# Vorlesung „Mathematik für Physiker III “

## Kapitel 4
## Integralsätze

### §14. Orientierung von Untermannigfaltigkeiten

**Definition 14.1:** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. $M$ heißt orientierbar, wenn es eine Familie von Karten*

$$\varphi_i : T_i \to V_i := U_i \cap M,$$

*$i$ in einer Indexmenge $I$, $I$ abzählbar, gibt mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $M = \bigcup_{i \in I} V_i$,

(2) *Für je zwei Karten mit $V_i \cap V_j \neq 0$ gilt: Setzt man*

$$\psi_{ij} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i : \varphi_i^{-1}(V_i \cap V_j) \to \varphi_j^{-1}(V_i \cap V_j),$$

*so ist* $\det J_{\psi_{ij}} > 0$.

Im Bild sieht das so aus:

Wir nennen eine derartige Familie von Karten, die also $(1, 2)$ genügen, einen **orientierten (!) Atlas** der $k$-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^n$. Sei $A$ kompakt, $A \subset V_i \subset M$. Sei $\omega$ eine stetige $k$-Form in $U_i$. Dann ist vermöge der Definition 13.1 $\omega \circ \varphi_i$ eine stetige $k$-Form in $T_i \subset \mathbb{R}^k$. Nach Definition 13.2 können wir sie über jedes Kompaktum in $T_i$ integrieren, insbesondere über $\varphi_i^{-1}(A)$. Wir setzen

$$\int_A \omega := \int_{\varphi_i^{-1}(A)} \omega \circ \varphi_i.$$

Wenn $A$ auch die Menge $V_j$ anschneidet, so führt dies auf $A \cap (V_i \cap V_j)$ formal zu zwei verschiedenen Integraldefinitionen. Daß dies nicht so ist, zeigt

**Satz 14.1:** *Sei $M$ orientierbar mit orientiertem Atlas, $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, $B \subset V_i \cap V_j$, $B$ kompakt. Sei $\omega$ eine $k$-Form auf $U \supset U_i \cap U_j$ und stetig. Dann* *ist*

$$\int_B \omega = \int_{\varphi_i^{-1}(B)} \omega \circ \varphi_i, \\ = \int_{\varphi_j^{-1}(B)} \omega \circ \varphi_j.$$

**Beweis:** Nach Satz 13.2 ist

$$\int_{\varphi_i^{-1}(B)} \omega \circ \varphi_i = \int_{\varphi_j^{-1}(B)} (\omega \circ \varphi_j) \circ \psi_{ji} \\ = \int_{\varphi_j^{-1}(B)} \omega \circ \varphi_j.$$

□

Da wir i. f. nur über kompakte Teilmengen $A$ von $M$ integrieren wollen, setzen wir $M$ als kompakt und den Atlas $(T_i, \varphi_i, V_i)$ als endlich voraus (vgl. §7). Ziel: $B \subseteq M \Rightarrow$ Wir erklären $\int_B \omega$ unabhängig vom Atlas.

**Definition 14.2:** $M$ praekompakte $k-$dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $B \subseteq M$. $M$ besitze den Atlas $(T_i, \varphi_i, V_i)$, $i = 1, \ldots N$. Dann ist $\sum$ = disjunkte Vereinigg. $\bigcup_{i=1}^{0} = \emptyset$,

$$B = \bigcup_{j=1}^{N} V_j \cap B = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{(V_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \cap V_j)}_{=:\widetilde{V}_j \text{ pweise disjunkt und } \subset V_j} \cap B = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\widetilde{V}_j \cap B}_{\text{disjunkt}},$$

und wir setzen für $\omega \in \Omega^k(U)$, $U \supset \overline{M}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$\int_B \omega = \sum_{j=i}^{N} \int_{\varphi_j^{-1}(\widetilde{V}_j \cap B)} \omega \circ \varphi_j = \sum_{j=1}^{N} \int_{\widetilde{V}_j \cap B} \omega$$

**Definition 14.3:** *Sei $M$ praekompakte $k-$dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, es seien $(T_i^{(1)}, \varphi_i^{(1)}, V_i^{(1)})$, $1 \leq i \leq N^{(1)}$, $(T_j^{(2)}, \varphi_j^{(2)}, V_j^{(2)})$, $1 \leq j \leq N^{(2)}$ zwei orientierte Atlanten von $M$. Die Atlanten heißen gleich orientiert, wenn für $V_i^{(1)} \cap V_j^{(2)} \neq \emptyset$ die Abbildung $\psi_{ji} = \varphi_i^{(1)-1} \varphi_j^{(2)} : \varphi_j^{(2)-1}(V_j^{(2)} \cap V_i^{(1)}) \to \varphi_i^{(1)-1}(V_j^{(2)} \cap V_i^{(1)}$ positive Funktionaldeterminante hat.*

Für gleich orientierte Atlanten von $M$ erhalten wir dasselbe $\int_B \omega$ wie die folgende kurze Rechnung zeigt: Zu $V_i^{(1)}, V_j^{(2)}$ bilden wir $\widetilde{V_i^{(1)}}, \widetilde{V^{(2)}}$ wie oben.

Dann ist $B = \bigcup_{\substack{1\le i\le N^{(1)}\\ 1\le j\le N^{(2)}}} \widetilde{V_i^{(1)}} \cap \widetilde{V_j^{(2)}} \cap B$

$$\int_B \omega = \sum_{j=1}^{N^{(1)}} \int_{\widetilde{V_i^{(1)}}\cap B} \omega = \sum_{i=1}^{N^{(1)}} \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \int_{\widetilde{V_i^{(1)}}\cap \widetilde{V_j^{(2)}}\cap B} \omega$$

$$= \sum_{\substack{1\le i\le N^{(1)}\\ 1\le j\le N^{(2)\prime}}} \int_{\varphi_i^{(1)-1}(\widetilde{V_i^{(1)}}\cap\widetilde{V_j^{(2)}}\cap B)} \omega \circ \varphi_i^{(1)}$$

(Bew. Satz 14.1, $\det J_{\psi_{ji}} > 0$)

$$= \sum_{\substack{1\le i\le N^{(1)}\\ 1\le j\le N^{(2)\prime}}} \int_{\varphi_j^{(2)-1}(\widetilde{V_i^{(1)}}\cap\widetilde{V_j^{(2)}}\cap B)} w \circ \varphi_j^{(2)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N^{(2)}} \int_{\widetilde{V}_j^{(2)}\cap B} w$$

Wir wollen uns nun die Orientierung von $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten $M$ des $\mathbb{R}^n$ näher anschauen. Eine solche Untermannigfaltigkeit erlaubt lokal eine Darstellung

$$p \ni M \cap U = \{x | x \in U, f(x) = 0\}$$

mit $\mathit{gradf}(p) \neq 0$. $f$ darf von $U$ abhängen. Aus Stetigkeitsgründen können wir annehmen, daß sogar $\mathit{gradf} \neq 0$ in ganz $M \cap U$ gilt. $N_p(M)$ wurde von $\mathit{gradf}(p)$ aufgespannt.

$$\nu(p) = \frac{1}{|\mathit{gradf}(p)|}\mathit{gradf}(p)$$

ist Einheitsnormalenvektor.

