Funktionalanalysis

Nach den Vorlesungen von Prof. von Wahl im WS 1993/94 und im SS 1994
Bearbeitet von Harald Meyer[1]

[1]Harald Meyer, Luisenburgstr.6, 95145 Oberkotzau, Tel. 09286/6668

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Als ich mich vor gut einem Jahr entschloß, die Vorbereitung auf die Diplomprüfung in Funktionalanalysis etwas ausführlicher zu machen, um die Vorlesung TEXen zu können, ahnte ich noch nicht, daß daraus einmal ein Skript mit über 250 Seiten werden würde. Auch mein Vater konnte wohl kaum voraussehen, was aus seiner unverfänglichen Frage („Ist TEX eigentlich schwer zu lernen?“) einmal werden würde. Es stellte sich nämlich heraus, daß es

1. nicht schwer zu erlernen ist und daß

2. mein Vater nicht nur gerne TEXt, sondern sogar eine Vorliebe für schreckliche, komplizierte eqnarray-Umgebungen hat.

So ist es meinem Vater zu verdanken, daß dieses Skript vor der Jahrtausendwende fertig wurde – er hat es zu ungefähr 93,27% getippt.
Völlig unerwartet kam für mich auch die Begeisterung, die die Erwähnung einer geTEXten Funktionalanalysis-Vorlesung bei Herrn Prof. Dr. von Wahl hervorrief. Von diesem Moment an wurde mir alle Hilfe zuteil und dadurch auch meine Begeisterung an dem Skript neu entfacht.
Dr. habil. Hans-Christoph Grunau machte zahlreiche Verbesserungsvorschläge und wies mich auf etliche Fehler im Skript hin, außerdem wären einige Beweise ohne seine Hilfe nicht zustande gekommen. Die noch in dem Skript versteckten Fehler gehen natürlich alle auf mein Konto – sollte ich tatsächlich aus der praktisch fehlerfreien Vorlesung von Herrn von Wahl einmal einen Fehler übernommen haben, so kann ich diesen neben den vielen selbst produzierten leicht auf mich nehmen.
Da das Skript als Lernvorbereitung dienen sollte, wurden einige Umstellungen des Vorlesungsstoffes vorgenommen – Herr von Wahl weist in seiner Einleitung darauf hin. Beim Lernen fand ich es besser, die motivierenden Beispiele und Probleme dort in den Stoff einzuordnen, wo sie mit den behandelten Methoden gelöst werden können. Hört man den Stoff allerdings das erste Mal, so ist diese Reihenfolge ungünstig – die wesentlichen Punkte, der rote Faden gehen verloren. <u>Ich kann deshalb nur dazu raten, unbedingt in die Vorlesung zu gehen</u> – dieses Skript ist kein Ersatz. Nebenbei: Ich habe <u>auch nie behauptet, daß dieses Skript alles enthält</u>, was Herr von Wahl in seiner Vorlesung behandelt oder in seinen Prüfungen gefragt hat.
Nach diesem Appell an das Gewissen wünsche ich viel Spaß an Vorlesung und Skript.

Oberkotzau, 20.10.1996, Harald Meyer

P.S.: Dieses Skript ist nach einmaligem Gebrauch zu vernichten, da es spätestens ab 1.8.1998 keine regelgerechte Rechtschreibung mehr aufweist. Da noch nicht bekannt ist, wann das Kultusministerium die neuen für staatliche Schulen und Hochschulen verbindlichen Axiome der Mathematik einführt, wird über die gesetzlich vorgeschriebene Gewährleistungsfrist von 6 Monaten hinaus keine Garantie gegeben.

Einleitung

Die vorliegende Ausarbeitung meiner Vorlesung „Funktionalanalysis“ wurde von Herrn Harald Meyer verfaßt. Für seine Sorgfalt und seine Mühe danke ich ihm sehr herzlich.

Gegenüber der tatsächlich gehaltenen Vorlesung weist diese Ausarbeitung einige Veränderungen auf, die das Nacharbeiten des vorgetragenen Stoffes erleichtern sollen. Um zu verdeutlichen, daß die wesentlichen Entwicklungen in der Funktionalanalysis durch konkrete Anwendungen motiviert wurden, habe ich häufig vor der abstrakten Theorie entsprechende Beispiele gebracht, die jetzt im Anschluß an die Theorie behandelt werden. Bei den Beispielen sind einige hinzugekommen, einige sind noch im Detail weiter ausgeführt worden. Weiter wurde von Herrn Meyer ein Anhang über das Lebesgue-Integral, normierte Räume und Sobolev-Räume angefügt, der sicher für viele Leser eine wichtige Hilfe darstellt.

Als Beispiele zum Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren werden zeitabhängige Schrödinger-Gleichungen (unitäre Gruppen) und Wellengleichungen behandelt.

Wolf von Wahl

Kapitel 1

Hilberträume

Aus den ersten Semestern ist die Theorie der endlichdimensionalen Vektorräume bekannt. Nun werden hauptsächlich unendlichdimensionale Vektorräume betrachtet. Warum nimmt man diese Erschwernis auf sich? Der Grund ist schnell erzählt: Zur Lösung von Differentialgleichungen (wie sie in der Physik ständig vorkommen) muß man Funktionenräume untersuchen (z.B. $L^p(\mathbb{R}^n)$) und diese sind nun einmal unendlichdimensional.
Dabei versucht man natürlich zunächst, die Konzepte, die sich in endlich vielen Dimensionen bewährt haben, zu verallgemeinern. Deshalb spielen Begriffe wie Orthogonalität und Skalarprodukt wieder eine große Rolle.
Man betrachtet lineare Operatoren, weil Differentialoperatoren linear sind. Ein großer Teil der Vorlesungen Funktionalanalysis I/II behandelt die Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum[1] – daran sieht man schon, daß alles komplizierter ist als bei endlich vielen Dimensionen. Beispielsweise sind lineare Operatoren nun nicht mehr automatisch stetig. Unendlich viele Dimensionen sind eben nicht dasselbe wie sehr viele, aber endlich viele Dimensionen.

1.1 Allgemeines

1.1.1 Definition (Prähilbertraum)

Sei $\mathcal{H}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Sei eine Abbildung $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\{f, g\} \longmapsto (f, g)$ erklärt, die folgende Eigenschaften besitzt:

1) $\forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C}: \ (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.

2) $\forall x, y \in \mathcal{H}: \ (x, y) = \overline{(y, x)}$.

3) $\forall x_1, x_2, y \in \mathcal{H}: \ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

4) $\forall x \in \mathcal{H} \backslash \{0\}: \ (x, x) > 0; \ (x, x) = 0$ für x=0.

$\mathcal{H}$ heißt <u>Prähilbertraum</u>, die Abbildung $\{f, g\} \longmapsto (f, g)$ Skalarprodukt.

1.1.2 Bemerkungen

Aus der Definition folgt sofort:

1) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$.

2) $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

3) $(x, x) = \overline{(x, x)} \Longrightarrow (x, x) \in \mathbb{R}$.

[1] David Hilbert (1862-1943)

4) Wegen 3) wird durch $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$ eine Norm auf $\mathcal{H}$ gegeben.

Beweis:
$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ sind klar.
Dreiecksungleichung:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \|\lambda x + \mu y\|^2 = (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = \\ & = & |\lambda|^2 \|x\|^2 + |\mu|^2 \|y\|^2 + \lambda\overline{\mu}(x,y) + \mu\overline{\lambda}(y,x) = \\ & = & |\lambda|^2 \|x\|^2 + |\mu|^2 \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda\overline{\mu}(x,y) \\ & \Longleftrightarrow & -2\mathrm{Re}\,\lambda\overline{\mu}(x,y) \leq |\lambda|^2 \|x\|^2 + |\mu|^2 \|y\|^2 . \end{array}$$

Seien $x \neq 0$, $y \neq 0$. Setze $\lambda := -\frac{1}{2\|x\|}$; $\mu := \frac{1}{2\|y\|}$. Dann ist $\mathrm{Re}\,(x,y) \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Diese Gleichung gilt trivialerweise auch für x=0 oder y=0. Damit gilt dann:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

also die Dreiecksungleichung.

5) Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$.

Beweis:
Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 & = & (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = \\ & = & (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) = \\ & = & 2 \cdot [(x,x) + (y,y)] = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 . \end{array}$$

1.1.3 Beispiele

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Definiere auf $C^0(\overline{\Omega})$: $(f,g) := \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}\,dx$. Damit wird $C^0(\overline{\Omega})$ zu einem Prähilbertraum.

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, offen und wegzusammenhängend. Für

$$\mathcal{H} := \{f \in C^1(\overline{\Omega}) \mid f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

definiere $(f,g) := \int\limits_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla\overline{g(x)}\,dx$. Dann ist $\|f\| = \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ und es gilt $\|f\| = 0 \Longrightarrow \nabla f \equiv 0 \overset{\Omega \text{ zusammenhängend}}{\Longrightarrow} f \equiv c \overset{f|_{\partial\Omega}=0}{\Longrightarrow} c = 0$. Also wird $\mathcal{H}$ mit diesem Skalarprodukt zu einem Prähilbertraum.

1.1.4 Definition (Hilbertraum)

Ein Prähilbertraum $\mathcal{H}$ heißt Hilbertraum, wenn der normierte Raum $(\mathcal{H}, \|.\|)$ vollständig ist, d.h., wenn jede Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$ einen Grenzwert in $\mathcal{H}$ besitzt.

1.1.5 Beispiel

Sei $l^2 := \left\{A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert}\right\}$. Die Addition und skalare Multiplikation mit reellen Zahlen werden komponentenweise erklärt. Damit wird l^2 offensichtlich zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Durch $(A,B) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ wird l^2 mit einem Skalarprodukt versehen. Mit der dadurch induzierten Norm $\| A \| := \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ist l^2 vollständig, also ein Hilbertraum.

Beweis:
Wegen $(a-b)^2 \geq 0$ und $(a+b)^2 \geq 0$ ist $|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, also ist $(A,B) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) < \infty$, d.h. das Skalarprodukt ist wohldefiniert.
Es muß noch gezeigt werden, daß l^2 vollständig ist. Das geschieht in 3 Schritten: Sei $\left(A^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l^2, $A^{(k)} = \left(a_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

1) Definition des Grenzwertes B:
$\left(A^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\| A^{(k)} - A^{(l)} \| < \varepsilon$ für $k, l \geq N(\varepsilon)$. Es ist $\| A^{(k)} - A^{(l)} \| = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(k)} - a_n^{(l)}\right)^2}$, also ist $\sqrt{\left(a_i^{(k)} - a_i^{(l)}\right)^2} = \left|a_i^{(k)} - a_i^{(l)}\right| < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert für alle $i \in \mathbb{N}$ die Folge $\left(a_i^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Setze $b_i := \lim\limits_{n \to \infty} a_i^{(n)}$ und $B := (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Damit ist der Grenzwert B definiert.

2) $B \in l^2$:

Wir zeigen: Es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{N} b_i \leq M$. Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für $n, m > n_0$ gilt: $\| A^{(n)} - A^{(m)} \| < \varepsilon$. Wähle weiter ein festes $m > n_0$ und setze $M := \| A^{(m)} \|$. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$$\| A^{(n)} \| = \| A^{(n)} - A^{(m)} + A^{(m)} \| \leq \| A^{(m)} \| + \| A^{(n)} - A^{(m)} \| \leq M + \varepsilon.$$

Nun ist $\sum\limits_{i=1}^{N} b_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} \lim\limits_{k \to \infty} \left(a_i^{(k)}\right)^2 = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{N} \left(a_i^{(k)}\right)^2 \leq \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(a_i^{(k)}\right)^2 \leq (M+\varepsilon)^2$, also $B \in l^2$.
Bemerkung: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $L(a_n)$ die Menge der Häufungspunkte, so wird – falls $L(a_n)$ beschränkt ist – der Limes superior definiert als $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sup a_n := \sup L(a_n)$.

3) B ist der Grenzwert der Folge, d.h. $\lim\limits_{k \to \infty} \| A^{(k)} - B \| = 0$:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $K \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k,\ l \geq K$ gilt: $\| A^{(k)} - A^{(l)} \| \leq \varepsilon$. Sei nun $k \geq K$.
Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{n=1}^{N} \left(a_n^{(k)} - b_n\right)^2 = \lim\limits_{l \to \infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} \left(a_n^{(k)} - a_n^{(l)}\right)^2}_{\leq \| A^{(k)} - A^{(l)} \|^2} \leq \sup\limits_{l \geq K} \| A^{(k)} - A^{(l)} \|^2 \leq \varepsilon^2$.

Also hat man auch $\lim\limits_{k \to \infty} \| A^{(k)} - B \| = 0$.

l^2 ist also ein unendlichdimensionaler vollständiger Vektorraum über $\mathbb{R}$. Als Warnung, daß sich viele Tatsachen, die in $\mathbb{R}^n$ gelten, nicht einfach übertragen lassen, folgende
Bemerkung: Die Einheitskugel $K = \{A \in l^2 : \| A \| \leq 1\}$ ist nicht kompakt.
l^2 ist ein metrischer Raum, $K \subset l^2$. Deshalb gilt: K kompakt $\Longleftrightarrow$ K folgenkompakt. K ist nicht folgenkompakt: Setze $A_i := \left(a_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_j^{(i)} = \begin{cases} 1, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$. Dann ist $\| A_i \| = 1$, d.h. $A_i \in K$ und es gilt für $i \neq j$: $\| A_i - A_j \| = (1^2 + 1^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Die Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat also keinen Häufungspunkt in K, d.h. man kann keine konvergente Teilfolge auswählen. K ist also nicht folgenkompakt und damit auch nicht kompakt.

1.1.6 Definition (Orthonormalsystem)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. Ein endliches oder abzählbar unendliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\} \subset \mathcal{H}$ heißt orthonormiert, wenn gilt: $(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}$.

1.1.7 Beispiel

1) In dem in 1.1.5 definierten Hilbertraum bilden die $A_j := (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem.

2) Die Funktionen $\varphi_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, bilden ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi))$.

   Beweis:

   Es ist

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{ikx}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$$

   und für $k \neq m$ gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_k, \varphi_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}\overline{e^{imx}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i(k-m)} [e^{i(k-m)x}]_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{1}{2\pi i(k-m)} \cdot (e^{i(k-m)\pi} - e^{-i(k-m)\pi}).\end{aligned}$$

   Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $e^{i\pi \cdot 2n} = 1$, $e^{i\pi(2n+1)} = -1$. Also ist $e^{i(k-m)\pi} = e^{-i(k-m)\pi}$ und daher $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ für $k \neq m$.

1.1.8 Definition (Fourierkoeffizient[1])

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\} \subset \mathcal{H}$ ein Orthonormalsystem, $f \in \mathcal{H}$. Dann heißt $f_k := (f, \varphi_k)$ der k-te Fourierkoeffizient von f.

1.1.9 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $f \in \mathcal{H}$. Seien $\varphi_1, ..., \varphi_N \in \mathcal{H}$ orthonormiert, $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$. Es gilt:

1) $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 .$

2) $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |f_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - f_k|^2 .$

Das heißt, die Approximation von f durch Linearkombinationen der $\varphi_1, ..., \varphi_N$ wird bestmöglich, wenn die Koeffizienten gerade die Fourierkoeffizienten sind.

Beweis:

1) Es ist

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right) = \\ &= (f, f) + \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right) - \left(f, \sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k \right) - \left(\sum_{k=1}^{N} f_k \varphi_k, f \right) =\end{aligned}$$

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

$$
\begin{aligned}
&= (\mathrm{f},\mathrm{f}) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathrm{f}_k\overline{\mathrm{f}_l}(\varphi_k,\varphi_l) - \sum_{k=1}^{N}\overline{\mathrm{f}_k}(\mathrm{f},\varphi_k) - \sum_{k=1}^{N}\mathrm{f}_k(\varphi_k,\mathrm{f}) = \\
&= (\mathrm{f},\mathrm{f}) + \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2 - 2\sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2 = \|\mathrm{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2 .
\end{aligned}
$$

2) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k \right\|^2 &= \left\| \underbrace{\mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k\varphi_k}_{=:F} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(\mathrm{f}_k - c_k)\varphi_k}_{=:G} \right\|^2 = \\
&= (F,F) + (G,G) + (F,G) + (G,F) = (F,F) + (G,G) + 2\mathrm{Re}\,(F,G),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{Re}\,(F,G) &= 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k\varphi_k, \sum_{k=1}^{N}(\mathrm{f}_k - c_k)\varphi_k \right) = \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N}(\overline{\mathrm{f}_k} - \overline{c_k})(\mathrm{f},\varphi_k) - \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathrm{f}_k(\overline{\mathrm{f}_l} - \overline{c_l})(\varphi_k,\varphi_l) \right] = \\
&= 2\mathrm{Re}\left[\sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k(\overline{\mathrm{f}_k} - \overline{c_k}) - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k(\overline{\mathrm{f}_k} - \overline{c_k}) \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde die Orthonormalität der $\varphi_1, ..., \varphi_N$ ausgenützt.

Nach 1) ist $(F,F) = \|\mathrm{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2$ und für (G,G) erhält man wegen der Orthonormalität der $\varphi_1, ..., \varphi_N$: $(G,G) = \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k - c_k|^2$, also ergibt sich die Behauptung.

1.1.10 Satz (Besselsche[1] Ungleichung)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein Orthonormalsystem. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{f}_k|^2 \leq \|\mathrm{f}\|^2$, das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $\lim_{N\to\infty} \left\| \mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k\varphi_k \right\| = 0$, d.h. wenn $\mathrm{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{f}_k\varphi_k$ ist.

<u>Beweis</u>:

Nach obigem Satz 1.1.9 ist $0 \leq \left\| \mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k\varphi_k \right\|^2 = \|\mathrm{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2$, also gilt für alle $N \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2 \leq \|\mathrm{f}\|^2$, d.h. die Reihe konvergiert und die Ungleichung im Satz gilt.

$$
\|\mathrm{f}\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |\mathrm{f}_k|^2 \overset{1.1.9,1)}{\Longleftrightarrow} \lim_{N\to\infty} \left\| \mathrm{f} - \sum_{k=1}^{N} \mathrm{f}_k\varphi_k \right\|^2 = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{f}_k\varphi_k .
$$

1.1.11 Definition (vollständiges Orthonormalsystem, VONS)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein Orthonormalsystem. $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ heißt <u>vollständig</u> (in $\mathcal{H}$) genau dann, wenn für jedes $\mathrm{f} \in \mathcal{H}$ die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathrm{f}_k|^2 = \|\mathrm{f}\|^2$ gilt.

[1] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

1.1.12 Beispiel

Die in 1.1.7 definierte Orthonormalsysteme in l^2 bzw. $L^2((-\pi,\pi))$ sind vollständig.

Beweis:

1) Ist $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, so ist der k-te Fourierkoeffizient gerade a_k. Also gilt $\|A\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

2) Ohne Beweis.

1.1.13 Bemerkung

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein Orthonormalsystem. Es gilt:
$\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ist vollständig $\iff$ Zu jedem $f \in \mathcal{H}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N = N(\varepsilon, f) \in \mathbb{N}$, $c_1, ..., c_N \in \mathbb{C}$, mit $\left\| f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k \right\| < \varepsilon$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Wähle $c_k = f_k$.

„$\Leftarrow$“ Nach Satz 1.1.9 folgt $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$, also die Vollständigkeit.

1.1.14 Satz (Cauchy[1]-Schwarzsche[2] Ungleichung)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, seien $f,\ g \in \mathcal{H}$. Dann gilt: $|(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Beweis:
$0 \leq (f+\lambda g, f+\lambda g) = (f,f) + \overline{\lambda}(f,g) + \lambda(f,g) + \lambda\overline{\lambda}(g,g)$.
Für (g,g) $\neq 0$ setze $\lambda = -\frac{(f,g)}{(g,g)}$. Dann hat man

$$0 \leq (f,f) - \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)} - \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)} + \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)} = (f,f) - \frac{|(f,g)|^2}{(g,g)}$$
$$\iff \quad |(f,g)|^2 \leq (f,f)\cdot(g,g) \iff |(f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| .$$

1.1.15 Bemerkungen

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $x_n, x, y_n, y \in \mathcal{H}$.

1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   a) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

   b) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ und für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} (x_n, y) = (x, y)$.

2) Sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)
[2] Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Beweis:

1) a)$\Rightarrow$ b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$
Weil für Normen bekanntlich $\|f-g\| \geq |\|f\| - \|g\||$ gilt, hat man

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\|x_n\| - \|x\|| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

und folglich $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.
Unter Verwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung 1.1.14 erhält man für alle $y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} |(x_n, y) - (x, y)| = \lim_{n\to\infty} |(x_n - x, y)| \\ &\overset{1.1.14}{\leq} \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| \cdot \|y\| = \|y\| \cdot \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0. \end{aligned}$$

b)$\Rightarrow$ a) Man erhält

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = \lim_{n\to\infty} (x_n - x, x_n - x) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big[(x_n, x_n) - (x_n, x) - (x, x_n) + (x, x)\Big] = \\ &= \lim_{n\to\infty} \Big[\|x_n\|^2 + \|x\|^2 - (x_n, x) - \overline{(x_n, x)}\Big] = \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, x) = 0, \end{aligned}$$

also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

2) Nach 1) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = \|y\|$, also gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\|y_n\| \leq M$.
Es ist dann

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \overset{1.1.14}{\leq} \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \leq \\ &\leq M \cdot \|x_n - x\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| . \end{aligned}$$

Für $n \longrightarrow \infty$ konvergiert dies gegen 0, also hat man $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$.

1.1.16 Hilfssatz (Schmidtsches[1] Orthonormalisierungsverfahren)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, seien $f_1, ..., f_N \in \mathcal{H}$ linear unabhängig. Dann gibt es ein orthonormiertes System $\varphi_1, ..., \varphi_N$ mit

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}\varphi_1, \\ f_2 &= c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2, \\ &\vdots \\ f_N &= c_{N1}\varphi_1 + ... + c_{NN}\varphi_N, \end{aligned}$$

wobei die c_{ij} komplexe Konstanten sind.

Beweis:
Fischer, Lineare Algebra, 6.2.6, S. 193

[1] Erhard Schmidt (1876-1959)

1.1.17 Definition (separabel)

Ein Hilbertraum (allgemeiner: topologischer Raum) heißt separabel, wenn er eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält. Für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ bedeutet dies: Es gibt eine abzählbare Teilmenge $S = \{f_1, f_2, ...\} \subset \mathcal{H}$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $f \in \mathcal{H}$ gibt es ein $f_k \in S$ mit $\| f - f_k \| < \varepsilon$.

1.1.18 Satz

Sei (X,d) ein separabler metrischer Raum, $M \subset X$. Dann ist M mit der Teilraumtopologie separabel.

Beweis:
X ist separabel, also gibt es eine abzählbare Menge $A = \{a_1, a_2, ...\}$ mit $\overline{A} = X$. Setze

$$\Gamma := \left\{ (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \left\{ g \in X \mid d(a_m, g) < \frac{1}{n} \right\} \cap M \neq \emptyset \right\}.$$

Γ ist eine abzählbare Menge. Nach Konstruktion gibt es nun zu jedem $(m,n) \in \Gamma$ ein $g_{mn} \in M$ mit $d(a_m, g_{mn}) < \frac{1}{n}$. Die g_{mn} liegen dicht in M: Sei $g \in M,\ n \in \mathbb{N}$. Da $\overline{A} = X$, gibt es ein $a_m \in A$ mit $d(a_m, g_{mn}) < \frac{1}{n}$. Also ist $(m,n) \in \Gamma$, d.h. es gibt ein $g_{mn} \in M$ mit $d(a_m, g_{mn}) < \frac{1}{n}$. Man hat jetzt $d(g, g_{mn}) \leq d(g, a_m) + d(a_m, g_{mn}) < \frac{2}{n}$, d.h. $B := \{g_{mn} \mid (m,n) \in \Gamma\}$ ist eine abzählbare dichte Teilmenge von M.

1.1.19 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum (unendlicher Dimension). Dann gilt: $\mathcal{H}$ ist separabel $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein abzählbar unendliches VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ in $\mathcal{H}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung existiert ein abzählbar unendliches System $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$, das in $\mathcal{H}$ dicht liegt. O.E. sei $\psi_1 \neq 0$. Streiche in $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ diejenigen ψ_k, für die es $k_1, ..., k_N < k,\ c_{k_1}, ..., c_{k_N} \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $\psi_k = \sum\limits_{j=1}^{N} c_{k_j} \psi_{k_j}$ ist. Da $\mathcal{H}$ unendliche Dimension hat, entsteht dadurch wieder ein abzählbar unendliches System $\{\chi_1, \chi_2, ...\}$. Für dieses System gilt: Jeweils endlich viele der $\chi_1, \chi_2, ...$ sind linear unabhängig und die endlichen Linearkombinationen $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{j_k},\ c_k \in \mathbb{C},\ N \in \mathbb{N}$, liegen dicht in $\mathcal{H}$. Nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren 1.1.16 gibt es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ derart, daß die endlichen Linearkombinationen der $\varphi_1, \varphi_2, ...$ dicht in $\mathcal{H}$ liegen. Nach 1.1.13 ist $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ vollständig.

„$\Leftarrow$" Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein abzählbar unendliches VONS in $\mathcal{H}$. Setze

$$N := \left\{ \lambda_1^{(n)} \varphi_1 + ... + \lambda_n^{(n)} \varphi_n \mid \lambda_k^{(r)} = a_k^{(r)} + i b_k^{(r)},\ a_k^{(r)}, b_k^{(r)} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Dann ist N abzählbar. N ist dicht in $\mathcal{H}$:

Sei $f \in \mathcal{H},\ \varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß $\left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ – das geht, da $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein VONS ist. Wähle nun $\lambda_k^{(n)} = a_k^{(n)} + i b_k^{(n)},\ a_k^{(n)}, b_k^{(n)} \in \mathbb{Q}$ so, daß $\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \left[(f, \varphi_k) - \lambda_k^{(n)} \right] \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann gilt für $g := \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \varphi_k \in N$:

$$\begin{aligned} \| f - g \| &= \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k + \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \varphi_k \right\| \leq \\ &\leq \left\| f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \left[(f, \varphi_k) - \lambda_k^{(n)} \right] \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist N dicht in $\mathcal{H}$.

1.1.20 Satz (Parsevalsche[1] Gleichung)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Prähilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein VONS. Dann gilt für alle f, $g \in \mathcal{H}$:

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g_k},$$

wobei f_k, g_k die Fourierkoeffizienten sind.

<u>Beweis</u>:
Man erhält zunächst mit der Hölderschen und der Besselschen Ungleichung 1.1.10:

$$\sum_{k=1}^{N} |f_k \overline{g_k}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} |g_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|f\| \cdot \|g\| .$$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g_k}$ absolut. Unter Verwendung von $f_k + g_k = (f, \varphi_k) + (g, \varphi_k) = (f + g, \varphi_k) = (f + g)_k$ ergibt sich weiter: $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(f, g)$ einerseits und

$$\|f + g\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k + g_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k|^2 + |g_k|^2 + 2\mathrm{Re}\, f_k \overline{g_k}) = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g_k}$$

andererseits, wobei mehrmals die Vollständigkeit des Systems $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ausgenützt wurde. Durch Vergleich hat man also $\mathrm{Re}\,(f, g) = \mathrm{Re} \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \overline{g_k}$. Ersetzt man f durch i·f, so erhält man die entsprechende Gleichung für die Imaginärteile.

1.1.21 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem. Es gilt: $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ist vollständig genau dann, wenn aus $(f, \varphi_i) = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$ für ein $f \in \mathcal{H}$ schon folgt: f=0.

<u>Beweis</u>:

„$\Rightarrow$" Sei $x \in \mathcal{H}$ mit $(x, \varphi_i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ vollständig ist, gilt in der Besselschen Ungleichung 1.1.10 das Gleichheitszeichen, also ist $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |(x, \varphi_i)|^2 = 0$, d.h. x=0.

„$\Leftarrow$" Sei $f \in \mathcal{H}$. Nach Bessel 1.1.10 gilt: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2 < \infty$. Setzt man nun $a_n := \sum\limits_{i=1}^{n} (f, \varphi_i)\varphi_i$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge: Für m>n hat man

$$\begin{aligned}
\|a_m - a_n\|^2 &= \left\|\sum_{i=n}^{m} (f, \varphi_i)\varphi_i\right\|^2 = \left(\sum_{i=n}^{m} (f, \varphi_i)\varphi_i, \sum_{j=n}^{m} (f, \varphi_j)\varphi_j\right) = \\
&= \sum_{i=n}^{m} \sum_{j=n}^{m} (f, \varphi_i)\overline{(f, \varphi_j)}(\varphi_i, \varphi_j) = \sum_{i=n}^{m} (f, \varphi_i)\overline{(f, \varphi_i)} = \sum_{i=n}^{m} |(f, \varphi_i)|^2 .
\end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2$ konvergiert, bilden die Partialsummen eine Cauchy-Folge und damit auch die $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\mathcal{H}$ ist ein Hilbertraum, also vollständig, d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{H}$ und

[1] Marc-Antoine Parseval (1755-1836)

man kann setzen: $a := \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i$ (in einem Prähilbertraum wäre das nicht möglich!). Jetzt ist unter Verwendung der Orthonormalität

$$(a-f,\varphi_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i,\varphi_k\right) - (f,\varphi_k) = \sum_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)(\varphi_i,\varphi_k) - (f,\varphi_k) = (f,\varphi_k) - (f,\varphi_k) = 0,$$

nach Voraussetzung ist also $a = f = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i$. Nach Bemerkung 1.1.13 ist damit $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ vollständig.

1.1.22 Bemerkung

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit einem abzählbar unendlichen VONS $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$. Definiere $J : l^2 \longrightarrow \mathcal{H},\ (x_i)_{i\in N} \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i$. J ist ein bijektiver, normtreuer Vektorraumhomomorphismus von l^2 in $\mathcal{H}$, der auch das Skalarprodukt erhält.

Beweis:

1) Injektivität: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i\varphi_i \Longrightarrow 0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)\varphi_i \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)\varphi_i,\varphi_k\right) = 0 \Longrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : x_k - y_k = 0.$

2) Surjektivität: Sei $x \in \mathcal{H}$. Setze $x_i := (x,\varphi_i)$. Dann ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ konvergent nach Bessel, 1.1.10, und $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i$.

3) J erhält das Skalarprodukt: $\Big(J\big((x_i)_{i\in N}\big), J\big((y_j)_{j\in N}\big)\Big) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i, \sum\limits_{j=1}^{\infty} y_j\varphi_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_i\overline{y_j}(\varphi_i,\varphi_j)$ $= \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\overline{y_i} = \Big((x_i)_{i\in N},(y_j)_{j\in N}\Big)$. Damit ist J auch normtreu.

Insbesondere ist also jeder separable Hilbertraum isomorph zu l^2.

1.2 Orthogonale Projektion

1.2.1 Vorbemerkungen, Voraussetzungen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein Teilraum M ist ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$. Die Begriffe „abgeschlossen", „abgeschlossene Hülle" sind wie in der Topologie definiert und werden im folgenden vorausgesetzt. Aus der linearen Algebra wird die Definition des Orthogonalkomplements $M^\perp$ eines Teilraums M von $\mathcal{H}$ übernommen: $M^\perp = \{g \in \mathcal{H} \mid \forall f \in M : (f,g) = 0\}$.

1.2.2 Satz von der orthogonalen Zerlegung

Sei M ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein $f_1 \in M$ und ein $f_2 \in M^\perp$ mit $f = f_1 + f_2$. f_1 und f_2 sind durch f eindeutig bestimmt.

Beweis:

1) Existenz der Zerlegung (Idee: Beppo Levi[1]):

Sei $f \in \mathcal{H}$, $d := \inf\limits_{\tilde{g}\in M} \| f - \tilde{g} \|$. Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - g_n \| = d$. Wir zeigen zunächst: $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n \in M$.

Setzt man in der Parallelogrammgleichung (1.1.2, 5)) $\| \frac{x-y}{2} \|^2 + \| \frac{x+y}{2} \|^2 = \frac{1}{2}(\| x \|^2 + \| y \|^2)$ für $x = f - g_n$ und für $y = f - g_m$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{g_m - g_n}{2} \right\|^2 + \left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2}(\| f - g_n \|^2 + \| f - g_m \|^2) \\ \Longleftrightarrow \quad \left\| \frac{g_m - g_n}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2}(\| f - g_n \|^2 + \| f - g_m \|^2) - \left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2 . \end{aligned}$$

Da M ein Teilraum, d.h. ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$ ist, liegt mit g_m und g_n auch $\frac{g_m + g_n}{2}$ in M. Daher ist $\left\| f - \frac{g_n + g_m}{2} \right\|^2 \geq d^2$, also

$$\left\| \frac{g_m - g_n}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}(\| f - g_n \|^2 + \| f - g_m \|^2) - d^2 = \frac{1}{2}(\| f - g_n \|^2 - d^2) + \frac{1}{2}(\| f - g_m \|^2 - d^2).$$

Wähle für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für $m,\ n > N$ beide Klammern kleiner als ε werden, dann ist auch $\| \frac{g_m - g_n}{2} \|^2 \leq \varepsilon$, d.h. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Da $\mathcal{H}$ vollständig ist, gibt es also ein $g \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. Da M abgeschlossen ist, gilt sogar $g \in M$. Es ist nun $d = \| f - g \|$ und für $h \in M$ gilt: $\| f - h \| \geq \| f - g \|$. Setze jetzt $f_1 := g$; $f_2 := f - g$. Zu zeigen bleibt: $f_2 \in M^\perp$, d.h. $\forall \varphi \in M : \ (f_2, \varphi) = 0$. Sei also ein $\varphi \in M$ vorgegeben, sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $e^{i\alpha} \cdot (f_2, \varphi) = | (f_2, \varphi) |$. (Das geht immer, für $(f_2, \varphi) \neq 0$ ist $e^{i\alpha} = \frac{|(f_2,\varphi)|}{(f_2,\varphi)}$.) Da $\varphi \in M$, M Untervektorraum, ist auch $g + \varepsilon e^{i\alpha}\varphi \in M$. Deshalb gilt nach Definition von g: $\| f - g - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi \| \geq \| f - g \|$, also $\| f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi \|^2 \geq \| f_2 \|^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} (f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi, f_2 - \varepsilon e^{i\alpha}\varphi) &= \| f_2 \|^2 + \varepsilon^2 \| \varphi \|^2 - 2\mathrm{Re}\,(f_2, \varepsilon e^{i\alpha}\varphi) = \\ &= \| f_2 \|^2 + \varepsilon^2 \| \varphi \|^2 - 2\varepsilon \mathrm{Re}\, e^{i\alpha}(f_2, \varphi) \geq \| f_2 \|^2 . \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $\varepsilon \| \varphi \|^2 \geq 2\mathrm{Re}\, e^{i\alpha}(f_2, \varphi) = 2\, | (f_2, \varphi) |$. Für $\varepsilon \longrightarrow 0$ erhält man $0 \geq | (f_2, \varphi) |$, also $(f_2, \varphi) = 0$, d.h. $f_2 \in M^\perp$.

2) Eindeutigkeit:

Sei $f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2',\ f_1, f_1' \in M, f_2, f_2' \in M^\perp$. Dann ist $0 = f_1 - f_1' + f_2 - f_2'$, also

$$0 = (f_1 - f_1' + f_2 - f_2', f_1 - f_1') = \| f_1 - f_1' \|^2 + (f_2 - f_2', f_1 - f_1') = \| f_1 - f_1' \|^2,$$

da $f_1 - f_1' \in M,\ f_2 - f_2' \in M^\perp$. Also hat man $f_1 = f_1'$. Daraus folgt $f_2 = f_2'$. Die Zerlegung ist damit eindeutig.

1.2.3 Satz

Sei M ein Teilraum eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Dann ist: $M^\perp = \overline{M}^\perp = \overline{M^\perp}$, $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

[1] Beppo Levi (1875-1961)

Beweis:

1) Sei $f \in M^\perp$, $g \in \overline{M}$, $g = \lim_{n\to\infty} g_n$ mit $g_n \in M$. Nach 1.1.15 ist $(g,f) = \lim_{n\to\infty}(g_n, f) = 0$, also gilt $f \in \overline{M}^\perp$, d.h. $M^\perp \subset \overline{M}^\perp$.

   Ist umgekehrt $f' \in \overline{M}^\perp$, so gilt für alle $g \in \overline{M}$: $(g, f') = 0$. Da $M \subset \overline{M}$, gilt dies also insbesondere für alle $g \in M$, es ist daher auch $\overline{M}^\perp \subset M^\perp$.

2) $M^\perp$ ist abgeschlossen: Sei $g \in M$ beliebig, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $M^\perp$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dann ist $0 = \lim_{n\to\infty}(f_n, g) = (f, g)$, also $f \in M^\perp$, d.h. $M^\perp = \overline{M^\perp}$.

3) $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$:

   „$\supset$“ Es ist $M \subset (M^\perp)^\perp$, denn für $f \in M, g \in M^\perp$ gilt: $(f,g) = 0$, also ist $f \in (M^\perp)^\perp$. Nach 2) ist $(M^\perp)^\perp$ abgeschlossen, also ist $\overline{M} \subset (M^\perp)^\perp$.

   „$\subset$“ Nach Satz 1.2.2 gibt es zu $f \in (M^\perp)^\perp$ eindeutig bestimmte $f_1 \in \overline{M}, f_2 \in \overline{M}^\perp = M^\perp$ mit $f = f_1 + f_2$. Es ist (wegen $f \in (M^\perp)^\perp, f_2 \in M^\perp$) : $0 = (f, f_2) = (f_1, f_2) + (f_2, f_2) = 0 + \|f_2\|^2$. Also ist $f_2 = 0$, d.h. $f = f_1 \in \overline{M}$.

1.2.4 Satz

Sei M ein Teilraum eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$. Es gilt: M ist dicht in $\mathcal{H} \iff M^\perp = \{0\}$, d.h. gilt für $g \in \mathcal{H}$: $\forall f \in M$: $(f, g) = 0$, so folgt schon: $g = 0$.

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ $M^\perp \overset{1.2.3}{=} \overline{M}^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$. ($\mathcal{H}^\perp = \{0\}$ sieht man so: Sei $f \in \mathcal{H}^\perp$. Da $\mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{H}$, gilt auch $f \in \mathcal{H}$, also: Aus $f \in \mathcal{H}^\perp$ folgt $(f,f) = 0$ und damit $f = 0$.)

„$\Leftarrow$ “ Sei $M^\perp = \{0\}$. Dann gilt nach Satz 1.2.3: $\overline{M} = (M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$, d.h. M liegt dicht in $\mathcal{H}$.

1.3 Beschränkte lineare Funktionale in $\mathcal{H}$

1.3.1 Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung A: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt <u>lineares Funktional</u>, wenn A homogen linear ist, d.h. wenn für f, $g \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$. A heißt <u>beschränkt</u>, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: $|A(f)| \leq c \cdot \|f\|$. Für beschränkte A setze $\|A\| := \sup_{f\in\mathcal{H}, f\neq 0} \frac{|Af|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |Af|$. Falls A nicht beschränkt ist, setze $\|A\| = \infty$.

1.3.2 Bemerkung

Sei A ein lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Es gilt: A stetig $\iff$ A beschränkt.

Beweis:
Im Anhang, Lemmata B.1.13 und B.2.7.

1.3.3 Beispiel

Sei $g \in \mathcal{H}$ fest. Durch $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto (f, g)$ wird ein lineares Funktional in $\mathcal{H}$ gegeben. Es ist $|Af| \leq \|f\| \cdot \|g\|$, also ist A stetig und es gilt $\|A\| \leq \|g\|$. Für $g \neq 0$ ist $|Ag| = (g, g) = \|g\|^2 \iff \|A\| \geq \|g\|$, also hat man insgesamt $\|A\| = \|g\|$.

1.3.4 Rieszscher Darstellungssatz (Riesz[1]-Fréchet[2])

Sei A ein beschränktes lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$, so daß für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: Af = (f,g). Insbesondere ist $\|A\| = \|g\|$. g heißt das erzeugende Element von A.

Beweis:

1) Existenz eines solchen g:

   Sei $M := \{f \in \mathcal{H} \mid Af = 0\} = A^{-1}(\{0\})$. Da A stetig ist, ist M abgeschlossen. Für $M = \mathcal{H}$ definiere $g := 0$. Sei also $M \neq \mathcal{H}$. Da M abgeschlossen ist, gibt es für jedes $f \in \mathcal{H}$ eine Zerlegung $f = f_1 + f_2,\ f_1 \in M, f_2 \in M^\perp$ nach Satz 1.2.2. Daher ist $M^\perp \neq \{0\}$. Sei $h \in M^\perp, h \neq 0$. Da $M \cap M^\perp = \{0\}$, ist dann $Ah \neq 0$. Setze $g := \frac{\overline{Ah}}{\|h\|^2} \cdot h$, dann ist $\|g\|^2 = \frac{|Ah|^2}{\|h\|^4} \cdot \|h\|^2 = \frac{|Ah|^2}{\|h\|^2}$. Weiter ergibt sich $Ag = A\left(\frac{\overline{Ah}}{\|h\|^2} \cdot h\right) = \frac{\overline{Ah}}{\|h\|^2} \cdot Ah = \frac{|Ah|^2}{\|h\|^2} = \|g\|^2 \neq 0$. Behauptung: $\forall f \in \mathcal{H} :\ Af = (f,g)$.

