. Dann ist

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

und

$$G(x,\xi) = \begin{cases} G^l(x,\xi) &= -x, \quad \xi \geq x, \\ G^r(x,\xi) &= -\xi, \quad x \geq \xi. \end{cases}$$

§31. Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben

Sei wieder $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $p > 0$ in $[a,b]$. Seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1^2 + c_2^2 > 0$, $d_1^2 + d_2^2 > 0$. Wir betrachten einen Sturm-Liouville-Operator

$$\begin{aligned} Lu &= (pu')' + qu \text{ in} \\ \mathcal{D}_L &= \{u | u : [a,b] \to \mathbb{R} \\ &\quad \text{2-Mal stetig differenzierbar,} \\ &\quad c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0 \\ &\quad d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0\}. \end{aligned}$$

Das Problem

$$(1) \qquad Lu + \lambda u = 0,\ u \in \mathcal{D}_L$$

heißt Sturm-Lionvillesche Eigenwertaufgabe. λ heißt Eigenwert zu $-L$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$), wenn es ein $u \in \mathcal{D}_L$, $u \not\equiv 0$, gibt, das (1) erfüllt. u heißt dann Eigenfunktion von $-L$ zum Eigenwert λ.

Lemma 31.1: *Seien u_1, u_2 Eigenfunktionen von L zu Eigenwerten λ_1, λ_2 mit*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2$$

Dann sind u_1, u_2 orthogonal im reellen Hilbertraum $L_2(]a,b[)$, d.h.

$$(u_1, u_2) = \int_a^b u_1 u_2 dx = 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (Lu_1, u_2) &= \lambda_1 (u_1, u_2), \\ (u_1, Lu_2) &= \lambda_2 (u_1, u_2), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) &= 0, \\ (u_1, u_2) &= 0. \end{aligned}$$

□

Satz 31.1: *Sei L S-L-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_L$. 0 sei kein Eigenwert, d.h. $Lu = 0$ habe in $\mathcal{D}_L$ nur die Lösung $u \equiv 0$. u ist dann und nur dann Eigenfunktion von $-L$ zum Eigenwert λ, wenn mit G als Greenscher Funktion gilt:*

$$\frac{1}{\lambda}u(x) + \int_a^b G(x,\xi)u(\xi)d\xi = 0,\ x \in [a,b],$$

d.h.

$$u(x) + \lambda \int_a^b G(x,\xi)u(\xi)d\xi = 0,\ x \in [a,b].$$

Hinweis: u genügt also einer Integralgleichung von genau der Art wie sie zu Beginn dieses Kapitels in §18 (vor den Beispielen) erwähnt wurde.

Beweis des Satzes 31.1: Wir beziehen uns auf die Zusammenfassung am Ende von §29. Auf

$$Lu + \lambda u = 0,\ u \in \mathcal{D}_L,$$

wenden wir die Inverse $L^{-1} = G$ an. Dann folgt

$$u + \lambda G u = 0.$$

Umgekehrt folgt aus

$$w + \lambda G w = 0,$$

w stetig, daß $w \in \mathcal{D}_L$ ist und

$$Lw + \lambda w = 0$$

□

Aus der Umformung der S-L-Eigenwertaufgabe in das Eigenwertproblem für eine Integralgleichung folgt, wie im nächsten Semester gezeigt werden soll.

Satz 31.2:

1. *Sei λ Eigenwert zu $-L$. Dann bilden die Eigenfunktionen zu λ einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathcal{D}_L$. Seine Dimension e_λ heißt die (geometrische) Vielfachheit von λ.*

2. *Die Eigenwerte von $-L$ bilden eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, die sich in der Form*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$$

anordnen läßt. Wir denken uns jeden Eigenwert so oft angeführt wie seine endliche Vielfachheit e_λ angibt. Dann gilt:

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = +\infty.$$

Zu den Eigenwerten λ_i gibt es in $L_2(]a,b[)$ ein VONS $\varphi_i \in \mathcal{D}_L$ von Eigenfunktionen. Jedes beliebige $f \in L_2(]a,b[)$ erlaubt also eine Fourierentwicklung

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n \tag{1}$$

nach den Eigenfunktionen von L. Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nimmt f die Randbedingungen

$$\begin{aligned} c_1 f(a) + c_2 f'(a) &= 0 \\ d_1 f(b) + d_2 f'(b) &= 0 \end{aligned}$$

aus $\mathcal{D}_L$ an, so konvergiert die Reihe in (1) gleichmäßig in $[a,b]$.