**Definition 14.4:** *Eine stetige Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ mit $\nu(p) \in N_p(M)$ und $|\nu(p)| = 1$ für $p \in M$ heißt Einheitsnormalenfeld.*

**Satz 14.2:** *Sei $n \geq 2$, $M \subset \mathbb{R}^n$ eine praekompakte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, die ein Einheitsnormalenfeld besitzt. Dann ist $M$ orientierbar.*

**Beweis:** Die folgende Annahme ist keine Einschränkung: Wir haben einen endlichen Atlas

$$\varphi_j : T_j \to V_j,\ j = 1, \ldots, N,$$

$$M = \bigcup_{j=1}^{N} V_j,$$

der aber noch nicht orientiert zu sein braucht (Ford. (2) in Def. 14.1). O. E. seinen allen $T_j$ Kugeln um 0.

Zu $p \in M$ ex. Karte $\varphi : T \to V$ mit $p \in V \subset M$, $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und zusammenhängend. Weil dies für alle Punkte $p \in V$ eine Karte ist, ist

$$\det(\nu(\varphi(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)) \neq 0$$

für alle $t \in T$. Da $T$ zusammenhängend ist, ist wegen $\nu(\varphi(t))$ stetig $\det(\ldots) > 0$ in $T$ oder $\det(\ldots) < 0$ in $T$. Falls $\det(\ldots) < 0$ gehe man folgendermaßen vor: Es ist keine Einschränkung anzunehmen, daß $T$ eine hinreichend kleine Kugel $K_\rho(0)$ um den Nullpunkt vom Radius $\rho > 0$ ist. Nun ersetze man $t_{n-1}$ durch $-t_{n-1}$, d.h. $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ durch $\widetilde{t} = (t_1, \ldots, -t_{n-1})$. Dann ist auch

$$\widetilde{\varphi} : T = K_\rho(0) \to V$$

eine Karte mit $\widetilde{\varphi}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \varphi(t_1, \ldots, t_{n-2}, -t_{n-1})$. Jedoch haben wir

$$\begin{aligned} & \det(\nu(\widetilde{\varphi}(t)), \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial \widetilde{\varphi}}{\partial t_{n-1}}(t)) \\ = \; & \det(\nu(\varphi(\ldots, -t_{n-1})), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\ldots, -t_{n-1}), \ldots, -\frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(\ldots, -t_{n-1})) \\ = \; & -\det(\nu(\varphi(\ldots, -t_{n-1})), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\ldots, -t_{n-1}), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(\ldots, -t_{n-1}) > 0. \end{aligned}$$

Dies denkt man sich für jede Karte $\varphi_j : T_j \to V_j$ durchgeführt, falls nötig. Man kann nun zeigen: $M$ ist genau dann orientierbar, wenn die Basis

$$\nu(\varphi_j(t)), \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_{n-1}}(t)$$

des $\mathbb{R}^n$ stets den gleichen Schraubungssinn besitzt, d.h.

$$\det(\nu(\varphi_j(t)), \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_{n-1}}(t))$$

wechselt nie das Vorzeichen. Das heißt: Dann und nur dann ist der Atlas orientiert. Dies haben wir hier erreicht. $\square$

Wie findet man ein Einheitsnormalenfeld? Hierzu geben wir

**Definition 14.3:** *Sei $A$ kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Man sagt, $A$ hat* *einen glatten Rand $\partial A$, wenn es zu jedem $p \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion*

$$\psi : U \to \mathbb{R}$$

*gilt mit*

i) $grad\psi \neq 0$ in $U$,

ii) $A \cap U = \{x | x \in U,\ \psi(x) \leq 0\}$,

iii) $U \cap \partial A = \{x | x \in U, \psi(x) = 0\}$.

Es gibt dann genau ein Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ mit

$$p + \lambda\nu(p) \notin A \text{ für } 0 < \lambda < \epsilon.$$

$\nu(p)$ heißt die äußere Normale in $p \in \partial A$ an $A$. Insbesondere ist nach Satz 14.2 $\partial A$ orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$. Wir verlangen wieder $\det(\nu(p), \partial\varphi/\partial t_1, \ldots \partial\varphi/\partial t_{n-1}) > 0$. Man spricht auch von der durch die äußere Normale $\nu(p)$ gegebenen Orientierung. Für $\nu(p)$ gilt:

$$\nu(p) = \frac{grad\psi(p)}{|grad\psi(p)|},\ p \in U \cap \partial A.$$

**Beispiel:**
$S_{n-1} = \partial A$,
$A = \{x|\,|x| \leq 1\}$,
$\psi(x) = f(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$,
$\nabla\psi(x) = 2x$,
$\nu(p) = p$.

**Zusammenfassung:**

1. *Sei $M$ eine orientierbare $k$-dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, $B \subset M$, $\omega$ eine stetige $k$-Form in $U \supset M$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann ist*

$$\int_B \omega \text{ unabhänig vom orientierten Atlas erklärt}$$

2. *$A \subset \mathbb{R}^n$, $A$ kompakt, besitze glatten Rand $\partial A$. Dann ist $\partial A$ $(n-1)$ -dimensionale orientierbare kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Wir nehmen die durch die äußere Normale gegebene Orientierung.*

## §15. Der Stokes'sche Satz

Es gilt der wichtige

**Satz 15.1 (Stokes'scher Integralsatz)**: *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ stetig differenzierbar. Sei $A \subset U$, $A$ kompakt mit glattem Rand $\partial A$. $\partial A$ sei bezüglich der äußeren Normale orientiert. Dann ist*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

Spezialfälle und Beispiele:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n=1} & A = [a,b] \subset ]\widetilde{a},\widetilde{b}[ \subset \mathbb{R}, \omega = f \in \Omega^0(U),\ U = ]\widetilde{a},\widetilde{b}[, \\ & \begin{array}{lcl} \int_A d\omega & = & \int_A f' dx \\ & = & \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \\ \int_{\partial A} \omega : & = & f(b) - f(a) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{n=2} & A \subset U \subset \mathbb{R}^2 \\ & \omega = f dx + g dy \in \Omega^1(U) \\ & d\omega = (g_x - f_y) dx \wedge dy \\ & \displaystyle\int_A (g_x - f_y) dx \wedge dy = \\ & \displaystyle = \int_{\partial A} (f dx + g dy) \\ & \displaystyle = \int_a^b (f(x(t),y(t))\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\dot{y}(t))dt \end{array}$$

$\partial A$ ist eine einfach geschlossene Kurve $(x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, die in positivem Sinn durchlaufen wird mit $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq 0$. $A$ liegt also immer zur Linken. $\partial A - \left\{ p = \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(b) \\ y(b) \end{pmatrix} \right\}$ hat also nur eine einzige Karte, nicht aber $\partial A$. Als äußere Normale stehen zunächst

$$\frac{(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{1}{2}}}$$

in gleicher Weise zur Verfügung. Die Orientierung ist in der Forderung gegeben, daß $A$ zur Linken liegt und wählt den ersten Vektor als äußere Normale aus, weil dann die Basis $\{\nu(p), t\}$ positiven Schraubungssinn hat und $\nu(p)$ somit nach außen weist.