   Beweis:

   a) $\forall f \in M :\ 0 = Af = (f,g)$, denn $g \in M^\perp$. ($M^\perp$ ist ja ein Untervektorraum)
   b) $f \notin M$: Man hat mit $c := \frac{Af}{Ag}$: $A(f - cg) = Af - c \cdot Ag = Af - Af = 0 \iff \hat{f} = f - cg \in M \iff f = \hat{f} + cg$. Damit ist $Af = A\hat{f} + c \cdot Ag \overset{a)}{=} (\hat{f}, g) + c \cdot \|g\|^2 = (\hat{f}, g) + (cg, g) = (\hat{f} + cg, g) = (f, g)$.

2) Eindeutigkeit:

   Sei $\forall f \in \mathcal{H} :\ Af = (f, g_1) = (f, g_2) \iff (f, g_1 - g_2) = 0 \iff g_1 - g_2 \in \mathcal{H}^\perp = \{0\}$.

1.4 Lineare Operatoren in $\mathcal{H}$

1.4.1 Definition (linearer Operator)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{D}$ ein Teilraum. Ein linearer Operator T ist eine lineare Abbildung T: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$, d.h. für $f,\ g \in \mathcal{D},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$. $\mathcal{D} = \mathcal{D}(T)$ heißt Definitionsbereich von T. $T(\mathcal{D}(T)) = \mathcal{R}(T)$ heißt Wertebereich von T. $\mathcal{R}(T)$ ist ebenfalls Teilraum von $\mathcal{H}$.

1.4.2 Beispiele

1. $\mathcal{H} = L^2((a,b)),\ \mathcal{D} = C^0([a,b]),\ K : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $T : \mathcal{D} \longrightarrow L^2((a,b))$, $f \longmapsto \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy \in C^0([a,b])$. T ist linear.

2. $\mathcal{H} = L^2((a,b)),\ \mathcal{D} = C_0^2((a,b))$. Sei $p \in C^1([a,b], \mathbb{R}),\ q \in C^0([a,b], \mathbb{R})$, für $x \in [a,b]$ sei $p(x) > 0$. Setze T: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H},\ f \longmapsto (-pf')' + qf$. T ist linear. Da f kompakten Träger hat, genügt $p \in C^1((a,b)),\ q \in C^0((a,b))$.

1.4.3 Definition (beschränkter Operator, Norm eines Operators)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. T heißt beschränkt, wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ gilt: $\|Tf\| \leq c \cdot \|f\|$. Man setzt wieder $\|T\| = \sup\limits_{f \in \mathcal{D}(T), f \neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \sup\limits_{f \in \mathcal{D}(T), \|f\|=1} \|Tf\|$, $\|Tf\| = \infty$ ist zugelassen.

[1] Friedrich Riesz (1880-1956)
[2] Maurice Fréchet (1878-1973)

1.4.4 Bemerkung

T: $\mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ T ist stetig.

Beweis: Im Anhang, Lemma B.2.7.

1.4.5 Beispiel

Differentialoperatoren sind i.a. nicht stetig. Dies sieht man mit einem Skalierungsargument: Sei

$$\mathrm{T} : \mathrm{C}^1([-2,2]) \longrightarrow \mathrm{L}^2([-2,2]),\ \mathrm{f} \longmapsto \mathrm{f}'.$$

Sei nun $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty([-2,2])$ eine Funktion mit $\varphi(\mathrm{x}) = 0$ für $|\mathrm{x}| \geq 1$, $\int\limits_{-2}^{2} \varphi(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = 1$ (eine solche Funktion wird z.B. in Definition A.5.3 angegeben). Setze nun $\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{x}) := \varphi(\mathrm{kx})$. Dann ist

$$\mathrm{T}\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{x}) = \mathrm{k} \cdot (\mathrm{T}\varphi)(\mathrm{kx}) = \mathrm{k} \cdot \varphi'(\mathrm{kx})$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \|\varphi_\mathrm{k}\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \int\limits_{-2}^{2} |\varphi_\mathrm{k}(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx} = \int\limits_{-2}^{2} |\varphi(\mathrm{k}\cdot\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx} = \int\limits_{-\frac{1}{\mathrm{k}}}^{\frac{1}{\mathrm{k}}} |\varphi(\mathrm{kx})|^2\ \mathrm{dx} = \\ &= \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \int\limits_{-1}^{1} |\varphi(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathrm{T}\varphi_\mathrm{k}\|_{\mathrm{L}^2}^2 &= \int\limits_{-2}^{2} |\varphi_\mathrm{k}'(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx} = \int\limits_{-2}^{2} |\mathrm{k}\cdot\varphi'(\mathrm{kx})|^2\ \mathrm{dx} = \mathrm{k}^2 \cdot \int\limits_{-\frac{1}{\mathrm{k}}}^{\frac{1}{\mathrm{k}}} |\varphi'(\mathrm{kx})|^2\ \mathrm{dx} = \\ &= \mathrm{k}^2 \cdot \frac{1}{\mathrm{k}} \int\limits_{-1}^{1} |\varphi'(\mathrm{x})|^2\ \mathrm{dx} = \mathrm{k}\cdot \|\varphi'\|_{\mathrm{L}^2}^2\ . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\lim_{\mathrm{k}\to\infty} \frac{\|\mathrm{T}\varphi_\mathrm{k}\|_{\mathrm{L}^2}^2}{\|\varphi_\mathrm{k}\|_{\mathrm{L}^2}^2} = \lim_{\mathrm{k}\to\infty} \frac{\mathrm{k}\cdot \|\varphi'\|_{\mathrm{L}^2}^2}{\frac{1}{\mathrm{k}}\cdot \|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2} = \frac{\|\varphi'\|_{\mathrm{L}^2}^2}{\|\varphi\|_{\mathrm{L}^2}^2} \cdot \lim_{\mathrm{k}\to\infty} \mathrm{k}^2 = \infty.$$

Der Operator T ist also nicht beschränkt und damit nicht stetig.
Deshalb werden wir die Differentialoperatoren meist nicht direkt untersuchen. Wir betrachten stattdessen ihre Inverse, einen Integraloperator, der – bei beschränktem Grundgebiet – nicht nur stetig ist, sondern noch weitere „schöne“ Eigenschaften aufweist.

1.4.6 Definition (Fortsetzung)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, seien $\mathrm{T}, \widetilde{\mathrm{T}}$ lineare Operatoren in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereichen $\mathcal{D}(\mathrm{T}), \mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{T}})$. $\widetilde{\mathrm{T}}$ heißt eine Fortsetzung von T (abgekürzt $\mathrm{T} \subset \widetilde{\mathrm{T}}$ oder $\widetilde{\mathrm{T}} \supset \mathrm{T}$) genau dann, wenn gilt:

1) $\mathcal{D}(\mathrm{T}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{\mathrm{T}})$,

2) $\forall \mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T}) :\ \mathrm{Tf} = \widetilde{\mathrm{T}}\mathrm{f}$.

Die wichtigste Art der Fortsetzung ist die durch Abschließung. Es gilt:

1.4.7 Satz (Existenz und Eindeutigkeit der Abschließung)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter linearer Operator. $\mathcal{D}(T)$ sei dicht in $\mathcal{H}$. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $\overline{T} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, der T auf ganz $\mathcal{H}$ fortsetzt, d.h. $T \subset \overline{T}$. $\overline{T}$ heißt Abschließung von T in $\mathcal{H}$. Es ist $\| \overline{T} \| = \| T \|$.

Beweis:

1) Existenz von $\overline{T}$:

   Sei $f \in \mathcal{H}$, $f_n \in \mathcal{D}(T)$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Dann ist $\| Tf_n - Tf_m \| = \| T(f_n - f_m) \| \leq c \cdot \| f_n - f_m \|$. Demnach ist $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, also konvergent. Setze $\overline{T}f := \lim_{n\to\infty} Tf_n$. $\overline{T}$ ist wohldefiniert: Sei $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge mit $f'_n \in \mathcal{D}(T)$, $\lim_{n\to\infty} f'_n = f$. Dann folgt $\lim_{n\to\infty}(f_n - f'_n) = 0$, also auch $\lim_{n\to\infty}(Tf_n - Tf'_n) = 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} Tf_n = \lim_{n\to\infty} Tf'_n$.

2) Eindeutigkeit:

   Sei $f \in \mathcal{H}$, $f_n \in \mathcal{D}(T)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Für jede Abschließung $\overline{T}$ von T gilt – da $\overline{T}$ stetig sein soll: $\overline{T}f = \lim_{n\to\infty} \overline{T}f_n = \lim_{n\to\infty} Tf_n$.

3) $\| \overline{T} \| = \| T \|$:

   Aus $\| \overline{T}f \| = \lim_{n\to\infty} \| Tf_n \| \leq \| T \| \cdot \lim_{n\to\infty} \| f_n \| = \| T \| \cdot \| f \|$ erhält man $\| \overline{T} \| \leq \| T \|$. Da $\overline{T}$ Fortsetzung von T ist, gilt aber:

$$\| T \| = \sup_{f\in\mathcal{D}(T),\|f\|=1} \| Tf \| = \sup_{f\in\mathcal{D}(T),\|f\|=1} \| \overline{T}f \| \leq \sup_{f\in\mathcal{H},\|f\|=1} \| \overline{T}f \| = \| \overline{T} \| .$$

   Also ist $\| T \| = \| \overline{T} \|$.

1.4.8 Bemerkung

Seien T_1, T_2 lineare beschränkte Operatoren in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereichen $\mathcal{D}(T_1)$, $\mathcal{D}(T_2)$. Setze $\mathcal{D}(T_1T_2) = \{g \mid g \in \mathcal{D}(T_2), T_2g \in \mathcal{D}(T_1)\}$, $T_1T_2f := T_1(T_2f)$. Dann ist T_1T_2 ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T_1T_2)$. Wenn T_1, T_2 beschränkt sind, ist $\| T_1T_2f \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2f \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \| \cdot \| f \|$, also $\| T_1T_2 \| \leq \| T_1 \| \cdot \| T_2 \|$. Für $\mathcal{D}(T_1) = \mathcal{D}(T_2) = \mathcal{H}$ ist $\mathcal{D}(T_1T_2) = \mathcal{H}$. Die Menge der beschränkten linearen in $\mathcal{H}$ erklärten Operatoren bildet also eine Algebra.

1.4.9 Satz (Existenz und Eindeutigkeit der Adjungierten)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer beschränkter Operator mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. Dann gibt es genau einen linearen beschränkten Operator T^* in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$, so daß gilt: $\forall x, y \in \mathcal{H} : (Tx, y) = (x, T^*y)$. T^* heißt die Adjungierte zu T. Für T^* gilt: T^* ist beschränkt, $\| T^* \| = \| T \|$, weiter ist $T^{**} = (T^*)^* = T$.

Beweis:

1) Existenz:

   Sei $y \in \mathcal{H}$ fest, aber beliebig. Setze $A_y : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto (Tx, y)$. A_y ist ein lineares Funktional. Es gilt: $| A_y(x) | = | (Tx, y) | \overset{1.1.14}{\leq} \| Tx \| \cdot \| y \| \leq \| T \| \cdot \| x \| \cdot \| y \|$, also ist A_y beschränkt. Nach Riesz-Fréchet 1.3.4 gibt es also genau ein $y^* \in \mathcal{H}$ mit $A_y(x) = (x, y^*)$. Setze nun $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $y \longmapsto y^*$. Es ist also $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$. T^* ist linear:

   Sei nun $x \in \mathcal{H}$ fest, aber beliebig. Seien $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Es ist

$$\begin{aligned} (x, \alpha T^*y_1 + \beta T^*y_2) &= (x, \alpha y_1^* + \beta y_2^*) = \overline{\alpha}(x, y_1^*) + \overline{\beta}(x, y_2^*) = \overline{\alpha}(Tx, y_1) + \overline{\beta}(Tx, y_2) = \\ &= (Tx, \alpha y_1) + (Tx, \beta y_2) = (Tx, \alpha y_1 + \beta y_2) = A_{\alpha y_1 + \beta y_2}(x) = \\ &= (x, T^*(\alpha y_1 + \beta y_2)). \end{aligned}$$

Damit folgt $T^*(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha T^* y_1 + \beta T^* y_2$.

2) Eindeutigkeit:
$\forall x, y \in \mathcal{H}: \ (x, T^*y) = (x, Sy) \Longrightarrow \forall x, y \in \mathcal{H}: \ (x, T^*y - Sy) = 0 \Longrightarrow \forall y \in \mathcal{H}: \ T^*y = Sy$.

3) Beschränktheit:
$|\,(T^*y, x)\,| = |\,(Tx, y)\,| \leq \|\,T\,\| \cdot \|\,x\,\| \cdot \|\,y\,\|$. Setzt man nun $x = T^*y$, so ergibt sich: $\|\,T^*y\,\|^2 \leq \|\,T\,\| \cdot \|\,T^*y\,\| \cdot \|\,y\,\| \Longleftrightarrow \|\,T^*y\,\| \leq \|\,T\,\| \cdot \|\,y\,\| \Longrightarrow \|\,T^*\,\| \leq \|\,T\,\|$.

4) $T^{**} = T$:
$(Tx, y) = (x, T^*y) = \overline{(T^*y, x)} = \overline{(y, (T^*)^*x)} = ((T^*)^*x, y) \Longrightarrow T = (T^*)^* = T^{**}$.

5) $\|\,T\,\| = \|\,T^*\,\|$:
Nach 3) gilt: $\|\,T^*\,\| \leq \|\,T\,\|$; $\|\,T^{**}\,\| \leq \|\,T^*\,\|$. Weil nach 4) $T^{**} = T$, folgt also $\|\,T\,\| = \|\,T^*\,\|$.

1.4.10 Bemerkungen

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, seien $S, T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ beschränkte lineare Operatoren. Setze $\mathcal{N}(T) := \{f \in \mathcal{H} \mid Tf = 0\}$ und $\mathcal{R}(T) := \{g \in \mathcal{H} \mid \exists f \in \mathcal{H} : Tf = g\}$. Es gilt:

1) $(ST)^* = T^*S^*$.
2) $(S + T)^* = S^* + T^*$.
3) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$.
4) $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$.
5) Im allgemeinen ist $\mathcal{R}(T^*) \neq \mathcal{N}(T)^\perp$.

Beweis

1) Es ist $(STx, y) = (Tx, S^*y) = (x, T^*S^*y)$. Also ist $(ST)^* = T^*S^*$.

2) $((S + T)x, y) = (Sx + Tx, y) = (Sx, y) + (Tx, y) = (x, S^*y) + (x, T^*y) = (x, (S^* + T^*)y)$.
Also ist $(S + T)^* = S^* + T^*$.

3) „$\subset$“ Sei $g \in \mathcal{N}(T), f \in \mathcal{R}(T^*)$. Dann gibt es ein $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ mit $T^*\widetilde{f} = f$. Weil $g \in \mathcal{N}(T)$, ist $Tg = 0$. Also folgt: $(f, g) = (T^*\widetilde{f}, g) = (\widetilde{f}, Tg) = (\widetilde{f}, 0) = 0$. Demnach ist $g \in \mathcal{R}(T^*)^\perp$.

„$\supset$“ Sei $g \in \mathcal{R}(T^*)^\perp$, d.h. für alle $f \in \mathcal{R}(T^*)$ gilt: $(f, g) = 0$. Für alle $\widetilde{f} \in \mathcal{H}$ ist $T^*\widetilde{f} =: f \in \mathcal{R}(T^*)$, also gilt für alle $\widetilde{f} \in \mathcal{H} : 0 = (f, g) = (T^*\widetilde{f}, g) = (\widetilde{f}, Tg)$. Folglich ist $Tg = 0$, d.h. $g \in \mathcal{N}(T)$.

4) Nach 3) ist $\mathcal{N}(T) = \mathcal{R}(T^*)^\perp$. Daraus folgt mit Satz 1.2.3: $\mathcal{N}(T)^\perp = (\mathcal{R}(T^*)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{R}(T^*)}$.

5) Sei $T : l^2 \longrightarrow l^2, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist T injektiv, denn ist $T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{a_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$, so folgt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Demnach folgt $\mathcal{N}(T) = 0$. Weiter ist $T^* = T$: $\Big(T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}), (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \cdot b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{b_n}{n} = \Big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, T((b_n)_{n\in\mathbb{N}})\Big)$.

T ist aber nicht surjektiv, denn $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ in l^2, hat aber kein Urbild.
Also ist $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^*) \neq l^2 = (0)^\perp = \mathcal{N}(T)^\perp$.

Zusammenhang mit unendlichen Matrizen:
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$, T ein linearer beschränkter Operator. $T_{ik} := (T\varphi_k, \varphi_i)$. Bei Verwendung des Hilbertraumisomorphismus J: $l^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ aus 1.1.22 ergeben sich folgende Aussagen:

1) $\forall k \in \mathbb{N}: \ t_k = \sum_{i=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < \infty$.

2) $\forall i \in \mathbb{N}: \ \hat{t}_i = \sum_{k=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < \infty$.

3) Ist $t^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |T_{ik}|^2 < \infty$, so ist $\|T\| \leq t$.

1.5 Die Inverse eines linearen Operators

1.5.1 Definition (Inverse eines Operators)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$ und Wertebereich $\mathcal{R}(T)$ ($\mathcal{R}$ von engl. range). Die Abbildung $T: \ \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ sei bijektiv. Die inverse Abbildung $T^{-1}: \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ heißt der zu T inverse Operator T^{-1}.

Bemerkung: T^{-1} ist ein linearer Operator in $\mathcal{H}$: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ x, y \in \mathcal{R}(T)$, d.h. es gibt $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathcal{D}(T)$ mit $T\tilde{x} = x, \ T\tilde{y} = y$. Dann ist $T(\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}) = \alpha T\tilde{x} + \beta T\tilde{y} = \alpha x + \beta y \implies T^{-1}(\alpha x + \beta y) = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} = \alpha T^{-1}x + \beta T^{-1}y$.

1.5.2 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. Notwendig und hinreichend für die Existenz von T^{-1} ist: $Tx = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Beweis:

„⇒ “ T^{-1} existiert $\Longrightarrow$ T ist injektiv. Da $T(0) = T(0 \cdot x) = 0 \cdot T(x) = 0$, folgt also: $Tx = 0 \Longrightarrow x = 0$.

„⇐ “ Sei $Tx = Ty$. Dann ist $T(x–y) = 0$, nach Voraussetzung also $x–y = 0$, d.h. $x = y$. Also ist T injektiv.

1.5.3 Satz (Toeplitz[1])

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, T ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$. T hat genau dann einen in $\mathcal{H}$ erklärten beschränkten inversen Operator T^{-1} (insbesondere ist dann $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$), wenn gilt:

1) Es gibt ein $d > 0$, so daß $\forall x \in \mathcal{H} : \|Tx\| \geq d \cdot \|x\|$.

2) Ist $T^*x = 0$ für ein x, so folgt: $x = 0$.

Beweis:

„⇒ “ Sei also T^{-1} überall erklärt und beschränkt. Sei $c > 0$, so daß für alle $y \in \mathcal{H} : \|T^{-1}y\| \leq c \|y\|$. Setzt man $y = Tx$, so erhält man für alle $x \in \mathcal{H} : \|x\| \leq c \cdot \|Tx\| \Longleftrightarrow \|Tx\| \geq \frac{1}{c} \cdot \|x\|$, also 1) mit $d = \frac{1}{c}$. Sei nun $g \in \mathcal{H}$ mit $T^*g = 0$. Dann hat man für alle $f \in \mathcal{H} : \ 0 = (f, T^*g) = (Tf, g)$. Da $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$, gilt also für $\tilde{f} \in \mathcal{H} : \ (\tilde{f}, g) = 0 \Longrightarrow g = 0$, also gilt 2).

„⇐ “ $Tx = 0 \Longrightarrow 0 = \|Tx\| \geq d \cdot \|x\| \geq 0 \Longleftrightarrow x = 0$. Nach obigem Hilfssatz 1.5.2 existiert also die Inverse $T^{-1}: \ \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$. T^{-1} ist beschränkt: Setzt man $x = T^{-1}y$ in 1) ein, so ist $\|y\| \geq d \cdot \|T^{-1}y\| \Longrightarrow \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{d} \cdot \|y\|$. Zu zeigen bleibt noch: $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$.

[1] Otto Toeplitz (1881-1940)

a) $\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossen:

Seien $g_n \in \mathcal{R}(T)$, $g \in \mathcal{H}$, so daß gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$. Es existieren $f_n \in \mathcal{H}: \; Tf_n = g_n$. Man erhält: $\| f_n - f_m \| \leq \frac{1}{d} \cdot \| T(f_n - f_m) \| = \frac{1}{d} \cdot \| g_n - g_m \|$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{H}$, d.h. es gibt ein $f \in \mathcal{H}: \; \lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. T ist beschränkt, also stetig, deshalb gilt $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = Tf$, demnach ist $g \in \mathcal{R}(T)$.

b) $\overline{\mathcal{R}(T)} = \mathcal{H}$:

Sei $g \in \mathcal{R}(T)^{\perp}$, d.h. $\forall f \in \mathcal{H}: \; 0 = (Tf, g) = (f, T^*g) \implies T^*g = 0 \overset{2)}{\implies} g = 0$.

1.5.4 Beispiel

Der Operator $T : l^2 \longrightarrow l^2, A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_1 = 0, b_n := a_{n-1}$ für $n \geq 2$, ist ein Operator, der die Bedingung 1) des Satzes von Toeplitz 1.5.3 erfüllt, der aber keine <u>in l^2 erklärte</u> beschränkte Inverse hat. Auf Bedingung 2) kann also nicht verzichtet werden.

<u>Beweis</u>:

T ist in ganz l^2 erklärt und es gilt $\| TA \|^2 = 0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \| A \|^2$, d.h. T ist beschränkt. Mit $d = 1$ hat man auch $\| TA \| \geq d \cdot \| A \|$ für alle $A \in l^2$. T ist aber nicht surjektiv, denn alle Bilder haben 0 als erste Komponente. Also hat T keine in ganz l^2 erklärte Inverse.

Wie sieht nun T^* aus? T^* ist durch $(TA, B) = (A, T^*B)$ definiert, seien also $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Es ist

$$(TA, B) = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\overline{b}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b}_{n+1} \overset{!}{=} (A, T^*B).$$

Folglich ist $T^*(b_1, b_2, b_3, ...) = (b_2, b_3, b_4, ...)$. T^* erfüllt offensichtlich die Bedingung 2) im Satz von Toeplitz nicht. Aber es gilt $T^*T = \mathrm{Id}$, d.h. T hat einen beschränkten inversen Operator, der sogar in ganz l^2 erklärt werden kann. Allerdings gilt $TT^*(A) = A$ nur, wenn $A \in \mathcal{R}(T) \neq l^2$.

1.5.5 Definition (hermitescher[1] Operator)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, H ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(H)$. H heißt <u>hermitesch</u> $\iff$

1) $\mathcal{D}(H)$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

2) $\forall f, g \in \mathcal{D}(H): \; (Hf, g) = (f, Hg)$, d.h. $H = H^*$.

In Bemerkung 2.1.11 werden wir sehen: Ist $\mathcal{D}(H) = \mathcal{H}$, so ist H beschränkt.

1.5.6 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, H hermitesch und <u>beschränkt</u>. Weiter existiere eine positive Konstante d, so daß für alle $x \in \mathcal{D}(H) : \| Hx \| \geq d \cdot \| x \|$. Dann gilt: $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{R}(H)$ ist injektiv, $\mathcal{R}(H)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$, die Inverse $H^{-1} : \mathcal{R}(H) \longrightarrow \mathcal{D}(H)$ existiert und ist beschränkt.

<u>Beweis</u>:

Sei $Hx = 0$. Dann ist $0 = \| Hx \| \geq d \cdot \| x \| \geq 0 \implies \| x \| = 0 \implies x = 0$. Nach Hilfssatz 1.5.2 ist H injektiv, d.h. die Inverse existiert. Setzt man $x = H^{-1}y$, so ergibt sich $\| HH^{-1}y \| \geq d \cdot \| H^{-1}y \| \iff \| H^{-1}y \| \leq \frac{1}{d} \cdot \| y \|$, d.h. die Inverse ist beschränkt. $\mathcal{R}(H)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$:

Betrachte die Abschließung von H: $\overline{H} : \; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{R}(\overline{H})$. $\overline{H}$ ist beschränkt (Satz 1.4.7) und es gilt $\forall x \in \mathcal{H} : \| \overline{H}x \| \geq d \cdot \| x \|$. $\overline{H}$ ist hermitesch: Seien $f, g \in \mathcal{H}$, $f_n, g_n \in \mathcal{D}(H)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n =$

[1] Charles Hermite (1822-1901)

f, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Dann ist $(\overline{H}f, g) = \lim_{n\to\infty}(Hf_n, g_n) = \lim_{n\to\infty}(f_n, Hg_n) = (f, \overline{H}g)$. Damit genügt $\overline{H}$ den Voraussetzungen des Satzes von Toeplitz 1.5.3 und es ist daher $\mathcal{R}(\overline{H}) = \mathcal{H}$. D.h., zu $g \in \mathcal{H} = \mathcal{R}(\overline{H})$ existiert ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\overline{H}\, f = g$. Da $\mathcal{D}(H)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, gibt es $f_n \in \mathcal{D}(H)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Daher ist $\lim_{n\to\infty} Hf_n = \lim_{n\to\infty} \overline{H}f_n = \overline{H}f = g$, d.h. $\mathcal{R}(H)$ liegt dicht in $\mathcal{H}$.

1.5.7 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $T\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter linearer bijektiver Operator. T^{-1} existiert also mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{H}$. Sei T^{-1} beschränkt (Nach dem Satz vom inversen Operator B.2.15 ist dies überflüssig). Sei T^* der adjungierte Operator zu T. Dann gilt: $T^* : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ist ebenfalls bijektiv, $(T^*)^{-1}$ ist also in ganz $\mathcal{H}$ definiert, und es gilt: $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Beweis:
Ziel ist natürlich, den Satz von Toeplitz 1.5.3 anzuwenden. Zunächst gilt: T^{-1} ist beschränkt, d.h. es gibt ein $d>0$, so daß $\forall g \in \mathcal{H} : \| T^{-1}g \| \leq \frac{1}{d}\cdot \| g \|$. Setzt man $g = Tf$, so ist also für alle $f \in \mathcal{H} :\ d\cdot \| f \| \leq \| Tf \|$. Nun gilt für alle $g \in \mathcal{H} : \| g \|^2 = (g,g) = (TT^{-1}g, g) = (T^{-1}g, T^*g) \leq \|T^{-1}g\| \cdot \|T^*g\| \leq \frac{1}{d}\cdot \|g\| \cdot \|T^*g\| \iff d\cdot \|g\| \leq \|T^*g\|$.
Weiter sei $(T^*)^*g = 0$. Wegen $T^{**} = T$ folgt $Tg = 0$ und mit $\|Tg\| \geq d\cdot \|g\|$ erhält man $g = 0$.
Die Bedingungen 1) und 2) des Satzes von Toeplitz sind also erfüllt, deshalb existiert $(T^*)^{-1}$, ist in ganz $\mathcal{H}$ erklärt und beschränkt. Schließlich gilt für alle $f, g \in \mathcal{H}$:

$$\Big(f, (T^*)^{-1}g\Big) = \Big(T(T^{-1}f), (T^*)^{-1}g\Big) = \Big(T^{-1}f, T^*((T^*)^{-1}g)\Big) = \Big(T^{-1}f, g\Big) = \Big(f, (T^{-1})^*g\Big),$$

also folgt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

1.6 Unitäre Operatoren, Projektoren

1.6.1 Definition

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ zwei Hilberträume mit Skalarprodukt (x,y) bzw. (x',y')' und Normen $\| x \|$ bzw. $\| x' \|'$. $V\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ heißt linearer Operator, falls für alle $x,\ y \in \mathcal{H},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $V(\alpha x + \beta y) = \alpha V(x) + \beta V(y)$. V heißt beschränkt, falls es eine Konstante $c>0$ gibt, so daß für alle $x \in \mathcal{H} : \| V(x) \|' \leq c\cdot \| x \|$. V heißt isometrisch, falls für alle $x, y \in \mathcal{H} :\ (x,y) = (Vx, Vy)'$. $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}') := \{V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}' \mid V$ ist beschränkter linearer Operator$\}$. Im Falle $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ schreibt man kurz $L(\mathcal{H})$.

1.6.2 Bemerkungen

1) $V\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ beschränkt $\iff \|V\| := \sup_{f\in\mathcal{H}, f\neq 0} \frac{\|Vf\|'}{\|f\|} = \sup_{f\in\mathcal{H}, \|f\|=1} \|Vf\|' < \infty \iff$ V stetig.

2) $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ ist ein Vektorraum. Zusammen mit der in 1) definierten Norm wird $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ zu einem normierten Raum. $L(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ ist vollständig.

3) Isometrische Operatoren sind beschränkt durch 1.

Beweis

1) ist Lemma B.2.7.

2) Sätze B.2.10 und B.2.11.

3) $\| Vf \|'^2 = (Vf, Vf)' = (f,f) = \| f \|^2$.

1.6.3 Definition (unitär)

$\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ seien Hilberträume, U: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ sei linear. U heißt unitär $\Longleftrightarrow$

1) U ist isometrisch,
2) U ist surjektiv.

1.6.4 Bemerkungen

1) Ist U unitär, so ist U bijektiv, U^{-1} existiert und ist in ganz $\mathcal{H}'$ erklärt. U^{-1} ist isometrisch, also ebenfalls unitär.

   Beweis:

   Injektivität: Sei $Uf = Ug$. Dann ist $0 = (Uf - Ug, Uf - Ug)' = \Big(U(f-g), U(f-g)\Big)' = \|f-g\|$, also $f = g$.

   U^{-1} ist isometrisch: Aus $(Uf, Ug)' = (f,g)$ folgt für alle $x', y' \in \mathcal{H}'$: $(x', y')' = (U^{-1}x', U^{-1}y')$.

2) Für $\mathcal{H} = \mathcal{H}'$: Seien U, V unitäre Operatoren in $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $f, g \in \mathcal{H}$: $(UVf, UVg) = (Vf, Vg) = (f, g)$, also ist UV unitär. Die Menge aller unitären Operatoren in $\mathcal{H}$ bildet also eine Gruppe.

1.6.5 Definition

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ Hilberträume, $T: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $T': \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}'$ beschränkte lineare Operatoren. T und T′ heißen unitär äquivalent, wenn es einen unitären Operator $U: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ gibt mit $T' = UTU^{-1}$ (bzw. äquivalent dazu: $T = U^{-1}T'U$).

1.6.6 Bemerkung

Seien T, T′ unitär äquivalent. Dann haben sie die gleichen Eigenwerte.

Beweis:
Aus $Tx = \lambda x$ folgt $U^{-1}T'Ux = \lambda x$, also $T'(Ux) = \lambda \cdot (Ux)$.

1.6.7 Satz

Sei V ein beschränkter linearer Operator in $\mathcal{H}, \mathcal{D}(V) = \mathcal{H}$. V ist genau dann unitär, wenn

$$VV^* = V^*V = \mathrm{Id}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ V ist unitär, also gilt für alle $f, g \in \mathcal{H}$: $(f,g) = (Vf, Vg) = (f, V^*Vg)$, d.h. $V^*V = \mathrm{Id}$. V^{-1} ist ebenfalls unitär, also ist $(f, V^*g) = (Vf, g) = (V^{-1}Vf, V^{-1}g) = (f, V^{-1}g)$, d.h. $V^* = V^{-1}$ und damit $VV^* = \mathrm{Id}$.

„$\Leftarrow$ “ Sei $VV^* = V^*V = \mathrm{Id}$. Dann ist $(V^*f, V^*g) = (VV^*f, g) = (f,g)$ und $(Vf, Vg) = (V^*Vf, g) = (f,g)$. V und V^* sind also isometrisch. Nach dem Satz von Toeplitz 1.5.3 ist V^* der zu V inverse Operator und es ist $\mathcal{R}(V) = \mathcal{H}$. Also ist V unitär.

1.6.8 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener Teilraum. Sei für $f \in \mathcal{H}: \; f = f_1 + f_2, f_1 \in M, f_2 \in M^{\perp}$ die Zerlegung von $\mathcal{H}$ gemäß Satz 1.2.2. $P_M : \mathcal{H} \longrightarrow M, f \longmapsto f_1$ ist ein linearer beschränkter Operator mit folgenden Eigenschaften

1) $P_M^2 = P_M$,
2) $P_M^* = P_M$,
3) $\mathcal{R}(P_M) = M$.

Beweis:

1) und 3) sind klar.
2) Seien $f, g \in \mathcal{H}, Pf = f_1, Pg = g_1$. Dann ist $(Pf, g) = (f_1, g) = (f_1, g_1 + g_2) = (f_1, g_1) + (f_1, g_2) \overset{g_2 \in M^{\perp}}{=} (f_1, g_1)$ und $(f, Pg) = (f, g_1) = (f_1 + f_2, g_1) = (f_1, g_1)$, also $P = P^*$.

1.6.9 Definition (Projektor)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, P ein beschränkter, linearer Operator mit $\mathcal{D}(P) = \mathcal{H}$. P heißt Projektor in $\mathcal{H}$ genau dann, wenn P hermitesch ist (d.h. $P^* = P$) und $P^2 = P$ gilt.

Für Projektoren gilt

1.6.10 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, P ein Projektor in $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ hat die Orthogonalzerlegung $f = Pf + (f - Pf), \; f \in \mathcal{H}, \; Pf \in \mathcal{R}(P), \; f - Pf \in \mathcal{R}(P)^{\perp}$

Beweis:

1) Pf und f − Pf sind orthogonal:
$$(Pf, f - Pf) = (f, P(f - Pf)) = (f, Pf - P^2 f) = (f, Pf - Pf) = 0$$
2) $\mathcal{R}$ (P) ist abgeschlossen.
Sei $(g_n)_{n \in N} \subset \mathcal{R}(P)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g, \; g_n = Pf_n$. Dann ist $Pg_n = P^2 f_n = Pf_n = g_n$, wegen $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g$ und $\lim\limits_{n \to \infty} Pg_n = Pg$ hat man also $g = Pg \in \mathcal{R}(P)$. Demnach ist $\mathcal{R}(P)$ abgeschlossen.

1.6.11 Bemerkung

Sei P ein Projektor, $P \neq 0$. Dann ist $\| P \| = 1$.

Beweis:
Es ist $\| Pf \| = \| P^2 f \| \leq \| P \| \cdot \| Pf \|$. Wählt man f mit $Pf \neq 0$, so folgt: $1 \leq \| P \|$.
Sei jetzt $f \in \mathcal{H}$ beliebig. Nach 1.6.10 ist $f = Pf + (f - Pf)$ eine orthogonale Zerlegung von f. Also ist

$$\begin{aligned} \| f \|^2 &= (f, f) = \Big(Pf + (f - Pf), Pf + (f - Pf) \Big) = \\ &= \| Pf \|^2 + (Pf, f - Pf) + (f - Pf, Pf) + \| f - Pf \|^2 = \| Pf \|^2 + \| f - Pf \|^2 \geq \\ &\geq \| Pf \|^2 . \end{aligned}$$

Also gilt für alle $f \in \mathcal{H}$, $Pf \neq 0$:
$$\frac{\| Pf \|}{\| f \|} \leq \frac{\| Pf \|}{\| Pf \|} = 1.$$
Demnach ist auch $\| P \| \leq 1$ und insgesamt folgt: $\| P \| = 1$.

1.7 Sesquilinearformen

1.7.1 Definition (Sesquilinearform)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathrm{T}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Dann heißt die Abbildung $\mathrm{B}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},\ (\mathrm{f}, \mathrm{g}) \longmapsto (\mathrm{Tf}, \mathrm{g})$ die zu T gehörige Sesquilinearform.

1.7.2 Satz

Sei $\mathrm{T}: \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator, $\mathrm{B}: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ die zugehörige Sesquilinearform. Es gilt:
T ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein c>0, so daß für alle $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}$ gilt: $|\mathrm{B}(\mathrm{f}, \mathrm{g})| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|$.
Dann ist $\|\mathrm{T}\| \leq \mathrm{c}$

Beweis:

„$\Rightarrow$" T ist beschränkt, also gibt es ein c>0, so daß für alle $\mathrm{f} \in \mathcal{H}: \|\mathrm{Tf}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\|$. Dann ist $|(\mathrm{Tf}, \mathrm{g})| \overset{1.1.14}{\leq} \|\mathrm{Tf}\| \cdot \|\mathrm{g}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|$.

„$\Leftarrow$" $\forall \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}: |\mathrm{B}(\mathrm{f}, \mathrm{g})| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|$. Setze $\mathrm{g} = \mathrm{Tf}$ ein:

$$|\mathrm{B}(\mathrm{f}, \mathrm{Tf})| = \|\mathrm{Tf}\|^2 \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{Tf}\| \Longleftrightarrow \|\mathrm{Tf}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| .$$

Also ist T beschränkt, $\|\mathrm{T}\| \leq \mathrm{c}$.

1.7.3 Satz

Sei H: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch, B die zu H gehörige Sesquilinearform. Es gilt:
H ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ Es gibt ein c>0, so daß für alle $\mathrm{f} \in \mathcal{H}: |\mathrm{B}(\mathrm{f}, \mathrm{f})| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\|^2$. Dann ist $\|\mathrm{H}\| \leq \mathrm{c}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" H ist beschränkt: Für $\mathrm{f} \in \mathcal{H}$ sei $\|\mathrm{Hf}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\|$. Dann ist $|\mathrm{B}(\mathrm{f}, \mathrm{f})| = |(\mathrm{Hf}, \mathrm{f})| \overset{1.1.14}{\leq} \|\mathrm{Hf}\| \cdot \|\mathrm{f}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\|^2$, also gilt die Ungleichung.

„$\Leftarrow$" Seien $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(\mathrm{f}+\mathrm{g}, \mathrm{f}+\mathrm{g}) &= (\mathrm{Hf}+\mathrm{Hg}, \mathrm{f}+\mathrm{g}) = (\mathrm{Hf}, \mathrm{f}) + (\mathrm{Hg}, \mathrm{g}) + (\mathrm{Hg}, \mathrm{f}) + (\mathrm{Hf}, \mathrm{g}) = \\ &= (\mathrm{Hf}, \mathrm{f}) + (\mathrm{Hg}, \mathrm{g}) + (\mathrm{g}, \mathrm{Hf}) + (\mathrm{Hf}, \mathrm{g}) = (\mathrm{Hf}, \mathrm{f}) + (\mathrm{Hg}, \mathrm{g}) + 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g}) \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{B}(\mathrm{f}-\mathrm{g}, \mathrm{f}-\mathrm{g}) = (\mathrm{Hf}, \mathrm{f}) + (\mathrm{Hg}, \mathrm{g}) - 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g}).$$

Subtraktion liefert: $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g}) = \frac{1}{4}\Big[(\mathrm{H}(\mathrm{f}+\mathrm{g}), \mathrm{f}+\mathrm{g}) - (\mathrm{H}(\mathrm{f}-\mathrm{g}), \mathrm{f}-\mathrm{g})\Big]$. Aus der vorausgesetzten Ungleichung ergibt sich zusammen mit der Parallelogrammgleichung 1.1.2:

$|\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})\,| \leq \frac{\mathrm{c}}{4}(\|\mathrm{f}+\mathrm{g}\|^2 + \|\mathrm{f}-\mathrm{g}\|^2) \overset{1.1.2}{=} \frac{\mathrm{c}}{4}(2\,\|\mathrm{f}\|^2 + 2\,\|\mathrm{g}\|^2) = \frac{\mathrm{c}}{2}(\|\mathrm{f}\|^2 + \|\mathrm{g}\|^2)$. Sei $\|\mathrm{f}\| = \|\mathrm{g}\| = 1$, damit ist $|\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})| \leq \mathrm{c}$. Demnach ist für alle $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}\backslash\{0\}: |\mathrm{Re}\,(\mathrm{H}(\frac{\mathrm{f}}{\|\mathrm{f}\|}), \frac{\mathrm{g}}{\|\mathrm{g}\|})| \leq \mathrm{c} \Longleftrightarrow \frac{1}{\|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|} \cdot |\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})\,| \leq \mathrm{c}$. Also ist für $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}: |\,\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})\,| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|$. Für $\alpha \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \overline{\alpha}\mathrm{g}) = \mathrm{Re}\,(\alpha(\mathrm{Hf}, \mathrm{g}))$. Bestimme jetzt für festes f, $\mathrm{g} \in \mathcal{H}$ α so, daß $|\alpha| = 1$ und $\alpha(\mathrm{Hf}, \mathrm{g}) = |(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})|$. Dann ist:

$$|(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})| = \mathrm{Re}\,(\alpha(\mathrm{Hf}, \mathrm{g})) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \overline{\alpha}\mathrm{g}) = |\mathrm{Re}\,(\mathrm{Hf}, \overline{\alpha}\mathrm{g})| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\overline{\alpha}\mathrm{g}\| = \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\| .$$

Setzt man nun für $\mathrm{g} = \mathrm{Hf}$ ein, so ist also

$$|(\mathrm{Hf}, \mathrm{Hf})| = \|\mathrm{Hf}\|^2 \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{Hf}\| \Longleftrightarrow \|\mathrm{Hf}\| \leq \mathrm{c} \cdot \|\mathrm{f}\|,$$

d.h. H ist beschränkt mit $\|\mathrm{H}\| \leq \mathrm{c}$.