Hinweise:

1. Teil 1 gilt auch, falls $\lambda = 0$ Eigenwert ist: $\sigma(-L)$ ist wegen $\int_a^b -Luudx = \int_a^b pu'^2dx + \int_a^b qu^2dx$ nach unten beschränkt. $-Lu + \gamma u$ hat also nur positive Eigenwerte μ endlicher Vielfachheit. $\mu - \gamma$ sind die Eigenwerte von L.

2. Zu Teil 2.: Nach 1. gilt die Aussage auch dann, wenn $k = 0$ Eigenwert ist.

Beispiel: Wir betrachten eine schwingende elastische Saite der Länge l. Der Elastizitätsmodul der Saite sei $p(x) > 0$, $x \in [0,l]$. Die Massendichte $r(x)$ sei $r \equiv 1$. Für die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite an der Stelle x zur Zeit t gilt die partielle Differentialgleichung ($x \in [0,l],\ t \geq 0$).

$$\begin{aligned} \partial(p(x)(\partial u)(x,t))|\partial x &= (\partial^2 u/\partial t^2)(x,t), \\ (p(x)u_x(x,t))_x &= u_{tt}(x,t) \end{aligned}$$

(Schwingungsgleichung). Die Saite sei an ihren Endpunkten fest eingespannt, d.h.

$$(3) \qquad u(0,t) = u(l,t) = 0, \ t \geq 0.$$

Die Anfangsposition der Saite und die Anfangsgeschwindigkeit der Auslenkung seien vorgeschrieben:

$$(4) \qquad \begin{cases} u(x,0) &= f(x), \\ u_t(x,0) &= g(x), \ x \in [0,l], \\ f(0) &= g(0) = 0 = f(l) = g(l). \end{cases}$$

als Ansatz wählen wir wieder den Separationsansatz

$$u(x,t) = v(x) \cdot w(t) \text{ mit}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot = \ {}' \ , \ \frac{\partial}{\partial t}\cdot = \ \dot{}$$

Dann folgt mit $Lv = \frac{d}{dx}(p\frac{d}{dx}v)$

$$wLv = v\ddot{w}$$

$$(5) \qquad \frac{Lv}{v} = \frac{\ddot{w}}{w} =: -\lambda = \text{ Konstant.}$$

v soll die Randbedingungen (3) realisieren. Wir wählen also in

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L \ = \ & \{u | u : [0,l] \to \mathbb{R} \\ & \text{2-Mal stetig differenzierbar,} \\ & c_1 u(0) + c_2 u'(0) = 0, d_1 u(l) + d_2 u'(l) = 0\} \end{aligned}$$

für c_1, c_2, d_1, d_2 die Werte $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ und verlangen $v \in \mathcal{D}_L$. Aus $v \in \mathcal{D}_L$, $Lv/v = -\lambda$ folgt

$$-Lv = \lambda v, \ \lambda \text{ ist Eigenwert zu } -L,$$

$$\int_0^l pv'^2 dx = \lambda \int_0^l v^2 dx, \ \lambda > 0.$$

Insbesondere gilt: Die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ zu $-L$ sind also alle positiv. Aus (5) folgt dann für w:

$$w_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda}_n t + B_n \sin \sqrt{\lambda}_n t, \ A_n, B_n \text{ konstant,}$$

und mit v_n = Eigenfunktion von L zum Eigenwert λ_n gewinnen wir eine partikuläre Lösung

$$v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t)$$

von (2), die bereits die Randbedingungen (3) realisiert. Die $v_1, v_2, \ldots$ mögen ein VONS wie in Satz 31.2 bilden. Bei genügender Konvergenz wird man also die allgemeine Lösung von (2) mit den Randbedingungen (3) in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t) \tag{6}$$

gewinnen. Wegen $v_n \in \mathcal{D}_L$ realisiert u also die Randbedingungen (3). Wir müssen uns nun noch um die Anfangsbedingungen (4) kümmern. Die Fourierentwicklungen von f und g lauten

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n,\ a_n = (f, v_n), \tag{7}$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n,\ b_n = (g, v_n) \tag{8}$$

Koeffizientenvergleich mit (6) für $t = 0$ liefert $A_n = a_n$, Koeffizientenvergleich mit der nach t differenzierten Reihe (6), das ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(-A_n\sqrt{\lambda_n} \cdot \sin\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}t),$$

liefert für $t = 0$ $B_n = \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}}$. Mit den Fourierkoeffizienten a_n, b_n aus (7,8) folgt als Lösung des Problems (2,3,4) gerade

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)(a_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + \frac{b_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n}t)$$

Die Randbedingungen (3) heißen „fest-fest“. Ist z.B. ein Ende fest (etwa $x = 0$), das andere Ende frei und schreibt man $u'(l,t) = 0$ vor, so läßt sich dieses Problem ebenso behandeln, indem man in $\mathcal{D}(L)$ $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ setzt. Diese Randbedingung heißt „fest-frei“.