$p = p(t)$
$\underline{t} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$
$\det(\nu(p), \underline{t}) > 0$

Vgl. Satz 6.1, Ecken sind zugelassen.

Nehme $\binom{-g}{f}$ statt $\binom{f}{g}$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_A (f_x + g_y) dx \wedge dy &= \int_{\partial A} (f dy - g dx) \\
&= \int_a^b (f \cdot \dot{y} - g\dot{x}) dt \\
&= \int_a^b \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \cdot \nu \qquad \underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} dt}_{dO=:ds \text{ ohne Vektorcharakter}} \\
\int_A (fx + gy) dx \wedge dy &= \int_A (f_x + g_y) dx dy
\end{aligned}$$

**n=3** $\quad A \subset U \subset \mathbb{R}^3, A$ kompakt, $U$ offen
$\omega = \underline{v} \cdot d\underline{F} = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$
$d\omega = div\, \underline{v} \cdot dV$

Damit folgt

**Satz 15.2 (Gaußscher Integralsatz):** *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $A \subset U$, $A$ kompakt mit glattem Rand $\partial A$. $\partial A$ sei bezüglich der äußeren Normale $\nu$ orientiert. Sei $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\int_A div\, \underline{v}\, dV = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F}.$$

Während $\int_A div\, \underline{v}\, dV$ das übliche Volumenintegral ist, ist $\int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F}$ die Ergiebigkeit oder der Fluß des Feldes $\underline{v}$ bezüglich der geschlossenen Fläche $\partial A$. Nach Übungsblatt 9, Aufgabe 2, zur „Mathematik für Physiker III"ist nämlich

$$\int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F} = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot \nu d0$$

mit dem „Oberflächenelement"$d0$. $d0$ ist eine geeignete 2-fache Integration $\int .dt_1 dt_2$ in jeder Karte $(T, \varphi, V)$. $\nu$ findet man auch folgendermaßen: Sei ohne Einschränkung $\partial A$ wegweise zusammenhängend. Beweis Satz 14.2

$\Rightarrow \widehat{\nu}$ normal, stetig

$$\begin{aligned} 0 < \det(\widehat{\nu}, \partial_1\varphi, \partial_2\varphi) &= \\ &= \begin{vmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ & \partial_1\varphi & \\ & \partial_2\varphi & \end{vmatrix} \\ &= \widehat{\nu} \cdot \partial_1\varphi \times \partial_2\varphi \\ &\Rightarrow \widehat{\nu} = \frac{\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi}{|\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi|} \\ &\Rightarrow \nu = \pm\widehat{\nu} \text{ auf ganz } \partial A \end{aligned}$$

Ob nun $+\widehat{\nu}$ oder $-\widehat{\nu}$ das äußere Normalenfeld ist, kann durch Betrachtung eines einzigen Punktes $p \in \partial A$ entschieden werden, z.B. $\nu(p) = \widehat{\nu}(p) \Rightarrow \nu = \widehat{\nu}$ auf ganz $\partial A$. $-\widehat{\nu} =$ nach außen. $t_2 \to -t_2$, $\widetilde{\varphi}(t_1, t_2) = \varphi(t_1, -t_2) \Rightarrow 0 < \det(\widehat{\nu}_{\text{neu}}, \partial_1\widetilde{\varphi}, \partial_2\widetilde{\varphi})$ mit

$$\widehat{\nu}_{\text{neu}} = \frac{\partial_1\widetilde{\varphi} \times \partial_2\widetilde{\varphi}}{(\partial_1\widetilde{\varphi} \times \partial_2\widetilde{\varphi}} = -\widehat{\nu}_{\text{alt}}.$$

Der Satz von Gauß gilt auch im $\mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} div\, v &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\nu} \\ dV &= dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \\ d\underline{F} &= (\ldots, \underbrace{(-1)^{\nu+1} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \wedge \ldots \wedge dx_n}_{\nu-\text{te Stelle}}, \ldots) \end{aligned}$$

Als Anwendung des Satzes von Gauß behandeln wir den Satz von Green. Es sei

$$\begin{aligned} \nabla : &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \text{ der Nabla-Operator,} \\ \Delta : &= \partial^2/\partial^2 x_1 + \ldots + \partial^2/\partial^2 x_n \text{ der Laplace-Operator,} \end{aligned}$$

d.h. für Funktionen $f$ ist

$$\nabla f = grad\, f,$$

für Vektorfelder $\underline{v}$ ist

$$\begin{aligned} \nabla\underline{v} : &= \nabla \cdot \underline{v} := div\, \underline{v}, \\ \underline{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und für $n = 3$

$$\nabla \times \underline{v} = rot\, \underline{v}$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} = e_1 & \underline{j} = e_2 & \underline{k} = e_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Wir benötigen nun zwei Hilfssätze aus dem Nabla-Kalkül:

**Hilfssatz 15.3:** *Es ist*

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta,$$

*d.h. für jede 2-Mal differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ ist*

$$div\ grad\ f = \Delta f$$

**Beweis:** Es ist

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T, \\ \nabla \cdot \nabla f &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}, \\ &= \Delta f. \end{aligned}$$

□

**Hilfssatz 15.4 (Produktregel):** *Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g : U \to \mathbb{R}$ 2-Mal differenzierbar. Dann ist*

$$\nabla \cdot (f \nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f \Delta g.$$

**Beweis:** Es ist

$$(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial(\partial x_n) \cdot (f \cdot \partial g/\partial x_1, \ldots, f \cdot \partial g/\partial x_n)^T$$

$$\overset{HS15.3}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_n} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + \ldots + f\frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2}.$$

□

**Satz 15.5 (Greenscher Integralsatz):** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset U$ kompakt mit glattem Rand $\partial A$, der bezüglich der äußeren Normalen orientiert sei.*
*Seien*

$$u, v : U \to \mathbb{R}$$

*2-Mal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_A (u\Delta v - v\Delta u)dV = \int_{\partial A} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot d\underline{F}$$

**Beweis:** Wir wenden den Satz von Gauß auf das Vektorfeld $u\nabla v$ an. Dies liefert

$$\begin{aligned}\int_{\partial A} u\nabla v \cdot d\underline{F} &= \int_A div\ (u\nabla v)dV \\ &\overset{HS15.4}{=} \int_A (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)dV.\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\int_{\partial A} v\nabla u \cdot d\underline{F} = \int_A (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)dV$$