1.7.4 Definition (Sesquilinearform)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. B: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt Sesquilinearform genau dann, wenn für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}, f_1, f_2, g_1, g_2, f, g \in \mathcal{H}$ gilt:
$B(c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 B(f_1, g) + c_2 B(f_2, g)$,
$B(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1} B(f, g_1) + \overline{c_2} B(f, g_2)$.
Die Sesquilinearform heißt hermitesch, wenn für $f, g \in \mathcal{H}: \; B(f,g) = \overline{B(g,f)}$. Sie heißt beschränkt, wenn es ein $c \geq 0$ gibt, so daß für $f, g \in \mathcal{H} : |B(f,g)| \leq c \cdot \|f\| \cdot \|g\|$.

1.7.5 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, B eine beschränkte Sesquilinearform. Dann gibt es genau einen beschränkten linearen Operator T: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ derart, daß für f, $g \in \mathcal{H}: \; B(f,g) = (f, Tg)$. B ist genau dann hermitesch, wenn T es ist.

Beweis:
Sei $g \in \mathcal{H}$ fest, sei $L_g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \; f \longmapsto B(f,g)$. Dadurch ist ein lineares Funktional L_g gegeben. $|L_g(f)| \leq c \cdot \|g\| \cdot \|f\|$, also ist L_g beschränkt. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet 1.3.4 gibt es genau ein $g^* \in \mathcal{H}$ mit $L_g(f) = (f, g^*) = B(f,g)$. Definiere nun einen Operator T durch $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \; g \longmapsto g^*$. Dann ist T linear und beschränkt:

$$\begin{aligned} L_{c_1 g_1 + c_2 g_2}(f) &= (f, (c_1 g_1 + c_2 g_2)^*) = B(f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1} B(f, g_1) + \overline{c_2} B(f, g_2) = \\ &= \overline{c_1}(f, g_1^*) + \overline{c_2}(f, g_2^*) = (f, c_1 g_1^* + c_2 g_2^*), \end{aligned}$$

also $(c_1 g_1 + c_2 g_2)^* = c_1 g_1^* + c_2 g_2^*$, d.h. T ist linear. Weiter gilt $|(f, Tg)| = |B(f,g)| \leq c \cdot \|f\| \cdot \|g\|$. Setzt man $f = Tg$, so ist $\|Tg\|^2 \leq c \cdot \|Tg\| \cdot \|g\| \iff \|Tg\| \leq c \cdot \|g\|$, d.h. T ist beschränkt mit $\|T\| \leq c$. Die Eindeutigkeit von T ist klar: $B(f,g) = (f, T_1 g) = (f, T_2 g) \iff \forall f \in \mathcal{H} : (f, T_1 g - T_2 g) = 0 \implies \forall g \in \mathcal{H} : \; T_1 g = T_2 g$. T ist hermitesch $\iff B(f,g) = (f, Tg) = (Tf, g) = \overline{(g, Tf)} = \overline{B(g,f)} \iff$ B ist hermitesch.

1.7.6 Satz von Lax[1]-Milgram[2]

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform, d.h. es gibt ein $b > 0$, so daß für alle f, $g \in \mathcal{H} : |B(f,g)| \leq b \cdot \|f\| \cdot \|g\|$. B sei auch nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein a > 0, so daß für alle $f \in \mathcal{H} : |B(f,f)| \geq a \cdot \|f\|^2$.
Sei $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ derart, daß für alle $f \in \mathcal{H} : L(f) = B(f,g)$.

Beweis:
Nach Satz 1.7.5 gibt es einen beschränkten linearen Operator $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, so daß für $u, v \in \mathcal{H}$ gilt: $B(u,v) = (u, Tv)$. Für $f \in \mathcal{H}$ gilt: $|B(f,f)| = |(f, Tf)| \geq a \cdot \|f\|^2$ Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung 1.1.14 ist $|f, Tf| \leq \|f\| \cdot \|Tf\|$, also: $\|Tf\| \geq a \cdot \|f\|$. Weiter ist $|(f, Tf)| = |(T^* f, f)|$, also ist auch $\|T^* f\| \geq a \cdot \|f\|$. D.h., die Gleichung $T^* f = 0$ hat nur die Lösung f=0. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Toeplitz 1.5.3 erfüllt und es gilt: T hat eine überall erklärte, beschränkte Inverse T^{-1}. Nach Riesz-Fréchet 1.3.4 gibt es genau ein $h \in \mathcal{H}$ mit $L(f) = (f, h)$. Setze nun $g := T^{-1} h$. Dann ist für alle $f \in \mathcal{H} : L(f) = (f, h) = (f, Tg) = B(f, g)$. g ist eindeutig bestimmt, denn: Sind g, g' zwei Elemente von $\mathcal{H}$, die dasselbe leisten, so gilt: $0 = B(f, g - g')$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Mit $f = g - g'$ ist $0 = |B(g - g', g - g')| \geq a \cdot \|g - g'\|^2$, also folgt $g = g'$.

[1] Peter D. Lax (*1926)
[2] Arthur Norton Milgram (1912-1961)

1.8 Das Theorem von Fourier-Plancherel

Einer der wichtigsten unitären Operatoren ist die Fouriertransformierte in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Sie verwandelt die Differentiation in eine algebraische Operation und die Faltung zweier Funktionen in die Multiplikation. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Die Faltung war so erklärt: Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t-s)g(s)\,ds$. Für $f \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$ oder $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ setzt man $Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\,dy$. $Tf(x)$ wird als Fouriertransformierte von f bezeichnet. Nun werden die Eigenschaften des Operators T untersucht:

1.8.1 Hilfssatz

Für $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ sei $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $T\chi_{[a,b]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \chi_{[a,b]}(y)\,dy$ $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(-ix)} \cdot (e^{-ibx} - e^{-iax})$. $T\chi_{[a,b]}$ ist aus $L^2(\mathbb{R})$ und für das $L^2(\mathbb{R})$-Skalarprodukt $I(a,b,c,d) = \int_{-\infty}^{\infty} T\chi_{[a,b]}(x)\overline{T\chi_{[c,d]}(x)}\,dx,\ a \leq b, c \leq d$, gilt:

$$I(a,b,c,d) = \begin{cases} 0, & \text{wenn [a,b],[c,d] höchstens Randpunkte gemeinsam haben,} \\ b-a, & \text{wenn } [a,b] = [c,d]. \end{cases}$$

<u>Beweis</u>:

Es ist $T\chi_{[a,b]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ixy}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\frac{e^{-ixy}}{-ix}]_a^b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot(-ix)} \cdot (e^{-ixb} - e^{-iax})$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|e^{-ixb}| = |e^{-ixa}| = 1$, deshalb existieren die Integrale $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} |T\chi_{[a,b]}(y)|^2\,dy$, $\int_{\varepsilon}^{\infty} |T\chi_{[a,b]}(y)|^2\,dy$ für alle $\varepsilon > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} |T\chi_{[a,b]}(x)|^2 &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot|e^{-ixb} - e^{-ixa}|^2 = \frac{1}{2\pi x^2}(e^{-ixb} - e^{-ixa})\cdot(e^{ixb} - e^{ixa}) = \\ &= \frac{1}{2\pi x^2}\cdot(1 + 1 - e^{ix(a-b)} - e^{-ix(a-b)}) = \frac{1}{2\pi x^2}\cdot(2 - 2\cos[(a-b)x]) = \\ &= \frac{1}{\pi x^2}(1 - \cos[(a-b)x]) = \frac{1}{\pi x^2}\cdot\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(b-a)^{2k}x^{2k}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(b-a)^{2k}}{(2k)!}x^{2(k-1)}. \end{aligned}$$

Folglich existiert auch $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |T\chi_{[a,b]}(y)|^2\,dy$, also ist $T\chi_{[a,b]}(x) \in L^2(\mathbb{R})$.
Berechnung des Skalarprodukts: Sei $\varepsilon > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} I(a,b,c,d) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\varepsilon}\frac{1}{x^2}\left(e^{i(d-b)x} - e^{i(d-a)x} - e^{i(c-b)x} + e^{i(c-a)x}\right)dx + \right. \\ &\quad \left. + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x^2}\left(e^{i(d-b)x} - e^{i(d-a)x} - e^{i(c-b)x} + e^{i(c-a)x}\right)dx\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\left(\frac{e^{i(d-b)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(d-a)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(c-b)x}-1}{x^2} + \frac{e^{i(c-b)x}-1}{x^2}\right)dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{e^{i(d-b)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(d-a)x}-1}{x^2} - \frac{e^{i(c-b)x}-1}{x^2} + \frac{e^{i(c-a)x}-1}{x^2}\right)dx. \end{aligned}$$

Das erste Integral sei mit A_- , das zweite mit A_+ bezeichnet. Sei $h \in \mathbb{R}$. Dann existiert der Grenzwert

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx}-1}{x^2}\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ihx}-1}{x^2}\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{ihx}-1}{x^2}\,dx\right).$$

Beweis:
Sei $0 < \delta < \varepsilon$. Dann ist

$$\int_{-\varepsilon}^{-\delta} \frac{1}{x^2}(e^{ihx}-1)\,dx + \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}(e^{ihx}-1)\,dx =$$

$$\begin{aligned}
&\overset{z=-x}{=} \int_{\varepsilon}^{\delta} -\frac{1}{z^2}(e^{ih(-z)}-1)\,dz + \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}(e^{ihx}-1)\,dx = \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}(e^{ihx}+e^{-ihx}-2)\,dx = \\
&= \int_{\delta}^{\varepsilon} \frac{1}{x^2}(2\cos(hx)-2)\,dx = 2\int_{\delta}^{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!} x^{2(k-1)}\,dx = \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!} \int_{\delta}^{\varepsilon} x^{2k-2}\,dx \;=\; 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k h^{2k}}{(2k)!(2k-1)} \cdot (\varepsilon^{2k-1}-\delta^{2k-1}).
\end{aligned}$$

Dabei können Summation und Integration vertauscht werden, weil die Potenzreihe absolut konvergiert. Insgesamt hat man jetzt: Für $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0$ konvergiert dies gegen 0, d.h. der Grenzwert $\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx}-1}{x^2}\,dx$ existiert. Wie in der Rechnung nebenbei gezeigt, gilt:

$$\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ihx}-1}{x^2}\,dx = \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i|h|x}-1}{x^2}\,dx \overset{t=|h|x}{=} |h| \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t^2}\,dt.$$

Setze $\alpha := \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t^2}\,dt$. Dann ist

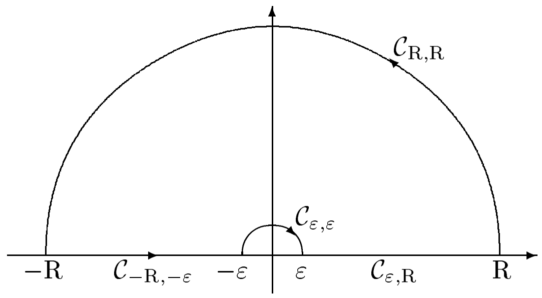
$$\begin{aligned}
2\pi \cdot I(a,b,c,d) &= \lim A_- + \lim A_+ = \lim(A_- + A_+) = \\
&= \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(d-b)x}-1}{x^2}\,dx - \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(d-a)x}-1}{x^2}\,dx - \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(c-b)x}-1}{x^2}\,dx + \\
&\quad + \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(c-a)x}-1}{x^2}\,dx = \\
&= \alpha \cdot (|d-b| - |d-a| - |c-b| + |c-a|).
\end{aligned}$$

Falls [a,b] und [c,d] nur Randpunkte gemeinsam haben, ist $a \le b \le c \le d$ oder $c \le d \le a \le b$ und in beiden Fällen hat man $2\pi I(a,b,c,d) = 0$. Im Fall [a,b] = [c,d], d.h. $a = c$, $b = d$ folgt:

$$2\pi I(a,b,c,d) = \alpha \cdot (-2(b-a)) = -2\alpha(b-a) \Longleftrightarrow I(a,b,c,d) = -\frac{\alpha}{\pi}(b-a).$$

Es bleibt zu zeigen: $\fint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t^2}\,dt = -\pi$.

$f(z) := \frac{e^{iz}-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(iz)^k}{k!} = \frac{i}{z}\sum_{k=1}^{\infty} i^k \frac{z^{k-1}}{k!}$ ist holomorph in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ und hat in 0 einen Pol der Ordnung 1.
Integriere nun:



Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist $\int\limits_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 0$, also

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\mathcal{C}_{-R,-\varepsilon}} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{C}_{R,R}} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)\,dz = \\ &= \int\limits_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x^2}\,dx + \int\limits_{\mathcal{C}_{R,R}} f(z)\,dz + \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)\,dz. \end{aligned}$$

Nun werden die Summanden einzeln betrachtet:

$$\left| \int\limits_{\mathcal{C}_{R,R}} f(z)\,dz \right| \leq \int\limits_{\mathcal{C}_{R,R}} |f(z)|\ dz = \int\limits_{\mathcal{C}_{R,R}} \frac{|\ e^{iz}-1\ |}{R^2}\,dz \leq \pi R \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2\pi}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es ist $f(z) = \frac{i}{z} + g(z)$, wobei $g(z)$ holomorph ist. Damit:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} f(z)\,dz &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} \frac{i}{z}\,dz + \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} g(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} \frac{i}{z}\,dz + 0 = \\ &\overset{z=\varepsilon e^{i\varphi}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathcal{C}_{\varepsilon,\varepsilon}} \frac{i^2 \varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\varphi}}\,d\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(-\int\limits_{\pi}^{0} d\varphi \right) = +\pi \end{aligned}$$

Also ist $\fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}-1}{t^2}\,dt = -\pi = \alpha$. Damit ist Hilfsatz 1.8.1 bewiesen.

Der Hilfssatz wird nun auf den $\mathbb{R}^n$ verallgemeinert: Betrachte einen n-dimensionalen achsenparallelen, abgeschlossenen Quader $\overline{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq x_j \leq b_j, 1 \leq j \leq n\}$. Q sei der offene Kern von $\overline{Q}$. Zerlege jedes Intervall $\overline{I_j} = [a_j, b_j]$ in Intervalle $[a_j^{k_j}, b_j^{k_j}], k_j = 1, ...p_j$, d.h.$[a_j, b_j] = \bigcup\limits_{k_j=1}^{p_j} [a_j^{k_j}, b_j^{k_j}]$. Dann erhält man eine Zerlegung von $\overline{Q}$, d.h. $\overline{I_k} = \overline{I_{k_1}} \times ... \times \overline{I_{k_n}}, I_k \bigcap I_m = \emptyset$ für $k \neq m$, $\overline{Q} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}^n, 1\leq k_j\leq p_j} \overline{I_k}$, dabei sei I_k der offene Kern von $\overline{I_k}$)

1.8.2 Hilfssatz

Sei $\chi_{\overline{I_k}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \overline{I_k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, sei $T\chi_{\overline{I_k}}(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y} \chi_{\overline{I_k}}(y)\,dy$. Dann ist $T\chi_{\overline{I_k}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Für zwei Multiindizes $k, l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k_j, l_j \leq p_j$ gilt:

$$(T\chi_{\overline{I_k}}, T\chi_{\overline{I_l}})_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ \prod\limits_{j=1}^{n} (b_j^{kj} - a_j^{kj}), & \text{falls } k = l \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ (\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}})_{L^2(\mathbb{R}^n)}, & \text{falls } k = l \end{cases} = (\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}}).$$

Beweis:
Es ist $T\chi_{\overline{I_k}}(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_jy_j}\chi_{[a_j{}^{k_j},b_j{}^{k_j}]}(y_j)\,dy_j = \prod_{j=1}^{n} T\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}(x_j)$, also $T\chi_{\overline{I_n}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ nach Hilfssatz 1.8.1. Weiter folgt aus der Formel in 1.8.1: $\left(T\chi_{\overline{I_k}}, T\chi_{\overline{I_l}}\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(T\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}, T\chi_{[a_j^{l_j},b_j^{l_j}]}\right)_{L^2(\mathbb{R})}$.
Wenn $k \neq l$, so gibt es ein I_0 mit $k_{j_0} \neq l_{j_0}$. In diesem Fall haben $[a_{j_0}^{k_{j_0}}, b_{j_0}^{k_{j_0}}]$ und $[a_{j_0}^{l_{j_0}}, b_{j_0}^{l_{j_0}}]$ keine inneren Punkte gemeinsam und der j_0-te Faktor in obigem Produkt ist 0 nach Hilfssatz 1.8.1. Anwenden von 1.8.1 im Fall $k = l$ liefert die angegebene Formel. Wegen $\left(\chi_{\overline{I_k}}, \chi_{\overline{I_l}}\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(\chi_{[a_j^{k_j},b_j^{k_j}]}, \chi_{[a_j^{l_j},b_j^{l_j}]}\right)_{L^2(\mathbb{R})}$ und $\left(\chi_{[a,b]}, \chi_{[c,d]}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } (a,b) \cap (c,d) = \emptyset \\ b-a, & \text{falls } a = c, b = d \end{cases}$ ergeben sich die restlichen im Hilfssatz angegebenen Gleichheiten.

Nun wird der Operator für Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ bezüglich einer Zerlegung

$$\mathcal{Z} = \{\overline{I_k} \mid k \in \mathbb{N}^n, 1 \leq k_j \leq p_j, j = 1, ..., n\}$$

definiert: Sei $t_{Q,\mathcal{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{N}^n, 1\leq k_j\leq p_j} c_k\chi_{\overline{I_k}}$ die Treppenfunktion mit komplexen Konstanten c_k.
Setze $Tt_{Q,\mathcal{Z}} = \sum_{k\in\mathbb{N}^n, 1\leq k_j\leq p_j} c_k T\chi_{\overline{I_k}}$. Nach Hilfssatz 1.8.2 gilt dann $(Tt_{Q,\mathcal{Z}}, T\tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}}) = (t_{Q,\mathcal{Z}}, \tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}})$, wenn $t_{Q,\mathcal{Z}}$ und $\tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}}$ zwei Treppenfunktionen bezüglich <u>derselben</u> Zerlegung $\mathcal{Z}$ sind.

1.8.3 Hilfssatz

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Q ein achsenparalleler Quader, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash Q$. Seien $(\mathcal{Z}_\nu), (\tilde{\mathcal{Z}}_\nu)$ Folgen von Zerlegungen von $\overline{Q}$. Seien $(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}, (\tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen in $\overline{Q}$, bezüglich der Zerlegungen $\mathcal{Z}_\nu, \tilde{\mathcal{Z}}_\nu$. Es gelte
$\lim_{\nu\longrightarrow\infty} \|f - t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$; $\lim_{\nu\longrightarrow\infty} \|f - \tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Dann gilt: $\lim_{\nu\longrightarrow\infty} \|Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - T\tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Beweis:
Sei $\mathcal{Z}_{\nu'}$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}_\nu$ und $\tilde{\mathcal{Z}}_\nu$. Dann gilt fast überall in $\mathbb{R}^n$: $t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}(x) = t_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}(x)$ und $\tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}(x) = \tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}(x)$.
Damit ist

$$\begin{aligned}
\|Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - T\tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|Tt_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}} - T\tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \overset{\text{s.o.}}{=} \|t_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}} - \tilde{t}_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \|t_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - \tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|t_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - f + f - \tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\| \leq \\
&\leq \|f - t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|f - \tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

also hat man $\lim_{\nu\to\infty} \|Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - T\tilde{t}_{Q,\tilde{\mathcal{Z}}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.

Die folgende Definition ist wegen der Abhängigkeit von Q nur vorläufig:

1.8.4 Definition

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Q ein achsenparalleler Quader, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n\backslash Q$. Sei $(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen in $\overline{Q}$ mit $\lim_{\nu\to\infty} \|f - t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$.
Dann setzt man $Tf := \lim_{\nu\to\infty} Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dieser Grenzwert existiert, weil $(Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist, siehe Beweis von Hilfssatz 1.8.3. Dieser Hilfssatz besagt weiter, daß der Limes in $L^2(\mathbb{R}^n)$ unabhängig von der Wahl der Zerlegungsfolge, also von der Folge $(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$, ist.

1.8.5 Hilfssatz

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, Q ein achsenparalleler Quader, $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash Q$. Dann gilt für die in 1.8.4 eingeführte Funktion Tf : $Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy$. Tf ist unendlich oft stetig differenzierbar. Für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ gilt:

$$|D^\alpha Tf(x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|y^\alpha f(y)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

wobei $y^\alpha := \prod\limits_{j=1}^{n} y_j^{\alpha_j}$.

<u>Beweis</u>:
Sei $(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen, so daß in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt: $f = \lim\limits_{\nu \to \infty} t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}$ und $Tf = \lim\limits_{\nu \to \infty} Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu}$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu} &= T\left(\sum c_k \chi_{\bar{I}_k}\right) = \sum c_k T\chi_{\bar{I}_k} = \sum c_k \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \chi_{\bar{I}_k}(y)\, dy = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \sum c_k \chi_{\bar{I}_k}(y)\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} t_{Q,\mathcal{Z}_y}(y)\, dy. \end{aligned}$$

Damit ist für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \left| Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu}(x) - \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy \right| &= \left| \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \Big(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}(y) - f(y)\Big)\, dy \right| \leq \\ \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{Q} |t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}(y) - f(y)|\ dy &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_Q \cdot |t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}(y) - f(y)|\ dy \leq \\ \stackrel{A.4.5}{\leq} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot |Q|^{\frac{1}{2}} \cdot \|t_{Q,\mathcal{Z}_\nu} - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \stackrel{\nu \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Nach Fischer-Riesz A.4.10 gibt es eine Teilfolge $(Tt_{Q,\mathcal{Z}_{\nu_j}})_{j \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen Tf konvergiert. Deswegen gilt punktweise fast überall: $Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy$, also in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt die Gleichheit.
Die Differenzierbarkeit folgt aus Satz A.2.7 und es gilt

$$D^\alpha Tf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} (e^{-ixy} \cdot f(y))\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} (-iy_j)^{\alpha_j} e^{-ixy} f(y)\, dy.$$

Damit ist

$$|D^\alpha Tf(x)| = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} (-iy_j)^{\alpha_j} e^{-ixy} f(y) dy \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y^\alpha f(y)|\ dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \|y^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

1.8.6 Hilfssatz

Sei $\mathcal{D}(T) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid$ Zu f gibt es einen Quader Q_f, so daß $f(x) = 0$ fast überall in $\mathbb{R}^n \backslash Q_f\}$. $\mathcal{D}(T)$ ist ein dichter Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Satz von Lebesgue!). Auf $\mathcal{D}(T)$ ist durch $Tf = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y) dy$ eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Es gilt für alle $f, g \in \mathcal{D}(T)$: $(Tf, Tg) = (f, g)$.

Die Abschließung $\overline{T}$ ist ein in $\mathcal{H}$ erklärter, beschränkter isometrischer Operator, d.h. es ist $(\overline{T}f, \overline{T}g) = (f, g)$. Für $f \in \mathcal{D}(T)$ ist $Tf = \overline{T}f$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Es gilt

$$|D^\alpha \overline{T}f(x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|y^\alpha f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} .$$

Beweis:
Die Abschließung existiert nach Satz 1.4.7. Seien $f, g \in \mathcal{D}(T)$, d.h. $f = g = 0$ fast überall außerhalb von einem Quader Q. Dann gibt es Treppenfunktionen $(t_{Q,\mathcal{Z}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ und $(\widetilde{t}_{Q,\widetilde{\mathcal{Z}}_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} t_{Q,\mathcal{Z}_\nu} = f$ fast überall, $\lim\limits_{\nu\to\infty} \widetilde{t}_{Q,\widetilde{\mathcal{Z}}_\nu} = g$ fast überall.
Sei $\mathcal{Z}'_\nu$ eine gemeinsame Verfeinerung von $\mathcal{Z}_\nu, \widetilde{\mathcal{Z}}_\nu$. Dann ist

$$\begin{aligned} (Tf, Tg) &= \lim_{\nu\to\infty} (Tt_{Q,\mathcal{Z}_\nu}, T\widetilde{t}_{Q,\widetilde{\mathcal{Z}}_\nu}) = \lim_{\nu\to\infty} (Tt_{Q,\mathcal{Z}'_\nu}, T\widetilde{t}_{Q,\mathcal{Z}'_\nu}) = \\ &= \lim_{\nu\to\infty} (t_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}, \widetilde{t}_{Q,\mathcal{Z}_{\nu'}}) = \lim_{\nu\to\infty} (t_{Q,\mathcal{Z}_\nu}, \widetilde{t}_{Q,\widetilde{\mathcal{Z}}_\nu}) = (f, g). \end{aligned}$$

Bei Abschließung bleibt die Isometrie erhalten. Der Rest wurde bereits in Hilfssatz 1.8.5 bewiesen.

Bemerkungen:

1) $\overline{T}$ heißt die Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$.
2) Anwendung von $\overline{T}$ auf $\mathcal{D}(T)$ liefert beliebig glatte Funktionen, Anwendung von $\overline{T}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ liefert im allgemeinen nur eine $L^2(\mathbb{R}^n)$−Funktion.

1.8.7 Hilfssatz

Sei $S: \mathcal{D}(T) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, $Sf(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} f(y) dy$. S ist beschränkter, dicht definierter, linearer Operator und kann durch Abschließung auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden. Es gilt:

1) Für alle $f \in \mathcal{D}(T) : Sf(x) = \overline{T\overline{f}(x)}$.
2) $(\overline{S}f, \overline{S}g) = (f, g)$.
3) $\overline{T}^* = \overline{S}$.

<u>Beweis</u>: Nur 2) und 3) müssen noch bewiesen werden:

2) Für $f, g \in \mathcal{D}(T) : (Sf, Sg) = (\overline{T\overline{f}}, \overline{T\overline{g}}) = \overline{(T\overline{g}, T\overline{f})} = (T\overline{g}, T\overline{f}) = (\overline{g}, \overline{f}) = \overline{(\overline{f}, \overline{g})} = (f, g) \Longrightarrow$
S ist isometrisch $\Longrightarrow$ Die Abschließung $\overline{S}$ ist ebenfalls isometrisch.
3) Für $f, g \in \mathcal{D}(T)$:

$$\begin{aligned} (Tf, g) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy \right) \overline{g(x)}\, dx = \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \overline{g(x)}\, dx \right) dy = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f \cdot T\overline{g}\, dy = (f, \overline{T\overline{g}}) = (f, Sg), \end{aligned}$$

also gilt für alle $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$: $(\overline{T}f, g) = (f, \overline{S}g)$, d.h. $\overline{T}^* = \overline{S}$.

1.8.8 Satz (Theorem von Fourier[1]-Plancherel[2])

Sei $\mathcal{D}(\mathrm{T}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid \text{Zu f gibt es einen Quader } Q_f \text{ mit } f(x) = 0 \text{ fast überall in } \mathbb{R}^n \setminus Q_f\}$. Durch

$$\mathrm{T}: \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{T}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy,$$

$$\mathrm{S}: \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{S}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ixy} f(y)\, dy$$

werden zwei lineare, beschränkte, dicht definierte Operatoren gegeben. Für die Abschließungen $\overline{\mathrm{T}}$ und $\overline{\mathrm{S}}$ gilt:

1) $\overline{\mathrm{T}}$ ist unitär, d.h. $(\overline{\mathrm{T}}f, \overline{\mathrm{T}}g) = (f, g)$ und $\overline{\mathrm{T}} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv.

2) $\overline{\mathrm{S}}$ ist die Adjungierte von $\overline{\mathrm{T}}$, d.h. $\overline{\mathrm{T}}^* = \overline{\mathrm{S}}$.

3) Für alle $f \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ gilt: $\overline{\mathrm{T}}f$ ist unendlich oft stetig differenzierbar, d.h. $\overline{\mathrm{T}}f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

4) Sei $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $R_m > 0$, $R_m \longrightarrow \infty$. Sei $K_{R_m}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R_m\}$. Dann ist

$$\overline{\mathrm{T}}f(x) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{K_{R_m}(0)} e^{-ixy} f(y)\, dy,$$

$$\overline{\mathrm{S}}f(x) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{K_{R_m}(0)} e^{ixy} f(y)\, dy,$$

im allgemeinen liegt aber keine punktweise Konvergenz vor. (l.i.m. bedeutet „limes in medio“ und bezeichnet die Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Der Operator $\overline{\mathrm{T}}$ heißt Fourier-Transformation.

Beweis:

1) $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n) : \underline{(\overline{\mathrm{T}}^*\overline{\mathrm{T}}f, g)} = (\overline{\mathrm{T}}f, \overline{\mathrm{T}}g) \overset{1.8.6}{=} \underline{(f, g)} \overset{1.8.7}{=} (\overline{\mathrm{S}}f, \overline{\mathrm{S}}g) = (\overline{\mathrm{S}}^*\overline{\mathrm{S}}f, g) = \underline{(\overline{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{T}}^*f, g)}$, also $\overline{\mathrm{T}}^*\overline{\mathrm{T}} = \overline{\mathrm{T}}\,\overline{\mathrm{T}}^* = \mathrm{Id}$. Nach Satz 1.6.7 gilt: $\overline{\mathrm{T}}$ ist unitär. Mit Bemerkung 1.6.4 folgt auch die Bijektivität.

2), 3) wurden bereits in den Hilfssätzen 1.8.7, 1.8.6 bewiesen.

4) Sei χ_m die charakteristische Funktion zu $K_{R_m}(0)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{K_{R_m}(0)} e^{-ixy} f(y)\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} \chi_m(y) f(y)\, dy.$$

Wegen $\lim\limits_{m\to\infty} \chi_m(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $\lim\limits_{m\to\infty} \|\chi_m f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0$. Wegen der Stetigkeit von $\overline{\mathrm{T}}, \overline{\mathrm{S}}$ folgt die Behauptung.

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)
[2] Michel Plancherel (1885-1967)

1.8.9 Bemerkung

Die Fouriertransformierte kann auch auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ erklärt werden: Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$, also existiert auch $\int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ixy}f(y)|\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit existiert das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy}f(y)\, dy$. Man setzt also für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\overline{T}f(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy.$$

Nach Satz A.2.6 ist $\overline{T}f(x)$ stetig für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Außerdem ist $\overline{T}f(x)$ beschränkt mit

$$\begin{aligned} |\overline{T}f(x)| &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ixy} f(y)|\, dy = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} . \end{aligned}$$

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ stimmt diese Definition mit der in Satz 1.8.8 gegebenen überein: Sei

$Q_m := [-m, m]^n$ und $f_m(x) := \begin{cases} f(x) \text{ für } x \in Q_m \\ 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$. Wegen $|f_m(x)| \leq |f(x)|$ ist $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, außerdem ist $f_m \in \mathcal{D}(T)$. Es gilt $|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x)|$, $\lim_{m\to\infty} |f(x) - f_m(x)| = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n$, also folgt mit dem Satz von Lebesgue A.2.3: $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_m(x)|\, dx = 0$, d.h. $f_m \xrightarrow{L^1} f$. Analog gilt $|f(x) - f_m(x)|^2 \leq |f(x)|^2$ usw., so daß man auch $f_m \xrightarrow{L^2} f$ erhält.
Gemäß 1.8.8 ist daher $\overline{T}f$ definiert durch

$$\overline{T}f(x) = \underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f_m(y)\, dy.$$

Setze nun

$$g_m(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f_m(y)\, dy \text{ und } g(x) := \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy.$$

Dann gilt also definitionsgemäß $g_m \xrightarrow{L^2} \overline{T}f$. Weiter folgt

$$\begin{aligned} |g(x) - g_m(x)| &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} (f(y) - f_m(y))\, dy \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y) - f_m(y)|\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \|f - f_m\|_{L^1} . \end{aligned}$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g.
Nach dem ersten Teil des Satzes von Fischer-Riesz A.4.10 gibt es eine Teilfolge $(g_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen $\overline{T}f$ konvergiert. Da diese Teilfolge aber zugleich überall gegen g konvergiert, folgt $\overline{T}f(x) = g(x)$ fast überall, womit die Übereinstimmung der Definitionen gezeigt ist.

1.8.10 Eigenschaften der Fourier-Transformation $\overline{T}$:

1) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\overline{T}f(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} f(y)\, dy$. $\overline{T}f(x)$ ist stetig.

2) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $g(x) := f(\lambda x)$. Dann ist $\overline{T}g(x) = \frac{1}{\lambda^n}\overline{T}f(\frac{x}{\lambda})$.

3) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$. Dann ist $\overline{T}(\tau_a f)(x) = \overline{T}f(x) \cdot e^{-ia\cdot x}$.

4) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(f*g)(x) := \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)g(x-t)\,dt$ die Faltung. $\overline{T}(f*g)(x) = (\sqrt{2\pi})^n \cdot \overline{T}f(x) \cdot \overline{T}g(x)$.

5) Ist $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, so gilt: $\overline{T}\frac{d}{dx_\nu}f(x) = ix_\nu \overline{T}f(x)$.

6) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ist die Funktion $x \longmapsto x_\nu f$ integrierbar, so ist $\overline{T}f(x)$ nach x_ν stetig partiell differenzierbar und es gilt: $\overline{T}(x_\nu f)(x) = i\frac{d}{dx_\nu}(\overline{T}f(x))$.

7) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Funktionen $Tf(x)g(x)$ und $f(x)Tg(x)$ sind integrierbar und es ist $\int\limits_{\mathbf{R}^n} \overline{T}f(x)g(x)\,dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\overline{T}g(x)\,dx$.

<u>Beweis</u>

1) wurde bereits in Bemerkung 1.8.9 gezeigt.

2) Durch Substitution erhält man:

$$\begin{aligned}
\overline{T}g(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-ixy}f(\lambda y)\,dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}}\dots\int\limits_{\mathbf{R}}}_{n-\text{mal}} e^{-ixy}f(\lambda y)\,dy_1\dots dy_n = \\
&\overset{z=\lambda y}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\underbrace{\int\limits_{\mathbf{R}}\dots\int\limits_{\mathbf{R}}}_{n-\text{mal}} e^{-ix\cdot z\cdot\frac{1}{\lambda}}f(z)\cdot\frac{1}{\lambda}dz_1\cdot\frac{1}{\lambda}dz_2\dots\cdot\frac{1}{\lambda}dz_n = \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\cdot\lambda)^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{ixz}{\lambda}}f(z)\,dz = \frac{1}{\lambda^n}\cdot\overline{T}f\left(\frac{x}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

3) Nach Definition ist:

$$\begin{aligned}
\overline{T}(\tau_a f)(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y-a)e^{-ixy}\,dy \overset{z:=y-a}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(z)e^{-ix(z+a)}\,dz = \\
&= e^{-ixa}\cdot\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(z)e^{-ixz}\,dz = \overline{T}f(x)\cdot e^{-ixa}.
\end{aligned}$$

4) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{T}(f*g)(x) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)g(y-t)\,dt\right)e^{-ixy}dy = \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)g(y-t)\,dt\right)e^{-i(y-t)x-itx}\,dy = \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} g(y-t)e^{-i(y-t)x}\,dy\right)f(t)e^{-itx}dt = \\
&\overset{z:=y-t}{=} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} g(z)e^{-izx}\,dz\right)f(t)e^{-itx}\,dt = \int\limits_{\mathbf{R}^n}\overline{T}g(x)f(t)e^{-itx}\,dt = \\
&= \overline{T}g(x)\cdot\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(t)e^{-itx}\,dt = \overline{T}g(x)\cdot(\sqrt{2\pi})^n\cdot\overline{T}f(x).
\end{aligned}$$

5) Mit partieller Integration ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{2\pi})^n \cdot \overline{T}\left(\frac{d}{dx_\nu} f\right)(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f(y)}{\partial y_\nu} e^{-ixy}\, dy = -\int_{\mathbf{R}^n} f(y) \frac{\partial}{\partial y_\nu}(e^{-ixy})\, dy = \\
&= -\int_{\mathbf{R}^n} f(y) \cdot (-ix_\nu) e^{-ixy}\, dy = ix_\nu \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-ixy}\, dy = \\
&= (\sqrt{2\pi})^n \cdot ix_\nu \overline{T} f(x).
\end{aligned}
$$

6) Man erhält:

$$
\begin{aligned}
i \cdot \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\overline{T} f(x)) &= \frac{i}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-ixy}\, dy \overset{A.2.7}{=} \frac{i}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \frac{\partial}{\partial x_\nu} e^{-ixy}\, dy = \\
&= \frac{i}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \cdot (-iy_\nu) e^{-ixy}\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} y_\nu f(y) e^{-ixy}\, dy = \\
&= \overline{T}(x_\nu f)(x).
\end{aligned}
$$

7) $\overline{T} f$ und $\overline{T} g$ sind beschränkt: Da $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, ist

$$
|\overline{T} f(x)| = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f(y) e^{-ixy}\, dy \right| \leq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} |f(y)|\, dy = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|f\|_{L^1(\mathbf{R}^n)},
$$

analog für g. Außerdem sind $\overline{T} f, \overline{T} g$ nach 1) stetig. Also sind $\overline{T} f \cdot g$ und $f \cdot \overline{T} g$ integrierbar und mit Fubini erhält man:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} f(x) \overline{T} g(x)\, dx &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) g(y) e^{-ixy}\, dy dx = \\
\overset{\text{Fubini}}{=} &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-ixy}\, dx \right) g(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^n} \overline{T} f(y) \cdot g(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

1.8.11 Beispiele

1) Sei $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$. Nach Hilfssatz 1.8.1 ist

$$
Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{(-ix)} \cdot (e^{-ix} - e^{ix}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{x}.
$$

Bemerkung: Tf ist ja nach 1.8.10 stetig. Was passiert bei $x = 0$? In diesem Fall erhält man direkt

$$
Tf(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(y) e^{-i \cdot 0 \cdot y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-1,1]}(y) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}},
$$

also:

$$
Tf(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & x = 0. \end{cases}
$$

2) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ f(x)=e^{-|x|}(\in L^2(\mathbb{R}^n))$:

$$\overline{\mathrm{T}}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-|y|}e^{-ixy}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{y}e^{-ixy}\,dy + \int_{0}^{\infty} e^{-y}e^{-ixy}\,dy\right) =$$

$$\overset{y\to -y}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y}(e^{-ixy}+e^{ixy})\,dy\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-y(1+ix)}}{-1-ix}+\frac{e^{-y(1-ix)}}{-1+ix}\right]_{y=0}^{y=R} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{-1-ix}+\frac{1}{-1+ix}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-2}{1+x^2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+x^2}.$$

3) $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, f(x)=e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}$:

$$\overline{\mathrm{T}}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\|y\|^2}{2}}e^{-ixy}\,dy = \prod_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_\nu^2}{2}}e^{-ix_\nu y_\nu}\,dy_\nu\right).$$

Es ist $g(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}dy$ zu berechnen. $h(x,y):=e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}$; $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = -y\cdot i\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}e^{ixy}$, also $\mid\frac{\partial h}{\partial x}\mid = \mid y\mid\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$. Die Funktion $\mid y\mid\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}$ ist integrierbar, also ist $g(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}dy$ differenzierbar (Satz A.2.7) und es ist $g'(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,dy = -i\int_{\mathbb{R}} ye^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\,dy$. Partielle Integration ergibt:

$$\int_{-R}^{R} ye^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\,dy = \left[-e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\right]_{-R}^{R} - ix\int_{-R}^{R} e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}dy.$$

$u' = ye^{-\frac{y^2}{2}} \Longrightarrow u = -e^{-\frac{y^2}{2}}$,
$v=e^{-ixy} \Longrightarrow v' = -ixe^{-ixy}$,

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\,dy = -ix\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\,dy,\ \text{also } g'(x) = -x\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{y^2}{2}}e^{-ixy}\,dy = -xg(x).$$

$\Longrightarrow$ g genügt der linearen Differentialgleichung $\dfrac{dy}{dt} = -t\cdot y$. Diese hat die Lösung

$y(t)=y(0)\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$. Man hat $g(0)=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi}$, denn ist $I:=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}dy$, so ist

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Integriert wird über die gesamte x,y-Ebene, verwende Polarkoordinaten:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-ar^2} r\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-ar^2} r\,dr.$$

Substitution: $z=r^2 \Longrightarrow dr = \frac{1}{2r}\,dz$,

$$\Longrightarrow I^2 = 2\pi\int_{0}^{\infty}\frac{r}{2r}e^{-az}\,dz = \pi\int_{0}^{\infty} e^{-az}\,dz = -\frac{\pi}{a}[e^{-az}]_0^\infty = \frac{\pi}{a} \Longrightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

damit ist also: $g(x) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ und insgesamt ergibt sich:

$$\overline{T}f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot g(x_\nu) \right) = \prod_{\nu=1}^{n} \left(e^{-\frac{x_\nu^2}{2}} \right) = e^{\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu^2\right)} = e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} = f(x).$$

4) $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}$ ist das n-te Hermitesche Polynom.

$h_n(x) := H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$. Es gilt: $h_n \in L^2(\mathbb{R})$ und $(h_n, h_m) = 0$ für $n \neq m$. Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overline{T}h_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} (-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} e^{-ixy} \frac{d^n e^{-y^2}}{dy^n}\, dy \\
&\overset{\text{partiell integriert}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(-1)^n e^{\frac{y^2}{2}} e^{-ixy} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} e^{-y^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} (-1)^n \frac{d}{dy} \left(e^{\frac{y^2}{2}} e^{-ixy} \right) \cdot \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(e^{-y^2} \right) dy.
\end{aligned}$$

Integriert man n-mal partiell, so sind die Randterme jedesmal 0, denn sie haben Form $c \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} \cdot e^{-ixy} \cdot H_k(x) \,|_{-\infty}^{\infty} = 0$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\overline{T}h_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} \left(e^{-ixy + \frac{y^2}{2}} \right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-y^2} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dy^n} \left(e^{\frac{y^2}{2} - ixy - \frac{x^2}{2}} \right) dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}} i^n e^{-y^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{\frac{1}{2}(y-ix)^2}\, dy = \\
&= \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-ixy} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dy = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ixy} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \\
&\overset{3)}{=} \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} = i^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-i)^n \cdot h_n(x).
\end{aligned}$$

Also sind die $h_n(x)$ Eigenfunktionen des Operators $\overline{T}$ zu den Eigenwerten $(-i)^n$.