§32. Die Legendresche Differentialgleichung

Die Legendresche Differentialgleichung lautet

$$(1) \qquad ((1-x^2)y')' + \lambda y = 0$$

oder in ausdifferenzierter Form

$$(2) \qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

über dem Intervall $[-1,+1]$. Also ist $Ly = ((1-x^2)y')'$ mit $p(x) = 1-x^2$ und λ als Eigenwertparameter. Da p in $x = \pm 1$ verschwindet (sonst ist $p > 0$) ist die Theorie aus §31 nicht mehr anwendbar. Man wird also keine Lösungen mit vorgeschriebenen Randbedingungen mehr erwarten können. Wir suchen statt dessen Lösungen, die in ± 1 definiert, z.B. in $[-1,+1]$ stetig differenzierbar sind. Dazu wählen wir einen Potenzreihenansatz

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

also

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2}, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n, \\ 2xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) n a_n x^n. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda a_n = 0,$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = [n(n-1) + 2n - \lambda]a_n,$$

$$(3) \qquad a_{n+2} = \frac{(n+1)n - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

Es bleiben also zwei Koeffizienten frei wählbar, nämlich

$$a_0 \Rightarrow \text{ alle Koeffizienten } a_{2k},\ k \in \mathbb{N},$$

$$a_1 \Rightarrow \text{ alle Koeffizienten } a_{2k+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Man kann nun zeigen: die Reihe

$$(4) \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

divergiert im allgemeinen bei $x = \pm 1$, es sei denn, sie bricht nach endlich vielen Gliedern ab. Siehe hierzu: Flügge, Rechenmethoden der Quantenmechanik, Heidelberger Taschenbücher, Band 6, S. 87.
Die Reihe bricht ab, wenn für ein $m \in \mathbb{N}_0$

$$\lambda = \lambda_m = m(m+1) \text{ und eine der Größen } a_0, a_1 = 0 \text{ ist.}$$

Genauer gilt:

I. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ gerade, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$,
$\lambda = \lambda_m = m(m+1)$
$\Rightarrow$ Die Reihe (4) enthält nur gerade Potenzen von x (d.h. $a_{2k+1} = 0,\ k \in \mathbb{N}$) und bricht nach der m-ten Potenz von x ab.

II. Sei $m \in \mathbb{N}_0$ ungerade, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,
$\lambda = \lambda_m = m(m+1)$
$\Rightarrow$ Die Reihe (4) enthält nur ungerade Potenzen von x (d.h. $a_{2k} = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$) und bricht nach der m-ten Potenz von x ab.

Die sich dabei ergebenden Lösungen p_m der Legendreschen Differentialgleichung lauten:

m	a_0	a_1	p_m	λ_m
0	1	0	$p_0(x) = 1$	0
1	0	1	$p_1(x) = x$	2
2	1	0	$p_2(x) = 1 - 3x^2$	6
3	0	1	$p_3(x) = x - \frac{5}{3}x^3$	12
4	1	0	$p_4(x) = 1 - 10x^2 + \frac{35}{4}x^4$	20
5	0	1	$p_5(x) = x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$	30

kurze Rechnung

$$
\begin{array}{llllll}
m = 2, \quad \lambda_m = 6 & \Rightarrow & a_2 & = \frac{0\cdot 1 - 6}{1\cdot 2} a_0 & = & -3, \\
m = 3, \quad \lambda_m = 12 & \Rightarrow & a_3 & = \frac{1\cdot 2 - 12}{2\cdot 3} a_0 & = & -\frac{10}{6} \quad = -\frac{5}{3}, \\
m = 4, \quad \lambda_m = 20 & \Rightarrow & a_2 & = \frac{0\cdot 1 - 20}{1\cdot 2} a_0 & = & -10, \\
 & & a_4 & = \frac{2\cdot 3 - 20}{4\cdot 3}(-10), & & \\
 & & & = \frac{-7}{6}(-10) & = & \frac{35}{3}.
\end{array}
$$

Mit p_m ist auch $c \cdot p_m$ Lösung der Legendreschen Differentialgleichung, da diese homogen ist ($c =$ konstant). Diese Eigenschaft nutzt man zur Normierung von p_m aus. Man normiert auf verschiedene Weisen:

1. $P_m = c_{1m} \cdot p_m$. c_{1m} wird so gewählt, daß $P_m(1) = 1$ wird.