Subtraktion der letzten Zeile von der vorletzten liefert die Behauptung. □

Eine weitere Konsequenz aus dem Satz von Gauß ist

**Satz 15.6:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$. Sei*

$$\omega \in \Omega^{n-1}(\overbrace{U - \{p\}}^{=\text{offen}}) \text{ stetig differenzierbar und } d\omega = 0.$$

*Seien $A, B \subset U$ kompakt mit glattem Rand $\partial A, \partial B$, der jeweils bezüglich der äußeren Normalen orientiert sei. Ist $p \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, so gilt:*

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial B} \omega$$

**Situation:**

**Beweis:** Wir wählen eine offene Kugel $K_\varepsilon(p)$ vom Radius $\varepsilon > 0$ um $p$ mit $\overline{K_\varepsilon(p)} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Sei

$$\begin{aligned}A_\varepsilon &= A - K_\varepsilon(p), \\ B_\varepsilon &= B - K_\varepsilon(p).\end{aligned}$$

Dann haben $A_\varepsilon, B_\varepsilon \subset U - \{p\}$ glatten Rand, also

$$\begin{aligned}\int_{\partial A_\varepsilon} \omega &= \int_{A_\varepsilon} d\omega = 0, \\ \int_{\partial B_\varepsilon} \omega &= \int_{B_\varepsilon} d\omega = 0.\end{aligned}$$

Als Punktmengen sind $\partial A_\varepsilon = \partial A \cup \partial K_\varepsilon(0)$, $\partial B_\varepsilon = \partial B \cup \partial K_\varepsilon(0)$. Jedoch muß $\partial K_\varepsilon(p)$ bezüglich der inneren Normalen von $\overline{K_\varepsilon(p)}$ orientiert werden. Man kann dann leicht zeigen

$$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_{\partial_i K_\varepsilon(p)} \omega & = & \displaystyle -\int_{\partial_a K_\varepsilon(p)} \omega \\ & & \\ \text{orientiert bzg. der} & & \text{orientiert bzg. der} \\ \text{inneren Normalen von} & & \text{äußeren Normalen von} \\ \overline{K_\varepsilon(p)}, \det(v_i, \ldots) > 0 & & \overline{K_\varepsilon(p)} \\ & = & \displaystyle -\int_{\partial K_\varepsilon(p)} \omega. \end{array}$$

Hierzu vergleiche man Aufgabe 2, Blatt 9 der Übungen für „Mathematik für Physiker“. Damit folgt

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\partial A_\varepsilon} \omega &= \int_{\partial A} \omega + \int_{\partial_i K_\varepsilon(p)} \omega, \\ &= \int_{\partial A} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon(p)} \omega, \\ &= \int_{\partial B} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon(p)} \omega, \end{aligned}$$

also

$$\int_{\partial A} \omega = \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial K_\varepsilon(p)} \omega$$

(für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$). $\square$

**Beispiel:** $\underline{v} : U - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbares Vektorfeld mit $div\ \underline{v} = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F} &= \int_{\partial B} \underline{v} \cdot d\underline{F}, \\ &= \int_{\partial K_\varepsilon(p)} \underline{v} \cdot d\underline{F}. \end{aligned}$$

Die Summe der Flüsse durch die beiden Randanteile ist Null, nicht jeder einzelne.

## §16. Der Satz von Stokes für Untermannigfaltigkeiten

Wir führen zunächst zur Orientierung den **Halbraum** $H_k$ ein.

$$\begin{aligned} H_k : &= \{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^k, \\ \text{also } \partial H_k &= \{(x_1, \ldots, x_k) | x_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Die äußere Normale ist $\nu(x) = (1, 0, \ldots, 0)$.

$\partial H_k$ hat die (einzige) Karte $T = \mathbb{R}^{k-1}$, $V = \partial H_k$,

$$\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H_k,$$

$$(\widehat{t_1}, \ldots, \widehat{t}_{k-1}) \to (0, \widehat{t_1}, \ldots, \widehat{t}_{k-1})$$

mit

$$\left(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{k-1}}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det\left(\nu, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_{k-1}}\right) > 0$ wird man sagen, $\partial H_k$ sei bezüglich der äußeren Normalen orientierte $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^k$.

### Definition 16.1:

1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Sei $A \subset M$ kompakt. Man sagt, $A$ hat glatten Rand $\partial A$, wenn es zu jedem $p \in \partial A$ eine Karte $\varphi : T \to V$ von $M$ gibt mit*

   $$p \in V,$$

   $$\begin{aligned} \varphi(H_k \cap T) &= A \cap V, \\ \varphi(\partial H_k \cap T) &= \partial A \cap V \end{aligned}$$

   *$\partial A$ ist dann $(k-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

2. *Sei $M$ orientierbar mit einem orientierten Atlas wie oben unter 1. Durch*

   $$\partial A = \bigcup_{i=1}^{N} \partial A \cap V_i$$

$$\varphi_i : \partial H_k \cap T_i \to \partial A_i \cap V_i$$

*erhält man einen orientierbaren Atlas von $\partial A$. Man sagt, $\partial A$ trage die durch $M$ induzierte Orientierung.*

1) $M$ Fläche im $\mathbb{R}^3$, $A \subset M$
   $\partial A$ geschlossene Kurve auf $M$

   $A$ liege der Einfachheit halber in einer einzigen Karte. $\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}) > 0$. Orientierung von $\partial A$: $A$ zur Linken. Anmerkung: $\exists\ \sigma$ = Kurvenparameter (global, z.B. Bogenlänge) $a \leq \sigma \leq b$, $t = (t_1, t_2) \in T$
   $\varphi(t(\sigma))$ Kurvenpunkte mit Komp. $\varphi^j$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}\varphi^j(t(\sigma)) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\varphi^j}{\partial ti}(t(\sigma))\frac{dt_i}{d\sigma}(\sigma) \\
\dot\varphi(t(\sigma)) &= \sum_{i=1}^{z} \dot t_i(\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t(\sigma)) \\
&= \text{ Linearkombination der Tangentialvektoren} \\
&\quad\ \dot\varphi = \text{Tangentialvektor an Flächenkurve}
\end{aligned}$$

2) $\sigma \in [-1, +1] \ni t_2, \sigma = t_2\ t_1 = 0$

   Tangentialvektor: $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0, t_2 = \sigma)$. Sei $\widetilde{t_1} = t_1$. Ersetzt man $t_2$ durch $\widetilde{t_2} = -t_2$, also $\sigma = \widetilde{t_2}$, so wird der Tangentialvektor $\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{t_2}}(0,\sigma) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0, \widetilde{t_2} = \sigma)$. Es findet eine Orientierungsumkehr statt. $\partial A$ wird in negativem Sinn durchlaufen.