5) $f = \chi_{[-1,1]}$:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow (f * f)(x) &= \int\limits_{\mathbf{R}} f(t) f(x-t)\, dt = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \chi_{[-1,1]}(t) \chi_{[-1,1]}(x-t)\, dt \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \chi_{[-1,1]}(x-t)\, dt \overset{z=x-t}{=} \int\limits_{x+1}^{x-1} -\chi_{[-1,1]}(z)\, dz \\
&= \int\limits_{x-1}^{x+1} \chi_{[-1,1]}(z)\, dz = |\,[x-1, x+1] \cap [-1,1]\,| \\
&= \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ x+1-(-1), & -2 \le x \le 0 \\ 1-(x-1), & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le -2 \\ x+2, & -2 \le x \le 0 \\ 2-x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \ge 2 \end{cases} \\
&= \sup(0, 2 - |\,x\,|) =: g(x).
\end{aligned}$$

Nach 1.8.10, 4) gilt:

$$\overline{\mathrm{T}}\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \sqrt{2\pi} \cdot (\overline{\mathrm{T}}\mathrm{f}(\mathrm{x}))^2 = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin^2 \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}.$$

6) Die Eigenschaften des Operators $\overline{\mathrm{T}}$ erlauben es manchmal, reelle Integrale zu berechnen:

a)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(1+\mathrm{x}^2)^2}\,\mathrm{dx} &= \int_{\mathbf{R}} |\,\overline{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}\,|^2 \cdot \frac{\pi}{2}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{R}} (\overline{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|})(\overline{\overline{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}})\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{2}(\overline{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}, \overline{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}) = \frac{\pi}{2} \cdot (\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}, \mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}) \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}\overline{\mathrm{e}^{-|\mathrm{x}|}}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-2|\mathrm{x}|}\,\mathrm{dx} = \pi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} \\
&= \pi \cdot \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^2 \mathrm{x}}{\mathrm{x}^2}\mathrm{dx} &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{R}} \overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}(\mathrm{x})\overline{\overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}(\mathrm{x})}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}(\overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}(\mathrm{x}), \overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}(\mathrm{x})) \\
&= \frac{\pi}{2}(\chi_{[-1,1]}(\mathrm{x}), \chi_{[-1,1]}(\mathrm{x})) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{R}} \chi^2_{[-1,1]}(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{dx} = \pi.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^3 \mathrm{x}}{\mathrm{x}^3}\,\mathrm{dx} &= \frac{\pi}{4}\int_{\mathbf{R}} \overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}\overline{\overline{\mathrm{T}}\sup(0, 2-|\mathrm{x}|)}\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{4}\Big(\overline{\mathrm{T}}\chi_{[-1,1]}, \overline{\mathrm{T}}\sup(0, 2-|\mathrm{x}|)\Big) \\
&= \frac{\pi}{4}\Big(\chi_{[-1,1]}, \sup(0, 2-|\mathrm{x}|)\Big) = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1}(2-|\mathrm{x}|)\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{4} \cdot \left(4 - 2 \cdot \int_0^1 \mathrm{x}\,\mathrm{dx}\right) = \frac{\pi}{4}\left(4 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \frac{\sin^4 \mathrm{x}}{\mathrm{x}^4}\,\mathrm{dx} &= \frac{\pi}{8}\int_{\mathbf{R}} \overline{\mathrm{T}}\sup(0, 2-|\mathrm{x}|) \cdot \overline{\overline{\mathrm{T}}\sup(0, 2-|\mathrm{x}|)}\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{8}\Big(\sup(0, 2-|\mathrm{x}|), \sup(0, 2-|\mathrm{x}|)\Big) = \frac{\pi}{8}\int_{\mathbf{R}} \sup(0, 2-|\mathrm{x}|)^2\,\mathrm{dx} \\
&= \frac{\pi}{8}\int_{-2}^{2}(2-|\mathrm{x}|)^2\,\mathrm{dx} = \frac{\pi}{8} \cdot 2 \cdot \int_0^2 (2-\mathrm{x})^2\,\mathrm{dx} \\
&\overset{\mathrm{z}=2-\mathrm{x}}{=} \frac{\pi}{4}\int_2^0 -\mathrm{z}^2\,\mathrm{dz} = \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{1}{3}\mathrm{z}^3\right]_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Kompakte Operatoren

Kompakte Operatoren werden untersucht, weil sie bei vielen wichtigen Problemen (Sturm-Liouville, Dirichlet) auftauchen, zumindest, nachdem man diese invertiert hat. Wichtig ist: Nur bei beschränktem Grundgebiet führt das Invertieren dieser Probleme auf kompakte Operatoren. Über kompakte Operatoren will man wissen:

1) Wann sind die Operatoren invertierbar?

2) Wie kann man sie besonders „schön“ darstellen?

Beides führt auf die Spektraltheorie, d.h. die Untersuchung der Eigenwerte: Bei 2) versucht man, das Konzept des „Diagonalisierens“, das bei endlichdimensionalen Räumen so gut funktioniert hat, nun auf kompakte Operatoren in Hilberträumen zu übertragen. Bei 1) ist man zufrieden, wenn man den „verschobenen“ Operator $\mathrm{Id} - \lambda \cdot \mathrm{V}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, invertieren kann.

2.1 Schwache Konvergenz

2.1.1 Definition (schwach konvergent)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt schwach konvergent gegen $x^* \in \mathcal{H}$ (abgekürzt $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$), wenn gilt:

1) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N} : \|x_n\| \leq c$,

2) Für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y) = (x^*, y)$.

2.1.2 Bemerkung

Der schwache Limes einer Folge ist eindeutig bestimmt.
Beweis:
Sei $x_n \rightharpoonup x^*, x_n \rightharpoonup \widetilde{x}^*$. Dann gilt für alle $y \in \mathcal{H}$: $(x^* - \widetilde{x}^*, y) = 0$, also ist $x^* = \widetilde{x}^*$.

2.1.3 Beispiel

Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $\mathcal{H}$. Dann ist $\| \varphi_n \| = 1$. Nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10 gilt für alle $y \in \mathcal{H}$: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 \leq \| y \|^2$. Also ist für alle $y \in \mathcal{H}$: $\lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n, y) = 0$, d.h. $\varphi_n \rightharpoonup 0$.

Der folgende Satz ist das Analogon zum bekannten Satz von Bolzano[1]-Weierstraß[2] in der Analysis:

[1] Bernhard Bolzano (1781-1848)
[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897)

2.1.4 Satz (Bolzano-Weierstraß für schwach konvergente Folgen)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathcal{H}$, d.h. $\|x_n\| \le c$. Dann gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die schwach gegen ein $x^* \in \mathcal{H}$ konvergiert.
Beweis:

1) Wahl der Teilfolge $(x'_n) \subset (x_n)$:

   Es ist $|(x_n, x_1)| \le c \cdot \|x_1\|$, also gibt es eine Teilfolge $\left(x_n^{(1)}\right) \subset (x_n)$, so daß $\left(\left(x_n^{(1)}, x_1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Betrachte dann $\left(x_n^{(1)}, x_2\right)$. Genauso sieht man: Es gibt eine Teilfolge $\left(x_n^{(2)}\right) \subset \left(x_n^{(1)}\right) \subset (x_n)$, so daß $\left(\left(x_n^{(2)}, x_2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Man erhält eine Kette

$$\ldots \subset \ldots \subset \left(x_n^{(p)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ldots \subset \left(x_n^{(2)}\right) \subset \left(x_n^{(1)}\right) \subset (x_n),$$

   wobei für $p \le q$ die Folge $\left(\left(x_n^{(p)}, x_q\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Betrachte die Diagonalfolge: $x'_n := x_n^{(n)}$. Dann ist für alle $q \in \mathbb{N}$ die Folge $((x'_n, x_q))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

2) Konvergenz von $((x'_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ für $y \in \mathcal{H}$:

   Sei $M := \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \exists N(f) \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{C}, \text{ so daß } f = \sum_{k=1}^{N(f)} c_k x_k \right\}$.

   a) $y \in \overline{M}$:
   Zu $y \in \overline{M}, \varepsilon > 0$ gibt es ein $y' \in M$ mit $\|y - y'\| < \varepsilon$. Es ist

$$\begin{aligned}
|(x'_n, y) - (x'_m, y)| &= |(x'_n, y) + (x'_n, y') - (x'_n, y') - (x'_m, y') - (x'_m, y) + (x'_m, y')| \le \\
&\le |(x'_n, y') - (x'_m, y')| + |(x'_n, y - y')| + |(x'_m, y - y')| \le \\
&\le |(x'_n, y') - (x'_m, y')| + 2c\varepsilon = \\
&= \left| \left(x'_n, \sum_{k=1}^{N(y')} c_k x_k\right) - \left(x'_m, \sum_{k=1}^{N(y')} c_k x_k\right) \right| + 2c\varepsilon = \\
&= \left| \sum_{k=1}^{N(y')} \overline{c}_k \cdot [(x'_n, x_k) - (x'_m, x_k)] \right| + 2c\varepsilon.
\end{aligned}$$

   Nach 1) konvergiert die Folge $((x'_n, x_k))_{n\in\mathbb{N}}$, deshalb kann man ein $N(\varepsilon, y')$ so wählen, daß

$$|(x'_n, y') - (x'_m, y')| = \left| \sum_{k=1}^{N(y')} \overline{c}_k \left[(x'_n, x_k) - (x'_m, x_k)\right] \right| < \varepsilon$$

   für $n, m \ge N(\varepsilon, y')$. Dann ist $|(x'_n, y) - (x'_m, y)| \le (1 + 2c) \cdot \varepsilon$ für $n, m \ge N(\varepsilon, y')$, also: $((x'_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für $y \in \overline{M}$.

   b) $y \in \mathcal{H}$ beliebig:
   Nach Satz 1.2.2 gibt es $y_1 \in \overline{M}, y_2 \in \overline{M}^{\perp} \stackrel{1.2.3}{=} M^{\perp}$ mit $y = y_1 + y_2$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$: $x'_n \in M$, gilt: $(x'_n, y) = (x'_n, y_1)$. Die Konvergenz von $((x'_n, y_1))_{n\in\mathbb{N}}$ wurde in a) gezeigt, d.h. für alle $y \in \mathcal{H}$ gilt: $((x'_n, y))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

3) Existenz eines x^* mit $x'_n \rightharpoonup x^*$:

   Sei $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, y \longmapsto \lim_{n\to\infty} (y, x'_n)$. L ist linear und wegen $|(y, x'_n)| \le c \cdot \|y\|$ beschränkt. Nach Riesz-Fréchet 1.3.4 gibt es also genau ein $x^* \in \mathcal{H}$ mit $L(y) = (y, x^*)$. Also ist $\lim_{n\to\infty} (y, x'_n) = (y, x^*)$, d.h. $\lim_{n\to\infty} (x'_n, y) = (x^*, y)$.

2.1.5 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{H}$.

1) Sei $x_n \rightharpoonup x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$.

2) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann schwach gegen $x \in \mathcal{H}$, wenn gilt:

   a) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}: \|x_n\| \leq c$,

   b) Es gibt einen dichten Teilraum $\mathcal{D}$ von $\mathcal{H}$, so daß für alle $y \in \mathcal{D}: \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$.

Beweis:

1) Sei $\|x_n\| \leq c$. Dann ist

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \\ &\leq c \cdot \|y_n - y\| + |(x_n - x, y)|\,. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x, y) = 0$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$.

2) „$\Rightarrow$“ ist klar.

„$\Leftarrow$“ Zu $y \in \mathcal{H}$ wähle eine Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $y_m \in \mathcal{D}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y$. Nach Voraussetzung gilt für jedes feste $m \in \mathbb{N}: \lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_m) = (x, y_m)$.

Wähle nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ m so groß, daß $\|y - y_m\| \leq \dfrac{\varepsilon}{3(c+1)}$ und

$$\|y - y_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3(\|x\|+1)}.$$

Zu dem so festgelegten m wähle dann n so groß, daß $|(x_n, y_m) - (x, y_m)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Big|(x_n, y) - (x, y)\Big| &= \Big|(x_n, y) - (x_n, y_m) + (x_n, y_m) - (x, y_m) + (x, y_m) - (x, y)\Big| \leq \\ &\leq \Big|(x_n, y) - (x_n, y_m)\Big| + \Big|(x_n, y_m) - (x, y_m)\Big| + \Big|(x, y_m) - (x, y)\Big| \leq \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y - y_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|x\| \cdot \|y - y_m\| \leq \\ &\leq c \cdot \|y - y_m\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y) = (x, y)$ für alle $y \in \mathcal{H}$, d.h. $x_n \rightharpoonup x$.

2.1.6 Hilfssatz

Sei $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein beschränktes, lineares Funktional im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $x_0 \in \mathcal{H}, \varepsilon > 0$. Es gelte für alle x mit $\|x - x_0\| \leq \varepsilon : |A(x)| \leq c$. Dann ist $\|A\| \leq \dfrac{2c}{\varepsilon}$.

Beweis:
Sei $z \in \mathcal{H}$ mit $\|z\| = 1$, sei $\overline{K_\varepsilon(x_0)} := \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$. Wegen $x_0 + \varepsilon z \in \overline{K_\varepsilon(x_0)}$ ist $|A(x_0 + \varepsilon z)| = |A(x_0) + \varepsilon A(z)| \leq c$, also

$$\varepsilon\,|A(z)| - |A(x_0)| \leq |A(x_0) + \varepsilon A(z)| \leq c \iff \varepsilon\,|A(z)| \leq c + |A(x_0)| \leq 2c \Longrightarrow |A(z)| \leq \frac{2c}{\varepsilon}.$$

2.1.7 Hilfssatz

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge beschränkter, linearer Funktionale in $\mathcal{H}$. Sei $(\| A_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt. Zu $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ existieren dann in jeder Kugel $K_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ ein $y \in K_\varepsilon(x_0)$ und ein $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, derart, daß $\| A_n(y) \| > c$.

Beweis:
Annahme: Die Aussage des Hilfssatzes ist falsch.
Dann gibt es zu n_0 und c eine Kugel $K_\varepsilon(x_0)$, so daß für alle $y \in K_\varepsilon(x_0)$ und alle $n > n_0$ gilt: $| A_n(y) | \leq c$.
Also ist für alle $y \in \overline{K_\varepsilon(x_0)} : | A_n(y) | \leq c$. Nach Hilfssatz 2.1.6 folgt: Für alle $n > n_0$ ist $\| A_n \| \leq \dfrac{2c}{\varepsilon}$, also gilt: Die Folge $(\| A_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, Widerspruch.

2.1.8 Satz (Banach[1]-Steinhaus[2])

Sei I eine beliebige Indexmenge, $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge beschränkter, linearer Funktionale in $\mathcal{H}$. Für jedes $x \in \mathcal{H}$ sei für alle $i \in I : | A_i(x) | \leq M(x) < +\infty$ mit einer von x abhängigen Zahl $M(x) \geq 0$. Dann ist $\| A_i \| \leq M < +\infty$ für alle $i \in I$ mit einer Konstanten M.

Beweis:
In Satz B.2.13 wird das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit allgemeiner bewiesen. Hier ein etwas anderer Beweis:
Sei I unendlich, sonst ist nichts zu zeigen. Annahme: Die Aussage des Satzes ist falsch.
Dann existiert eine Folge $(A_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(\| A_{i_n} \|)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Setze zur Vereinfachung $A_n := A_{i_n}$.
In $K_{\varepsilon_0}(x_0) = \{x \in \mathcal{H} \mid \| x - x_0 \| < \varepsilon_0\}$ existiert ein $y = x_1$ und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, daß $| A_{n_1}(y) | = | A_{n_1}(x_1) | > 1$ nach Hilfssatz 2.1.7. Da A_{n_1} beschränkt, also stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, daß für alle $x \in \overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - x_1\| \leq \varepsilon_1\}$ gilt: $|A_{n_1}(x)| > 1$. O.E. sei $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Nach Hilfssatz 2.1.7 gibt es ein $x_2 \in K_{\varepsilon_1}(x_1)$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ so, daß $|(A_{n_2}(x_2)| > 2$ ist. Wie oben gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$, o.E. $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2} < \frac{\varepsilon_0}{4}$, so daß für alle $x \in \overline{K_{\varepsilon_2}(x_2)} : |A_{n_2}(x)| > 2$. Die Fortsetzung dieser Konstruktion liefert: Es gibt eine Folge $(\overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)})_{p\in\mathbb{N}_0}$ von Kugeln mit $\lim\limits_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0$ und eine Folge $(n_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, so daß gilt:

1) $\overline{K_{\varepsilon_0(x_0)}} \supset \overline{K_{\varepsilon_1}(x_1)} \supset ...\overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)} \supset \overline{K_{\varepsilon_{p+1}}(x_{p+1})} \supset ...$
2) Für alle $x \in K_{\varepsilon_p}(x_p) : |A_{n_p}(x)| > p$.

Für $q, p \in \mathbb{N}, q \geq p$ ist $\| x_q - x_p \| \leq \varepsilon_p$, also ist $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei $x^* := \lim\limits_{p\to\infty} x_p$. Für festes p ist $\lim\limits_{q\to\infty} \| x_q - x_p \| = \| x^* - x_p \|$, also $\| x^* - x_p \| \leq \varepsilon_p$, d.h. $x^* \in \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \overline{K_{\varepsilon_p}(x_p)}$. Damit gilt für alle $p \in \mathbb{N}_0 : |A_{n_p}(x^*)| > p$, Widerspruch zur Voraussetzung $|A_{n_p}(x^*)| \leq M(x^*)$.

2.1.9 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit - uniform boundedness principle)

Seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ Hilberträume, I eine beliebige Indexmenge, $\{T_i : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}' \mid i \in I\}$ eine Menge beschränkter, linearer Operatoren. Zu jedem $x \in \mathcal{H}$ gebe es eine Zahl M(x) – möglicherweise von x abhängig – , so daß für alle $i \in I : \| T_i x \|' \leq M(x)$. Dann gibt es ein $M \geq 0$ so, daß für alle $i \in I : \| T_i \| < M$.

Beweis:
Ersetze im Beweis von 2.1.8 $|A_i(x)|$ durch $\|T_i x\|$!

[1]Stefan Banach (1892-1945)
[2]Hugo Steinhaus (1887-1972)

Bemerkung: Vom Hilbertraum wurde nur die Vollständigkeit benutzt, d.h. der Satz gilt auch in Banachräumen. In dieser allgemeinen Form wird er – vielleicht einfacher – im Anhang, Satz B.2.13, bewiesen. Eine Anwendung von Satz 2.1.8 ist:

2.1.10 Satz

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ derart, daß für alle $y \in \mathcal{H}$ die Folge $((y, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gibt es ein $x^* \in \mathcal{H}$ so, daß $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$.

Beweis:
Sei $A_n(y) = (y, x_n)$. A_n ist beschränktes, lineares Funktional in $\mathcal{H}$. Sei $M(y) := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\, (y, x_n)\, |$. Also ist für alle $y \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}$: $|\, A_n(y)\, | \le M(y)$. Nach Satz 2.1.8 gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $\|\, A_n \,\| = \|\, x_n \,\| \le\ M$. Sei jetzt $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, y \longmapsto \lim\limits_{n\to\infty} A_n(y)$. A ist linear und wegen $|\, A_n(y)\, | \le M \cdot \|\, y \,\|$ ist für alle $y \in \mathcal{H}$: $|\, A(y)\, | \le M \,\|\, y \,\|$, d.h. A ist beschränkt. Nach Riesz-Fréchet 1.3.4 gibt es dann genau ein $x^* \in \mathcal{H}$ mit $A(y) = (y, x^*) = \lim\limits_{n\to\infty} (y, x_n)$, also $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y) = (x^*, y)$.

2.1.11 Satz (Hellinger[1]-Toeplitz[2])

Sei $H : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer hermitescher Operator, d.h. es ist $\underline{\mathcal{D}(H) = \mathcal{H}}$ und $(Hf, g) = (f, Hg)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}$. Dann ist H beschränkt.

Beweis:
Definiere für $g \in \overline{B_1(0)} = \{g \in \mathcal{H} \mid \|\, g \,\| \le 1\}$ lineare Funktionale: $L_g(f) := (Hf, g)$. Die L_g sind beschränkt:

$$|\, L_g(f)\, | = |\, (Hf, g)\, | = |\, (f, Hg)\, | \overset{1.1.14}{\le} \|\, Hg \,\| \cdot \|\, f \,\| \ .$$

Weiter gilt mit $M(f) := \|\, Hf \,\|$ für alle $g \in \overline{B_1(0)}$:

$$|\, L_g(f)\, | = |\, (Hf, g)\, | \overset{1.1.14}{\le} \|\, Hf \,\| \cdot \|\, g \,\| \le \|\, Hf \,\| = M(f).$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gibt es eine Konstante $M > 0$, so daß für alle $g \in \overline{B_1(0)}$ gilt: $\|\, L_g \,\| \le M$. Die Norm von L_g läßt sich berechnen: Es ist einerseits

$$\|\, L_g \,\| = \sup_{f\in\mathcal{H}, f\neq 0} \frac{|\, (Hf, g)\, |}{\|\, f \,\|} = \sup_{f\in\mathcal{H}, f\neq 0} \frac{|\, (f, Hg)\, |}{\|\, f \,\|} \overset{1.1.14}{\le} \frac{\|\, f \,\| \cdot \|\, Hg \,\|}{\|\, f \,\|} = \|\, Hg \,\|$$

und andererseits für $Hg \neq 0$:

$$\|\, L_g \,\| = \sup_{f\in\mathcal{H}, f\neq 0} \frac{|\, (f, Hg)\, |}{\|\, f \,\|} \overset{f=Hg}{\ge} \frac{\|\, Hg \,\|^2}{\|\, Hg \,\|} = \|\, Hg \,\|$$

(hier geht $\mathcal{D}(H) = \mathcal{H}$ ein).
Also ist $\|\, L_g \,\| = \|\, Hg \,\|$ und mit obiger Abschätzung erhält man $\|\, Hg \,\| = \|\, L_g \,\| \le M$ für alle $g \in \overline{B_1(0)}$.
Damit hat man

$$\|\, H \,\| = \sup_{\|g\| = 1} \|\, Hg \,\| \le M < \infty,$$

d.h. H ist beschränkt.

[1]Ernst Hellinger (1883-1950)
[2]Otto Toeplitz (1881-1940)

2.2 Kompaktheit

2.2.1 Definition (präkompakt)

Sei $\mathcal{H}$ Prähilbertraum. $\Sigma \subset \mathcal{H}$ heißt präkompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, die eine Cauchy-Folge ist, d.h. $\| x_{n_k} - x_{n_j} \| \overset{k,j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.2.2 Definition (Kompaktheit)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine präkompakte Menge $\Sigma \subset \mathcal{H}$ heißt kompakt, wenn der Limes der in 2.2.1 vorkommenden Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in Σ liegt.

2.2.3 Bemerkungen

1) Diese Definition ist äquivalent zur üblichen Definition der Kompaktheit mit Überdeckungen.

2) $\Sigma \subset \mathcal{H}$ präkompakt, $\mathcal{H}$ Hilbertraum $\Longrightarrow \overline{\Sigma}$ ist kompakt.

2.2.4 Definition(Kompakter bzw. vollstetiger Operator)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ ein Teilraum, $V : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ eine lineare Abbildung. V heißt vollstetig oder kompakt, wenn $\Sigma = \{Vx \mid x \in \mathcal{D}, \| x \| \leq 1\}$ präkompakt ist, d.h.: Aus jeder Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\| x_n \| \leq c$ kann man eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ so auswählen, daß $\| Vx_{n_k} - Vx_{n_l} \| \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

2.2.5 Beispiele

1) Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum. $\mathcal{H}$ enthalte ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$. Betrachte die Abbildung Id: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$. Wegen $\| \varphi_i - \varphi_k \|^2 = 2$ für $i \neq k, i, k \in \mathbb{N}$ ist Id nicht kompakt.

2) Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, M ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ und P_M der Projektor auf M. P_M ist genau dann kompakt, wenn M endlich-dimensional ist:

   Nach Satz 1.1.18 ist M separabel, also ebenfalls ein separabler Hilbertraum. Nach Satz 1.1.19 gibt es also ein VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ in M. Für $f \in \mathcal{H}$ gilt dann $P_M f = \sum_{i=1}^{\infty} (P_M f, \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i$. Da P_M auf M die Identität ist, ist nach Beispiel 1) P_M nicht kompakt.

   Ist M endlichdimensional, etwa von Dimension N, so ist für $f \in \mathcal{H} : P_M f = \sum_{i=1}^{N} (f, \varphi_i)\varphi_i$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N} : \| f_n \| \leq c$. Dann ist $|(f_n, \varphi_i)| \leq \| f_n \| \cdot \| \varphi_i \| \leq c$. Deshalb gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $\lim_{k\to\infty} (f_{n_k}, \varphi_i) = c_i$ für ein $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., N$. Dann folgt $\lim_{k\to\infty} P_M f_{n_k} = \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i$, also ist P_M kompakt.

2.2.6 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ kompakt. Dann ist K beschränkt, d.h.

$$\| K \| = \sup_{f\in\mathcal{D}, \|f\|=1} \| Kf \| < \infty.$$

Beweis:
Wäre $\| K \|$ nicht endlich, so gäbe es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n \in \mathcal{D}$, mit $\| f_n \| = 1$ derart, daß $\lim_{n\to\infty} \| Kf_n \| = \infty$. Insbesondere enthält dann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\| Kf_{n_k} - Kf_{n_l} \| \overset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, denn für eine solche wäre $(\| Kf_{n_k} \|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

2.2.7 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, K: $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein kompakter Operator mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}$. Dann ist die Abschließung $\overline{K}$ ebenfalls kompakt in $\mathcal{H}$.

Beweis:

Nach Satz 2.2.6 ist K beschränkt, also $\overline{K}$ wohldefiniert und ebenfalls beschränkt. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|f_n\| \leq c$ für $n \in \mathbb{N}$. Wähle zu f_n ein $f'_n \in \mathcal{D}$ mit $\|f_n - f'_n\| \leq \frac{1}{n}$, dann gilt $\|f'_n\| \leq c + 1$. Da K kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(f'_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $g \in \mathcal{H}$ mit $g = \lim\limits_{j\to\infty} Kf'_{n_j}$, also auch $\lim\limits_{j\to\infty} \overline{K}f'_{n_j} = g$. Es ist

$$\begin{aligned}
\|\overline{K}f_{n_j} - \overline{K}f_{n_i}\| &= \|\overline{K}f_{n_j} - \overline{K}f'_{n_j} + \overline{K}f'_{n_j} - \overline{K}f'_{n_i} + \overline{K}f'_{n_i} - \overline{K}f_{n_i}\| \leq \\
&\leq \|\overline{K}(f_{n_j} - f'_{n_j})\| + \|\overline{K}(f'_{n_j} - f'_{n_i})\| + \|\overline{K}(f_{n_i} - f'_{n_i})\| \leq \\
&\leq \|\overline{K}\| \cdot \|f_{n_j} - f'_{n_j}\| + \|K(f'_{n_j} - f'_{n_i})\| + \|\overline{K}\| \cdot \|f_{n_i} - f'_{n_i}\| \leq \\
&\leq \|\overline{K}\| \cdot \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_i}\right) + \|K(f'_{n_j} - f'_{n_i})\| .
\end{aligned}$$

Also ist $(\overline{K}f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. $\overline{K}$ ist kompakt.

2.2.8 Bemerkung

Ist $\mathcal{H}'$ ein Prähilbertraum, $K : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H}'$ ein kompakter Operator mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}$, so kann man daraus einen kompakten Operator in einem Hilbertraum konstruieren: Durch Vervollständigung (Sätze B.1.10, B.1.11) wird aus dem Prähilbertraum $\mathcal{H}'$ ein Hilbertraum $\mathcal{H}$, in den $\mathcal{H}'$ eingebettet ist. $\mathcal{D}$ wird zu einem dichten Teilraum von $\mathcal{H}$. In $\mathcal{H}$ bestimmt man K durch $Kf' = [(Kf')]$ für $f' \in \mathcal{D}$, wobei $[(Kf')]$ die Äquivalenzklasse von Kf' bei Vervollständigung bedeutet. Die Abschließung $\overline{K}$ ist dann nach Satz 2.2.7 ebenfalls kompakt. Deshalb genügt es im folgenden meist, sich auf Hilberträume zu beschränken.

2.2.9 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein kompakter, linearer Operator, $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator. Dann sind die in $\mathcal{H}$ erklärten Operatoren KT und TK kompakt.

Beweis:

Kompaktheit von KT: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|f_n\| \leq c$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\|Tf_n\| \leq \|T\| \cdot c$. Sei $g_n := Tf_n$. Dann ist $Kg_n = KTf_n$ und wegen der Kompaktheit von K gibt es eine Teilfolge $(g_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(Kg_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Also konvergiert $(KTf_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$, d.h. KT ist kompakt.
Die Kompaktheit von TK folgt analog.

2.2.10 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ kompakt. Dann ist auch K^* kompakt.

Beweis:

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $\|f_n\| \leq c$ für $n \in \mathbb{N}$. K^* ist beschränkt, also ist nach Satz 2.2.9 auch KK^* kompakt. Deshalb existiert eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(KK^*f_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|K^*(f_{n_j} - f_{n_k})\|^2 &= (K^*(f_{n_j} - f_{n_k}), K^*(f_{n_j} - f_{n_k})) = |(KK^*(f_{n_j} - f_{n_k}), f_{n_j} - f_{n_k})| \leq \\
&\leq \|KK^*(f_{n_j} - f_{n_k})\| \cdot \|f_{n_j} - f_{n_k}\| \leq \|KK^*(f_{n_j} - f_{n_k})\| \cdot (\|f_{n_j}\| + \|f_{n_k}\|) \leq \\
&\leq 2c \cdot \|KK^*(f_{n_j} - f_{n_k})\| .
\end{aligned}$$

Die rechte Seite konvergiert für $j, k \longrightarrow \infty$ gegen 0 also ist K^* kompakt.

2.2.11 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. V ist genau dann kompakt, wenn für jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $x_n \rightharpoonup x$ für $n \longrightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} Vx_n = Vx.$$

Beweis:

„$\Leftarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine Folge mit $\| x_n \| \leq c$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.1.4 gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x^* \in \mathcal{H}$, so daß $x_{n_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} x^*$. Nach Voraussetzung gilt dann $\lim\limits_{j\to\infty} Vx_{n_j} = Vx^*$. Also ist V kompakt.

„$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine Folge mit $x_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} x$. Sei $y_n := x_n - x$. Dann gilt $y_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} Vy_n = 0$

Angenommen, es gibt eine Teilfolge $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $d > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$: $\| Vy'_n \| \geq d > 0$. Die Folge $(\| x_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, also auch $(\| y_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit $(\| y'_n \|)_{n\in\mathbb{N}}$. Da V kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(y''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ derart, daß $\lim\limits_{n\to\infty} Vy''_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| Vy''_n \| = \| z \|$. Es ist $\| z \| \geq d > 0$, also hat man

$$0 < d^2 \leq (z,z) = \lim_{n\to\infty}(Vy''_n, z) = \lim_{n\to\infty}(y''_n, V^*z) = 0,$$

Widerspruch. (Es war ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, also auch $\lim\limits_{n\to\infty} y''_n = 0$.)

2.2.12 Folgerung

Sei $K : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ linear. K ist genau dann kompakt, wenn für alle Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(Ku_n, v_n) = (Ku, v)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei K kompakt, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $u_n \rightharpoonup u, v_n \rightharpoonup v$. Nach Satz 2.2.11 gilt dann : $\lim\limits_{n\to\infty} Ku_n = Ku$. Weiter gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\| v_n \| \leq c$ für alle n. Also ist

$$\begin{aligned}
|(Ku_n, v_n) - (Ku, v)| &= |(Ku_n, v_n) - (Ku, v_n) + (Ku, v_n) - (Ku, v)| \leq \\
&\leq |(Ku_n - Ku, v_n)| + |(Ku, v_n - v)| \leq \\
&\leq \| Ku_n - Ku \| \cdot \| v_n \| + |(Ku, v_n - v)| \leq \\
&\leq c \cdot \| Ku_n - Ku \| + |(Ku, v_n - v)| .
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \| Ku_n - Ku \| = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |(Ku, v_n - v)| = 0$ ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} |(Ku_n, v_n) - (Ku, v)| = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ mit $u_n \rightharpoonup u$. Sei $v \in \mathcal{H}$ beliebig. Setzt man $v_n := v$, so gilt $v_n \rightharpoonup v$ und daher ist $\lim\limits_{n\to\infty}(Ku_n, v) = (Ku, v)$ nach Voraussetzung, d.h. $Ku_n \rightharpoonup Ku$. Nun sei $\hat{u}_n := u_n - u$ und $\hat{v}_n := Ku_n - Ku$. Dann gilt $\hat{u}_n \rightharpoonup 0, \hat{v}_n \rightharpoonup 0$. Es ist jetzt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \| Ku_n - Ku \|^2 &= \lim_{n\to\infty}(Ku_n - Ku, Ku_n - Ku) = \\
&= \lim_{n\to\infty}(K(u_n - u), \hat{v}_n) = \lim_{n\to\infty}(K\hat{u}_n, \hat{v}_n) = \\
&\overset{\text{Vor.}}{=} (K0, 0) = 0,
\end{aligned}$$

also ist $\lim\limits_{n\to\infty} Ku_n = Ku$ und nach Satz 2.2.11 folgt: K ist kompakt.

2.3 Die Fredholmschen Sätze für kompakte Operatoren im Hilbertraum.

2.3.1 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Prähilbertraum, $\Sigma \subset \mathcal{H}$ präkompakt. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $z_1, ..., z_n \in \Sigma$, so daß $\Sigma \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} K_\varepsilon(z_\nu)$, d.h. Σ ist total beschränkt.

Beweis:

Sei $z_1 \in \Sigma$. Wenn $\Sigma \subset K_\varepsilon(z_1)$, ist man fertig. Andernfalls gibt es ein $z_2 \in \Sigma$ mit $\| z_2 - z_1 \| \geq \varepsilon$, wenn $\Sigma \subset K_\varepsilon(z_2)$ ist man fertig. Andernfalls gibt es ein $z_3 \in \Sigma$ mit $\| z_1 - z_3 \| \geq \varepsilon$, $\| z_2 - z_3 \| \geq \varepsilon$ usw. Wäre die Behauptung des Hilfssatzes falsch, so könnte man so eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ konstruieren mit $\| z_n - z_i \| \geq \varepsilon$ für $i = 1, ..., n-1$. Also ist $\| z_i - z_j \| \geq \varepsilon$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$. Eine solche Folge enthält keine Cauchy-Folge. Widerspruch zur Präkompaktheit von Σ.

2.3.2 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ kompakt, $z \in \mathcal{H}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein endlichdimensionaler Teilraum M mit $z \in M$, so daß gilt $\| P_M V - V \| < \varepsilon$. Dabei ist P_M der Projektor auf M.

Beweis:

Seien $\varepsilon > 0, z \in \mathcal{H}$ vorgegeben, sei $\Sigma = \{y \in \mathcal{H} \mid y = Vx, \; \| x \| \leq 1\}$. V ist kompakt, also ist Σ präkompakt. Nach Hilfssatz 2.3.1 gibt es $z_1, ..., z_n \in \Sigma$, so daß $\Sigma \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} K_\varepsilon(z_\nu)$. Setze $z_0 := z$. Sei $M = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid f = \sum_{k=0}^{n} c_k z_k \right\}$ der von $z_0, z_1, ..., z_n$ aufgespannte Teilraum von $\mathcal{H}$. M ist endlichdimensional und daher abgeschlossen. Wegen Hilfssatz 2.3.1 gibt es für jedes $y \in \Sigma$ $c_0, ..., c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\left\| y - \sum_{k=0}^{n} c_k z_k \right\| < \varepsilon$$

(genaugenommen gibt es sogar ein z_ν mit $\| y - z_\nu \| < \varepsilon$).

O.E. sei $\dim M \geq 1$. Nach dem Orthonormalisierungsverfahren von Erhard Schmidt (1.1.16) hat M eine Orthonormalbasis $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$. Weil $\sum_{k=0}^{n} c_k z_k \in M$, gibt es also $d_1, ..., d_n \in \mathbb{C}$ mit $\left\| y - \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$. Nach Hilfssatz 1.1.9 folgt: $\left\| y - \sum_{k=1}^{n} (y, \varphi_k)\varphi_k \right\| < \varepsilon$. Für beliebiges $\widetilde{y} \in \mathcal{H}$ ist $P_M \widetilde{y} = \sum_{k=1}^{n} (\widetilde{y}, \varphi_k)\varphi_k$, also gilt für alle $y \in \Sigma = \{y \in \mathcal{H} \mid y = Vx, \|x\| \leq 1\} : \| P_M y - y \| < \varepsilon$.

Demnach gilt für alle x mit $\|x\| \leq 1 : \| P_M V x - V x \| < \varepsilon$, d.h. $\| P_M V - V \| < \varepsilon$.

2.3.3 Definition

Sei $V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein kompakter Operator, $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, Tx := x - Vx$, d.h. $T = I - V$. $\mathcal{N}(T) := \{x \in \mathcal{H} \mid Tx = 0\}$ heißt Kern oder Nullraum von T, $\mathcal{R}(T) = \{y \in \mathcal{H} \mid \exists x \in \mathcal{H} : y = Tx\}$ heißt Wertebereich von T.

$\mathcal{N}(T)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$.

2.3.4 Hilfssatz

$\mathcal{N}(T)$ ist ein endlichdimensionaler Teilraum von $\mathcal{H}$.

Beweis:

Annahme: $\mathcal{N}(T)$ ist nicht endlichdimensional.

Dann gibt es eine abzählbare unendliche Menge $\{f_1, f_2, ...\} \subset \mathcal{N}(T)$ derart, daß jeweils endlich viele Elemente dieser Menge linear unabhängig sind. Nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren 1.1.16 gibt es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ mit $T\varphi_i = 0$, also $\varphi_i = V\varphi_i$ für $i \in \mathbb{N}$. Da V kompakt ist, enthält die Folge $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Dies ist aber wegen $\| \varphi_i - \varphi_k \|^2 = 2$ für $i \neq k$ unmöglich.

2.3.5 Hilfssatz

Es gibt ein $d > 0$, so daß für alle $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$ gilt: $\| Tx \| \geq d \cdot \| x \|$.

Beweis:
Angenommen es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}(T)^\perp$ mit $\| x_n \| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = 0$. Weil V kompakt ist, gäbe es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(Vx_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, d.h. es gibt ein $z \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} Vx_{n_j} = z$. Es gilt

$$0 = \lim_{j\to\infty} Tx_{n_j} = \lim_{j\to\infty} (x_{n_j} - Vx_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_j} - \lim_{j\to\infty} Vx_{n_j} = \lim_{j\to\infty} x_{n_j} - z \Longrightarrow \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = z.$$

Weil V beschränkt ist, gilt jetzt auch $\lim\limits_{j\to\infty} Vx_{n_j} = Vz$. Also ist $Tz = z - Vz = 0$, d.h. $z \in \mathcal{N}(T)$. Es war aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{N}(T)^\perp$, $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = z$, $\mathcal{N}(T)^\perp$ ist abgeschlossen nach 1.2.3, also $z \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Man hat also: $z \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T)^\perp = \{0\}, \| z \| = \lim\limits_{j\to\infty} \| x_{n_j} \| = 1$, Widerspruch.

2.3.6 Hilfssatz

$\mathcal{R}(T)$ ist abgeschlossen.

Beweis:
Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(T)$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Sei $y_n = Tx_n$, P der Projektor auf $\mathcal{N}(T), x'_n := x_n - Px_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} (x'_n, Py) &= (x_n - Px_n, Py) = (x_n, Py) - (Px_n, Py) = \\ &= (x_n, Py) - (x_n, P^2y) = (x_n, Py) - (x_n, Py) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $x'_n \in \mathcal{N}(T)^\perp$. Weiter gilt $Tx'_n = Tx_n - TPx_n = Tx_n = y_n$, weil P ja auf $\mathcal{N}(T)$ projiziert. Also ist $(Tx'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach Hilfssatz 2.3.5 gilt $\| T(x'_l - x'_k) \| \geq d \cdot \| x'_l - x'_k \|$, d.h. auch $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Es gibt also ein $x' \in \mathcal{N}(T)^\perp$ (abgeschlossen nach 1.2.3), so daß $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x'$. Damit gilt jetzt: $y = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = \lim\limits_{n\to\infty} Tx'_n = Tx' \in \mathcal{R}(T)$, demnach ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen.

2.3.7 Hilfssatz

Die Gleichung $Tx = 0$ habe nur die Lösung $x = 0$. Dann hat T eine in ganz $\mathcal{H}$ erklärte beschränkte Inverse und es gibt einen kompakten Operator $W : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ so daß $T^{-1} = I - W$.