2. $L_m = c_{2m} \cdot p_m$. c_{2m} wird so gewählt, daß

$$||L_m||_{L_2((-1,1))} = 1 \text{ wird, d.h. } \int_{-1}^{+1} L_m^2 dx = 1.$$

3. $Q_m = c_{3m} \cdot p_m$. c_{3m} wird so gewählt, daß der führende Koeffizient im Polynom Q_m gerade 1 ist, d.h. $Q_m = x^m + \ldots$.

4. Die bereits eingeführte Normierung $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oder $a_0 = 1$, $a_1 = 0$:

$$p_m(x) = \begin{cases} 1 \quad + \quad \text{höhere Ordnung, } m \text{ gerade} \\ \\ x \quad + \quad \text{höhere Ordnung, } m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Um die Normierung nach **1.** vorzunehmen, muß man wissen, daß $p_m(1) \neq 0$ ist. Wäre $p_m(1) = 0$, so folgte aus (2):

$$-2p_m'(1) + \lambda p_m(1) = 0,$$
$$p_m'(1) = 0.$$

Mit (1) ergibt sich durch Integration

$$(1 - x^2)p_m'(x) = -\lambda \int_x^1 p_m(t) dt$$

$$
\begin{aligned}
|p'_m(x)| &\leq \frac{\lambda_m}{(1-x)(1+x)} \int_x^1 |p_m(t) - p_m(1)| dt \\
&\leq \frac{\lambda_m \sup\limits_{x \leq t \leq 1} |p'_m(t)|}{(1-x)(1+x)} \int_x^1 (1-t) dt \\
&= \frac{\lambda_m \sup\limits_{x \leq t \leq 1} |p'_m(t)|}{(1-x)(1+x)} (\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x) \\
&= \frac{\lambda_m \sup\limits_{x \leq t \leq 1} |p'_m(t)|}{(1-x)(1+x)} \frac{1}{2} (1-x)^2, \ m \geq 1, \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{x \leq t \leq 1} |p'_m(t)|, \ 1 - \frac{1}{\lambda_m} \leq x \leq 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p'_m(x) = 0, &\quad 1 - \frac{1}{\lambda_m} \leq x \leq 1, \\
p_m(x) = 0, &\quad 1 - \frac{1}{\lambda_m} \leq x \leq 1.
\end{aligned}
$$

Ein Polynom in x, das auf einem Intervall positiver Länge identisch verschwindet, verschwindet überhaupt identisch, d.h. alle Koeffizienten sind 0, Widerspruch zu $(a_0, a_1) \neq (0, 0)$ Bei der **Normierung 1** ergeben sich die P_m wie folgt:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1, \\
P_1 &= x, \\
P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\
P_3 &= \frac{1}{2}(5x - 3x), \\
P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\
P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).
\end{aligned}
$$

Zur **Normierung 2:** Man rechnet aus, daß

$$
||P_m||^2_{L_2(]-1,1[)} = \int_{-1}^{+1} P_m^2 dx = \frac{1}{m + \frac{1}{2}}
$$

ist. Daher ist

$$(5) \qquad L_m = \sqrt{m + \frac{1}{2}} \cdot Pm.$$

Lemma 32.1: *Der Differentialoperator*

$$L, Ly = ((1 - x^2)y')'$$

ist selbstadjungiert im folgenden Sinn: Sind $f, g : [-1, +1] \to \mathbb{R}$ *2-Mal stetig differenzierbar (ohne bestimmte Randwerte), so ist*

$$\int_{-1}^{+1} Lfgdx = \int_{-1}^{+1} fLgdx.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} Lfgdx &= \int_{-1}^{+1} ((1 - x^2)f')'gdx, \\
&= [(1 - x^2)f'g]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f'(1 - x^2)g'dx, \\
&= - \int_{-1}^{+1} f'(1 - x^2)g'dx \\
&= -\{[f'(1 - x^2)g']_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} f((1 - x^2)g')'dx\}, \\
&= \int_{-1}^{+1} fLgdx.
\end{aligned}$$