Da wir letztlich nur über kompakte $A \subset M$ integrieren wollen, können wir ohne Einschränkung $\overline{M}$ als kompakt mit endlichem Atlas voraussetzen, also

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$$

mit dem Atlas $(T_i, \varphi_i, V_i)$, $i = 1, \ldots, N$. $A$ hat glatten Rand, $\partial A = \partial_M A$ genau dann, wenn es $i_1, \ldots, i_{N(\partial A)}$ gibt mit

$$\partial A = \bigcup_{\lambda=1}^{N(\partial A)} \partial A \cap V_{i_\lambda},$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{i_\lambda}(H_k \cap T_{i_\lambda}) &= A \cap V_{i_\lambda}, \\
\varphi_{i_\lambda}(\partial H_k \cap T_{i_\lambda}) &= \partial A \cap V_{i_\lambda}.
\end{aligned}$$

Dann ist $\partial A$ mit dem Atlas $(\partial H_k \cap T_{i_\lambda}, \varphi_{i_\lambda}, \partial A \cap V_{i_\lambda})$ Mannigfaltigkeit der Dimension $k-1$, da $\partial A \cap V_{i_\lambda}$ in geeigneten Koordinaten durch

$$\begin{array}{r} n-k+1\text{Funkt. Fu-Matrix} \\ \text{hat max. Rang} \end{array} \begin{cases} \varphi_{i_\lambda}(t_1, \ldots, t_k) - \varphi_{i_\lambda}(0, t_2, \ldots, t_k) = 0, \\ t_{k+1} = 0, \\ \ \vdots \\ t_n = 0 \end{cases}$$

beschrieben ist (s. o., Sätze 7.2, 7.3).

**Hinweis:** Die Wechselabbildungen $\psi_{ij}$ bezüglich $\partial A$ kann man sich mit Hilfe der Wechselabbildungen $\psi_{ij} = \psi_{ij}^{(M)}$ von $M$ leicht verschaffen. Aus $\det I_{\psi_{ij}^{(M)}} > 0$ folgt dann $\det I_{\psi_{ij}}(\partial A) > 0$. S. Forster, Analysis III, §20, §21.

Nun gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes 15.1: **Satz 16.1 (Stokes'scher Integralsatz):** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $M \subset U$ eine $k$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$; $M$ sei orientiert. Sei*

$$\omega \in \Omega^{k-1}(U)$$

*stetig differenzierbar. Sei $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand $\partial A$, der mit der durch $M$ induzierten Orientierung versehen sei. Dann ist*

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega.$$

*Insbesondere ist dabei $\partial A$ bezüglich eines Atlanten parametrisiert gemäß Def* 16.1, *bei dem $A$ zur „Linken von $\partial A$"liegt* $(\varphi^{-1}(A \cap V) \subset \{t_1 \leq 0\})$

**Hinweis:** In der Situation des Satzes 16.1 kann man immer einen Atlas von $M$ finden mit folgenden Eigenschaften:

i) $M$ trage schon einen orientierten Atlas. Dann läßt der neue Atlas die Orientierung von $M$ ungeändert.

ii) Der neue Atlas leistet bezüglich $\partial A$ das Gewünschte.
Man spricht von einem an $\partial A$ adaptierten Atlas. Siehe hierzu Forster, Analysis III, §20, §21. Wir behandeln nun Beispiele und Erläuterungen.

**Satz 16.2 (Satz von Stokes für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^3$):** *Sei $M \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $M$ 2−dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. $M$ sei orientiert. Sei $A \subset M$ kompakt mit glattem Rand, der die von $M$ induzierte Orientierung trage. Sei*

$$\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$$

*ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_A rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F}$$

**Beweis:** $\omega = \underline{v} \cdot d\underline{s}$ ist aus $\Omega^1(U)$ und stetig differenzierbar, $d\omega = rot\ \underline{v} \cdot dF$ nach Lemma 11.3. □

Für eine Untermannigfaltigkeit $M$ und $A$, $\partial A$ wie in Satz 16.2 beschrieben, gilt: Es gibt ein Einheitsnormalenfeld $\nu(p)$ und einen orientierten, an $\partial A$ adaptierten Atlas mit

$$\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(p)) > 0$$

in jeder Karte. $\partial A$ ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also etwa eine geschlossene Kurve, die auf der Fläche = 2-dimensionaler Untermannigfaltigkeit $M$ des $\mathbb{R}^3$ liegt. Die Forderung $\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\varphi), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(p)) > 0$ bewirkt folgendes: Für einen Beobachter in Richtung von $\nu(p)$, $p \in \partial A$, der sich in Richtung der von der Mannigfaltigkeit $M$ in $\partial A$ induzierten Orientierung bewegt, liegt $A$ immer zur Linken. Genauer: Die induzierte Orientierung bedeutet die Festlegung der Richtung des Tangentialvektors beim Durchlaufen der Kurve $\partial A$. Wählt man also das Einheitsnormalenfeld $\nu(p)$ so, daß beim Durchlaufen von $\partial A$ für einen Beobachter in Richtung von $\nu(p)$ die Menge $A$ immer zur Linken liegt, so entsteht die klassische Form des Stokesschen Satzes:
$M$ Fläche im $\mathbb{R}^3$, $A \subset M$, $\partial A$ geschlossene Kurve auf $M$. $A$ liege der Einfachheit halber in einer einzigen Karte. $\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}) > 0$. Satz 16.2 gilt. Orientierung von $\partial A$: $A$ zur Linken. Annahme: $\exists\sigma$ = Kurvenparameter (global z.B. Bogenlänge). $a \le \sigma \le b$, $t = (t_1, t_2) \in T$.

$\varphi(t(\sigma))$ Kurvenpunkte mit den Komponenten $\varphi^j$, $1 \le j \le 3$. Also

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma}\varphi^j(t(\sigma)) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t(\sigma)) \cdot \frac{dt_i}{d\sigma}(\sigma), \\
\dot\varphi(t(\sigma)) &= \sum_{i=1}^{2} \dot t_i(\sigma) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t_i}(t(\sigma)) \\
&= \text{Linearkombination der Tangentialvektoren} \\
&\phantom{=} \text{an die Mannigfaltigkeit } M, \\
&= \text{Tangentialvektor an die Flächenkurve.}
\end{aligned}$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial A} \underline{\upsilon} \cdot d\underline{s} &= \int_{\partial A} \sum_{\nu=1}^{3} \upsilon_\nu dx_\upsilon \\
&= \int_a^b \sum_{\nu=1}^{3} \upsilon_\nu(t(\sigma)) \cdot \frac{d}{d\sigma}\varphi^\nu(t(\sigma))d\sigma, \\
&= \int_a^b (\underline{\upsilon} \cdot \underline{t})(t(\sigma)) \cdot (\sum_{\nu=1}^{3}(\frac{d}{d\sigma}\varphi^\nu(t(\sigma)))^2)^{\frac{1}{2}} \cdot d\sigma \text{ mit}
\end{aligned}
$$

$\underline{t}(t(\sigma))$ = Tangentialvektor an die Flächenkurve, auf Länge 1 normiert = $\dot{\varphi}(t(\sigma))/|\dot{\varphi}(t(\sigma))|$ = Tangentialeinheitsvektor an die Flächenkurve,

$$= \int_0^{|\partial A|} \underline{\upsilon} \cdot \underline{t}ds, \ |\partial A| = \text{ Länge von } \partial A,$$

$$= \int_A rot\ \underline{\upsilon} \cdot d\underline{F},$$

$$= \int_A rot\ \underline{\upsilon} \cdot \nu d0.$$

Die Formulierung

$$\boxed{\int_{\mathbf{0}}^{|\partial \mathbf{A}|} \underline{\upsilon} \cdot \underline{\mathbf{t}}\, \mathbf{ds} = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{rot}\ \underline{\upsilon} \cdot \nu \mathbf{d0}}$$

gilt bei **richtiger Richtung des Einheitsnormalenfeldes allgemein,** also ohne, daß $A$ in einer einzigen Karte liegt.