Beweis:

1) Existenz von T^{-1}, Beschränktheit:

   T^{-1} existiert als linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(T^{-1}) = \mathcal{R}(T)$. Zu zeigen bleibt also: $\mathcal{H} = \mathcal{R}(T)$. Sei $y \in \mathcal{H}$. Nach Hilfssatz 2.3.5 gilt für $x \in \mathcal{H} = \mathcal{N}(T)^\perp$: $\| Tx \| \geq d \cdot \| x \|$. Nach Hilfssatz 2.3.2 gibt es eine Folge $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von endlichdimensionalen Teilräumen M_j mit $y \in M_j$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \| P_{M_j} V - V \| = 0$. ($P_{M_j}$: Projektor von $\mathcal{H}$ auf M_j). Sei j_0 so gewählt, daß $\| P_{M_j} V - V \| \leq \frac{d}{2}$

für $j \geq j_0$. Setze $T_j := I - P_{M_j}V$. Dann ist $T_j(M_j) \subset M_j$. Betrachte die Gleichung $T_j\tilde{x} = y$ in M_j. Es ist

$$\begin{aligned} \|T_jx\| &= \|x - P_{M_j}Vx\| = \|x - Vx + Vx - P_{M_j}Vx\| \geq \\ &\geq \|x - Vx\| - \|Vx - P_{M_j}Vx\| \geq \\ &\geq d\cdot\|x\| - \frac{d}{2}\|x\| \geq \frac{d}{2}\cdot\|x\| \end{aligned}$$

für $j \geq j_0$.

Deshalb hat die Gleichung $T_j\tilde{x} = 0$ nur die triviale Lösung, also ist $T_j : M_j \longrightarrow M_j$ surjektiv (M_j ist ja endlichdimensional!). Es gibt also zu dem oben gewählten y eine Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $T_jx_j = y$, wobei $x_j \in M_j$. Nun ist nach obiger Rechnung $\|y\| = \|T_jx_j\| \geq \frac{d}{2}\|x_j\|$, also $\|x_j\| \leq \frac{2}{d}\|y\|$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \|Tx_j - y\| &= \|Tx_j - T_jx_j\| \leq \|T - T_j\| \cdot \|x_j\| = \\ &= \|P_{M_j}V - V\| \cdot \|x_j\| \leq \frac{2}{d}\cdot\|y\| \cdot \|P_{M_j}V - V\|. \end{aligned}$$

Für $j \longrightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, also ist $\lim\limits_{j\to\infty} Tx_j = y$. Deshalb gilt zunächst $y \in \overline{\mathcal{R}(T)}$. Weil nach Hilfssatz 2.3.6 $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist, hat man damit aber auch $y \in \mathcal{R}(T)$, d.h. $\mathcal{R}(T) = \mathcal{H}$.

Die Beschränktheit folgt nun schnell: Ist $x = T^{-1}y$ für ein $y \in \mathcal{H}$, so gilt nach 2.3.5:

$$\|Tx\| \geq d\cdot\|x\| \Longleftrightarrow \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{d}\cdot\|y\|.$$

2) Existenz eines kompakten W mit $T^{-1} = I - W$:

   Aus $Tx = x - Vx = y$ erhält man $x = T^{-1}y = y + VT^{-1}y$, indem man $T^{-1}y$ für x einsetzt. Setzt man also $W = -VT^{-1}$, so ist $T^{-1} = I - W$ und nach Satz 2.2.9 ist W kompakt.

Entscheidend für den Beweis dieses Hilfssatzes war die Approximation von V durch Operatoren $P_{M_j}V$, wobei P_{M_j} Projektoren von $\mathcal{H}$ auf endlichdimensionale Teilräume sind.

2.3.8 Hilfssatz

$\dim\mathcal{N}(T) = \dim\mathcal{N}(T^*)$.

Beweis:
Setze $d := \dim\mathcal{N}(T); d^* := \dim\mathcal{N}(T^*)$.

1) $d = 0$: Dann hat $Tx = 0$ nur die triviale Lösung, die Gleichung $Tx = y$ ist für alle $y \in \mathcal{H}$ lösbar und x ist eindeutig bestimmt. Sei $z \in \mathcal{N}(T^*)$. Dann ist für alle $x \in \mathcal{H} : (Tx, z) = (x, T^*z) = 0$. Die Gleichung $Tx = z$ hat eine eindeutig bestimmte Lösung x_0, also gilt $(Tx_0, Tx_0) = 0$, d.h. $z = Tx_0 = 0$. Demnach ist $\mathcal{N}(T^*) = \{0\}$, d.h. $d^* = 0 = d$.

2) $d > 1$: Annahme: $d < d^*$.

   Sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_d\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{N}(T)$ und $\{\psi_1, ..., \psi_{d^*}\}$ eine von $\mathcal{N}(T^*)$. Sei $W : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, Wx = Vx + \sum\limits_{i=1}^{d}(x, \varphi_i)\psi_i$. W ist ein linearer und – weil V kompakt ist – auch kompakter Operator in $\mathcal{H}$. Sei $(I-W)x = 0$. Dann ist $0 = (I-W)x = x - Vx - \sum\limits_{i=1}^{d}(x, \varphi_i)\psi_i = Tx - \sum\limits_{i=1}^{d}(x_i, \varphi_i)\psi_i$. Skalarmultipliziert mit $\psi_j, j = 1, ..., d$, erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= (Tx, \psi_j) - \left(\sum_{i=1}^{d}(x, \varphi_i)\psi_i, \psi_j\right) = (Tx, \psi_j) - (x, \varphi_j) = \\ &= (x, T^*\psi_j) - (x, \varphi_j) \overset{\psi_j \in \mathcal{N}(T^*)}{=} -(x, \varphi_j) \end{aligned}$$

und damit $x \in \mathcal{N}(T)^\perp$. In der Definitionsgleichung von W sind also die $(x, \varphi_i) = 0$, deshalb ist $Wx = Vx$ und $(I - V)x = Tx = 0$, d.h. es ist auch $x \in \mathcal{N}(T)$, also ist $x = 0$.

Jetzt kann man Hilfssatz 2.3.7 anwenden und erhält: Die Gleichung $x - Wx = y$ ist für jedes $y \in \mathcal{H}$ eindeutig lösbar.

Nach Annahme war $d < d^*$, setze also $y = \psi_{d+1}$. Für das zugehörige x mit $x - Wx = Tx - \sum\limits_{i=1}^{d} (x, \varphi_i)\psi_i = \psi_{d+1}$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= \|\psi_{d+1}\|^2 = (\psi_{d+1}, \psi_{d+1}) = \left(Tx - \sum_{i=1}^{d} (x, \varphi_i)\psi_i, \psi_{d+1} \right) = \\ &= (Tx, \psi_{d+1}) = (x, T^*\psi_{d+1}) = 0, \end{aligned}$$

also Widerspruch. $d^* < d$ kann man analog mit Vertauschung von T und T^* behandeln.

Damit bekommt man die Fredholmschen Sätze, zusammengefaßt im

2.3.9 Satz (Fredholm[1])

Sei $V : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ kompakt, $T = I - V$, $\mathcal{N}(T)$ der Nullraum von T, $\mathcal{N}(T^*)$ der Nullraum von $T^* = I - V^*$. Dann gilt:

1) $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$, $\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(T^*)$.

2) Ist $\dim \mathcal{N}(T) = 0$, so hat T eine in $\mathcal{H}$ erklärte, beschränkte Inverse T^{-1} und es gibt ein kompaktes $W : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, so, daß $T^{-1} = I - W$.

3) Ist $\dim \mathcal{N}(T) > 0$, so hat zu vorgegebenen $y \in \mathcal{H}$ die Gleichung $Tx = y$ genau dann eine Lösung $x \in \mathcal{H}$, wenn $y \in (\mathcal{N}(T^*))^\perp$.

Beweis:
Es ist nur noch 3) zu zeigen, d.h. zu zeigen: $\mathcal{R}(T) = (\mathcal{N}(T^*))^\perp$. Wir zeigen $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$:

„$\supset$“ Sei $y = Tx, z \in \mathcal{N}(T^*)$. Dann ist $(y, z) = (Tx, z) = (x, T^*z) = 0$, d.h. $z \in \mathcal{R}(T)^\perp$, also $\mathcal{N}(T^*) \subset \mathcal{R}(T)^\perp$.

„$\subset$ “ Sei $z \in \mathcal{R}(T)^\perp$. Dann ist für alle $x \in \mathcal{H} : (Tx, z) = 0 \Longleftrightarrow (x, T^*z) = 0$. Damit ist $z \in \mathcal{N}(T^*)$, d.h. $\mathcal{R}(T)^\perp \subset \mathcal{N}(T^*)$.

Also ist $\mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*)$. Da nach Hilfssatz 2.3.6 $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist, gilt (mit 1.2.3) : $(\mathcal{R}(T)^\perp)^\perp = \mathcal{R}(T)$, also hat man $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T^*)^\perp$.
Bemerkung: Nach Hilfssatz 2.3.5 weiß man sogar, daß die Lösung der Gleichung $y = Tx$ für $y \in \mathcal{R}(T)$ eindeutig ist in $\mathcal{N}(T)^\perp$.

[1] Erik Ivar Fredholm (1866-1927)

2.4 Anwendungen auf Integraloperatoren

2.4.1 Hilfssatz

Sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Operatoren in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(K_n)=\mathcal{H}$. Sei K ein beschränkter Operator mit $\mathcal{D}(K)=\mathcal{H}$ und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty}\|K_n-K\|=0$. Dann ist K kompakt.

Beweis:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ eine Folge mit $\|f_n\|\leq c$. Da K_1 kompakt ist, kann man daraus eine Teilfolge $(f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, so daß $(K_1f_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Diese enthält wieder eine Teilfolge $(f_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, so daß $(K_2f_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert usw. Man erhält also eine Folge von Teilfolgen $(f_n^{(p)})\subset(f_n^{(p-1)})\subset\ldots\subset(f_n^{(1)})\subset(f_n)$ und es gilt: $(K_pf_n^{(q)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn $1\leq p\leq q$. Für die Diagonalfolge $(f'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ mit $f'_p=f_p^{(p)}$ gilt dann: $(K_mf'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $m\in\mathbb{N}$. Deswegen konvergiert auch die Folge $(Kf'_p)_{p\in\mathbb{N}}$: Es ist

$$\begin{aligned}\|Kf'_p-Kf'_q\| &= \|K_mf'_p-K_mf'_q+Kf'_p-K_mf'_p+K_mf'_q-Kf'_q\|\leq\\ &\leq \|K_mf'_p-K_mf'_q\|+\|(K-K_m)f'_p\|+\|(K_m-K)f'_q\|\leq\\ &\leq \|K_mf'_p-K_mf'_q\|+2c\cdot\|K-K_m\|\,.\end{aligned}$$

Wählt man nun zu vorgegebenen $\varepsilon>0$ ein $m_0\in\mathbb{N}$, so daß $2c\,\|K-K_{m_0}\|<\frac{\varepsilon}{2}$ und anschließend ein $N(m_0,\varepsilon)\in\mathbb{N}$, so daß $\forall p,q>N(m_0,\varepsilon):\|K_{m_0}f'_p-K_{m_0}f'_q\|<\frac{\varepsilon}{2}$, so gilt also $\|Kf'_p-Kf'_q\|<\varepsilon$, d.h. $(Kf'_p)_{p\in\mathbb{N}}$ konvergiert und K ist kompakt.

2.4.2 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $V:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ ein linearer Operator. Es sind äquivalent:

1) V ist kompakt.
2) Es gibt eine Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}, V_n:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ beschränkter Operator, mit
   a) $\dim\mathcal{R}(V_n)<\infty$,
   b) $\lim\limits_{n\to\infty}\|V_n-V\|=0$.

Beweis:
1)⇒ 2) Eine solche Folge bekommt man aus Hilfssatz 2.3.2: Zu $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ wählt man eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilräumen wie dort angegeben, dann gilt für $V_n:=P_{M_n}V$ genau 2).
2)⇒ 1) Sei $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie im Satz angegeben. $\mathcal{R}(V_n)$ ist endlichdimensional und somit abgeschlossen. Sei $P_n:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{R}(V_n)$ der Projektor. Nach Beispiel 2.2.5 ist P_n kompakt, nach Satz 2.2.9 ist auch P_nV_n kompakt. Wegen $V_n=P_nV_n$ ist V_n selbst kompakt und nach Hilfssatz 2.4.1 ist V dann kompakt.

2.4.3 Definition (Integralkern und -operator vom Hilbert[1]-Schmidtschen[2] Typ)

1) Sei Q ein offener achsenparalleler Quader im $\mathbb{R}^n$. Sei $K\in L^2(Q\times Q)$. Dann heißt K Integralkern vom Hilbert-Schmidtschen Typ.

   (Bemerkung: Q ist nicht besonders ausgezeichnet, z.B. kann statt Q auch eine Kugel $K_R(0)$ stehen.)

2) $K:L^2(Q)\longrightarrow L^2(Q), f\longmapsto Kf(x)=\int\limits_Q K(x,y)f(y)dy$ heißt Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ.

[1]David Hilbert (1862-1943)
[2]Erhard Schmidt (1876-1959)

2.4.4 Satz (Eigenschaften von K)

Der in 2.4.3 definierte Integraloperator K ist wohldefiniert. K ist ein linearer, beschränkter in ganz $L^2(Q)$ definierter kompakter Operator.

Beweis:

1) Wohldefiniertheit:

   Nach Fubini (Forster, Analysis 3, §7, Satz 7) ist $|K(x,.)|^2$ für fast alle $x \in Q$ über Q integrierbar. Deshalb ist für $f \in L^2(Q)$ die Funktion $Kf(x) = \int_Q K(x,y)f(y)dy$ für fast alle x wohldefiniert. K kann also in ganz $L^2(Q)$ definiert werden.

2) Beschränktheit:

   Es ist $|Kf(x)| = |\int_Q K(x,y)f(y)dy| \leq \int_Q |K(x,y)| \cdot |f(y)|\ dy$. Mit der Hölderschen Ungleichung A.4.5 erhält man:

$$\begin{aligned}
|Kf(x)|^2 &\leq \left(\int_Q |K(x,y)| \cdot |f(y)|\ dy\right)^2 \leq \\
&\overset{A.4.5}{\leq} \left(\left(\int_Q |K(x,y)|^2\ dy\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_Q |f(y)|^2\ dy\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \\
&= \int_Q |K(x,y)|^2\ dy \cdot \int_Q |f(y)|^2\ dy.
\end{aligned}$$

   Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\int_Q |Kf(x)|^2\ dx &\leq \int_Q \left(\int_Q |K(x,y)|^2\ dy \cdot \int_Q |f(y)|^2\ dy\right) dx = \\
&= \int_Q \int_Q |K(x,y)|^2\ dydx \cdot \int_Q |f(y)|^2\ dy,
\end{aligned}$$

   also $\|Kf\|_{L^2(Q)} \leq \|K\|_{L^2(Q\times Q)} \cdot \|f\|_{L^2(Q)}$, d.h. der Operator K ist beschränkt.

3) Kompaktheit:

   Nach Satz A.5.7 gibt es eine Folge $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Funktionen $K_n \in C_0^0(\mathbf{R}^{2n})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n - K\|_{L^2(Q\times Q)} = 0.$$

   Die Einschränkung von K_n auf $Q \times Q$ liefert einen Integralkern, der zugehörige Integraloperator $K_n : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q), f \longmapsto K_n f(x) = \int_Q K_n(x,y)f(y)dy$ ist vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Wir zeigen die Kompaktheit der K_n :

   Sei $(f_m)_{m\in\mathbf{N}}$ eine Folge in $L^2(Q)$ mit $\|f_m\|_{L^2(Q)} \leq c$, sei $g_m := K_n f_m$. Für $x_1, x_2 \in Q$ ist

$$\begin{aligned}
|g_m(x_1) - g_m(x_2)| &\leq \int_Q |K_n(x_1,y) - K_n(x_2,y)| \cdot |f_m(y)|\ dy \leq \\
&\overset{A.4.5}{\leq} \left(\int_Q |K_n(x_1,y) - K_n(x_2,y)|^2\ dy\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_Q |f_m(y)|^2\ dy\right)^{\frac{1}{2}} \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \quad c \cdot \left(\int\limits_Q |K_n(x_1,y) - K_n(x_2,y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Da $K_n \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$, so daß für $y \in Q$ gilt: $|K_n(x_1,y) - K_n(x_2,y)| \leq \frac{\varepsilon}{|Q| \cdot c}$, wenn $\| x_2 - x_1 \|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$. Also gilt für $\| x_2 - x_1 \|_{\mathbb{R}^n} < \delta(\varepsilon)$: $| g_m(x_1) - g_m(x_2) | < \varepsilon$, d.h. die Funktionen g_m sind alle gleichmäßig (= gleichgradig) stetig.

Weiter ist die Funktion K_n in $Q \times Q$ beschränkt und daher gilt:

$$\begin{aligned} |g_m(x)| \quad &\leq \quad \left(\int\limits_Q |K_n(x,y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f_m\|_{L^2(Q)} \leq c \cdot \left(\int\limits_Q \sup_{(x,y) \in (Q \times Q)} |K_n(x,y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \quad c \cdot |Q|^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{(x,y) \in (Q \times Q)} |K_n(x,y)| . \end{aligned}$$

Die Folge der $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist also auch gleichmäßig beschränkt. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Kolmogorow (A.6.3) erfüllt: Da Q beschränkt ist, ist mit der Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auch die Folge $(\|g_m\|_{L^2})_{m \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt und wählt man ein η so, daß $|g_m(x+y) - g_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|Q|^{\frac{1}{2}}}$ für $\| y \| < \eta$, so ist auch $\int\limits_Q | g_m(x+y) - g_m(x) |^2 \, dx \leq \varepsilon$. Der Satz von Kolmogorow sagt aus, daß $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine in $L^2(Q)$ konvergente Teilfolge $(g_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ enthält. Damit ist also die Kompaktheit der Operatoren $K_n, n \in \mathbb{N}$, gezeigt.

Bemerkung: Wäre $g_n \in C^0(\overline{Q})$, könnte man statt des Satzes von Kolmogorow den Satz von Ascoli-Arzelà (A.6.2) verwenden. Dies kann man so erreichen: Man definiert $\widetilde{K}_n : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow L^2(Q), f \longmapsto \int\limits_Q K_n(x,y)f(y)dy$. Für $f \in C^0(\overline{Q})$ ist $\widetilde{K}_n f \in C^0(\overline{Q})$. Die Rechnungen oben funktionieren genauso, also gibt es diesmal nach Ascoli-Arzelà eine Teilfolge $(g_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen ein $g \in C^0(\overline{Q})$ konvergiert. Also ist $\widetilde{K}_n$ kompakt. Da $C^0(\overline{Q})$ dicht in $L^2(Q)$ liegt, ist der Abschluß von $\widetilde{K}_n$ der oben behandelte Operator K_n. Nach Satz 2.2.7 ist K_n dann ebenfalls kompakt.

Aus der Kompaktheit der K_n kann man nun die von K folgern:

Für die Funktionen $K_n, K \in L^2(Q \times Q)$ galt $\lim\limits_{n \to \infty} \| K_n - K \|_{L^2(Q \times Q)} = 0$. Für die Operatoren K_n, K gilt nach 2):

$$\begin{aligned} \|K_n - K\| \quad &= \quad \sup_{f \in L^2(Q), \|f\| = 1} \|(K_n - K)f\|_{L^2(Q)} \leq \\ &\overset{2)}{\leq} \quad \sup_{f \in L^2(Q), \|f\| = 1} \|K_n - K\|_{L^2(Q \times Q)} \cdot \| f \|_{L^2(Q)} = \\ &= \quad \|K_n - K\|_{L^2(Q \times Q)}, \end{aligned}$$

also gilt auch in der Operatorennorm $\lim\limits_{n \to \infty} \|K_n - K\| = 0$. Nach Hilfssatz 2.4.1 folgt jetzt: K ist kompakt.

2.4.5 Hilfssatz

Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidt-Typ in $L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q)$. Dann wird K^* durch den Integralkern $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$ gegeben und ist ebenfalls vom Hilbert-Schmidt-Typ.

Beweis:
Es ist

$$(Kf, g) = \int\limits_Q \left(\int\limits_Q K(x,y)f(y)dy \right) \overline{g(x)} dx = \int\limits_Q f(y) \left(\overline{\int\limits_Q \overline{K(x,y)} g(x) dx} \right) dy = (f, K^* g).$$

Setzt man also $K^*(x,y) = \overline{K(y,x)}$, so ist der zugehörige Integraloperator K^* vom Hilbert-Schmidt-Typ die Adjungierte von K.

2.4.6 Hilfssatz

Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidt-Typ in $L^2(Q)$ mit Integralkern $K \in L^2(Q \times Q), T = I - K$. Dann gilt für die nach Hilfssatz 2.3.4 endliche Dimension d von $\mathcal{N}(T)$ die Abschätzung

$$d \le \int\limits_Q \int\limits_Q |K(x,y)|^2 \, dydx.$$

Beweis:
Sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_d\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{N}(T)$. Aus $T\varphi_i = 0$ folgt fast überall in Q: $\varphi_i(x) = \int\limits_Q K(x,y)\varphi_i(y)dy$. Setzt man nun $f_x(y) := K(x,y)$, so erhält man mit der Besselschen Ungleichung 1.1.10 im Hilbertraum $L^2(Q)$ fast überall:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(x)|^2 &= \sum_{i=1}^{d} \left| \int\limits_Q K(x,y)\overline{\overline{\varphi_i(y)}}dy \right|^2 = \sum_{i=1}^{d} \left| \int\limits_Q f_x(y)\overline{\overline{\varphi_i(y)}}dy \right|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{d} |(f_x, \overline{\varphi_i})|^2 \overset{1.1.10}{\le} \|f_x\|^2_{L^2(Q)} = \int\limits_Q |f_x(y)|^2 \, dy = \int\limits_Q |K(x,y)|^2 \, dy.\end{aligned}$$

Nochmalige Integration über Q liefert:

$$d = \sum_{i=1}^{d} \int\limits_Q |\varphi_i(x)|^2 \, dx = \int\limits_Q \sum_{i=1}^{d} |\varphi_i(x)|^2 \, dx \le \int\limits_Q \int\limits_Q |K(x,y)|^2 \, dydx.$$

Die Fredholmschen Sätze für Integraloperatoren vom Hilbert-Schmidt-Typ lauten:

2.4.7 Satz

Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidt-Typ in $L^2(Q)$ mit Kern $K \in L^2(Q \times Q)$. Seien $\mathcal{N}(T), \mathcal{N}(T^*)$ die Nullräume von $T = I - K$ bzw. $T^* = I - K^*$. Für $\varphi \in \mathcal{N}(T), \psi \in \mathcal{N}(T^*)$ gilt fast überall in Q:

1) $\varphi(x) - \int\limits_Q K(x,y)\varphi(y)dy = 0,$

2) $\psi(x) - \int\limits_Q \overline{K(y,x)}\psi(y)dy = 0.$

Umgekehrt ist jedes $\varphi \in L^2(Q)$, für das Gleichung 1) fast überall gilt, in $\mathcal{N}(T)$ und jedes $\psi \in L^2(Q)$, das Gleichung 2) fast überall erfüllt, in $\mathcal{N}(T^*)$.
Weiter gilt: $\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(T^*) \le \|K\|^2_{L^2(Q\times Q)} < \infty$. Zu gegebenem $f \in L^2(Q)$ ist die inhomogene Gleichung

$$u(x) - \int\limits_Q K(x,y)u(y)dy = f(x)$$

genau dann in $L^2(Q)$ lösbar, wenn für alle $\psi \in \mathcal{N}(T^*)$ gilt:

$$\int\limits_Q f(x)\overline{\psi(x)}dx = 0.$$

Beweis:
Das ist gerade Satz 2.3.9 übertragen auf Operatoren vom Hilbert-Schmidt-Typ. Zusätzlich wurde Hilfssatz 2.4.6 verwendet.

Manche Probleme können auf Integralkerne vom Hilbert-Schmidt-Typ zurückgeführt werden. Ein solches ist das Sturm-Liouville-Problem:

2.4.8 Definition (Sturm[1]-Liouvillescher[2] Operator)

Sei $p \in C^1([a,b],\mathbb{R}), q \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Für alle $x \in [a,b]$ sei $p(x) > 0$.
Weiter seien $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1^2 + c_2^2 > 0,\ d_1^2 + d_2^2 > 0$.
Sei $\mathcal{D}(L) := \{u \in C^2([a,b],\mathbb{C}) \mid c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0, d_1 u(b) + d_2 u'(b) = 0\}$.
Der Operator $L : \mathcal{D}(L) \longrightarrow C^0([a,b]), u \longmapsto Lu = -(pu')' + qu$ heißt Sturm-Liouvillescher Operator.

2.4.9 Bemerkungen

1) $c_2 = d_2 = 0, c_1 = d_1 = 1$ liefert $u(a) = u(b) = 0$, die Dirichlet-Randbedingung.
2) $c_2 = d_2 = 1, c_1 = d_1 = 0$ liefert $u'(a) = u'(b) = 0$, die Normalen-Nullbedingung.
3) Für $p = 1$, $q = 0$ erhält man $Lu = -u''$. Das ist aber nicht zu verwechseln mit dem aus Analysis 2 bekannten Cauchy-Problem
   $-u'' = f, u(a) = c_0, u'(a) = c_1$.

2.4.10 Hilfssatz

Sei L ein Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Dann gilt für $u, v \in \mathcal{D}(L)$:

$$\int_a^b v(Lu)\,dx = \int_a^b (Lv)u\,dx.$$

Beweis:
Es ist

$$\begin{aligned} v(Lu) - (Lv)u &= v\Big(-(pu')' + qu\Big) - u\Big(-(pv')' + qv\Big) = \\ &= u(pv')' - v(pu')' = u(p'v' + pv'') - v(p'u' + pu'') = \\ &= up'v' + upv'' - vp'u' - vpu'' \end{aligned}$$

einerseits und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(u(pv)' - v(pu)'\Big) &= \frac{d}{dx}(pv'u - pu'v) = \\ &= p'v'u + pv''u + pv'u' - p'u'v - pu''v - pu'v' \end{aligned}$$

andererseits. Also hat man $v(Lu) - (Lv)u = \frac{d}{dx}\Big(u(pv)' - v(pu)'\Big) = \frac{d}{dx}\Big(p(uv' - u'v)\Big)$.
Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt daher:

$$\int_a^b \Big(v(Lu) - (Lv)u\Big)\,dx = \big[p(uv' - u'v)\big]_a^b.$$

Nach Voraussetzung waren $u, v \in \mathcal{D}(L)$, d.h. es gilt

$$c_1 u(a) + c_2 u'(a) = 0,$$

[1] Charles Sturm (1803-1855)
[2] Joseph Liouville (1809-1882)

$$c_1 v(a) + c_2 v'(a) = 0.$$

Dies kann man als homogenes, lineares Gleichungssystem in den Unbekannten c_1 und c_2 auffassen. Da nach Voraussetzung $c_1^2 + c_2^2 > 0$, hat es eine Lösung $(c_1, c_2) \neq (0,0)$. Dies ist nur möglich, wenn für die Determinante gilt:

$$0 = \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = u(a)v'(a) - v(a)u'(a).$$

Also ist $p(uv' - u'v)(a) = p(a) \cdot \Big(u(a)v'(a) - v(a)u'(a)\Big) = 0$. Analog geht man im Punkt b vor und erhält insgesamt:

$$\int\limits_a^b \Big(v(Lu) - (Lv)u\Big)\, dx = 0,$$

also die Behauptung.

2.4.11 Hilfssatz

Sei L ein Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von L. Dann ist λ reell.

Beweis:
Sei $u \in \mathcal{D}(L)$ ein zu λ gehöriger Eigenvektor, d.h. $Lu = \lambda u$. Dann ist $\overline{Lu} = \overline{\lambda u}$, da p,q reell sind ist aber $L = \overline{L}$, also hat man $L\overline{u} = \overline{\lambda u}$. Nach Hilfssatz 2.4.10 ist

$$0 = \int\limits_a^b \Big(u(L\overline{u}) - (Lu)\overline{u}\Big)\, dx = \int\limits_a^b \Big(\overline{\lambda}\, |u|^2 - \lambda\, |u|^2\Big)\, dx = (\overline{\lambda} - \lambda) \int\limits_a^b |u|^2 \, dx.$$

Als Eigenvektor verschwindet u nicht identisch. Also ist $\overline{\lambda} = \lambda$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.4.12 Hilfssatz

Seien u_1, u_2 Eigenfunktionen von L zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann sind u_1, u_2 orthogonal zueinander.

Beweis:
Nach Hilfssatz 2.4.10 ist

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \int\limits_a^b \Big(u_1 L\overline{u_2} - (Lu_1)\cdot\overline{u_2}\Big)\, dx = \int\limits_a^b (u_1 \cdot \lambda_2 \overline{u_2} - \lambda_1 u_1 \cdot \overline{u_2})\, dx = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \int\limits_a^b u_1 \overline{u_2} dx \\ \Longrightarrow &\int\limits_a^b u_1(x)\overline{u_2}(x)\, dx = 0, \end{aligned}$$

d.h. u_1 und u_2 sind orthogonal.

2.4.13 Satz

Sei L ein Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$. Die Gleichung $Lu = 0$ habe in $\mathcal{D}(L)$ nur die triviale Lösung $u = 0$. Dann gibt es eine Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) G ist stetig in $[a,b] \times [a,b]$,

2) Für $x, y \in [a,b]$ gilt: $G(x,y) = G(y,x)$,

3) Für alle $f \in C^0([a,b])$ mit $Lu = f$ gilt: $u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy \in \mathcal{D}(L)$.

G heißt Greensche[1] Funktion zum Sturm-Liouville-Operator L.

Beweis

1) Zunächst wird ein spezielles Fundamentalsystem (α, β) der gewöhnlichen Differentialgleichung $-(pu')' + qu = 0$ gewählt, für das gilt:

$$*) \qquad c_1\beta(a) + c_2\beta'(a) = 0,$$
$$d_1\alpha(b) + d_2\alpha'(b) = 0.$$

Dazu wählt man eine Lösung α der Differentialgleichung mit $\alpha(b) = -d_2, \alpha'(b) = d_1$ und eine Lösung β mit $\beta(a) = -c_2, \beta'(a) = c_1$. Dann gelten die obigen Gleichungen. (α, β) ist ein Fundamentalsystem: Wäre (α, β) kein Fundamentalsystem, so wären α, β linear abhängig, d.h. es gäbe Konstanten $(A, B) \neq (0,0)$, so daß für $x \in [a,b]$ gilt: $A\alpha(x) + B\beta(x) = 0$. Ist $B \neq 0$, so hat man also $\beta(x) = c \cdot \alpha(x)$, ist $A \neq 0$, so hat man $\alpha(x) = c' \cdot \beta(x)$, wobei $c, c' \neq 0$. Im ersten Fall ist

$$c_1\beta(a) + c_2\beta'(a) = 0,$$
$$\frac{1}{c}d_1\beta(b) + \frac{1}{c}d_2\beta'(b) = 0.$$

Multipliziert man die zweite Gleichung noch mit c, so bekommt man : $\beta \in \mathcal{D}(L)$. Da β eine Lösung von $Lu = 0$ war, ist also nach Voraussetzung $\beta = 0$, ein Widerspruch zu $\beta(a) = -c_2, \beta'(a) = c_1, (c_1^2 + c_2^2 > 0!)$. Im zweiten Fall erhält man analoges für α. Also gilt:

(α, β) ist ein Fundamentalsystem von $-(pu')' + qu = 0$.

2) Definition der Greenschen Funktion:

Wegen $L\alpha = L\beta = 0$ hat man mit der in Hilfssatz 2.4.10 gezeigten Gleichung: $0 = \alpha L\beta - \beta L\alpha = \frac{d}{dx}\Big(p(\alpha'\beta - \alpha\beta')\Big)$, also gibt es eine Konstante $\widetilde{c}$ mit $p(\alpha'\beta - \alpha\beta') = -\widetilde{c}$. Wir zeigen zunächst (etwas trickreich), daß $\widetilde{c} \neq 0$.

a) Annahme: $\widetilde{c} = 0, c_1 \neq 0$.
Nach Wahl von β gilt in diesem Fall $\beta(a) = -\frac{c_2}{c_1}\beta'(a)$. Wegen $\widetilde{c} = 0$ ist $\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$, also bekommt man die Gleichung $-c_2\alpha'(a)\beta'(a) - c_1\alpha(a)\beta'(a) = 0$.
Es ist $\beta'(a) = c_1 \neq 0$, also hat man $c_2\alpha'(a) + c_1\alpha(a) = 0$, d.h. $\alpha \in \mathcal{D}(L)$. Da α eine Lösung von $Lu = 0$ ist, folgt nach Voraussetzung $\alpha = 0$, das ist ein Widerspruch, siehe 1).

b) Annahme: $\widetilde{c} = 0, c_2 \neq 0$.
Dann ist $\beta'(a) = -\dfrac{c_1}{c_2}\beta(a)$ und man erhält wie in a) – mit β statt mit β' – einen Widerspruch.

Das bedeutet insgesamt: $\widetilde{c} = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $c_1^2 + c_2^2 > 0$, also ist $\widetilde{c} \neq 0$.

Mit (α, β) ist auch $(\alpha, \frac{1}{\widetilde{c}}\beta)$ ein Fundamentalsystem, das die Gleichungen *) erfüllt. Außerdem ist $p\Big(\alpha'(\frac{1}{\widetilde{c}}\beta) - \alpha(\frac{1}{\widetilde{c}}\beta)'\Big) = -1$. Sei $\widetilde{\alpha} = \alpha, \widetilde{\beta} = \frac{1}{\widetilde{c}} \cdot \beta$. Setze

$$G(x,y) = \begin{cases} \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\beta}(y), & a \leq y \leq x \leq b \\ \widetilde{\beta}(x)\widetilde{\alpha}(y), & a \leq x \leq y \leq b. \end{cases}$$

G ist die gesuchte Greensche Funktion.

[1] George Green (1793-1841)

3) G hat die im Satz erwähnten Eigenschaften:

Die Stetigkeit von G ist klar. Weiter hat man:

Für $a \leq x \leq y \leq b : G(y,x) = \widetilde{\alpha}(y)\widetilde{\beta}(x) = G(x,y)$ und

für $a \leq y \leq x \leq b : G(y,x) = \widetilde{\beta}(y)\widetilde{\alpha}(x) = G(x,y)$,

also ist $G(x,y) = G(y,x)$.

$u(x) \quad = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$ löst die Gleichung $Lu = f$: Es ist

$$\begin{aligned}
u(x) &= \widetilde{\alpha}(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + \widetilde{\beta}(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy,\\
u'(x) &= \widetilde{\alpha}'(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + \widetilde{\alpha}(x)\widetilde{\beta}(x)f(x) + \widetilde{\beta}'(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy - \widetilde{\beta}(x)\widetilde{\alpha}(x)f(x) =\\
&= \widetilde{\alpha}'(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + \widetilde{\beta}'(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy,\\
u''(x) &= \widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + \widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy + \widetilde{\alpha}'(x)\widetilde{\beta}(x)f(x) - \widetilde{\beta}'(x)\widetilde{\alpha}(x)f(x).
\end{aligned}$$

Es ist

$$-(pu')' + qu = -pu'' - p'u' + qu.$$

Berechne die Summanden einzeln:

$$\begin{aligned}
-p(x)u''(x) &= -p(x)\widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy - p(x)\widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy -\\
&\quad - \underbrace{p(x)\left(\widetilde{\alpha}'(x)\widetilde{\beta}(x) - \widetilde{\beta}'(x)\widetilde{\alpha}(x)\right)}_{=-1} f(x) =\\
&= -p(x)\widetilde{\alpha}''(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy - p(x)\widetilde{\beta}''(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy + f(x),\\
-p'(x)u'(x) &= -p'(x)\widetilde{\alpha}'(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy - p'(x)\widetilde{\beta}'(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy,\\
q(x)u(x) &= q(x)\widetilde{\alpha}(x)\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + q(x)\widetilde{\beta}(x)\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Addiert man nun die drei Terme, so ergibt sich:

$$-(pu')' + qu = \underbrace{\Big(-(p\widetilde{\alpha}')' + q\widetilde{\alpha}\Big)}_{=0}\int_a^x \widetilde{\beta}(y)f(y)\,dy + \underbrace{\Big(-(p\widetilde{\beta}')' + q\widetilde{\beta}\Big)}_{=0}\int_x^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy + f(x) = f(x).$$

u erfüllt die Randbedingungen:

$$c_1u(a) + c_2u'(a) = c_1\widetilde{\beta}(a)\int_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy + c_2\widetilde{\beta}'(a)\int_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy =$$

$$= \left(c_1\widetilde{\beta}(a) + c_2\widetilde{\beta}'(a)\right)\int\limits_a^b \widetilde{\alpha}(y)f(y)\,dy \overset{*)}{=} 0.$$

Analog sieht man $d_1u(b) + d_2u'(b) = 0$. Also ist $u \in \mathcal{D}(L)$.

2.4.14 Bemerkungen

In Satz 2.4.13 wurde bewiesen, daß die Abbildung $G : \mathcal{R}(L) \longrightarrow \mathcal{D}(L), f \longmapsto \int\limits_a^b G(x,y)f(y)\,dy$ die Inverse des Sturm-Liouville-Operators L ist. Da $G \in L^2((a,b)\times(a,b))$, ist G ein Integralkern vom Hilbert-Schmidt-Typ. Probleme, die den Operator L betreffen, lassen sich nun umwandeln in Probleme für den Operator G. Beispielweise gilt für das Eigenwertproblem: Ist $\mu \neq 0$ ein Eigenwert von G, d.h. es gibt ein $u \in C^0([a,b])$ mit $\mu u(x) = \int\limits_a^b G(x,y)u(y)\,dy$ für $x \in [a,b]$, so folgt nach Satz 2.4.13 $u \in \mathcal{D}(L)$ und $Lu = \frac{1}{\mu}u$ und umgekehrt.
Der Operator G kann auf ganz $L^2((a,b))$ erklärt werden nach Satz 2.4.4.
Weitere Probleme, die auf Hilbert-Schmidt-Operatoren führen, folgen später.

2.4.15 Definition (von Neumannsche[1] Norm eines Operators)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator in $\mathcal{H}$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein (o.E) abzählbar unendliches VONS in $\mathcal{H}$. Man sagt, A ist von endlicher von Neumannscher Norm, wenn $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A\varphi_i\|^2 < \infty$ ist und bezeichnet $N(A) = \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ als die von Neumannsche Norm.

Die Wohldefiniertheit von N(A) zeigt der folgende Hilfssatz.

2.4.16 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator, $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ und $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ zwei abzählbar unendliche VONS in $\mathcal{H}$. Dann ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A\varphi_i\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2$.
(Das heißt: Eine Seite ist genau dann endlich, wenn es die andere ist. In diesem Fall stimmen beide überein.)

<u>Beweis</u>:
Sei $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|A\varphi_i\|^2 < \infty$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \|A\varphi_i\|^2 &\overset{\{\psi_1,\psi_2,...\}\text{VONS}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |(A\varphi_i,\psi_k)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_i, A^*\psi_k)|^2 = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(A^*\psi_k,\varphi_i)|^2 \overset{\{\varphi_1,\varphi_2,...\}\text{VONS}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \|A^*\psi_i\|^2 = \\
&\overset{\{\psi_1,\psi_2,...\}\text{VONS}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(A^*\psi_k,\psi_i)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(A\psi_i,\psi_k)|^2 = \\
&\overset{\{\psi_1,\psi_2,...\}\text{VONS}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \|A\psi_i\|^2 .
\end{aligned}$$

[1] John von Neumann (1903-1957)

Ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| A\psi_i \|^2 < \infty$, so rechnet man analog.

2.4.17 Folgerung

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator. Dann gilt: $N(A) = N(A^*)$.

Beweis:
Das wurde in Beweis von 2.4.16 mitbewiesen.

2.4.18 Hilfssatz

Sei $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator im separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann ist $\| A \| \leq N(A), N(A) = \infty$ ist zugelassen.

Beweis:
Für $N(A) = \infty$ ist die Behauptung trivial, sei also $N(A) < \infty$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein VONS in $\mathcal{H}$. Dann gilt für $f \in \mathcal{H} : f = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f, \varphi_i)\varphi_i$. Setzt man $f_n := \sum\limits_{i=1}^{n}(f, \varphi_i)\varphi_i$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Es ist $Af_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(f, \varphi_i)A\varphi_i$ und weil A beschränkt, also stetig ist, gilt $Af = \lim\limits_{n\to\infty} Af_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f, \varphi_i)A\varphi_i$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{N}(f, \varphi_i)A\varphi_i \right\| &\leq \sum_{i=1}^{N} \| (f, \varphi_i)A\varphi_i \| = \sum_{i=1}^{N} |(f, \varphi_i)| \cdot \| A\varphi_i \| \leq \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{N} |(f, \varphi_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \| A\varphi_i \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| f \| \cdot N(A),
\end{aligned}$$

also $\| Af \| = \lim\limits_{N\to\infty} \left\| \sum\limits_{i=1}^{N}(f, \varphi_i)A\varphi_i \right\| \leq \| f \| \cdot N(A)$. Folglich gilt für alle $f \in \mathcal{H}, f \neq 0 : \dfrac{\| Af \|}{\| f \|} \leq N(A)$, deshalb ist auch $\| A \| \leq N(A)$.

2.4.19 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter, linearer Operator. $N(A)$ sei endlich. Dann ist A kompakt.