□

Hieraus ergibt sich

Satz 32.1: *Die Polynome* L_m *sind orthonormiert in folgendem Sinn:*

$$(L_n, L_m)_{L^2(]-1,1[)} = \delta_{nm}, \ n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis: Die λ_m sind jetzt Eigenwerte zum in Lemma 32.1 eingeführten Operator L, der selbstadjungiert ist. Damit folgt die Orthogonalität von L_n und L_m, $n \neq m$, wie im Beweis von Lemma 31.1. Zur Normierung s. (5). □

Satz 32.2: *Sei* $< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$ *der von den Funktionen*

$$f_0, f_0(x) = 1, \ x \in [-1, +1],$$

$$\vdots$$

$$f_n, f_n(x) = x^n, \ x \in [-1, +1]$$

aufgespannte Unterverktorraum von $L_2(]-1,+1[)$. Dann ist $\pm L_0$, $\pm L_1, \ldots, \pm L_n$ eine Orthonormalbasis von $< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$.

Beweis: Da nach Satz 32.1 die $L_0, L_1, \ldots, L_n$ orthonormiert sind in $L_2(]-1,1[)$, so sind sie dort insbesondere linear unabhängig. Also ist

$$\dim < L_0, L_1, \ldots, L_n >= n+1.$$

Offenbar gilt

$$< L_0, L_1, \ldots, L_n > \subset < 1, x, \ldots, x_n >,$$
$$\dim < 1, x, \ldots, x^n > \leq n+1,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Hieraus entsteht
Satz 32.3: *Das n-te Legendre Polynom P_n, L_n oder Q_n hat in $[-1,+1]$ genau n einfache Nullstellen.*

Beweis: Wir brauchen den Beweis nur für P_n durchzuführen. Zu beweisen ist nur etwas für $n \in \mathbb{N}$. Zunächst betrachten wir die Nullstellen ungerader Ordnung von P_n in $[-1,+1]$. Dies sind diejenigen Nullstellen von P_n, in denen P_n sein Vorzeichen wechselt. Nach Satz 32.1 ist

$$0 = \int_{-1}^{+1} P_o P_n dx = \int_{-1}^{+1} P_n dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Daher hat P_n, $n \in \mathbb{N}$, wenigstens eine ungerade Nullstelle. Seien also $x_1, \ldots, x_k$ die ungeraden Nullstellen von P_n. Wegen $P(1) = 1$ sieht das ungefähr so aus:

Sei $h(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)$. Also ist

$$h(x) \cdot P_n(x) > 0 \text{ bis auf die endlich vielen Nullstellen von } P_n.$$

Insbesondere ist $\int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot h(x) dx > 0$. Ist $k \leq n-1$, so ist

$$h \in < 1, x, \ldots, x^{n-1} >=< P_0, P_1, \ldots P_{n-1} > .$$

Also ist $h \perp P_n$, d.h. $\int_{-1}^{+1} P_n(x) \cdot h(x) dx = 0$. Dies ist ein Widerspruch. □

Zum Abschluß lösen wir ein Variationsproblem:

Satz 32.4: *Sei $n \in \mathbb{N}$. Man finde das Minimum des Funktionals*

$$\int_{-1}^{+1} Q^2(x)dx = ||Q||^2_{L_2(]-1,1[)},$$

wobei Q alle normierten Polynome

$$Q(x) = x^n + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu x^\nu$$

durchläuft vom Grade n, $a_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0, \ldots, n-1$. Das Minimum von $||Q||^2_{L_2(]-1,+1[)}$ ist

$$\frac{2}{2n+1} \cdot \frac{2}{\binom{2n}{n}^2}$$

und wird für $Q = Q_n = n$-tes Legendre Polynom mit Normierung nach 3. angenommen.

Beweis: Nach Satz 32.2 ist zusammen mit der Normierung nach 3.

$$Q = Q_n + c_{n-1}Q_{n-1} + \ldots + c_0 Q_0$$

mit reellen Konstanten $c_{n-1}, \ldots, c_0$ und den Legendre Polynomen $Q_{n-1}, \ldots, Q_0$. Nach Satz 32.1 ist

$$\begin{aligned} ||Q||_{L_2(]-1,+1[)} &= ||Q_n||^2_{L_2]-1,+1[)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2 ||Q_\nu||^2_{L_2(]-1,+1[)}, \\ &\geq ||Q_n||^2_{L_2}(]-1,+1[). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Annahme des Minimums für $Q = Q_n$. Zur Formel für $||Q_n||^2_{L_2}(]-1,+1[)$ s. Abramowitz/Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, S. 773 - 775. $\square$