Kehren wir zum an $\partial A$ adaptierten Atlas zurück mit $\det(\upsilon(p), \partial\varphi/\partial t_1(p), \partial\varphi/\partial t_2(p)) > 0$.

$\sigma \in [-1, 1] \ni t_2, \ \sigma = t_2$
$t_1 = 0$

Tangentialvektor: $\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0, t_2 = \sigma)$. Sei $\widetilde{t_1} = t_1$. Ersetzt man $t_2$ durch $\widetilde{t_2} = -t_2$, wählt man also als neuen Kurvenparameter $\sigma = \widetilde{t_2}$, so wird der Tangentialvektor

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{t_2}}(0, \sigma) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0, \widetilde{t_2} = \sigma).$$

Es findet eine Orientierungsumkehr statt. $\partial A$ wird im negativen Sinn durchlaufen. Es entsteht

$$\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{t_1}}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial\widetilde{t_2}}(p)) < 0.$$

Der Satz von Stokes (Satz 16.2) gilt natürlich trotzdem. $A$ bleibt in $t_1 \leq 0$, also links von $\partial A$!

Man kann sich das an der Formulierung □ klarmachen. Nach □ ist

(1)

$$\int_A rot\ \underline{v}(-\nu_{\text{alt}})d0 = \int_0^{|\partial A|} \underline{v} \cdot \underline{t}_{\text{neu}} ds$$

wegen $\det(-\nu_{\text{alt}}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{t}_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde{t}_2}(p)) > 0$, also $\nu_{\text{neu}} = -\nu_{\text{alt}}$ wie an folgender Figur klar wird.

(1) ist natürlich gleichbedeutend mit der Formel

(2)

$$\begin{aligned}\int_A rot\, v \cdot \nu_{\text{alt}} d0 &= \int_0^{|\partial A|} \underline{v} \cdot (-\underline{t}_{\text{neu}}) ds \\ &= \int_0^{|\partial A|} \underline{v} \cdot \underline{t}_{\text{alt}} ds,\end{aligned}$$

von der wir wissen, daß sie gilt.

Sei nun $M$ kompakte geschlossene Fläche, d.h. ohne Anfang und Ende bzw. ohne Rand in sich (vom Typ der $S_2$). Wir wollen zeigen, daß

Ergiebigkeit von $rot\ \underline{v}$ bez. $M =$

$$\int_M rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} = \int_M rot\ \underline{v} \cdot \nu d0 = 0$$

ist ($\det(\nu(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(p)) > 0$). Ich nehme $A$ aus $M$ heraus.

$$\begin{aligned}\int_M rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} \quad &= \quad \int_{\underbrace{M - A}_{=:B}} rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} + \int_A rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} \\ &\overset{\text{Satz 16.2 für } A}{=} \int_B rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} + \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s}\end{aligned}$$

$\widetilde{t_1} = -t_1$
$\widetilde{t_2} = -t_2$

(3)

$$\begin{aligned}
&\det(\nu(p), \tfrac{\partial\varphi}{\partial\tilde{t}_1}(p), \tfrac{\partial\varphi}{\partial\tilde{t}_2}(p)) = \\
&= \det(\nu(p), -\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_1}(p), -\tfrac{\partial\varphi}{\partial t_2}(p)) > 0 \\
&= \textstyle\int_B rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} - \int_0^{|\partial A|} \underline{v} \cdot (-\underline{t}) ds
\end{aligned}$$

$$\overset{M \text{ geschl.}}{=} \textstyle\int_B rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} - \int_0^{|\partial B| = |\partial A|} \underline{v} \cdot (-\underline{t}) ds$$

$(-\underline{t})$ ist Tangentialvektor an $\partial B$, $B$ zur Linken

$$\overset{M \text{ geschl.}}{=} \textstyle\int_B rot\underline{v} \cdot d\underline{F} - \int_{\partial B} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

**Beispiele:**

1. $U \subset \mathbb{R}^n$, $U$ offen und beschränkt. $A \subset U$, $A$ kompakt mit glattem Rand. $U$ mit sich selbst als Karte ist orientierte Untermannigfaltigkeit der Dimension $n$ des $\mathbb{R}^n$, $\varphi = id.$, $T_p(U) = \mathbb{R}^n$, $e_1, \ldots, e_n$ ist die (von $\varphi$ induzierte) Basis, d.h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = e_1, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} = e_n$$

   Die in $\partial A$ induzierte Orientierung ist gerade die durch die äußere Normale gegebene. Vgl. Zusammenfassung §14, Nr. 2.

2. Zu Satz 15.2 (Satz von Gauß).
   Sei $v : U \to \mathbb{R}$, $v$ stetig diffbar, $\underline{v} = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_A \frac{\partial v}{\partial x_i} dV &= \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F} \\
&= \int_{\partial A} v \cdot \nu_i \, d0,\ i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

   Der Satz von Gauß ist also die Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung.

3. Zu Satz 15.2 (Satz von Gauß).

Sei $\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \longmapsto x$. Dann ist $div\, \underline{v} = 3$, $rot\, \underline{v} = 0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_R(0)} \underline{v} \cdot d\underline{F} &= \int_{K_R(0)} div\ \underline{v} dV \\
&= 3 \int_{K_R(0)} dV \\
&\overset{I,\S 1}{=} 4\pi R^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_R(0)} \underline{v} \cdot d\underline{F} &= \int_{\partial K_R(0)} x \cdot \underbrace{\frac{x}{|x|}}_{=\nu} d0 \\
&= R \int_{\partial K_R(0)} d0 \\
&= R \cdot \text{ Oberfläche } S_2 \\
\Rightarrow \text{ Oberfläche } S_2 &= 4\pi R^2.
\end{aligned}$$

4. Unterschied zwischen „Lokal“und „Global“. Möbiusband. Unstetigkeit des Normalenfeldes, global. Stetigkeit, lokal. Also Nichtorientierbarkeit. In der Vorlesung vorführen.

5. Unterschied zwischen „Lokal“und „Global“. Ergiebigkeit eines divergenzfreien Vektorfeldes bezüglich geschlossener Flächen.