Beweis:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$. Wie im Beweis von Hilfssatz 2.4.18 gezeigt, gilt

$$Af_n - Af = A(f_n - f) = \sum_{i=1}^{\infty} \Big((f_n, \varphi_i) - (f, \varphi_i) \Big) A\varphi_i.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\| Af_n - Af \| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |(f_n, \varphi_i) - (f, \varphi_i)| \cdot \| A\varphi_i \| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} |(f_n, \varphi_i) - (f, \varphi_i)| \cdot \| A\varphi_i \| + \sum_{i=m+1}^{\infty} \Big(|(f_n, \varphi_i)| + |(f, \varphi_i)| \Big) \cdot \| A\varphi_i \| \leq \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} |(f_n, \varphi_i) - (f, \varphi_i)| \cdot \| A\varphi_i \| + \left[\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} |(f_n, \varphi_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}|(f,\varphi_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\cdot\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\|A\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}|(f_n,\varphi_i)-(f,\varphi_i)|\cdot\|A\varphi_i\|+(\|f_n\|+\|f\|)\cdot\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\|A\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sum_{i=1}^{m}|(f_n,\varphi_i)-(f,\varphi_i)|\cdot\|A\varphi_i\|+(c+\|f\|)\cdot\left(\sum_{i=m+1}^{\infty}\|A\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei c eine Konstante ist mit $\| f_n \| < c$ für $n \in \mathbb{N}$. (Eine solche gibt es wegen $f_n \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} f$). Wegen $N(A) < \infty$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\left(\sum\limits_{i=m_0+1}^{\infty}\|A\varphi_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{(c+\|f\|)\cdot 2}$. Wählt man dann ein $n_0 = n_0(m_0,\varepsilon)$ so, daß $\sum\limits_{i=1}^{m_0}|(f_n,\varphi_i)-(f,\varphi_i)|\cdot\|A\varphi_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_0$, so ist also insgesamt $\|Af_n - Af\| < \varepsilon$ für $n > n_0$. Nach Satz 2.2.11 gilt dann : A ist kompakt.

Nun wird der Begriff der von Neumannschen Norm auf Kerne vom Hilbert-Schmidt-Typ angewendet. Dabei verwenden wir Satz C.1.5: $L^2(Q)$ ist separabel.

2.4.20 Hilfssatz

Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidt-Typ in $L^2(Q)$ mit Kern $K \in L^2(Q \times Q)$. Dann gilt:

$$N(K)^2 = \int_Q\int_Q |K(x,y)|^2\, dydx.$$

Insbesondere ist also $N(K) < \infty$.

Beweis:
Sei $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ ein VONS in $L^2(Q)$. Sei $\psi_i(x) = \int_Q K(x,y)\varphi_i(y)\,dy$. Dann ist ψ_i fast überall in Q erklärt und aus $L^2(Q)$. Definiert man $f_k(x) := \sum\limits_{i=1}^{k}|\psi_i(x)|^2$, so gilt: $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiter hat man

$$\left|\int_Q f_k\,dx\right| = \left|\int_Q\sum_{i=1}^{k}|\psi_i(x)|^2\,dx\right| = \int_Q\sum_{i=1}^{k}\left|\int_Q K(x,y)\varphi_i(y)\,dy\right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_Q\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_Q K(x,y)\varphi_i(y)\,dy\right|^2 dx = \int_Q\int_Q |K(x,y)|^2\,dydx,$$

dabei gilt die letzte Gleichung wegen der Vollständigkeit von $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ für fast alle x. Man kann also den Satz von Beppo Levi A.2.2 auf die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ anwenden und erhält: Es gibt ein $f \in L(I)$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f$ fast überall und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty}\int_Q f_k\,dx = \int_Q f\,dx$. Es ist $f = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{k}|\psi_i(x)|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty}|\psi_i(x)|^2$ und es gilt also

$$\int_Q\sum_{i=1}^{\infty}|\psi_i(x)|^2\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_Q\sum_{i=1}^{k}|\psi_i(x)|^2\,dx = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_Q|\psi_i(x)|^2\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\int_Q|\psi_i(x)|^2\,dx.$$

Verwendet man das, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\infty > \int\limits_Q \int\limits_Q |\mathrm{K}(x,y)|^2 \, dydx &= \int\limits_Q \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int\limits_Q \mathrm{K}(x,y)\varphi_i(y)\, dy \right|^2 dx = \\
&= \int\limits_Q \sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_Q |\psi_i(x)|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathrm{K}\varphi_i\|^2 = \\
&= \mathrm{N}(\mathrm{K})^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, so sind die ψ_i in obigem Beweis stetig. Nach dem Satz von Dini A.2.1 konvergiert $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\psi_i(x)|^2$ gleichmäßig in $\overline{Q}$, da $g(x) := \int\limits_Q |K(x,y)|^2 \, dy$ stetig in $\overline{Q}$ ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man Integration und Summation vertauschen.

Bei vielen Problemen treten auch Operatoren $K : f \longmapsto \int\limits_Q K(x,y)f(y)\, dy$ auf, mit $K \in L^p(Q)$, aber $K \notin L^2(Q)$. Deswegen müssen die Begriffe jetzt auf Banachräume verallgemeinert werden.

2.5 Integraloperatoren in Banachräumen

2.5.1 Definition (Banachraum[1])

Sei $\mathcal{B}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$, d.h. es gibt eine Abbildung $\|\,.\,\|: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|$ mit

1) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$,

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$\mathcal{B}$ heißt Banachraum genau dann, wenn $\mathcal{B}$ vollständig ist.

Die Begriffe Teilraum, lineare Abbildung, Beschränktheit und Norm einer linearen Abbildung, Dichtheit und Präkompaktheit einer Teilmenge können wie im Hilbertraum erklärt werden, da in den Definitionen keine speziellen Hilbertraum-Eigenschaften verwendet wurden. Weiterhin wird der Definitionsbereich eines Operators T mit $\mathcal{D}(T)$ und der Wertebereich mit $\mathcal{R}(T)$ bezeichnet. Weiter sei:
$L(\mathcal{B},\mathcal{B}') := \{T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}' \mid T \text{ linear und beschränkt}\}$. Zusammen mit der Operatorennorm wird $L(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ zu einem normierten Raum (B.2.10), der – nach Satz B.2.11 – sogar vollständig ist. Nach Lemma B.2.7 gilt auch – wie in Hilberträumen: T ist beschränkt $\Longleftrightarrow$ T ist stetig.

2.5.2 Definition (Kompakter Operator)

Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Banachräume, $K : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ ein linearer Operator. K heißt kompakt oder vollstetig genau dann, wenn

$$\Sigma = \{Kx \mid x \in \mathcal{B}, \|x\| \leq 1\}$$

präkompakt ist.

Viele Sätze über kompakte Operatoren in Hilberträumen können jetzt sofort auf Banachräume übertragen werden, weil beim Beweis keine Hilbertraumeigenschaften verwendet wurden.

[1] Stefan Banach (1892-1945)

2.5.3 Hilfssatz

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, K ein kompakter Operator mit $\mathcal{D}(K) = \mathcal{B}$. Dann ist K beschränkt.

Beweis:
Siehe Satz 2.2.6.

2.5.4 Hilfssatz

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}, K_n : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, eine Folge kompakter, linearer Operatoren in $\mathcal{B}$, sei $K : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beschränkter Operator und es gelte: $\lim\limits_{n\to\infty} \|K_n - K\| = 0$. Dann ist auch K kompakt.

Beweis:
Siehe Hilfssatz 2.4.1.

2.5.5 Hilfssatz

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $K : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ kompakt, $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ beschränkt. Dann sind KT und TK kompakt.

Beweis:
Siehe Satz 2.2.9.

2.5.6 Definition (schwach singulärer Kern)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \backslash \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}^n, x = y\} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt schwach singulärer (Integral-)Kern zum Exponenten $\alpha, \alpha < n$, oder Kern vom Schurschen[1] Typ, wenn folgendes gilt:

1) K ist stetig.
2) Es gibt eine Konstante $c > 0$ und eine Zahl $\alpha, \alpha < n$, so daß für $(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \backslash \{(x,y) \mid x = y\}$ gilt: $|K(x,y)| \leq \dfrac{c}{|x-y|^\alpha}$.

Ist $\alpha < 0$, so hat K eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$, die ebenfalls mit K bezeichnet wird. Setze noch $S_\alpha(\overline{\Omega}) := \{K \mid K \text{ ist schwach singulärer Kern zum Exponenten } \alpha\}$.

Zur Vereinfachung sei im folgenden Ω ein offener, achsenparalleler Quader Q. Wie bei Hilberträumen wird nun für $K \in S_\alpha(\overline{\Omega})$ definiert: $Kf(x) = \int\limits_Q K(x,y) f(y)\, dy$. K heißt dann schwach singulärer Integraloperator. Wie schon vorher haben Integraloperator und Kern die gleiche Bezeichnung.

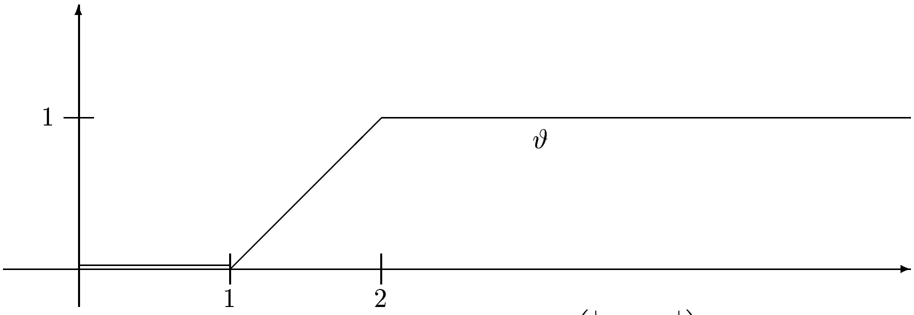
2.5.7 Hilfssatz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein achsenparalleler Quader, $\alpha < n$, $K \in S_\alpha(\overline{Q})$. Dann wird durch $K : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow C^0(\overline{Q})$, $f \longmapsto Kf(x) = \int\limits_Q K(x,y) f(y)\, dy$ ein kompakter Operator gegeben.
($C^0(\overline{Q})$ wird mit der Norm $\|f\| = \sup\limits_{x\in\overline{Q}} |f(x)|$ ein Banachraum).

Beweis:
Sei $\vartheta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$,

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ t-1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 1, & 2 \leq t < +\infty. \end{cases}$$

[1] Issai Schur (1875-1941)



ϑ ist stetig. Sei für $\delta > 0$: $K_\delta(x,y) = K(x,y) \cdot \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)$.

Dann gilt:

1) Für alle $(x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}, |x-y| < \delta : K_\delta(x,y) = 0$.

2) Für alle $(x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}, |x-y| > 2\delta : K_\delta(x,y) = K(x,y)$.

3) $K_\delta \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$.

Folglich ist $K_\delta \in S_{\alpha'}(\overline{Q})$ für $\alpha' < 0$. Der zu K_δ gehörige Integraloperator ist kompakt: Dies wurde im Beweis von Satz 2.4.4 gezeigt. Dort wurde $\widetilde{K}_n : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow L^2(Q)$ betrachtet, aber es war sogar $\widetilde{K}_n : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow C^0(\overline{Q})$. Da die Norm auf $C^0(\overline{Q})$ gerade die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz induziert, zeigt der Beweis in 2.4.4 auch die Kompaktheit von $\widetilde{K}_n$ im Banachraum $C^0(\overline{Q})$.
Im folgenden wird mitbewiesen, daß $Kf(x) = \int_Q K(x,y)f(y)\,dy$ wohldefiniert ist und daß $Kf(x) \in C^0(\overline{Q})$.

Also:

$$\begin{aligned}
|K_\delta f(x) - Kf(x)| &= \left|\int_Q \Big(K_\delta(x,y) - K(x,y)\Big) \cdot f(y)\,dy\right| \le \int_Q |K_\delta(x,y) - K(x,y)| \cdot \sup_{z\in\overline{Q}} f(z)\,dy = \\
&= \int_Q \left|\left(\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) - 1\right) \cdot K(x,y)\right| dy \cdot \|f\|_{C^0(\overline{Q})} = \\
&= \int_{Q\cap\{y\,|\,|x-y|\,\le 2\delta\}} \left|\left(\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) - 1\right) \cdot K(x,y)\right| dy \cdot \|f\|_{C^0(\overline{Q})} \le \\
&\le \int_{\{y|\ |y-x|\ \le 2\delta\}} \frac{c}{|x-y|^\alpha}\,dy \cdot \|f\|_{C^0(\overline{Q})}\ .
\end{aligned}$$

Setzt man $z = x - y$, so ist nach Forster 3, §8, Satz 1:

$$\begin{aligned}
\int_{\{y|\ |y-x|\ \le 2\delta\}} \frac{c}{|x-y|^\alpha}\,dy &= \int_{\{z|\ |z|\ \le 2\delta\}} \frac{c}{|z|^\alpha} dz \ = \ n \cdot \tau_n \cdot \int_0^{2\delta} \frac{c}{r^\alpha} \cdot r^{n-1}\,dr \\
&= c \cdot n \cdot \tau_n \int_0^{2\delta} r^{n-1-\alpha}\,dr \ = \ c \cdot n \cdot \tau_n \cdot \frac{1}{n-\alpha} \cdot [r^{n-\alpha}]_0^{2\delta} \\
&= \frac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n-\alpha}(2\delta)^{n-\alpha}.
\end{aligned}$$

Dabei ist $\tau_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel. Wegen $\alpha < n$ ist $n-1-\alpha > -1$. Damit gilt also für $x \in \overline{Q}$: $|K_\delta f(x) - Kf(x)| \le \dfrac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n-\alpha}(2\delta)^{n-\alpha} \cdot \|f\|_{C^0(Q)}$, d.h. es ist sogar

$$\sup_{x\in\overline{Q}} |K_\delta f(x) - Kf(x)| \le \frac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot (2\delta)^{n-\alpha} \cdot \|f\|_{C^0(Q)}\ .$$

Also konvergiert für $\delta = \frac{1}{n}$ die Folge $K_{\frac{1}{n}}f$ gleichmäßig gegen die Funktion Kf, d.h. $Kf \in C^0(\overline{Q})$ – der Operator K ist wohldefiniert. Wegen

$$\| K_\delta - K \| = \sup_{f \in C^0(\overline{Q})} \frac{\| (K_\delta - K)f \|_{C^0(\overline{Q})}}{\| f \|_{C^0(\overline{Q})}} = \sup_{f \in C^0(\overline{Q})} \frac{\sup\limits_{x \in \overline{Q}} | K_\delta f(x) - Kf(x) |}{\| f \|_{C^0(\overline{Q})}} \leq \frac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n - \alpha} (2\delta)^{n-\alpha}$$

gilt auch $\lim\limits_{n \to \infty} \| K_{\frac{1}{n}} - K \| = 0$. Deshalb ist K nach Hilfssatz 2.5.4 kompakt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Zusätzlich bekommt man noch folgende Ungleichung:
Sei R so groß, daß $\overline{Q} \subset K_R(x)$ für alle $x \in \overline{Q}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_Q | K(x,y) | \cdot | f(y) | \, dy \quad & \leq \quad \int_Q \frac{c}{| x - y |^\alpha} \, dy \cdot \| f \|_{C^0(\overline{Q})} \leq c \int_{K_R(x)} \frac{1}{| x - y |^\alpha} \, dy \cdot \| f \|_{C^0(\overline{Q})} = \\ & = \quad \frac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n - \alpha} \cdot R^{n-\alpha} \cdot \| f \|_{C^0(\overline{Q})} \, . \end{aligned}$$

2.5.8 Hilfssatz

Sei $K \in S_\alpha(\overline{Q})$ für ein $\alpha < n$, sei $f \in L^1(Q)$: Setze $Kf(x) := \int\limits_Q K(x,y) f(y) \, dy$.

Dann ist Kf für fast alle $x \in \overline{Q}$ wohldefiniert und es gibt ein c, so daß für $f \in L^1(Q)$: $\| Kf \|_{L^1(Q)} \leq c \cdot \| f \|_{L^1(Q)}$. Durch $K : L^1(Q) \longrightarrow L^1(Q), f \longmapsto Kf$ wird ein linearer, beschränkter Operator in $L^1(Q)$ gegeben. Für $f \in L^2(Q)$ ist Kf sogar aus $L^2(Q)$ und es gilt $\| Kf \|_{L^2(Q)} \leq c \cdot \| f \|_{L^2(Q)}$. Die Einschränkung von K auf $L^2(Q)$ liefert also einen beschränkten, linearen Operator $K : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$.

Beweis:

1) $K : L^1(Q) \longrightarrow L^1(Q)$ ist wohldefiniert und beschränkt:

Sei für $\delta > 0$ K_δ die im Beweis von Hilfssatz 2.5.7 eingeführte Funktion aus $C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$. Wegen $K(x,y) \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha}$ gilt auch für fast alle $y \in Q$ und für alle $x \in \overline{Q}$: $| K_\delta(x,y) f(y) | \leq \frac{c}{|x-y|^\alpha} \, | f(y) |$.
Sei nun R wie im Beweis von Hilfssatz 2.5.7 gewählt. Setze $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(v) := \begin{cases} \frac{c}{|v|^\alpha}, & | v | < R \\ 0, & | v | \geq R. \end{cases}$$

Dann gilt also $| K_\delta(x,y) f(y) | \leq g(x - y) \cdot | f(y) |$ für fast alle $y \in Q$. Im Beweis von Hilfssatz 2.5.7 wurde gezeigt, daß $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach Forster 3, §6, Sätze 8 und 9 gilt dann auch: $g(x-y) \, | f(y) | \in L^1(Q)$ für fast alle $x \in Q$. Nun betrachtet man die Folge $K_{\frac{1}{n}}(x,y) f(y) =: h_n^x(y)$. Es gilt für fast alle $x \in Q$: $\lim\limits_{n \to \infty} h_n^x(y) = K(x,y) f(y), | h_n^x(y) | \leq g(x - y) \, | f(y) | \in L^1(Q)$. Nach Satz von Lebesgue A.2.3 folgt für fast alle $x \in Q$: $K(x,y) f(y) \in L^1(Q)$ und

$$\lim_{n \to \infty} \int_Q K_{\frac{1}{n}}(x,y) f(y) \, dy = \int_Q K(x,y) f(y) \, dy = Kf(x).$$

Die Funktion Kf(x) ist also für fast alle $x \in Q$ wohldefiniert. Weiter ist wegen $\lim\limits_{\delta \to 0} K_\delta(x,y) f(y) = K(x,y) f(y)$ auch $| K(x,y) f(y) | \leq g(x - y) \, | f(y) |$, also folgt

$$| Kf(x) | \leq \int_Q | K(x,y) f(y) | \, dy \leq \int_Q g(x - y) \, | f(y) | \, dy = (g * | f |)(x).$$

Nach Forster 3, §7, S. 75, ist $(g * | f |)(x) \in L^1(Q)$. Es gilt auch:

a) Für jedes feste $y \in Q$ ist die Funktion $x \longmapsto K_\delta(x,y)f(y)$ stetig in allen $x \in \overline{Q}$, weil $K_\delta(x,y) \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$.

b) Für jedes feste $x \in Q$ ist die Funktion $y \longmapsto K_\delta(x,y)f(y)$ über Q integrierbar – weil K_δ in $\overline{Q} \times \overline{Q}$ stetig ist, ist $K_\delta(x,y)f(y)$ meßbar für alle x, $|K_\delta(x,y)f(y)| \le g(x-y) \cdot |f(y)| \in L^1(Q)$, also nach Satz A.3.2 ist $y \longmapsto K_\delta(x,y)f(y)$ integrierbar.

c) Es ist für alle $(x,y) \in Q \times Q$:

$$|K_\delta(x,y)f(y)| \le |\sup_{(x,y)\in\overline{Q}\times\overline{Q}} K_\delta(x,y) \cdot f(y)| = |\sup_{(x,y)\in\overline{Q}\times\overline{Q}} K_\delta(x,y)| \cdot |f(y)| \, .$$

Die Funktion rechts ist integrierbar, da $f \in L^1(Q)$.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz A.2.6 nachgerechnet und es gilt deshalb:

Die Funktion $x \longmapsto \int\limits_Q K_\delta(x,y)f(y)\,dy$ ist stetig in allen $x \in Q$. Stetige Funktionen sind meßbar, also ist diese Funktion auch meßbar. Es ist $Kf(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q K_{\frac{1}{n}}(x,y)f(y)\,dy$, also ist $Kf(x)$ als Grenzwert einer Folge meßbarer Funktionen ebenfalls meßbar. Wegen $|Kf(x)| \le (g * |f|)(x) \in L^1(Q)$ folgt nach Satz A.3.2: $Kf(x) \in L^1(Q)$. Also ist $K : L^1(Q) \longrightarrow L^1(Q)$.

Nach Forster 3, S. 75 gilt: $\| g * |f| \|_{L^1(Q)} \le \|g\|_{L^1(Q)} \cdot \|f\|_{L^1(Q)}$. Im Beweis von 2.5.7 wurde berechnet: $\|g\|_{L^1(Q)} \le \dfrac{c \cdot n \cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot R^{n-\alpha} =: \widetilde{c}$. Damit gilt dann $\|Kf(x)\|_{L^1(Q)} \le \widetilde{c} \cdot \|f\|_{L^1(Q)}$.

2) $K : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$ ist wohldefiniert und beschränkt:

Für $f, g \in C^0(\overline{Q})$ ist

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_Q Kf(x)\overline{g(x)}\,dx \right| &= \left| \int\limits_Q \left(\int\limits_Q K(x,y)f(y)\,dy \right) \cdot \overline{g(x)}\,dx \right| \le \\
&\le \int\limits_{Q\times Q} |K(x,y)| \cdot |g(x)| \cdot |f(y)| \; dxdy = \\
&= \int\limits_{Q\times Q} |K(x,y)|^{\frac{1}{2}} \cdot |g(x)| \cdot |K(x,y)|^{\frac{1}{2}} \cdot |f(y)| \; dxdy \le \\
&\overset{A.4.5}{\le} \left(\int\limits_{Q\times Q} |K(x,y)| \cdot |g(x)|^2 \; dxdy \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{Q\times Q} |K(x,y)| \cdot |f(y)|^2 \; dxdy \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Setze nun

$$\begin{aligned}
N &:= \sup_{x\in\overline{Q}} \int\limits_Q |K(x,y)| \; dy \le \sup_{x\in\overline{Q}} \int\limits_{K_R(x)} \frac{c}{|x-y|^\alpha}\,dy \le \frac{c \cdot n \cdot \tau_n \cdot R^{n-\alpha}}{n-\alpha}, \\
M &:= \sup_{y\in\overline{Q}} \int\limits_Q |K(x,y)| \; dx \le \frac{c \cdot n \cdot \tau_n \cdot R^{n-\alpha}}{n-\alpha}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_Q Kf(x)\overline{g(x)}\,dx \right| &\le \sqrt{N} \cdot \left(\int\limits_Q |g(x)|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{M} \cdot \left(\int\limits_Q |f(y)|^2 \; dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sqrt{MN} \cdot \|g\|_{L^2(Q)} \cdot \|f\|_{L^2(Q)} \, .
\end{aligned}$$

Für $f \in C^0(\overline{Q})$ ist nach Hilfssatz 2.5.7 auch $Kf(x) \in C^0(\overline{Q})$. Setzt man $g = Kf(x)$, so erhält man für $f \in C^0(\overline{Q})$: $\| Kf(x) \|^2_{L^2(Q)} \leq \sqrt{MN} \cdot \| Kf(x) \|_{L^2(Q)} \cdot \| f \|_{L^2(Q)}$, bzw. gekürzt: $\| Kf(x) \|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{MN} \cdot \| f \|_{L^2(Q)}$.

Bilde nun die Abschließung von $K : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow L^2(Q), Kf(x) = \int\limits_Q K(x,y)f(y)\,dy$ in $L^2(Q)$. Weil $C^0(\overline{Q})$ dicht in $L^2(Q)$ liegt, bekommt man nach Satz 1.4.7 einen beschränkten Operator $\overline{K} : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$. Sei nun $f \in L^2(Q), (f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in $C^0(\overline{Q})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_{L^2(Q)} = 0$. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \| Kf_n - \overline{K}f \|_{L^2(Q)} = 0$. Nach A.4.10 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j\in\mathbf{N}}$, so daß für fast alle $x \in Q$ gilt: $\lim\limits_{j\to\infty} Kf_{n_j}(x) = \overline{K}f(x)$. Da Q beschränkt ist, gilt nach Satz A.4.13 auch $\lim\limits_{j\to\infty} \| Kf_{n_j} - Kf \|_{L^1(Q)} = 0$ (K ist der Operator aus 1)). Nach A.4.10 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_{j_k}})_{k\in\mathbf{N}}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} Kf_{n_{j_k}}(x) = Kf(x)$ fast überall. Also gilt für fast alle $x \in Q$:

$$\overline{K}f(x) = \lim_{k\to\infty} Kf_{n_{j_k}}(x) = Kf(x) = \int\limits_Q K(x,y)f(y)\,dy$$

für $f \in L^2(Q)$, d.h. $\overline{K}$ ist gegeben durch $\overline{K} : L^2(Q), f \longmapsto \int\limits_Q K(x,y)f(y)\,dy$, also wie in der Behauptung.

2.5.9 Hilfssatz

Sei K der in Hilfssatz 2.5.8 definierte Operator in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ bzw. $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Dann ist K kompakt.

Beweis:
Sei K_δ der schon eingeführte Integralkern aus $C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ mit zugehörigem Integraloperator K_δ. Die Kompaktheit von K_δ in $\mathcal{H}$ wurde in Satz 2.4.4 gezeigt, die Kompaktheit in $\mathcal{B}$ kann vollkommen analog gefolgert werden.

1) $K, K_\delta \in L(\mathcal{B})$:
Es ist

$$\begin{aligned}
\| Kf - K_\delta f \|_{L^1(Q)} &= \int\limits_Q \int\limits_Q |(K(x,y) - K_\delta(x,y))| \cdot |f(y)| \; dydx = \\
&= \int\limits_Q \int\limits_Q \left| \left(1 - \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right) \cdot K(x,y) \right| \cdot |f(y)| \; dydx \leq \\
&\leq \int\limits_Q \int\limits_Q \left| \left(1 - \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right)\right) \cdot \frac{c}{|x-y|^\alpha} \right| \cdot |f(y)| \; dydx.
\end{aligned}$$

Setzt man

$$h(z) := \begin{cases} \left(1 - \vartheta\left(\frac{|z|}{\delta}\right)\right) \cdot \frac{c}{|z|^\alpha}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

und denkt sich f außerhalb von Q durch 0 fortgesetzt, so erhält man unter Anwendung der Transformationsformel:

$$\| Kf - K_\delta f \|_{L^1(Q)} \leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x-y)| \cdot |f(y)| \; dxdy \overset{\text{Trafo}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x)| \cdot |f(y)| \; dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x)|\, dx \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(y)|\, dy = \int\limits_{\{x|\,|x|\le 2\delta\}} |h(x)|\, dx \cdot \|f\|_{L^1(Q)}$$

$$\le \int\limits_{\{x|\,|x|\le 2\delta\}} \frac{c}{|x|^\alpha} dx \cdot \|f\|_{L^1(Q)} \overset{2.5.7}{=} \frac{c\cdot n\cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot (2\delta)^{n-\alpha} \cdot \|f\|_{L^1(Q)}\,.$$

Demnach gilt für $K, K_\delta \in L(\mathcal{B}) : \| K - K_\delta \| \le \dfrac{c\cdot n\cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot (2\delta)^{n-\alpha}$ und die Kompaktheit von K folgt aus der von K_δ mit Hilfssatz 2.5.4.

2) $K, K_\delta \in L(\mathcal{H})$:

Für $K, K_\delta \in L(\mathcal{H})$ kann man die Rechnung in 2.5.8, 2), für $f, g \in L^2(Q)$ mit $(K - K_\delta)f$ statt Kf durchführen und erhält – setzt man h(z) wie oben:

$$\left| \int\limits_Q (Kf(x) - K_\delta f(x))\overline{g(x)}\, dx \right| \le$$

$$\le \left(\int\limits_{Q\times Q} |K(x,y) - K_\delta(x,y)| \cdot |g(x)|^2\, dxdy \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_{Q\times Q} |K(x,y) - K_\delta(x,y)| \cdot |f(y)|^2\, dxdy \right)^{\frac12} \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x-y)| \cdot |g(x)|^2\, dydx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n}\int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x-y)| \cdot |f(y)|^2\, dxdy \right)^{\frac12} =$$

$$\overset{\text{Trafo}}{=} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(y)|\, dy \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |g(x)|^2\, dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x)|\, dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(y)|^2\, dy \right)^{\frac12} =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |h(x)|\, dx \cdot \|g\|_{L^2(Q)} \cdot \|f\|_{L^2(Q)} \overset{2.5.7}{\le} \frac{c\cdot n\cdot \tau_n}{n-\alpha} (2\delta)^{n-\alpha} \cdot \|g\|_{L^2(Q)} \cdot \|f\|_{L^2(Q)}\,.$$

Setzt man wie in 2.5.8 nun $g = Kf(x) - K_\delta f(x)$ ein, so ergibt sich insgesamt

$$\|Kf - K_\delta f\|_{L^2(Q)} \le \frac{c\cdot n\cdot \tau_n}{n-\alpha} (2\delta)^{n-\alpha} \cdot \|f\|_{L^2(Q)},$$

also $\| K - K_\delta \| \le \dfrac{c\cdot n\cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot (2\delta)^{n-\alpha}$. Die Kompaktheit von K folgt wieder aus der von K_δ mit 2.4.1.

Hinweis:
Sind die Operatoren $K : C^0(\overline{Q}) \longrightarrow C^0(\overline{Q}), K : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q), K : L^1(Q) \longrightarrow L^1(Q)$ kompakt, so folgt daraus die Kompaktheit von $K : L^p(Q) \longrightarrow L^p(Q)$.
(ohne Beweis)
Nun wird zunächst ein technischer Hilfssatz benötigt:

2.5.10 Hilfssatz

Seien $0 < \alpha, \beta < n, x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Funktion $z \longmapsto \dfrac{1}{|x-z|^\alpha} \cdot \dfrac{1}{|z-y|^\beta}$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{x,y\}$, über jede Kugel $K_R(0), R > 0$, integrierbar und für $I(x,y) = \displaystyle\int\limits_{|z|<R} \frac{dz}{|x-z|^\alpha \cdot |z-y|^\beta}$ gelten folgende Abschätzungen:

1) Für $\alpha + \beta < n$ ist $I(x,y) \le c_1(n,\alpha,\beta) \cdot R^{n-(\alpha+\beta)}$.

2) Für $\alpha+\beta > \mathrm{n}$ ist $\mathrm{I(x,y)} \le \mathrm{c}_2(\mathrm{n},\alpha,\beta) \cdot \dfrac{1}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{y}\,|^{\alpha+\beta-\mathrm{n}}}, \mathrm{x} \neq \mathrm{y}$.

Dabei sind die $\mathrm{c_i}(\mathrm{n},\alpha,\beta)$ von n,α,β abhängige Konstanten mit $\mathrm{c_i}(\mathrm{n},\alpha,\beta) > 0$.

Beweis:

1) $\alpha+\beta < \mathrm{n}$:
Sei $\mathrm{p} = \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}, \mathrm{q} = \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$. Dann ist $\dfrac{1}{\mathrm{p}} + \dfrac{1}{\mathrm{q}} = 1$. Die Funktionen

$$\frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\alpha\mathrm{p}}} = \frac{1}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\alpha+\beta}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|\mathrm{z}-\mathrm{y}|^{\beta\mathrm{q}}} = \frac{1}{|\mathrm{z}-\mathrm{y}|^{\alpha+\beta}}$$

sind wegen $\alpha+\beta < \mathrm{n}$ über die Menge $\{\mathrm{z} \mid |\,\mathrm{z}\,| \le \mathrm{R}\}$ integrierbar. Nach der Hölderschen Ungleichung A.4.5 ist dann die Funktion $\dfrac{1}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{z}\,|^{\alpha}} \cdot \dfrac{1}{|\,\mathrm{z}-\mathrm{y}\,|^{\beta}}$ integrierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{I(x,y)} &= \int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\alpha}\cdot|\mathrm{z}-\mathrm{y}|^{\beta}} \le \\
&\le \left(\int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\alpha\mathrm{p}}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \cdot \left(\int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{z}-\mathrm{y}|^{\beta\mathrm{q}}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}} = \\
&= \left(\int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \cdot \left(\int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{z}-\mathrm{y}|^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{q}}}.
\end{aligned}$$

Sei nun $\gamma = \alpha+\beta < \mathrm{n}$ und $\mathrm{I(x)} := \displaystyle\int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{z}\,|^{\gamma}}$. Nun werden zwei Fälle unterschieden:

a) $|\mathrm{x}| \le 2\mathrm{R}$.
Dann gilt für $|\mathrm{z}| \le \mathrm{R}: |\mathrm{x}-\mathrm{z}| \le |\mathrm{z}| + |\mathrm{x}| \le 3\mathrm{R}$. Also gilt

$$\{\mathrm{z} \mid |\mathrm{z}| \le \mathrm{R}\} \subset \{\mathrm{z} \mid |\mathrm{z}-\mathrm{x}| \le 3\mathrm{R}\}.$$

Deshalb ist

$$\mathrm{I(x)} \le \int\limits_{|\mathrm{z}-\mathrm{x}|\le 3\mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\,\mathrm{x}-\mathrm{z}\,|^{\gamma}} = \frac{\mathrm{n}\cdot\tau_{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}-\gamma} \cdot (3\mathrm{R})^{\mathrm{n}-\gamma}.$$

b) $|\mathrm{x}| > 2\mathrm{R}$.
Dann ist $|\mathrm{x}-\mathrm{z}| \ge |\mathrm{x}| - |\mathrm{z}| > 2\mathrm{R}-\mathrm{R} = \mathrm{R}$. Also erhält man

$$\mathrm{I(x)} = \int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \frac{\mathrm{dz}}{|\mathrm{x}-\mathrm{z}|^{\gamma}} \le \frac{1}{\mathrm{R}^{\gamma}} \cdot \int\limits_{|\mathrm{z}|\le \mathrm{R}} \mathrm{dz} = \mathrm{R}^{\mathrm{n}-\gamma}\cdot\tau_{\mathrm{n}}.$$

Insgesamt gilt also mit $\mathrm{c}_1(\mathrm{n},\alpha,\beta) = \max\left(\tau_{\mathrm{n}}, \dfrac{\mathrm{n}\cdot\tau_{\mathrm{n}}\cdot 3^{\mathrm{n}-\alpha-\beta}}{\mathrm{n}-\alpha-\beta}\right)$: $\mathrm{I(x)} \le \mathrm{c}_1(\mathrm{n},\alpha,\beta)\cdot\mathrm{R}^{\mathrm{n}-\alpha-\beta}$ und damit

$$\mathrm{I(x,y)} \le (\mathrm{I(x)})^{\frac{1}{\mathrm{p}}} \cdot (\mathrm{I(y)})^{\frac{1}{\mathrm{q}}} \le (\mathrm{c}_1(\mathrm{n},\alpha,\beta)\cdot\mathrm{R}^{\mathrm{n}-\alpha-\beta})^{\frac{1}{\mathrm{p}}+\frac{1}{\mathrm{q}}} = \mathrm{c}_1(\mathrm{n},\alpha,\beta)\cdot\mathrm{R}^{\mathrm{n}-\alpha-\beta}.$$

2) $\alpha+\beta>\mathrm{n}$:

In diesem Fall muß $x \neq y$ vorausgesetzt werden. Sei $\delta = |x-y|$. Es ist $I(x,y) = I_1(x,y) + I_2(x,y) + I_3(x,y)$, wobei
$M_1 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \le R, |z-x| \le \frac{1}{2}\delta\}$,
$M_2 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \le R, \frac{1}{2}\delta \le |z-x| \le 2\delta\}$,
$M_3 := \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| \le R, |z-x| \ge 2\delta\}$ und

$$I_k(x,y) = \int\limits_{M_k} \frac{dz}{|x-z|^\alpha \cdot |z-y|^\beta}.$$

Offensichtlich gilt: $I(x,y)$ existiert genau dann, wenn $I_k(x,y), k=1,2,3$, existieren. Es ist:

a) $k=1: |z-x| \le \frac{1}{2}\delta \Longrightarrow |z-y| \ge |x-y| - |z-x| \ge \frac{\delta}{2}$.
Damit hat man

$$\begin{aligned} I_1(x,y) &\le \frac{1}{(\frac{\delta}{2})^\beta} \int\limits_{|z-x| \le \frac{1}{2}\delta} \frac{dz}{|x-z|^\alpha} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\beta \cdot \frac{n \cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-\alpha} = \\ &= \frac{n \cdot \tau_n}{n-\alpha} \cdot \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\alpha+\beta-n}. \end{aligned}$$

Weil $\displaystyle\int\limits_{|z-x| \le \frac{1}{2}\delta} \frac{dz}{|x-z|^\alpha}$ existiert, existiert auch $I_1(x,y)$. Die Existenz folgt bei b) und c) genauso.

b) $k=2: |z-x| \le 2\delta \Longrightarrow |z-y| \le |z-x| + |x-y| \le 3\delta$.
Damit ist

$$\begin{aligned} I_2(x,y) &\le \frac{1}{(\frac{\delta}{2})^\alpha} \cdot \int\limits_{|z-x| \le 2\delta} \frac{dz}{|z-y|^\beta} \le \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha \int\limits_{|z-y| \le 3\delta} \frac{dz}{|z-y|^\beta} = \\ &= \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha \cdot \frac{n \cdot \tau_n}{n-\beta} \cdot (3\delta)^{n-\beta} = \frac{2^\alpha \cdot 3^{n-\beta} \cdot n \cdot \tau_n}{n-\beta} \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha+\beta-n}. \end{aligned}$$

c) $k=3: |z-x| \ge 2\delta \Longrightarrow |z-y| \ge |z-x| - |x-y| \ge |z-x| - \delta \ge \frac{1}{2}|z-x|$. Also ist

$$\begin{aligned} I_3(x,y) &\le \int\limits_{|z-x| \ge 2\delta} \frac{dz}{|z-x|^\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}|z-x|\right)^\beta} = 2^\beta \cdot \int\limits_{|z-x| \ge 2\delta} \frac{dz}{|z-x|^{\alpha+\beta}} = \\ &= 2^\beta \cdot n \cdot \tau_n \cdot \int\limits_{2\delta}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r^{\alpha+\beta}}\, dr = 2^\beta \cdot n \cdot \tau_n \cdot \left[\frac{r^{n-\alpha-\beta}}{n-\alpha-\beta}\right]_{2\delta}^{\infty} = \\ &= \frac{2^\beta \cdot n \cdot \tau_n}{\alpha+\beta-n} \cdot \left(\frac{1}{2\delta}\right)^{\alpha+\beta-n}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist dann mit

$$c_2(\alpha,\beta,n) := n \cdot \tau_n \cdot \left(\frac{2^{\alpha+\beta-n}}{n-\alpha} + \frac{2^\alpha \cdot 3^{n-\beta}}{n-\beta} + \frac{2^{\alpha-n}}{\alpha+\beta-n}\right):$$

$$\begin{aligned} I(x,y) &\le c_2(\alpha,\beta,n) \cdot \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha+\beta-n} = \\ &= c_2(\alpha,\beta,n) \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta-n}}. \end{aligned}$$

2.5.11 Hilfssatz

Seien $\alpha, \beta \in (0, \mathrm{n}), \mathrm{A} \in \mathrm{S}_\alpha(\overline{\mathrm{Q}}), \mathrm{B} \in \mathrm{S}_\beta(\overline{\mathrm{Q}})$. Seien A, B die zugehörigen schwach singulären Integraloperatoren $\mathrm{A} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ bzw. $\mathrm{B} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{B}$ einen der Banachräume $\mathrm{L}^1(\mathrm{Q}), \mathrm{L}^2(\mathrm{Q}), \mathrm{C}^0(\overline{\mathrm{Q}})$ bezeichnet. Dann ist $\mathrm{AB} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ (im Sinn des Hintereinanderausführens von Abbildungen) ebenfalls ein schwach singulärer Integraloperator, d.h. es gibt ein $\mathrm{M} \in \mathrm{C}^0\Big(\overline{\mathrm{Q}} \times \overline{\mathrm{Q}} \backslash \{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \mid \mathrm{x} = \mathrm{y}\}\Big)$, so daß für $\mathrm{f} \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\mathrm{ABf(z)} = \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{M(z,y)f(y)\,dy}.$$

Für M gilt:

1) Falls $\alpha + \beta > \mathrm{n}$, so ist $\mathrm{M(z,y)} \in \mathrm{S}_{\alpha+\beta-\mathrm{n}}(\overline{\mathrm{Q}})$.
2) Falls $\alpha + \beta < \mathrm{n}$, so ist $\mathrm{M(z,y)} \in \bigcap\limits_{\gamma \geq 0} \mathrm{S}_\gamma(\overline{\mathrm{Q}})$.