   $\underline{v} : U - \{p\} \to \mathbb{R}^3$

   $\underline{v}$ stetig differenzierbar $div\ \underline{v} = 0$.

   Beweis bzw. Beispiel zu Satz 15.6 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K_{R_2}(0)} \underline{v} \cdot d\underline{F} &= \int_{\partial K_{R_1}(0)} \underline{v} \cdot d\underline{F} = \int_S \underline{v} \cdot d\underline{F} \\
&= \int_{\partial K_{R_2}(0)} \underline{v} \cdot \nu_2 d0 = \int_{\partial K_{R_1}(0)} \underline{v} \cdot \nu_1 d0 \\
&= \int_S \underline{v} \cdot \nu_3 d0,
\end{aligned}$$

$$\int_{\widetilde{S}} \underline{v} \cdot \widetilde{\nu} d0 \overset{\text{Satz von Gauß}}{=} 0$$

   Beispiel: $\underline{v} = \nabla \frac{1}{|x|}$. Dann ist $div\ \underline{v} = 0$ (vgl. S. IV.11),

$$\underline{v} = -\frac{1}{|x|^3} x,\ x \neq 0.$$

Zwar ist
$$\int_{\widetilde{S}} \underline{v} \cdot v_3 d0 = 0,$$
aber
$$\begin{aligned}\int_S \underline{v} \cdot \nu_3 d0 &= -\int_{\partial K_{R_1}(0)} \frac{x \cdot x}{|x|4} d0 \\ &\overset{\text{Beisp. 3}}{=} -4\pi.\end{aligned}$$
Insbesondere ist $\underline{v}$ **keine** Rotation in $U$ oder in $K_{R_2}(0) - \overline{K_{R_1}(0)}$, wohl aber in der von $\widetilde{S}$ berandeten beschränkten Menge (Lemma von Poincaré, Satz 12.4).

6. Zu Satz 16.2: Sei
$$\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$(x, y, z) \longmapsto (-y, x, z),$$
$$\omega = -ydx + xdy + zdz,$$
$$d\omega = 2dx \wedge dy.$$
Nach Lemma 11.3 ist also $rot\ \underline{v} = (0, 0, 2)$. Sei $M = \{z = 0\} \Rightarrow M$ orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 mit $\det(e_3, e_1, e_2) = 1 > 0$, $A = \{(x, y, 0)|x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset M$.

Dann folgt
$$\int_{\partial A} (-ydx + xdy + zdz) = \int_A 2dx \wedge dy = 2\pi r^2.$$
Dagegen ist für $\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (x, y, z)$,
$$\begin{aligned}\omega &= xdx + ydy + zdz \\ d\omega &= 0, \text{ also } rot\ \underline{v} = 0 \text{ (vgl. Beispiel 3.)},\end{aligned}$$
also
$$\int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0.$$
Hinweis: Es ist oft einfacher, $rot\,\underline{v}$ über die Bildung von $d\omega$ zu bestimmen.

7. Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals auf einer Untermannigfaltigkeit, Beispiel zu Satz 16.2.

$M$ sei eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ wie in Satz 16.2. $M$ sei einfach zusammenhängend, d.h. zwei ein und dieselben Punkte $p_1, p_2 \in M$ verbindende Flächenkurven lassen sich stetig in $M$

ineinander deformieren, etwa $M = S_2$.

Sei $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar ($M \subset U$). Sei $rot\ \underline{v} = 0$ in $M$, also nicht notwendig in der volumenhaften Menge $U$.

$$\begin{aligned} \int_{l_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{-l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} &= \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s} \overset{\text{Satz 16.2}}{=} \int_A rot\ \underline{v} \cdot d\underline{F} = 0, \\ \Rightarrow \int_{l_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} &= -\int_{-l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{+l_2 = l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s}. \end{aligned}$$

Ebenso schließt man für geschlossene Flächenkurven (=Zirkulationen)

$$\begin{aligned} \int_{l_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} + \int_{-l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} &= \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{s} \overset{\text{Satz 16.2}}{=} 0, \\ \Rightarrow \int_{l_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} &= \int_{l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0. \end{aligned}$$

Hat $M$ im „Inneren“von $l_2$ ein „Loch“, so gilt nach demselben Argument für die Zirkulationen

$$\int_{l_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{l_2} \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

($M$ ist dann also **nicht** mehr einfach zusammenhängend, jedoch lassen sich $l_1, l_2$ stetig **in M** ineinander deformieren!) Dies führt auf

8. Unabhängigkeit der Ergiebigkeit von Flächenstück. Unter geeigneten topologischen Voraussetzungen an die offene Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ folgt für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\underline{v} : U \to \mathbb{R}^3$ mit $div\ \underline{v} = 0$:

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_{F_1} \underline{v} \cdot \nu_1 d0 + \int_{F_2} \underline{v}(-\nu_2) d0 = \\ &= \textstyle\int_{\partial A} \underline{v} \cdot \nu d0 = \int_{\partial A} \underline{v} \cdot d\underline{F} \\ &= \textstyle\int_A div\ \underline{v} dV = 0, \text{ also} \\ &\textstyle\int_{F_1} \underline{v} \cdot \nu_1 d0 = \int_{F_2} \underline{v} \cdot \nu_2 d0 \end{aligned}$$

Sind $F_1, F_2$ geschlossen, so kennen wir dies bereits aus Beispiel 5:
Die Gleichheit besteht nur für solche geschlossenen Flächen, die sich stetig **in U ineinander deformieren lassen.**

## §17. Differentialformen und Differentialgleichungen

Aus $y' = -f(x,y)/g(x,y)$, $\frac{dy}{dx} = -f(x,y)/g(x,y)$ folgt formal $g(x,y)dy + f(x,y)dx = 0$. Eine bessere Formulierung ist die folgende: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $(f,g) \neq (0,0)$ in $U$

$$\omega = fdx + gdy \in \Omega^1(U).$$

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$fdx + gdy = 0$$

ist die Kurve $x = x(t), y = y(t)$ mit

$$f(x(t),y(t))\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\dot{y}(t) = 0$$

Die auf $a \leq t \leq b$ zurückgeholte Form $\omega$ verschwindet also.

**Definition 17.1:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $\omega \in \Omega^1(U)$. Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to U$, $t \longmapsto (x(t),y(t))$ mit $\dot{x},\dot{y} \neq (0,0)$ heißt Lösungskurve der Differentialgleichung $\omega = 0$, wenn gilt*

$$\omega \circ \gamma = 0,$$

*d.h. $(f(x(t),y(t))\dot{x}(t) + g(x(t),y(t))\dot{y}(t)) \cdot dt = 0$.*

**Beispiel:** $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$.

**Alte Formulierung:** $y' = -\frac{x}{y}$, $ydy = -xdx$, also

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}y^2 &= -\tfrac{1}{2}x^2 + c, \\ y &= \sqrt{2c - x^2} \text{ für } x^2 < 2c, \\ y &= -\sqrt{2c - x^2} \text{ für } x^2 < 2c \end{aligned}$$

**Neue Formulierung:**

$$xdx + ydy = 0$$

Kurve: $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Die neue Formulierung liefert also die Lösungsgesamtheit in der richtigen Gestalt und auf einmal.

Wie findet man nun $\gamma$. Hierzu gilt

**Satz 17.1:** *Ist $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $h \in \Omega^0(U)$ stetig differenzierbar mit $\nabla h \neq 0$, $dh = \omega(\in \Omega^1(U))$, so gilt: Eine Kurve $\gamma$ ist genau dann Lösungskurve, wenn $h \circ \gamma$ konstant ist, d.h. wenn es ein $c$ gibt mit*

$$\gamma([a,b]) \subset \{(x,y) | (x,y) \in U, h(x,y) = c\}.$$

**Beweis:** $dh = \omega \Leftrightarrow h_x = f$, $h_y = g$. Für eine Kurve $\gamma$ gilt

$$\frac{d}{dt} h \circ \gamma(t) = h_x(\gamma(t))\dot{x}(t) + h_y(\gamma(t))\dot{y}(t).$$

Also haben wir

$$\begin{aligned} \omega \circ \gamma = 0 \;\; &\Leftrightarrow \;\; f(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + g(\gamma(t))\dot{y}(t) = 0, \\ &\Leftrightarrow \;\; h_x(\gamma(t)) \cdot \dot{x}(t) + h_y(\gamma(t)) \cdot \dot{y}(t) = 0, \\ &\Leftrightarrow \;\; h \circ \gamma = \text{ konstant } = c. \end{aligned}$$

□

**Beispiele:**

**1.** Sei $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$,

$$h = \frac{x^2 + y^2}{2}, \; dh = xdx + ydy,$$

d.h. die Lösungskurven liegen auf $x^2 + y^2 = c$.

**2.** Sei in $U = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ die Differentialgleichung $w = ydx + xdy = 0$ betrachtet (alte Formulierung $y' = -\frac{y}{x}$). Wegen $d(xy) = ydx + xdy$ liegen die Lösungskurven auf $xy = c$. $x \equiv 0$, d.h. die $y$-Achse, ist z.B. eine Lösung.

Bei der Auflösung von $\omega = 0$ hilft gelegentlich das Auffinden eines Eulerschen Multiplikators.

**Definition 17.2:** *Eine Funktion $\mu = \mu(x, y)$ heißt Eulerscher Multiplikator (integrierender Faktor) der Differentialgleichung*

$$w = fdx + gdy = 0,$$

*wenn $\mu(x, y) \neq 0$ und $d(\mu w) = 0$ sind.*

**Beispiel:** Sei

$$w = 2ydx + xdy$$

(oder $y' = -2y/x$); dann ist $f_y = 2 \neq 1 = g_x$, so daß kein $h$ mit $dh = \omega$ zur Verfügung steht. Nun suchen wir einen Eulerschen Multiplikator $\mu$ mit $d(\mu\omega) = 0$. Ist $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $U$ sternförmig, so gibt es nach Satz 12.4 ein $h \in \Omega^0(U)$, $h$ stetig differenzierbar, mit

$$dh = \mu\omega.$$

Die Lösungskurven von $\omega = 0$ sind die von $\mu\omega = 0$, liegen also auf $h(x,y) = c$. Für $dh = \mu\omega$ benötigen wir nach Satz 6.2

$$\begin{aligned} (2y\mu)_y &= 2\mu + 2y\mu_y \\ &= (x\mu)_x = \mu + x\mu_x. \end{aligned}$$

Demnach ist $\mu(x,y) = x$ ein Eulerscher Multiplikator und für $h(x,y) = x^2y$ gilt $dh = \mu\omega$. Für die Lösungen erhält man $x^2y = c$.

**Satz 17.2:** *Es gibt lokal immer einen Eulerschen Multiplikator, d.h.: Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ offen, seien $f, g : G \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitz, $(f,g) \neq (0,0)$ in $G$. Sei $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in G$. Dann gibt es eine Umgebung $U' = U'(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \subset G$ von $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$ derart, daß in $U'(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$ stetig differenzierbare bzw. stetige Funktionen $\varphi : U' \to \mathbb{R}$, $\mu : U' \to \mathbb{R} - \{0\}$ existieren mit*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mu f,\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mu g$$

*in $U'(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$.*

**Beweis:** Reduktion auf ein anderes Problem. Sei also $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \in G$. Sei $U = U(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \subset G$, $g \neq 0$ in $U$, $U$ Umgebung von $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$. Wir betrachten die Lösungskurven von $y' = -\frac{f}{g}$ in $U$ durch $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U$, die $U$ ganz ausfüllen. Dann gibt es eine Umgebung $U' = U'(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0) \subset U$ mit folgender Eigenschaft: $\exists \varphi : U' \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} \neq 0$ in $U'$, $\varphi(x, y(x))$ =const. auf den Kurven $(x, y(x))$ von $y' = -\frac{f}{g}$ durch $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U'$. Die Lösungskurven von $y' = -\frac{f}{g}$ in $U'$ sind also gerade Niveaulinien von $\varphi$. Ohne Beweis. Aus $\varphi(x, y(x)) =$ const. folgt

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y(x)) + \tfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = 0, \\ \tfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y(x)) - \tfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y(x))\tfrac{f(x,y(x))}{g(x,y(x))} = 0, \\ \left(\tfrac{\partial\varphi}{\partial x}/\tfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(x, y(x)) = (f/g)(x, y(x)). \end{gathered}$$

Die Kurve laufe durch $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U'$. Also ist

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}/\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (f/g)(\widetilde{x}, \widetilde{y}),\ (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in U'.$$

Sei $\mu g = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ in $U'$. Dann ist $\mu \neq 0$ und $\mu f = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$. $\mu$ ist Eulerscher Multiplikator. $\square$

Wenn $(f(x,y), g(x,y)) \neq (0,0)$ ist, kann man immer **lokal** einen Eulerschen Multiplikator finden.

**Definition 17.3:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $U$ offen. $h : U \to \mathbb{R}$, 2-Mal stetig differenzierbar, heißt harmonisch in $U$, wenn $\Delta h = 0$ ist.*

**Satz 17.2:** *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $U$ offen, $h : U \to \mathbb{R}$ harmonisch. Sei $A \subset U$ kompakt mit glattem Rand $\partial A$. Sei $h|\partial A = 0$. Dann ist $h|A = 0$.*

**Beweis:** Aus dem Beweis des Satzes 15.5 (Greenscher Integralsatz) folgt mit $u = v = h$

$$\int_{\partial A} h \nabla h \cdot d\underline{F} = \int_A (h\Delta h + |\nabla h|^2) dV,$$

$$\int_A |\nabla h|^2 dV = 0,$$

$\nabla h \equiv 0$, $h \equiv$ konstant $\equiv 0$. $\square$