<u>Beweis</u>:
Sei $\mathcal{B} = \mathrm{L}^1(\mathrm{Q})$. Für $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^1(\mathrm{Q})$ ist $\mathrm{ABf(z)} = \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A(z,x)} \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{B(x,y)f(y)\,dydx}$ wohldefiniert nach Hilfssatz 2.5.8. Das gilt auch für $|\mathrm{A}|, |\mathrm{B}|$ mit zugehörigen Integraloperatoren $|\mathrm{A}|, |\mathrm{B}|$, d.h. $|\mathrm{A}|\,|\mathrm{B}|\,|\mathrm{f}|\,(\mathrm{z}) = \int\limits_{\mathrm{Q}} |\mathrm{A(z,x)}| \int\limits_{\mathrm{Q}} |\mathrm{B(x,y)}| \cdot |\mathrm{f}|\,(\mathrm{y})\,\mathrm{dydx}$. Deswegen ist nach dem Satz von Fubini-Tonelli:

$$\mathrm{ABf(z)} = \int\limits_{\mathrm{Q}} \left(\int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A(z,x)B(x,y)\,dx} \right) \mathrm{f(y)\,dy}.$$

Dabei ist $\mathrm{M(z,y)} = \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A(z,x)B(x,y)\,dx}$ für fast alle $\mathrm{z,y} \in \mathrm{Q}$ wohldefiniert. Insbesondere ist für fast alle $\mathrm{z,y} \in \mathrm{Q}$ die Funktion $\mathrm{x} \longmapsto \mathrm{A(z,x)B(x,y)}$ in $\mathrm{L}^1(\mathrm{Q})$. Nach Hilfssatz 2.5.10 gelten folgende Abschätzungen:

1) Für $\mathrm{z} \neq \mathrm{y}, \alpha + \beta > \mathrm{n}$ ist $|\mathrm{M(z,y)}| \leq \mathrm{c}_2(\mathrm{n}, \alpha, \beta) \cdot \dfrac{1}{|\,\mathrm{z} - \mathrm{y}\,|^{\alpha+\beta-\mathrm{n}}}$.
2) Wählt man ein R_0 so, daß $\overline{\mathrm{Q}} \subset \mathrm{K}_{\mathrm{R}_0}(0)$, so gilt für $\alpha + \beta < \mathrm{n}$:

$$|\mathrm{M(z,y)}| \leq \mathrm{c}_1(\mathrm{n}, \alpha, \beta) \cdot \mathrm{R}_0^{\mathrm{n}-(\alpha+\beta)}.$$

Es muß jetzt die Stetigkeit von M gezeigt werden.
Nun seien die Operatoren $\mathrm{A}_\delta, \mathrm{B}_\delta$ erklärt wie im Beweis von Hilfssatz 2.5.7. Die Abschätzungen 1) und 2) gelten auch für

$$\int\limits_{\mathrm{Q}} (\mathrm{A} - \mathrm{A}_\delta)(\mathrm{z,x})\mathrm{B(x,y)\,dx} \;\text{ und }\; \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})(\mathrm{B} - \mathrm{B}_\delta)(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx}.$$

Sei nun $\mathrm{M}_\delta(\mathrm{z,y}) := \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})\mathrm{B}_\delta(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx}$, dann ist $\mathrm{M}_\delta \in \mathrm{C}^0(\overline{\mathrm{Q}} \times \overline{\mathrm{Q}})$ und es gilt für fast alle $\mathrm{y,z} \in \mathrm{Q}$:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{M(z,y)} - \mathrm{M}_\delta(\mathrm{z,y})| &= \left| \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A(z,x)B(x,y)} - \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})\mathrm{B}_\delta(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx} \right| = \\
&= \left| \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A(z,x)B(x,y)} - \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})\mathrm{B(x,y)} + \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})\mathrm{B(x,y)} - \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})\mathrm{B}_\delta(\mathrm{x,y})\,\mathrm{dx} \right| \leq \\
&\leq \left| \int\limits_{\mathrm{Q}} (\mathrm{A(z,x)} - \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x}))\mathrm{B(x,y)\,dx} \right| + \left| \int\limits_{\mathrm{Q}} \mathrm{A}_\delta(\mathrm{z,x})(\mathrm{B(x,y)} - \mathrm{B}_\delta(\mathrm{x,y}))\,\mathrm{dx} \right|.
\end{aligned}$$

Wegen $A \in S_\alpha, B \in S_\beta$ gibt es Konstanten $a, b \in \mathbf{R}^+$, so daß

$$|A(z,x)| \leq \frac{a}{|z-x|^\alpha} \text{ für } (x,z) \in \overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \{z=x\} \text{ und}$$

$$|B(x,y)| \leq \frac{b}{|x-y|^\beta} \text{ für } (x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \{x=y\}.$$

Nach Definition von A_δ, B_δ gilt dann:

$$|A(z,x) - A_\delta(z,x)| \leq \begin{cases} \dfrac{a}{|z-x|^\alpha}, & |z-x| \leq 2\delta \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$|B(x,y) - B_\delta(x,y)| \leq \begin{cases} \dfrac{b}{|x-y|^\beta}, & |x-y| \leq 2\delta \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $|M(z,y) - M_\delta(z,y)| \leq ab \cdot \left(\displaystyle\int\limits_{|z-x| \leq 2\delta} \frac{dx}{|z-x|^\alpha \cdot |x-y|^\beta} + \int\limits_{|x-y| \leq 2\delta} \frac{dx}{|z-x|^\alpha \cdot |x-y|^\beta} \right)$.

Es werden wieder zwei Fälle unterschieden:

1) $\alpha + \beta > n$:

Sei $\varepsilon > 0$ und $|z-y| \geq \varepsilon > 0$. Wähle $\delta \in (0, \frac{1}{4}\varepsilon)$. Ist dann $|z-x| \leq 2\delta$, so hat man $|x-y| \geq |z-y| - |z-x| \geq \varepsilon - 2\delta > \frac{\varepsilon}{2}$. Ist umgekehrt $|x-y| \leq 2\delta$, so hat man entsprechend $|z-x| \geq |z-y| - |x-y| \geq \varepsilon - 2\delta > \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |M(z,y) - M_\delta(z,y)| \quad &\leq \quad ab \left(\frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\beta} \int\limits_{|z-x| \leq 2\delta} \frac{dx}{|z-x|^\alpha} + \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha} \int\limits_{|x-y| \leq 2\delta} \frac{dx}{|x-y|^\beta} \right) = \\ &\overset{2.5.7}{=} \quad abn\tau_n \cdot \left(\frac{2^\beta \cdot (2\delta)^{n-\alpha}}{\varepsilon^\beta \cdot (n-\alpha)} + \frac{2^\alpha \cdot (2\delta)^{n-\beta}}{\varepsilon^\alpha \cdot (n-\beta)} \right). \end{aligned}$$

Demnach konvergieren für $\delta \longrightarrow 0$ die in $\overline{Q} \times \overline{Q}$ stetigen Funktionen M_δ gleichmäßig in $Q \times Q \backslash \{(z,y) \mid |z-y| \leq \varepsilon\} \backslash N$, wobei N eine Nullmenge ist. Setze zur Abkürzung: $\Omega_\varepsilon := \{(z,y) \mid |z-y| \leq \varepsilon\}$. Zu $\rho > 0$ gibt es dann ein $\delta(\rho)$, so daß für $0 < \delta, \delta' < \delta(\rho)$ gilt:

$\sup\limits_{(z,y) \in Q \times Q \backslash \Omega_\varepsilon \backslash N} |M_\delta(z,y) - M_{\delta'}(z,y)| < \rho$. Wegen der Stetigkeit von $M_\delta, M_{\delta'}$ in $\overline{Q} \times \overline{Q}$ gilt sogar

$\sup\limits_{(z,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \Omega_\epsilon} |M_\delta(z,y) - M_{\delta'}(z,y)| < \rho$. Also konvergieren die M_δ sogar in $\overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \Omega_\varepsilon$ gleichmäßig.

M ist deshalb – nach Abänderung in der Nullmenge N – stetig in $\overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \{(z,y) \mid |z-y| \leq \varepsilon\}$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist schließlich M stetig in $\overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \{z=y\}$. Zusammen mit Ungleichung 1) ergibt dies insgesamt:

$$M \in S_{\alpha+\beta-n}(\overline{Q}).$$

2) $\alpha + \beta < n$:

Mit Hilfssatz 2.5.10 ergibt sich in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \int\limits_{|z-x| \leq 2\delta} \frac{dx}{|z-x|^\alpha |x-y|^\beta} \overset{w:=z-x}{=} \int\limits_{|w| \leq 2\delta} \frac{dw}{|w|^\alpha \cdot |w-(z-y)|^\beta} = \\ \overset{2.5.10}{=} c_1(n,\alpha,\beta) \cdot (2\delta)^{n-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

und genauso

$$\int\limits_{|x-y| \leq 2\delta} \frac{dx}{|z-x|^\alpha \cdot |x-y|^\beta} \leq c_2(n,\alpha,\beta) \cdot (2\delta)^{n-\alpha-\beta}.$$

Setzt man dies in die oben abgeleitete Ungleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
|\,M(z,y) - M_\delta(z,y)\,| \quad &\le \quad ab \left(\int\limits_{|z-x|\ \le 2\delta} \frac{dx}{|\ z-x\ |^{\alpha} \cdot |\ x-y\ |^{\beta}} + \right. \\
&\qquad \left. + \int\limits_{|x-y|\ \le 2\delta} \frac{dx}{|\ z-x\ |^{\alpha} \cdot |\ x-y\ |^{\beta}} \right) \le \\
&\le \quad 2ab \cdot c_1(n,\alpha,\beta) \cdot (2\delta)^{n-\alpha-\beta}.
\end{aligned}$$

Demnach konvergieren die in $\overline{Q}\times\overline{Q}$ stetigen Funktionen M_δ gleichmäßig in $Q\times Q\backslash N$, N Nullmenge, gegen M. Wie im Fall 1) folgt: $M \in C^0(\overline{Q}\times\overline{Q})$ nach Abänderung auf der Nullmenge N, also ergibt sich zusammen mit der Ungleichung 2):

$$M \in \bigcap_{\gamma \ge 0} S\gamma(\overline{Q}).$$

Für $\mathcal{B} = C^0(\overline{Q})$ oder $\mathcal{B} = L^2(Q)$ rechnet man genauso.

2.5.12 Hilfssatz

Sei $\alpha \in (0,n), K \in S_\alpha(\overline{Q})$ ein schwach singulärer Kern. Für den Integraloperator K in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ gilt: Es gibt ein $p \in \mathbb{N}$ derart, daß der schwach singuläre Integraloperator K^p die Darstellung

$$K^p f(x) = \int\limits_Q L(x,y) f(y)\, dy, \ \ f \in L^1(Q)$$

hat mit $L \in C^0(\overline{Q}\times\overline{Q})$.

Beweis:
Die Singularität wird beim Hintereinanderausführen schrittweise abgeschwächt. Nach Hilfssatz 2.5.11:

Operator	Kern
K	$S_\alpha(\overline{Q})$
K^2	$S_{\alpha+(\alpha-n)}(\overline{Q})$
K^3	$S_{\alpha+2(\alpha-n)}(\overline{Q})$
.	.
.	.
K^p	$S_{\alpha+(p-1)(\alpha-n)}(\overline{Q})$

Für $n > \beta \ge \alpha$ ist $S_\alpha(\overline{Q}) \subset S_\beta(\overline{Q})$, denn es ist

$$\frac{1}{|\ x-y\ |^{\alpha}} = |\ x-y\ |^{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{|\ x-y\ |^{\beta}} \le (\mathrm{diam}\ Q)^{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{|\ x-y\ |^{\beta}}.$$

Wähle ein $\beta \in [\alpha, n)$, das nicht von der Form $n \cdot \frac{m}{m+1}$ ist, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann ist für all diese $m : \beta + m(\beta - n) \neq 0$. Bestimme p so, daß $p \ge 2, p \in \mathbb{N}$ mit $\beta + (p-2)(\beta-n) > 0, \beta + (p-1)(\beta - n) < 0$. Der zu K^p gehörige Kern ist dann aus $S_{\beta+(p-1)(\beta-n)}(\overline{Q})$, also ist er stetig.

2.5.13 Hilfssatz

Sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{B} = L^1(Q)$. Sei $g \in C^0(\overline{Q})$. Sei $f \in \mathcal{B}$ eine Lösung von $(I - K)f = g$. Dann ist $f \in C^0(\overline{Q})$.

Beweis:
Sei $\alpha \in (0, n), K \in S_\alpha(\overline{Q}), p \in \mathbb{N}$ mit $p > 2$. Auf $(I - K)f$ wendet man den Operator $I + \sum\limits_{\nu=1}^{p-1} K^\nu$ an. Dann ist

$$\left(I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu\right)(I - K)(f) = f - K^p f = \left(I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu\right) g.$$

$$\Longrightarrow f = K^p f + \left(I + \sum_{\nu=1}^{p-1} K^\nu\right) g.$$

Wähle nach Hilfssatz 2.5.12 p so, daß K^p einen stetigen Kern L hat. Wie im Hilfssatz 2.5.8 zeigt man unter Verwendung von A.2.6: $K^p f \in C^0(\overline{Q})$. Wegen $g \in C^0(\overline{Q})$ sind nach Hilfssatz 2.5.7 die restlichen Summanden aus $C^0(\overline{Q})$, also ist $f \in C^0(\overline{Q})$.

2.5.14 Hilfssatz

Sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Dann ist auch K^* ein schwach singulärer Integraloperator mit Kern

$$K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}.$$

Beweis:
Seien $f, g \in L^2(Q)$. $|K|$ ist auch schwach singulär, also existiert

$$\int_Q \int_Q |K(x, y)| \cdot |f(y)| \, dy \cdot |g(x)| \, dx.$$

Nach dem Satz von Fubini-Tonelli ist dann

$$\int_Q \int_Q K(x, y) f(y) \, dy \overline{g(x)} \, dx = \int_Q f(y) \cdot \overline{\left(\int_Q \overline{K(x, y)} g(x) \, dx\right)} \, dy = \int_Q f(y) \overline{\left(\int_Q K^*(y, x) g(x) \, dx\right)} \, dy,$$

also $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

Zusammenfassung der Ergebnisse im

2.5.15 Satz (Fredholm[1])

Sei K ein schwach singulärer Integraloperator mit Kern K in $\mathcal{B} = L^1(Q)$ bzw. $\mathcal{H} = L^2(Q)$. Jede Lösung von

$$1) \;\; f - Kf = 0$$

in $\mathcal{B}$ ist aus $C^0(\overline{Q})$. Die Gleichung 1) hat nur endlich viele linear unabhängige Lösungen in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$. Die Maximalzahl linear unabhängiger Lösungen in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ stimmen überein. Die Gleichung

$$2) \;\; f - K^* f = 0$$

hat in $\mathcal{B}$ nur Lösungen aus $C^0(\overline{Q})$. 2) hat sowohl in $\mathcal{B}$ als auch in $\mathcal{H}$ nur endlich viele linear unabhängige Lösungen. Die Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen stimmen sowohl untereinander als auch mit den Maximalzahlen bei 1) überein.

[1] Erik Ivar Fredholm (1866-1927)

Die Gleichung $h - Kh = g$ besitzt in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ zu vorgegebenem $g \in \mathcal{H}$ genau dann eine Lösung $h \in \mathcal{H}$, wenn für alle f mit $f - K^*f = 0$ gilt: $\int_Q g\overline{f}\,dx = 0$. Es ist $h \in C^0(\overline{Q})$, wenn $g \in C^0(\overline{Q})$.

Beweis:
$K : L^2(Q) \longrightarrow L^2(Q)$ ist nach Hilfssatz 2.5.9 kompakt. Deshalb können die Fredholmschen Sätze 2.3.9 auf K angewandt werden und es ergeben sich die Aussagen des Satzes für K in $\mathcal{H}$. Weiter ist $C^0(\overline{Q}) \subset L^2(Q) \subset L^1(Q)$ nach A.4.13. Eine Lösung von Gleichung 1) oder 2) aus $C^0(\overline{Q})$ ist also zugleich Lösung des Problems in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$. Da die Funktion $g \equiv 0$ stetig ist, ist nach 2.5.13 auch jede Lösung f von Gleichung 1) oder 2) in $\mathcal{B}$ stetig, d.h. die Lösungen in $\mathcal{B}$ und $\mathcal{H}$ stimmen überein und damit stimmen auch alle Maximalzahlen linear unabhängiger Lösungen überein.
Nach 2.5.13 ist auch jede Lösung h von $h - Kh = g$ in $L^1(Q)$ stetig, wenn g stetig ist. h löst die Gleichung auch in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ und es gibt wegen $L^2(Q) \subset L^1(Q)$ keine weitere Lösung.

2.6 Spektraltheorie im n - dimensionalen unitären Raum

Dieses Kapitel ist eigentlich eine Wiederholung aus der linearen Algebra. Es werden die für die Spektraltheorie in unendlichdimensionalen Räumen wichtigen Eigenschaften der Eigenwerte bewiesen.

2.6.1 Bemerkungen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{C}^n$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Durch $(z,w) = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$, $\| z \| = \sqrt{(z,z)}$ wird $\mathbb{C}^n$ zu einem Hilbertraum der Dimension n, die Vektoren $e_1 = (1,0,...,0),...,e_n = (0,...,0,1)$ bilden ein VONS. Alle Hilberträume der Dimension n sind isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^n = \mathcal{H}_0$. Sei $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ eine Orthonormalbasis in $\mathcal{H}_0$, dann gibt es zu $x \in \mathcal{H}_0$ Zahlen $x_i \in \mathbb{C}$, so daß $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi_i$. Ist A ein linearer Operator in $\mathcal{H}_0$, so ist $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_iA\varphi_i$. A ist also stetig und aus $L(\mathcal{H}_0)$. Weiter ist $(Ax,\varphi_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i(A\varphi_i,\varphi_j)$. Da $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ eine Basis ist, gibt es auch $y_j \in \mathbb{C}$ mit $Ax = \sum_{j=1}^{n} y_j\varphi_j$. Bekanntlich ist $y_j = (Ax,\varphi_j)$. Setzt man also $a_{ji} := (A\varphi_i,\varphi_j)$, so erhält man $y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i$.

2.6.2 Definition

Sei $\mathcal{H}_1$ ein Teilraum von $\mathcal{H}_0$, $A \in L(\mathcal{H}_0)$. $\mathcal{H}_1$ heißt invariant bezüglich A, wenn $A(\mathcal{H}_1) \subset \mathcal{H}_1$ ist.

2.6.3 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}_1 \neq \{0\}$ ein invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_0$ bezüglich $A \in L(\mathcal{H}_0)$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{H}_1, \|\varphi\| = 1$, und ein $z \in \mathbb{C}$ derart, daß

$$A\varphi = z\varphi.$$

Beweis:
$\mathcal{H}_1$ ist als endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ abgeschlossen. Sei $\{\varphi_1,...,\varphi_m\}$ ein VONS von $\mathcal{H}_1, a_{ji} = (A\varphi_i,\varphi_j)$ für $1 \leq i,j \leq m$. Sei $\varphi = \sum_{i=1}^{m} x_i\varphi_i$, $\|\varphi\| = 1$. Dann gilt: $\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 = 1$. Für $\|\varphi\| = 1$ sind nun äquivalent:

$$A\varphi = z\varphi \Longleftrightarrow \quad \text{Für} \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{gilt: } \sum_{i=1}^{m} a_{ji}x_i = zx_j.$$

Die Gleichung rechts ist genau dann nicht trivial lösbar (d.h. lösbar mit $\| \varphi \| = 1$), wenn $\det(a_{ji} - z\delta_{ji}) = 0$. Dies liefert eine Bedingung für z, denn es gibt Konstanten $b_1, ..., b_m \in \mathbb{C}$ mit $\det(a_{ji} - z\delta_{ji}) = \sum_{i=1}^{m} b_i z^i$, $b_m = (-1)^m$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es also ein $z \in \mathbb{C}$, das die Gleichung $\det(a_{ji} - z\delta_{ji}) = 0$ löst.

2.6.4 Hilfssatz

Sei $A \in L(\mathcal{H}_0)$, A hermitesch. Sei $\mathcal{H}_1$ ein invarianter Teilraum von $\mathcal{H}_0$ bezüglich A. Dann ist $\mathcal{H}_1^{\perp}$ auch ein invarianter Teilraum bezüglich A.

Beweis:
Sei $x \in \mathcal{H}_1^{\perp}$, dann ist für alle $y \in \mathcal{H}_1 : (x, y) = 0$. Also gilt für alle $y \in \mathcal{H}_1$:

$$(Ax, y) = (x, Ay) \overset{A\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1}{=} 0$$

und daher $Ax \in \mathcal{H}_1^{\perp}$.

2.6.5 Satz

Sei $A \in L(\mathcal{H}_0)$, A hermitesch. Dann hat $\mathcal{H}_0$ ein VONS $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$, die reell sind. Für $x \in \mathcal{H}_0$ gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, \varphi_i)\varphi_i \quad \text{und} \quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i.$$

Beweis:
$\mathcal{H}_0$ sei ein invarianter Teilraum bezüglich A. Nach Hilfssatz 2.6.3 gibt es $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ und $\varphi_1 \in \mathcal{H}_0, \| \varphi_1 \| = 1$ mit $A\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1$. Sei $\mathcal{H}_1$ das Orthogonalkomplement zum invarianten Teilraum $\{\lambda\varphi_1 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. $\mathcal{H}_1$ ist nach Hilfssatz 2.6.4 auch invariant bezüglich A und es gilt $\dim \mathcal{H}_1 = n - 1$. Ist $n - 1 \geq 1$, so folgt wie eben die Existenz von $\lambda_2 \in \mathbb{C}, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1$ mit $\| \varphi_2 \| = 1$, so daß gilt: $A\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2$. Wegen $\varphi_2 \in \mathcal{H}_1$ ist $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Bilde das Orthogonalkomplement $\mathcal{H}_2$ zum invarianten Teilraum $\{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$. Es ist $\dim \mathcal{H}_2 = n - 2$. Ist $n - 2 > 1$, so fährt man fort, findet λ_3, φ_3 usw.
Die Eigenwerte sind reell: Sei φ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann ist

$$\lambda \cdot (\varphi, \varphi) = (A\varphi, \varphi) = (\varphi, A\varphi) = \overline{\lambda}(\varphi, \varphi).$$

Da φ Eigenvektor ist, ist $\varphi \neq 0$, also hat man $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.
Die im Satz angegebene Entwicklung von x ist gerade die Fourierentwicklung. Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 2.6.1 gilt weiter: Es ist $Ax = \sum_{i=1}^{n} y_i\varphi_i$, wobei $y_i = (Ax, \varphi_i)$. Also ist

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} (Ax, \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i.$$

2.6.6 Satz

Sei $A \in L(\mathcal{H}_0)$, A hermitesch. Die nach Satz 2.6.5 existierenden Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ seien nach der Größe ihres Betrages geordnet, d.h. es gelte $| \lambda_1 | \geq | \lambda_2 | \geq \ ... \geq | \lambda_n |$. Dann gilt: $\dfrac{| (Ax, x) |}{\| x \|^2} \leq | \lambda_1 |$.
Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn x ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1 oder $-\lambda_1$ ist. x löst also das Variationsproblem: Finde $\max\limits_{x \in \mathcal{H}\setminus\{0\}} \dfrac{| (Ax, x) |}{\| x \|^2}$.

Beweis:
Sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ ein VONS aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Es ist

$$|(Ax, x)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,|(x, \varphi_i)|^2\right| \leq \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \,|(x, \varphi_i)|^2\right| = \lambda_1 \cdot \|x\|^2,$$

also gilt die Ungleichung. Ist x Eigenvektor zu $\pm\lambda_1$, so gilt das Gleichheitszeichen.
Sei jetzt $x \in \mathcal{H}$ mit $\dfrac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2} = |\lambda_1|$. Zu zeigen: x ist Eigenvektor zum Eigenwert $\pm\lambda_1$.
Wegen $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \,|(x, \varphi_i)|^2\right| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot |(x, \varphi_i)|^2 \leq |\lambda_1| \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} |(x, \varphi_i)|^2 = |\lambda_1| \cdot \|x\|^2$ folgt für alle i mit $|\lambda_i| < |\lambda_1|$: $(x, \varphi_i) = 0$. Denn sonst wäre für dieses i: $|\lambda_i| \cdot |(x, \varphi_i)|^2 < |\lambda_1| \cdot |(x, \varphi_i)|^2$, also auch $\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot |(x, \varphi_i)|^2 < |\lambda_1| \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} |(x, \varphi_i)|^2$, d.h. das Gleichheitszeichen in obiger Ungleichungskette gilt nicht.
Sei nun $\lambda_1 \neq 0$. O.E. $\lambda_1 > 0$. Seien die Eigenvektoren zu λ_1 mit $\psi_1, \psi_2, ...$, die möglicherweise vorhandenen Eigenvektoren zu $-\lambda_1$ mit $\widetilde{\psi}_1, \widetilde{\psi}_2, ...$ bezeichnet. Es gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,|(x, \varphi_i)|^2\right| = \left|\sum_{j} \lambda_1 \,|(x, \psi_j)|^2 - \sum_{k} \lambda_1 \,|(x, \widetilde{\psi}_k)|^2\right|$$

einerseits, weil das Gleichheitszeichen gilt ist aber andererseits auch

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,|(x, \varphi_i)|^2\right| = \sum_{j} \lambda_1 \,|(x, \psi_j)|^2 + \sum_{k} \lambda_1 \,|(x, \widetilde{\psi}_k)|^2 .$$

Wenn für zwei nicht negative, reelle Zahlen a, b gilt: $|a - b| = |a| + |b|$, so muß mindestens eine davon 0 sein. Also ist x Eigenvektor zu $+\lambda_1$ oder zu $-\lambda_1$. Für $\lambda_1 = 0$ ist alles klar.

Dieser Satz legt die Idee nahe, im Fall eines unendlichdimensionalen Hilbertraumes $\mathcal{H}$ und eines hermiteschen Operators $A \in L(\mathcal{H})$ einen Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor φ durch Analyse von $\sup \dfrac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}$ zu gewinnen. Man kann auch weitere Eigenwerte auf diese Art bekommen: Hat man bereits p Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_p$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\varphi_1, ..., \varphi_p$, so setzt man

$$A_p : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0, \; A_p x = Ax - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (x, \varphi_i) \varphi_i.$$

Dann ist A_p hermitesch und es gilt

$$|(A_p x, x)| = \left|\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \,|(x, \varphi_i)|^2\right| \leq |\lambda_{p+1}| \cdot \|x\|^2$$

für $x \in \mathcal{H}_0$ ($\dim \mathcal{H}_0 = n$). Bei der Untersuchung von $\max \dfrac{|(A_p x, x)|}{\|x\|^2}$ erhält man also λ_{p+1}.

2.7 Spektraltheorie kompakter Operatoren im Hilbertraum

2.7.1 Beispiel

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$ hermitesch. Die Hermitizität von A allein ist nicht ausreichend zur Konstruktion eines Eigenwertes, wie in Satz 2.6.5 geschildert. Als Beispiel betrachtet man $\mathcal{H} = L^2((0,1)), A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, Af(x) = xf(x)$. Dann ist $A \in L(\mathcal{H})$ und A hermitesch. Sei $f \in \mathcal{H}$ mit $f \neq 0$ und $Af = \lambda f$. Es ist dann $x \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x)$ fast überall in (0,1), d.h. $(x-\lambda) \cdot f(x) = 0$ fast überall in (0,1). Das bedeutet aber $f(x) = 0$ fast überall in (0,1), Widerspruch. Also braucht man Zusatzvoraussetzungen an A.

2.7.2 Definition

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{B}$ ein linearer Operator. $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von T genau dann, wenn es ein $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ gibt mit: $\varphi \neq 0; T\varphi = \lambda \cdot \varphi$.
φ heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert λ von T.

2.7.3 Satz (Courant[1])

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$. A sei hermitesch und kompakt, $(Ax, x) \not\equiv 0$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{H}, \varphi \neq 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ derart, daß für alle $f \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ gilt:

$$\frac{|(Af, f)|}{\|f\|^2} \leq |\lambda| = \frac{|(A\varphi, \varphi)|}{\|\varphi\|^2}$$

und es ist $A\varphi = \lambda\varphi$.

Beweis:
$(Ax, x) \not\equiv 0$ heißt: A ist nicht der Nulloperator. Weiter ist für $f \in \mathcal{H} \quad (Af, f) \in \mathbb{R}$, denn es ist $\overline{(Af, f)} = (f, Af) \overset{A \text{ hermitesch}}{=} (Af, f)$. Wegen $A \in L(\mathcal{H})$ hat man

$$0 < d = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \cdot \|x\| = \|A\| < \infty.$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} |(Ax_n, x_n)| = d$. Nach Satz 2.1.4 enthält die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schwach konvergente Teilfolge $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $x'_n \overset{n \to \infty}{\rightharpoonup} x$. Da A kompakt ist, gilt nach Satz 2.2.11: $\lim\limits_{n \to \infty} Ax'_n = Ax$. Daher folgt nach Satz 2.1.5: $\lim\limits_{n \to \infty} |(Ax'_n, x'_n)| = |(Ax, x)|$, also insbesondere: $d = |(Ax, x)|$. Wegen $d > 0$ ist $x \neq 0$. Es gilt sogar $\|x\| = 1$: Es ist

$$d = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)| = \sup_{y \in \mathcal{H} \backslash \{0\}} \left| \left(A\left(\frac{y}{\|y\|}\right), \frac{y}{\|y\|} \right) \right| = \sup_{y \in \mathcal{H} \backslash \{0\}} \frac{|(Ay, y)|}{\|y\|^2}.$$

Man hat $\|x\|^2 = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n, x) \leq \|x\|$, also $\|x\| \leq 1$. Wäre $\|x\| < 1$, so wäre $d < \dfrac{|(Ax, x)|}{\|x\|^2}$ und gleichzeitig $d = \sup\limits_{y \in \mathcal{H} \backslash \{0\}} \dfrac{|(Ay, y)|}{\|y\|^2}$, Widerspruch.

Sei für $z \in \mathcal{H}$: $y(\varepsilon) := x + \varepsilon z$. Sei $\varepsilon_0 > 0$ mit $\varepsilon_0 < \dfrac{\|x\|}{2 \cdot \|z\|}$ für $z \neq 0$, sonst beliebig, dann ist für $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) : \|y(\varepsilon)\| \geq \|x\| - |\varepsilon| \cdot \|z\| = \|x\| - \dfrac{\|x\|}{2} = \dfrac{\|x\|}{2} > 0$.
Betrachte nun die reellwertige stetig differenzierbare Funktion $\varphi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{(Ay(\varepsilon), y(\varepsilon))}{\|y(\varepsilon)\|^2} = \frac{(Ax + \varepsilon Az, x + \varepsilon z)}{\|x + \varepsilon z\|^2}.$$

[1] Richard Courant (1888-1972)

Es ist $\varphi(0) = \dfrac{(\mathrm{Ax},\mathrm{x})}{\|\mathrm{x}\|^2} \neq 0$, denn $\mathrm{d} = \dfrac{|(\mathrm{Ax},\mathrm{x})|}{\|\mathrm{x}\|^2} \neq 0$, und es gilt:

$$|\varphi(\varepsilon)| = \frac{|\mathrm{Ay}(\varepsilon),\mathrm{y}(\varepsilon)|}{\|\mathrm{y}(\varepsilon)\|^2} \leq \sup_{\mathrm{y}\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{|(\mathrm{Ay},\mathrm{y})|}{\|\mathrm{y}\|^2} = \mathrm{d} = |\varphi(0)|\,.$$

Also hat φ ein Extremum in 0, d.h. es ist $\varphi'(0) = 0$. Jetzt wird $\varphi'(0)$ auf andere Art berechnet: Sei $\mathrm{U}(\varepsilon) = (\mathrm{A}(\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{z}),\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{z}), \mathrm{V}(\varepsilon) = \|\mathrm{x}+\varepsilon\mathrm{z}\|^2$, d.h.

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(\varepsilon) &= (\mathrm{Ax},\mathrm{x}) + \varepsilon(\mathrm{Ax},\mathrm{z}) + \varepsilon(\mathrm{Az},\mathrm{x}) + \varepsilon^2(\mathrm{Az},\mathrm{z}) = \\
&= (\mathrm{Ax},\mathrm{x}) + \varepsilon\cdot 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax},\mathrm{z}) + \varepsilon^2(\mathrm{Az},\mathrm{z}),\\
\mathrm{V}(\varepsilon) &= \|\mathrm{x}\|^2 + \varepsilon\cdot 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \varepsilon^2\,\|\mathrm{z}\|^2,\\
\mathrm{U}'(\varepsilon) &= 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax},\mathrm{z}) + 2\varepsilon(\mathrm{Az},\mathrm{z}),\\
\mathrm{V}'(\varepsilon) &= 2\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{z}) + 2\varepsilon\,\|\mathrm{z}\|^2,\\
\varphi'(0) &= \frac{\mathrm{U}'(0)\mathrm{V}(0) - \mathrm{U}(0)\mathrm{V}'(0)}{\mathrm{V}^2(0)} = \frac{2\mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax},\mathrm{z})\cdot\|\mathrm{x}\|^2 - 2(\mathrm{Ax},\mathrm{x})\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{z})}{\|\mathrm{x}\|^4}.
\end{aligned}$$

Sei $\lambda := (\mathrm{Ax},\mathrm{x})$. Aus $\varphi'(0) = 0$ folgt

$$0 = \mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax},\mathrm{z})\cdot\|\mathrm{x}\|^2 - \lambda\cdot\mathrm{Re}\,(\mathrm{x},\mathrm{z}) \overset{\|\mathrm{x}\|^2=1}{=} \mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax},\mathrm{z}) - \mathrm{Re}\,(\lambda\mathrm{x},\mathrm{z}) = \mathrm{Re}\,(\mathrm{Ax}-\lambda\mathrm{x},\mathrm{z}).$$

$\mathrm{z}\in\mathcal{H}$ war beliebig, setzt man daher $\mathrm{z} = \mathrm{Ax}-\lambda\mathrm{x}$, so folgt $\mathrm{Ax} = \lambda\mathrm{x}$. Wegen $|\lambda| = \mathrm{d}$ folgt der Satz.

2.7.4 Beispiel

Auch ein kompakter Operator muß keinen Eigenwert besitzen: Sei $\mathrm{T} : \mathrm{l}^2 \longrightarrow \mathrm{l}^2$ gegeben durch $\mathrm{TA} = \mathrm{B}$ mit $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathrm{b}_1 = 0, \mathrm{b}_i = \frac{\mathrm{a}_{i-1}}{i-1}$ für $i \geq 2$. Dann ist T kompakt, hat aber keinen Eigenwert.

Beweis:

1) T ist kompakt:
   Sei $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{l}^2$ eine Folge mit $\mathrm{A}_n \rightharpoonup \mathrm{A}$, d.h. für $\mathrm{B}\in\mathrm{l}^2$ beliebig gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{A}_n,\mathrm{B}) = (\mathrm{A},\mathrm{B})$. Sei $\mathrm{A}_n = \left(\mathrm{a}_i^{(n)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, \mathrm{A} = (\mathrm{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}, \mathrm{B} = (\mathrm{b}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Es gilt also für $\mathrm{B}\in\mathrm{l}^2$ beliebig: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{a}_i^{(n)}\mathrm{b}_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{a}_i\mathrm{b}_i$. Setzt man nun speziell $\mathrm{B}_j = (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$, so erhält man für alle $j\in\mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{a}_j^{(n)} = \mathrm{a}_j$. Da $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergiert, gibt es ein $c > 0$, so daß $\|\mathrm{A}_n\| \leq c$ für alle $n\in\mathbb{N}$, also insbesondere auch $\left|\mathrm{a}_i^{(n)}\right| \leq \sqrt{c}$ für alle $i,n\in\mathbb{N}$ und auch $|\mathrm{a}_i| \leq \sqrt{c}$ für alle $i\in\mathbb{N}$. Wähle nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $M\in\mathbb{N}$ so groß, daß $\sum\limits_{i=M+1}^{\infty}\frac{4c}{i^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{a}_j^{(n)} = \mathrm{a}_j$ kann nun ein $N\in\mathbb{N}$ so gewählt werden, daß für alle $n\geq N$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{M}\left|\mathrm{a}_i^{(n)}-\mathrm{a}_i\right|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n\geq N$:

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{TA}_n - \mathrm{TA}\|^2 &= \sum_{i=2}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{a}_{i-1}^{(n)}-\mathrm{a}_{i-1}}{i-1}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{a}_i^{(n)}-\mathrm{a}_i\right)^2}{i^2} = \\
&= \sum_{i=1}^{M}\frac{\left(\mathrm{a}_i^{(n)}-\mathrm{a}_i\right)^2}{i^2} + \sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{a}_i^{(n)}-\mathrm{a}_i\right)^2}{i^2} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\left(\left|\mathrm{a}_i^{(n)}\right|^2 + 2\cdot|\mathrm{a}_i|\cdot\left|\mathrm{a}_i^{(n)}\right| + |\mathrm{a}_i|^2\right) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \cdot \left(2 \left| a_i^{(n)} \right|^2 + 2 \, |a_i|^2 \right) \leq$$

$$\leq \quad \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{4c}{i^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} TA_n = TA$, d.h. T ist nach Satz 2.2.11 kompakt.

2) T hat keinen Eigenwert:

Ist $TA = 0$, so war bereits $A = 0$, d.h. 0 ist kein Eigenwert von T. Sei nun $TA = \lambda A$ für ein $\lambda \neq 0$. Sei $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, TA = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Behauptung: $A = 0$

Beweis durch Induktion:

$n = 1$: Wegen $b_1 = 0$ ist $a_1 = 0$.

$n \longrightarrow n+1$: Ist $a_n = 0$, so ist damit $b_{n+1} = \frac{a_n}{n} = 0$. Wegen $\lambda \cdot a_{n+1} = b_{n+1}$ und $\lambda \neq 0$ erhält man daraus $a_{n+1} = 0$.

Also ist $A = 0$, d.h. λ ist kein Eigenwert. T besitzt also keinen Eigenwert.

Aus Satz 2.7.3 folgt im wesentlichen:

2.7.5 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$ sei hermitesch und kompakt. Es sei $(Ax, x) \not\equiv 0$. Dann gibt es ein endliches oder abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ oder $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_N$ oder $\lambda_1, \lambda_2, ...$ von A derart, daß $\lambda_i \neq 0$ und $|\lambda_1| \geq ... \geq |\lambda_N|$ oder $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ ist. Wenn das Orthonormalsystem abzählbar unendlich ist, dann gibt es unter den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ unendlich viele paarweise verschiedene und es ist $\lim\limits_{i\to\infty} |\lambda_i| = 0$. Für alle $x \in \mathcal{H}$ hat man die Entwicklung

$$Ax = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i \quad \text{oder} \quad Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i$$

mit einer in $\mathcal{H}$ konvergenten Reihe.

<u>Beweis</u>:
Nach Satz 2.7.3 gibt es $\varphi_1 \in \mathcal{H}, \|\varphi_1\| = 1$, und $\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ so, daß $A\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1$. Induktiv fährt man fort: Sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$, $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$. Sei $B_0 = A$. Setze $B_N : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}, \ x \longmapsto B_N x = Ax - \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i$. Dann ist $B_N \in L(\mathcal{H})$ und hermitesch, denn es ist

$$(B_N x, y) = (Ax, y) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x, \varphi_i)(\varphi_i, y) = (x, Ay) - \sum_{i=1}^{N} \overline{\lambda_i}(x, \varphi_i) \cdot \overline{(y, \varphi_i)}$$

einerseits und

$$(x, B_N y) = (x, Ay - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i (y, \varphi_i)\varphi_i) = (x, Ay) - \sum_{i=1}^{N} \overline{\lambda_i (y, \varphi_i)} \cdot (x, \varphi_i)$$

andererseits. B_N ist auch kompakt: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|x_k\| \leq c$. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, so daß $(Ax_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Weiter ist $|(x_{k_j}, \varphi_i)| \leq \|x_{k_j}\| \cdot \|\varphi_i\| \leq c$, also gibt es eine Teilfolge $(x_{k_{j_m}})_{m\in\mathbb{N}}$, so daß für $i = 1,...,N$ die Folgen $((x_{k_{j_m}}, \varphi_i))_{m\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Also konvergiert $(B_N x_{k_{j_m}})_{m\in\mathbb{N}}$, d.h. B_N ist kompakt. Nun werden zwei Fälle unterschieden:

1) $B_N x \equiv 0$. Dann ist man fertig.

2) $B_N x \not\equiv 0$: In diesem Fall kann man Satz 2.7.3 auf B_N anwenden. Dies liefert ein $\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\| = 1$ und ein $\lambda \neq 0$ mit $B_N\varphi = \lambda\varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned}\lambda(\varphi,\varphi_j) &= (B_N\varphi,\varphi_j) = (A\varphi,\varphi_j) - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(\varphi,\varphi_i)(\varphi_i,\varphi_j) = \\ &= (\varphi, A\varphi_j) - \lambda_j(\varphi,\varphi_j) = \lambda_j(\varphi,\varphi_j) - \lambda_j(\varphi,\varphi_j) = 0.\end{aligned}$$

Also bilden die $\{\varphi_1, ..., \varphi_N, \varphi\}$ ein Orthonormalsystem und es ist $B_N\varphi = A\varphi = \lambda\varphi$. Setze $\varphi_{N+1} := \varphi, \lambda_{N+1} := \lambda$.

Kann man dieses Verfahren beliebig fortsetzen, so liefert es ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$, wobei alle $\lambda_i \neq 0$. Falls $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$, so ist nach Konstruktion für $x \in \mathcal{H}$ mit $\|x\| = 1 : |\lambda_N| \geq |(B_{N-1}x, x)|$. Wählt man für x den Eigenvektor φ_{N+1}, so wird $B_{N-1}\varphi_{N+1} = A\varphi_{N+1} = \lambda_{N+1}\varphi_{N+1}$. Mit obiger Maximaleigenschaft von $|\lambda_N|$ folgt dann:

$$|\lambda_N| \geq |(B_{N-1}\varphi_{N+1}, \varphi_{N+1})| = |\lambda_{N+1}| \cdot |(\varphi_{N+1}, \varphi_{N+1})| = |\lambda_{N+1}| .$$

also gilt $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$

Wie im Beispiel 2.1.3 gezeigt, gilt für jedes abzählbar unendliche Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$: $\varphi_j \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 0$. Nach Satz 2.2.11 folgt: $\lim\limits_{j\to\infty} A\varphi_j = 0$, also $\lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_j| \cdot \|\varphi_j\| = \lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_j| = 0$. Wegen $\lim\limits_{j\to\infty} |\lambda_j| = 0$, aber $|\lambda_j| \neq 0$, folgt weiter, daß die zur Folge $(\lambda_j)_{j\in N}$ gehörige Wertemenge unendlich ist.

Für den Summenanteil in der Definition von $B_N x$ schreiben wir nun $A_N x$. Nach Konstruktion der Eigenwerte ist für $x \in \mathcal{H} : |(B_N x, x)| = |((A - A_N)x, x)| \leq |\lambda_{N+1}| \cdot \|x\|^2$. Nach Satz 1.7.3 gilt wegen der Hermitizität von $B_N = A - A_N : \|A - A_N\| \leq |\lambda_{N+1}|$. Wegen $\lim\limits_{N\to\infty} |\lambda_N| = 0$ liefert dies

$$Ax = \lim_{N\to\infty} A_N x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, \varphi_i)\varphi_i .$$

2.7.6 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})$. Es gebe ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ in $\mathcal{H}$ und eine Folge $(\lambda_i)_{i\in N} \subset \mathbb{C}$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$ so, daß für $x \in \mathcal{H}$ gilt: $Ax = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x, \varphi_i)\varphi_i$ mit einer in $\mathcal{H}$ konvergenten Reihe. Dann ist A kompakt.
Dies ist eine Art Umkehrung von Satz 2.7.5.

Beweis:
Wie im Beweis von Satz 2.7.5 führt man den in $\mathcal{H}$ erklärten kompakten Operator $A_n : x \longmapsto A_n x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x, \varphi_i)\varphi_i$ ein. Es gilt dann

$$\|(A - A_n)x\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i(x, \varphi_i)\varphi_i \right\|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \cdot |(x, \varphi_i)|^2 \leq \sup_{i\geq n+1} |\lambda_i|^2 \cdot \|x\|^2 .$$

Also ist

$$\|A - A_n\|^2 \leq \sup_{i\geq n+1} |\lambda_i|^2, \text{ d.h. } \lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|^2 = 0.$$

Nach Satz 2.4.1 folgt jetzt die Kompaktheit von A.

2.7.7 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})\backslash\{0\}$. A sei hermitesch und kompakt. Das in Satz 2.7.5 konstruierte Orthonormalsystem von Eigenvektoren sei abzählbar unendlich mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ..., \lambda_i \neq 0, \lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. Dann bildet dieses Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein VONS im Hilbertraum $\overline{\mathcal{R}(A)}$.
(Ist das Orthonormalsystem endlich, ist sowieso nichts zu beweisen.)

Beweis:
Sei $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ und sei $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$. Es ist

$$Ax_n = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax_n, \varphi_i)\varphi_i \quad \text{und} \quad \| Ax_n \| = \sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_n, \varphi_i)|^2 .$$

Weiter gilt nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 \leq \| y \|^2$, d.h. insbesondere: Die Reihe links konvergiert. Nun rechnet man:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\big|(y,\varphi_i)\big|^2 - \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m}\Big|\big|(y,\varphi_i)\big|^2 - \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big| + \sum_{i=m+1}^{\infty}\Big(\big|(y,\varphi_i)\big|^2 + \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\Big|(Ax_n,\varphi_i)\Big|^2 &= \Big|(Ax_n - y,\varphi_i) + (y,\varphi_i)\Big|^2 \leq \Big(\big|(Ax_n - y,\varphi_i)\big| + \big|(y,\varphi_i)\big|\Big)^2 = \\
&= \Big|(Ax_n - y,\varphi_i)\Big|^2 + \Big|(y,\varphi_i)\Big|^2 + 2\cdot\Big|(Ax_n - y,\varphi_i)\Big|\cdot\Big|(y,\varphi_i)\Big| \leq \\
&\leq 2\cdot\Big|(Ax_n - y,\varphi_i)\Big|^2 + 2\cdot\Big|(y,\varphi_i)\Big|^2,
\end{aligned}$$

denn es gilt ja $0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, d.h. $2ab \leq a^2 + b^2$. Nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10 gilt

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\Big|(Ax_n - y,\varphi_i)\Big|^2 \leq \| Ax_n - y \|^2 .$$

Das alles eingesetzt, erhält man

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\big|(y,\varphi_i)\big|^2 - \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m}\Big|\big|(y,\varphi_i)\big|^2 - \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big| + \sum_{i=m+1}^{\infty}\Big(\big|(y,\varphi_i)\big|^2 + 2\big|(Ax_n - y,\varphi_i)\big|^2 + 2\big|(y,\varphi_i)\big|^2\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{m}\Big|\big|(y,\varphi_i)\big|^2 - \big|(Ax_n,\varphi_i)\big|^2\Big| + 2\,\| Ax_n - y \|^2 + 3\sum_{i=m+1}^{\infty}\big|(y,\varphi_i)\big|^2,$$

dabei war $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ wählt man nun ein $m_0 = m_0(\varepsilon)$ so, daß $3\sum\limits_{i=m+1}^{\infty} |(y,\varphi_i)|^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ ist – die letzte Summe konvergiert ja. Dann wählt man ein $n_0 = n_0(m_0, \varepsilon)$ derart, daß die ersten beiden Summanden $< \frac{\varepsilon}{2}$ werden. Damit folgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(y,\varphi_i)|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} |(Ax_n,\varphi_i)|^2 = \lim_{n\to\infty} \| Ax_n \|^2 = \| y \|^2 .$$

Für alle $y \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ gilt also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(y, \varphi_i)|^2 = \|y\|^2$, d.h. $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ist ein VONS in $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Bemerkung: Nach Satz 1.1.19 ist $\overline{\mathcal{R}(A)}$ also immer separabel, unabhängig, ob $\mathcal{H}$ dies nun ist oder nicht.

2.7.8 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $A \in L(\mathcal{H})\backslash\{0\}$ hermitesch und kompakt. Dann ist $\overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp} = \mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{H} \mid Ax = 0\}$, so daß $\mathcal{H}$ die orthogonale Zerlegung $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{N}(A)$ hat.
Ist $\mathcal{H}$ separabel, so ist auch $\mathcal{N}(A)$ separabel. Ist $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ ein abzählbar unendliches VONS in $\mathcal{N}(A)$ und$\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ das abzählbar unendliche Orthonormalsystem aus Satz 2.7.5, so bilden $\{\psi_1, \psi_2, ...,$ $\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein VONS $\{w_1, w_2, ...\}$ in $\mathcal{H}$. Zu w_i gibt es ein reelles μ_i, so daß $Aw_i = \mu_i w_i$. Ist $Af = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ und ein $f \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$, so gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\lambda = \mu_j$ und es ist $f = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}, \mu_i=\lambda} (f, w_i) w_i$.
In einem beliebigen Hilbertraum folgt aus $Af = \lambda f$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und ein $f \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$, daß es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt mit $\lambda = \lambda_j$, wobei die $\lambda_1, \lambda_2, ...$ gemäß Satz 2.7.5 konstruiert sind mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ Außerdem ist $f = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}, \lambda_i=\lambda} (f, \varphi_i)\varphi_i$, wobei die Summe endlich ist und $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ das Orthonormalsystem aus Satz 2.7.5 ist.

Beweis:
Sei $y \in \mathcal{H}$ und es gelte für alle $x \in \mathcal{H} : (Ax, y) = 0$. Dann ist für alle $x \in \mathcal{H} : 0 = (Ax, y) = (x, Ay)$, also $Ay = 0$, d.h. $\overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp} \subset \mathcal{R}(A)^{\perp} \subset \mathcal{N}(A)$. Sei umgekehrt $y \in \mathcal{N}(A)$. Dann ist für alle $x \in \mathcal{H} : 0 = (x, Ay) = (Ax, y)$, d.h. $y \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \overset{1.2.3}{=} \overline{\mathcal{R}(A)}^{\perp}$. Also hat $\mathcal{H}$ die im Hilfssatz angegebene Zerlegung. $\mathcal{N}(A)$ ist abgeschlossen und daher ein Hilbertraum. Ist $\mathcal{H}$ separabel, so ist $\mathcal{N}(A)$ als Teilraum ebenfalls separabel (Satz 1.1.18), d.h. $\mathcal{N}(A)$ hat ein abzählbar unendliches VONS $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$. Ist nun $x \in \mathcal{H}$, so gibt es demnach $x_1 \in \overline{\mathcal{R}(A)}, x_2 \in \mathcal{N}(A)$ mit $x = x_1 + x_2$ und es gilt

$$x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_1, \varphi_i)\varphi_i \quad \text{nach Satz 2.7.7 und} \quad x_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_2, \psi_i)\psi_i.$$

$\mathcal{N}(A)$ ist der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 0 vereinigt mit $\{0\}$. $\{w_1, w_2, ...\}$ ist also ein VONS und es gilt $Aw_i = \mu_i w_i$ mit $\mu_i = 0$ oder $\mu_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$. Ist nun $Af = 0$, so ist $f \in \mathcal{N}(A)$ und es gilt $f = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}, \mu_i=0} (f, w_i) w_i$. Ist $Af = \lambda f$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, so ist $f \in \mathcal{R}(A)$ und mit den Sätzen 2.7.5 und 2.7.7 erhält man

$$\lambda f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda (f, \varphi_i)\varphi_i.$$

Also gilt für alle $j \in \mathbb{N} : \lambda_j (f, \varphi_j) = \lambda (f, \varphi_j)$, d.h. für alle j mit $(f, \varphi_j) \neq 0$ folgt: $\lambda = \lambda_j$. Wegen $\{j \mid (f, \varphi_j) \neq 0\} \subset \{j \mid \lambda = \lambda_j\}$ gilt also

$$f = \sum_{j\in\mathbb{N}, (f,\varphi_j)\neq 0} (f, \varphi_j)\varphi_j = \sum_{j\in\mathbb{N}, \lambda=\lambda_j} (f, \varphi_j)\varphi_j.$$

Nach Satz 2.7.5 gibt es nur endlich viele Indizes j mit $\lambda_j = \lambda_0$, d.h. die Summe ist endlich. Die Aussage in beliebigen Hilberträumen folgt sofort aus der Zerlegung von $\mathcal{H}$ und Satz 2.7.5.

Bemerkungen:

1) Der Fall, daß $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ oder $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ endlich ist, ist klar.

2) Hilfssatz 2.7.8 zeigt insbesondere, daß mit dem Konstruktionsverfahren aus dem Beweis von Satz 2.7.5 alle von Null verschiedenen Eigenwerte erfaßt werden.

Wie hängt die von Neumannsche Norm N(A) mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ zusammen?

2.7.9 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ separabel, $A \in L(\mathcal{H})\backslash\{0\}$, A hermitesch mit $N(A) < \infty$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ das in Satz 2.7.5 konstruierte Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ von A mit $\lambda_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ Dann ist $N(A)^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$. Setzt man wieder $A_n x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x, \varphi_i)\varphi_i$, so ist $A_n \in L(\mathcal{H})$ und $N(A - A_n)^2 = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis:
Nach Hilfssatz 2.4.19 ist A kompakt. Mit Satz 2.7.5 erhält man die Eigenwerte $\neq 0$ und ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren. Nach Satz 2.7.7 ist dieses sogar vollständig in $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Mit Satz 2.7.8 erhält man ein VONS in $\mathcal{H}$. Laut Definition der von Neumannschen Norm in 2.4.15 ist dann

$$N(A)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \| A\psi_i \|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \| A\varphi_i \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2.$$

Betrachte nun $B_n = A - A_n$. A_n ist hermitesch und kompakt. Es gilt: $B_n\psi_i = A\psi_i - A_n\psi_i = 0$. Für $j = 1,...,n$ hat man $B_n\varphi_j = A\varphi_j - A_n\varphi_j = \lambda_j\varphi_j - \lambda_j\varphi_j = 0$, für $j > n$ gilt dagegen $B_n\varphi_j = A\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$. Also folgt:

$$N(B_n)^2 = N(A - A_n)^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2.$$

2.8 Anwendungen auf Integraloperatoren

2.8.1 Satz

Sei K ein Integraloperator vom Hilbert-Schmidt-Typ in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Kern $K \in L^2(Q \times Q)$. Sei $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ und $\int\limits_{Q\times Q} | K(x,y) |^2 \, dxdy > 0$. Dann ist K nicht der Nulloperator. Es gibt ein endliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_N\}$ oder ein abzählbar unendliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ bzw. $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$ oder $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... > 0$. Im Fall eines abzählbar unendlichen Systems ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = \int_{Q\times Q} |K(x,y)|^2 \, dxdy, \lim_{n\to\infty} \int_{Q\times Q} \left| K(x,y) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} \right|^2 dxdy = 0.$$

Im Fall eines endlichen Systems $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ sind die Aussagen entsprechend zu modifizieren. Dieser Satz heißt insbesondere:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y)$$

mit einer in $L^2(Q \times Q)$ konvergenten Reihe. Diese Entwicklung heißt „Bilinearentwicklung“ von K.

Beweis:
$L^2(Q)$ ist ein separabler Hilbertraum. Sei $\{\psi_1, \psi_2, ...\}$ ein VONS von $\mathcal{H}$. Nach Satz 2.4.20 ist $N(K)^2 = \int\limits_Q \int\limits_Q | K(x,y) |^2 \, dydx$, nach Definition der von Neumannschen Norm gilt also $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \| K\psi_i \|^2 = \int\limits_{Q\times Q} | K(x,y) |^2 \, dydx > 0$, d.h. K ist nicht der Nulloperator. Aus $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ folgt nach Hilfssatz 2.4.5, daß K hermitesch ist. Nach Hilfssatz 2.4.20, hat man auch $N(K) < \infty$ und daraus folgt mit Hilfssatz 2.4.19 die Kompaktheit von K. Daher können nun Satz 2.7.5 und Hilfssatz 2.7.9

angewendet werden und man erhält alle Aussagen des Satzes außer der Bilinearentwicklung. Sei nun wie in Hilfssatz 2.7.9 für $f \in L^2(Q) : K_n f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i$. Dann ist fast überall in Q:

$$K_n f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_Q f(y)\overline{\varphi_i(y)}\,dy\,\varphi_i(x) = \int_Q \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} f(y)\,dy.$$

Der Kern $K_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$ ist nach Fubini-Tonelli vom Hilbert-Schmidt-Typ. Offenbar ist $K_n(x,y) = \overline{K_n(y,x)}$. Mit Hilfssatz 2.7.9 egibt sich

$$\int_{Q\times Q} |K(x,y) - K_n(x,y)|^2 \;dxdy = N(K - K_n)^2 \overset{2.7.9}{=} \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also gilt

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i}(y),$$

wobei die Reihe in $L^2(Q \times Q)$ konvergiert.

2.8.2 Satz

Sei $\alpha < n$, sei K ein schwach singulärer Integraloperator in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ mit Kern $K \in S_\alpha(\overline{Q})$. Sei $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$. Es gebe $(x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q} \backslash \{x = y\}$ mit $K(x,y) \neq 0$. Dann ist K nicht der Nulloperator. Es gibt ein abzählbar unendliches System $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Eigenvektoren zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ..., |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... > 0$ (bzw. ein endliches System $\{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$ usw...). Alle φ_i sind in $C^0(\overline{Q})$. Sei $f \in \mathcal{H}, g = Kf$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \left| g - \sum_{i=1}^{n} (g, \varphi_i)\varphi_i \right|^2 dx = 0.$$

Im Fall $\alpha < \frac{n}{2}$ ist $g \in C^0(\overline{Q})$ und $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (g, \varphi_i)\varphi_i(x)$ für $x \in \overline{Q}$. Die Reihe rechts konvergiert gleichmäßig in $\overline{Q}$.

Beweis:
Da K(x,y) stetig ist, folgt aus der Existenz eines (x,y) mit $K(x,y) \neq 0$ bereits, daß K nicht der Nulloperator ist. Nach Hilfssatz 2.5.8 ist $K \in L(\mathcal{H})$, nach 2.5.9 ist K kompakt. Wie in 2.8.1 folgt: K ist hermitesch. Satz 2.7.5 liefert die Existenz der Eigenvektoren und Eigenwerte wie behauptet. Ist $K\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ mit $\lambda_i \neq 0$, so setze $L := \frac{1}{\lambda_i} K$. Dann ist $L\varphi_i = \varphi_i$ und $L \in S_\alpha(\overline{Q})$. Aus $\varphi_i - L\varphi_i = 0$ folgt jetzt mit Hilfssatz 2.5.13: $\varphi_i \in C^0(\overline{Q})$. Nach Satz 2.7.5 gilt:

$$Kf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \lambda_i \varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, K\varphi_i)\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (Kf, \varphi_i)\varphi_i,$$

also $g = \sum_{i=1}^{\infty} (g, \varphi_i)\varphi_i$, wobei die Reihe in $L^2(Q)$ konvergiert, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q \left| g - \sum_{i=1}^{n} (g, \varphi_i)\varphi_i \right|^2 dx = 0.$$

Sei nun $\alpha < \frac{n}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{\infty} |(g,\varphi_i)| \cdot |\varphi_i(x)| &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(Kf,\varphi_i)| \cdot |\varphi_i(x)| = \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,K\varphi_i)| \cdot |\varphi_i(x)| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)| \cdot |\lambda_i\varphi_i(x)| = \\
&= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)| \cdot \left| \int_Q K(x,y)\varphi_i(y)\,dy \right| .
\end{aligned}$$

Wegen $|K(x,y)|^2 \le \dfrac{c^2}{|x-y|^{2\alpha}}$ hat man

$$\int_Q |K(x,y)|^2 \; dy \le \int_Q \frac{c^2}{|x-y|^{2\alpha}} dy \le \frac{c^2 \cdot n \cdot \tau_n}{n-2\alpha} \cdot R^{n-2\alpha},$$

wobei R so groß gewählt wird, daß $Q \subset K_R(0)$. (Die letzte Ungleichung wurde im Beweis von 2.5.7 bewiesen.) Also ist für jedes $x \in Q$ die Funktion $y \longmapsto K(x,y)$ aus $L^2(Q)$ und genügt der Abschätzung $\int_Q |K(x,y)|^2 \; dy \le M$ für $x \in \overline{Q}$, wobei $M := \dfrac{c^2 \cdot n \cdot \tau_n}{n-2\alpha} \cdot R^{n-2\alpha}$. Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=n+1}^{\infty} |(g,\varphi_i)| \cdot |\varphi_i(x)| &= \sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)| \cdot \left| \int_Q K(x,y) \cdot \varphi_i(y)\,dy \right| \le \\
&\le \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \int_Q K(x,y) \cdot \varphi_i(y)\,dy \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\overset{1.1.10}{\le} \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_Q |K(x,y)|^2 \; dy \right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \sqrt{M} \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Da $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \le \|f\|^2$, konvergiert die Reihe rechts. Also folgt die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe für g in $\overline{Q}$.

2.8.3 Satz

Sei $\mathcal{H} = L^2((a,b))$. Sei L ein Sturm-Liouville-Operator mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(L)$ wie in Definition 2.4.8. Dann gibt es ein in $\mathcal{H}$ vollständiges Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Eigenvektoren $\varphi_i \in \mathcal{D}(L)$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ von L. Es ist $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$. Für $f \in \mathcal{D}(L)$ gilt

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f,\varphi_i)\varphi_i(x)$$

und die Reihe rechts konvergiert gleichmäßig in [a,b].

Beweis:
Es werden zwei Fälle unterschieden:

1) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von L.

Dann hat die Gleichung $Lu = 0$ in $\mathcal{D}(L)$ nur die Lösung $u \equiv 0$. Nach Satz 2.4.13 gibt es zu $f \in C^0([a,b])$ genau ein $u \in \mathcal{D}(L)$ mit $Lu = f$ und es gibt eine Greensche Funktion $G \in C^0([a,b] \times [a,b])$, so daß gilt: $u(x) = \int_a^b G(x,y)f(y)\,dy$, Dadurch wird ein Operator $G : C^0([a,b]) \longrightarrow \mathcal{D}(L)$ gegeben. Durch Abschließung erhält man einen Operator $\overline{G} \in L(\mathcal{H})$. Nach Satz 2.4.13 ist $G(x,y) = G(y,x)$, d.h. der Operator $\overline{G}$ ist hermitesch. Da G auch stetig in $[a,b] \times [a,b]$ ist, ist G ein Integralkern vom Hilbert-Schmidtschen Typ. Wegen der Stetigkeit von G ist auch $\int_a^b \int_a^b |G(x,y)|^2\ dydx < \infty$, also folgt mit den Sätzen 2.4.20, 2.4.19 die Kompaktheit von $\overline{G}$. Nach Satz A.2.6 ist $\overline{G}(\mathcal{H}) \subset C^0([a,b])$. Das Eigenwertproblem für L schreibt sich in eines für G um: Ist $Lu = \lambda u, u \in \mathcal{D}(L), \lambda \neq 0$, so ist mit $\mu := \frac{1}{\lambda}$:

$$\mu u(x) = \int_a^b G(x,y)u(y)\,dy.$$

Es müssen also die Eigenwerte von G untersucht werden. Es ist $\mathcal{R}(G) = \mathcal{D}(L)$ und es gilt $C_0^\infty((a,b)) \subset \mathcal{D}(L)$. $C_0^\infty((a,b))$ ist ein dichter Teilraum von $L^2((a,b)) = \mathcal{H}$, also ist $\mathcal{R}(G)$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$, d.h. erst recht $\mathcal{R}(\overline{G})$. Nach Hilfssatz 2.7.8 ist $\mathcal{N}(\overline{G}) = \overline{(\mathcal{R}(\overline{G}))}^{\perp} = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$. Wegen $\overline{\mathcal{R}(\overline{G})} = \mathcal{H}$ liefern die Sätze 2.7.5 und 2.7.7 ein abzählbar unendliches VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Eigenvektoren in $\mathcal{H}$ zu den reellen Eigenwerten $\mu_1, \mu_2, ...$ von $\overline{G}$ mit $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq ..., \mu_i \neq 0$. Wegen $\overline{G}(\mathcal{H}) \subset C^0([a,b])$ ist $\varphi_i \in C^0([a,b])$, also ist wegen $G\varphi_i = \mu_i\varphi_i$ auch $\varphi_i \in \mathcal{D}(L)$. Nach Hilfssatz 2.7.8 sind dies alle Eigenwerte von $\overline{G}$, also auch alle von G. Also hat L genau die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1}, \lambda_2 = \frac{1}{\mu_2}, ...$ Da nach Satz 2.7.5: $\lim\limits_{i\to\infty} |\mu_i| = 0$, gilt $\lim\limits_{i\to\infty} |\lambda_i| = +\infty$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$ Für $f \in \mathcal{R}(G) = \mathcal{D}(L)$ gilt nach Satz 2.8.2: $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(f,\varphi_i)\varphi_i(x)$ für $x \in [a,b]$ mit einer in $[a,b]$ gleichmäßig konvergenten Reihe.

2) $\lambda = 0$ kann als Eigenwert von L auftreten.

In diesem Fall betrachtet man zunächst ein Hilfsproblem: $L_0u = -(pu')' + qu, \mathcal{D}(L_0) = \{u \in C^2([a,b]) \mid u(a) = u(b) = 0\}$. Mit partieller Integration erhält man:

$$\begin{aligned}(L_0u,u) &= (-(pu')' + qu, u) = \int_a^b (-pu')'\overline{u}\,dx + \int_a^b q\,|u|^2\ dx = \\ &= [-(pu')\overline{u}]_a^b + \int_a^b p\,|u'|^2\ dx + \int_a^b q\,|u|^2\ dx = \int_a^b p\,|u'|^2\ dx + \int_a^b q\,|u|^2\ dx.\end{aligned}$$

Nach Definition des Sturm-Liouville-Operators gilt: $p(x) > 0$ für $x \in [a,b]$ und q ist stetig in [a,b]. Sei $q_0 := \min\limits_{x\in[a,b]} q(x)$. Dann gilt also für $u \in \mathcal{D}(L_0)$:

$$(L_0u,u) \geq \int_a^b q_0 \cdot |u|^2\ dx = q_0 \cdot \|u\|^2_{L^2((a,b))}\ .$$

Behauptung:

Für den allgemeinen Sturm-Liouville-Operator L gilt: Es gibt höchstens zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_i < q_0$.

Beweis durch Widerspruch:

Annahme: Es gibt $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \le q_1 < q_0$, λ : Eigenwerte von L. Wähle drei zugehörige auf 1 normierte Eigenvektoren $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ aus $\mathcal{D}(L)$. Nach Hilfssatz 2.4.12 sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ paarweise orthogonal zueinander. Sei jetzt für $x \in [a, b]$: $u(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x)$. Dann ist $u \in \mathcal{D}(L)$. Bestimme c_1, c_2, c_3 so, daß

$$\begin{aligned} 0 &= u(a) = \sum_{i=1}^{3} c_i\varphi_i(a), \\ 0 &= u(b) = \sum_{i=1}^{3} c_i\varphi_i(b), \\ 1 &= |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 . \end{aligned}$$

(Eine Lösung dieses Systems gibt es immer, denn die ersten beiden Gleichungen bilden ein homogenes lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen. Der Lösungsraum dieses Systems ist also mindestens eindimensional, d.h. es gibt einen freien Parameter. Dieser kann dann so gewählt werden, daß die dritte Gleichung erfüllt ist.)

Bei dieser Wahl von c_1, c_2, c_3 gilt: $\|u\|_{L^2((a,b))} = 1$ und $u \in \mathcal{D}(L_0)$. Nun ist einerseits

$$(Lu, u) = \sum_{i=1}^{3} |c_i|^2 \cdot \lambda_i \le \lambda_3 \cdot \sum_{i=1}^{3} |c_i|^2 = \lambda_3 \le q_1 < q_0 = q_0 \cdot \|u\|^2_{L^2((a,b))},$$

aber andererseits

$$(Lu, u) = (L_0u, u) \ge q_0 \cdot \|u\|^2_{L^2((a,b))} .$$

Das liefert den Widerspruch, also ist die Behauptung bewiesen.

Sei nun $c > 0$. Man betrachtet jetzt den abgeänderten Sturm-Liouville- Operator $\widetilde{L} : \mathcal{D}(L) \longrightarrow C^0([a, b])$, $\widetilde{L}u = Lu + cu$. $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ ist genau dann Eigenwert von $\widetilde{L}$, wenn $\widetilde{\lambda} - c$ Eigenwert von L ist. Wegen obiger Behauptung kann man ein c so wählen, daß für alle Eigenwerte λ von L gilt: $\lambda + c > 0$. Dann hat $\widetilde{L}$ nur positive Eigenwerte. Also kann der erste Teil des Beweises auf $\widetilde{L}$ angewendet werden. Das liefert die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in der Anordnung $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ mit $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = +\infty$ Das in $\mathcal{H}$ vollständige orthonormale System $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1 + c, \lambda_2 + c, \ldots$ von $\widetilde{L}$, das man durch Anwenden des ersten Teils des Beweises erhält, ist ein VONS in $\mathcal{H}$ von Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von L. Also ist

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\varphi_i(x)$$

schon die gewünschte Entwicklung von $f \in \mathcal{D}(\widetilde{L}) = \mathcal{D}(L)$.

2.8.4 Satz (Satz von Mercer)

Sei $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q}), K \not\equiv 0, K(x, y) = \overline{K(y, x)}$. Wenn der zugehörige Integraloperator höchstens endlich viele negative Eigenwerte hat, so ist für $(x, y) \in \overline{Q} \times \overline{Q}$:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

und die Reihe konvergiert gleichmäßig in $\overline{Q} \times \overline{Q}$.

Beweis:
Alle Eigenwerte von K seien zunächst ≥ 0. Sei $K_n : \overline{Q} \times \overline{Q} \longrightarrow \mathbb{C}, K_n(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$. Da $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, ist K schwach singulär und nach Satz 2.8.2 sind die Eigenfunktionen φ_i aus $C^0(\overline{Q})$ und die $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Also ist $K_n \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$ und es gilt $K_n(x,y) = \overline{K_n(y,x)}$. Für $x \in \overline{Q}, f \in \mathcal{H}$ ist

$$K_n f(x) = \int_Q K_n(x,y) f(y)\, dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i(x).$$

Sei für $(x,y) \in \overline{Q} \times \overline{Q} : L_n(x,y) := K(x,y) - K_n(x,y)$.
Dann ist

$$L_n f(x) = Kf(x) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f, \varphi_i)\varphi_i(x)$$

und man hat

$$\begin{aligned}(L_n f, f) &= (Kf,f) - (K_n f, f) \overset{2.7.5}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,|(f,\varphi_i)|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,|(f,\varphi_i)|^2 = \\ &= \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \,|(f,\varphi_i)|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Behauptung: Für alle $x \in \overline{Q}$ gilt: $L_n(x,x) \geq 0$.

Beweis:
Angenommen es gibt ein $z \in \overline{Q}$ mit $L_n(z,z) < 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für $x, y \in \overline{Q}$ mit $|x - z| \leq \varepsilon, |y - z| \leq \varepsilon$ gilt: $\operatorname{Re} L_n(x,y) < 0$. Wähle ein $f \in C^0(\overline{Q})$ mit

$$0 \leq f \leq 1 \text{ und } f(y) = \begin{cases} 1, |y - z| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, |y - z| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(L_n f, f) &= \int_{Q \times Q} \operatorname{Re} L_n(x,y) f(x) f(y)\, dxdy = \\ &= \int_{\{(x,y)|x,y \in K_\varepsilon(z)\} \cap \overline{Q}} \operatorname{Re} L_n(x,y) f(x) f(y)\, dxdy < 0,\end{aligned}$$

Widerspruch. Also folgt die Behauptung.
Wegen $L_n(x,x) \geq 0$ ist für $x \in \overline{Q} : K(x,x) \geq K_n(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,|\varphi_i(x)|^2$. Da $K \in C^0(\overline{Q} \times \overline{Q})$, gibt es ein $\kappa \in \mathbb{R}$, so daß für alle $x \in \overline{Q}$ gilt: $\kappa \geq K(x,x)$. Demnach ist für alle $x \in \overline{Q}$ und $n \in \mathbb{N} :\ \kappa \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot |\varphi_i(x)|^2$, d.h. die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,|\varphi_i(x)|^2$ konvergiert für alle x punktweise.
Sei nun $x \in \overline{Q}$ fest, dann konvergiert die Bilinearentwicklung von K bezüglich y gleichmäßig in $\overline{Q}$, denn es ist

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \,|\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}| \leq \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \,|\varphi_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \,|\varphi_i(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sqrt{\kappa} \cdot \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \,|\varphi_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

und die letzte Summe konvergiert wie eben festgestellt.

Nach Satz 2.8.2 hat $g = Kf$ die in $\overline{Q}$ gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(g,\varphi_i)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(f,\varphi_i)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \int_Q f(y)\overline{\varphi_i(y)}\,dy\cdot\varphi_i(x).$$

Da die Bilinearentwicklung bei festem x in y gleichmäßig konvergiert, vertauschen Summe und Integral und es ist

$$Kf(x) = \int_Q \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}f(y)\,dy,$$

also gilt für $x \in \overline{Q}, f \in C^0(\overline{Q})$:

$$\int_Q\left(K(x,y) - \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}\right)f(y)\,dy = 0.$$

Weil $C^0(\overline{Q})$ dicht in $\mathcal{H} = L^2(Q)$ ist, folgt aus Satz 1.2.4:

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$$

für jedes $x \in \overline{Q}$ und fast alle $y \in Q$. Für festes $x \in \overline{Q}$ sind aber wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Bilinearentwicklung in y beide Seiten der Gleichung stetig, also gilt die Gleichung für alle $(x,y) \in \overline{Q}\times\overline{Q}$. Nach dem Satz von Dini A.2.1 ist in $K(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,|\varphi_i(x)|^2$ die Reihe rechts gleichmäßig konvergent in $x \in \overline{Q}$. Wegen

$$0 \le \sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\,|\varphi_i(x)|\cdot\overline{|\varphi_i(y)|} \le \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\cdot|\varphi_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i\cdot|\varphi_i(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

folgt damit die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearentwicklung, wenn alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$ sind. Sind endlich viele Eigenwerte $\lambda_1,...,\lambda_N$ negativ, so betrachte statt K den Integralkern

$$\widetilde{K}(x,y) = K(x,y) - \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)},$$

der den für K im ersten Beweisteil gemachten Voraussetzungen genügt: $\widetilde{K} \in C^0(\overline{Q}\times\overline{Q}), \widetilde{K}(x,y) = \overline{\widetilde{K}(y,x)}$, die Eigenwerte des Operators $\widetilde{K}$ sind positiv (siehe Beweis von Hilfssatz 2.7.9) und es ist $\widetilde{K} \not\equiv 0$. Die Bilinearentwicklung von $\widetilde{K}$: $\sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$ konvergiert nach dem ersten Beweisteil gleichmäßig in $\overline{Q}\times\overline{Q}$, also auch die Bilinearentwicklung von K.

2.9 Beispiel: Das Dirichletproblem

Als Beispiel soll einmal das Dirichlet[1]-Problem näher betrachtet werden. Der Laplace[2]-Operator, der zunächst ja nur auf $C^2(\Omega)$ definiert ist, kann auf einen größeren Definitionsbereich erweitert werden. Dabei tauchen schwache Ableitungen und die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$ auf. Für die Definitionen wird auf den Anhang C.2 verwiesen. (Den Beweis einiger elementarer Tatsachen findet man auch bei den Bemerkungen 5.8.3). Im folgenden bezeichnet also $D^\alpha u$ bzw. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ usw. immer die schwache Ableitung.
Der Laplace-Operator wird wie üblich definiert:

2.9.1 Definition (Laplace-Operator)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend). Der Operator

$$\Delta : W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

heißt Laplace-Operator.

Zunächst wollen wir ein etwas verallgemeinertes Dirichlet-Problem betrachten:

2.9.2 Definition (schwache Lösung)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $m \in \mathbb{N}, f \in L^2(\Omega)$. u heißt schwache Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} &(-\Delta)^m u = f \text{ in } \Omega, \\ &D^\alpha u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \text{ für } |\alpha| \leq m-1, \end{aligned}$$

falls $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$ und falls für alle $\varphi \in W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt:

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \cdot \frac{\partial^m \overline{\varphi}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \, dx = \int_\Omega f \cdot \overline{\varphi} \, dx.$$

Dabei ist $(-\Delta)^m u$ rekursiv durch $(-\Delta)^m u = (-\Delta)((-\Delta)^{m-1} u)$ definiert.

Man rechnet leicht nach, daß eine klassische Lösung auch eine schwache Lösung im obigen Sinn ist.

2.9.3 Satz

Das obige Dirichletproblem besitzt für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine schwache Lösung u.

Beweis:
$W_0^{m,2}(\Omega)$ ist nach Satz C.2.5 ein Hilbertraum. Auf $W_0^{m,2}(\Omega)$ wird nun eine Linearform L_f und eine Sesquilinearform B definiert: Sei $f \in L^2(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} L_f(\varphi) &:= \int_\Omega \varphi \overline{f} \, dx, \\ B(\varphi, u) &:= \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \cdot \frac{\partial^m \overline{u}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}. \end{aligned}$$

Das Ziel ist nun, den Satz von Lax-Milgram anzuwenden. Dazu müssen drei Dinge nachgerechnet werden:

[1]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)
[2]Pierre Simon Laplace (1749-1827)

1) L_f ist beschränkt:

$$\begin{aligned}
|L_f(\varphi)| &= \left|\int_\Omega \varphi\overline{f}\,dx\right| = |(\varphi,f)_{L^2}| \overset{1.1.14}{\leq} \|f\|_{L^2}\cdot\|\varphi\|_{L^2} = \\
&= \|f\|_{L^2}\cdot\left(\int_\Omega \varphi\overline{\varphi}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2}\cdot\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha\varphi D^\alpha\overline{\varphi}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \|f\|_{L^2}\cdot\|\varphi\|_{W^{m,2}}\,.
\end{aligned}$$

2) B ist nach oben beschränkt:

$$\begin{aligned}
|B(\varphi,u)| &= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^m\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\cdot\frac{\partial^m\overline{u}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\,dx\right| \leq \\
&\leq \left|\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega (D^\alpha\varphi)(D^\alpha\overline{u})\,dx\right| = |(\varphi,u)_{W_0^{m,2}}| \leq \\
&\overset{1.1.14}{\leq} \|\varphi\|_{W_0^{m,2}}\cdot\|u\|_{W_0^{m,2}}\,.
\end{aligned}$$

3) B ist nach unten beschränkt:

$$\begin{aligned}
|B(\varphi,\varphi)| &= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}\int_\Omega \left|\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\right|^2 dx\right| = \\
&= \left|\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}\left\|\frac{\partial^m\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\right\|_{L^2}^2\right| = \sum_{|\beta|=m}\|D^\beta\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\overset{C.2.10,3)}{\geq} \frac{1}{C}\cdot\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung mit einem $C \geq 0$ für alle $|\alpha| \leq m$ gilt. Wegen

$$\|\varphi\|_{W_0^{m,2}} = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha\varphi|^2\,dx = \sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2$$

gilt mit $K := \sharp\{\alpha\in\mathbb{N}_0^n : |\alpha|\leq m\}$:

$$K\cdot|B(\varphi,\varphi)| \geq \frac{1}{C}\cdot\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{C}\cdot\|\varphi\|_{W_0^{m,2}}^2,$$

also $|B(\varphi,\varphi)| \geq \frac{1}{K\cdot C}\|\varphi\|_{W_0^{m,2}}^2$.

Nach dem Satz von Lax-Milgram 1.7.6 gibt es nun genau ein $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$, so daß $L_f(\varphi) = B(\varphi,u)$ für alle $\varphi \in W_0^{m,2}(\Omega)$, d.h.

$$\int_\Omega \overline{f}\varphi\,dx = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial^m\varphi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\cdot\frac{\partial^m\overline{u}}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}\,dx.$$

Durch Konjugieren dieser Gleichung erhält man: u ist schwache Lösung des Dirichletproblems.

Nun untersuchen wir das Dirichletproblem und den Laplace-Operator noch aus etwas anderer Sicht. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ die Einheitskugel, d.h. $B = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$. Wir betrachten das Dirichletproblem

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial B} = 0.$$

für $f \in L^2(B)$ und gehen dabei ähnlich vor wie beim Sturm-Liouville-Problem.

2.9.4 Definition

Eine Funktion $G : C^0(\overline{B} \times \overline{B} \setminus \{(x,y) : x = y\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Greensche Funktion für das Dirichlet-Problem $-\Delta u = f,\ u|_{\partial B} = 0$, wenn für jede Lösung u dieses Problem gilt:

$$u(x) = \int_B G(x,y) f(y)\, dy.$$

2.9.5 Satz

Die Greenschen Funktionen zum Dirichlet-Problem $-\Delta u = f,\ u|_{\partial B} = 0$ mit $B \subset \mathbb{R}^n$ sind:

$$\begin{aligned}
n = 1 \quad &: \quad G(x,y) = -\frac{1}{2}(|x-y| + xy - 1),\\
n = 2 \quad &: \quad G(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln \|x-y\| - \ln \left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right),\\
n \geq 3 \quad &: \quad G(x,y) = \frac{1}{(n-2)\cdot n \cdot \tau_n}\left(\|x-y\|^{2-n} - \left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{2-n}\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist τ_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel, $\|.\|$ bezeichnet die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$. Für $y = 0$ ersetze man $\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \|$ durch 1.

Beweis:
Wir zeigen nur $n \geq 3$, um uns die Fallunterscheidungen zu sparen. Die Rechnung verläuft aber im Fall $n = 2$ weitgehend analog. Für $n = 1$ kann man die Greensche Funktion direkt mit dem im Beweis von Satz 2.4.13 angegebenen Verfahren ausrechnen. Außerdem zeigen wir nur eine „abgeschwächte Form“: Wir zeigen, daß die Gleichung

$$u(x) = \int_B G(x,y)(-\Delta u)(y)\, dy$$

für $u \in C^2(\overline{B})$ gilt, d.h., wenn es eine Greensche Funktion gibt, so muß sie aussehen wie im Satz. Will man die Gleichung in voller Allgemeinheit zeigen, so muß man erst definieren, was u(x) heißt – eine Funktion $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ kann man ja eventuell auf Nullmengen abändern usw., der Beweis wird dadurch jedenfalls nicht einfacher.
Im Beweis bezeichnet $\|.\|$ immer die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$, auch das Skalarprodukt ist immer das im $\mathbb{R}^n$. Zur Verdeutlichung wurde es trotzdem noch an einigen Stellen erwähnt.

1) Es ist $\Delta_y G(x,y) = 0$ fast überall:
   Wir bemerken zunächst, daß gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(x_i \cdot \|y\| - \frac{y_i}{\|y\|}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(x_i^2 \cdot \|y\|^2 - 2x_i y_i + \frac{y_i^2}{\|y\|^2}\right) = \\
&= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + 1 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - 2(x,y) + 1.
\end{aligned}$$

   Nun werden die Ableitungen einzeln berechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i} \|x-y\|^{2-n} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1-\frac{n}{2}} = \\
&= \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cdot (-2) \cdot (x_i - y_i) = \\
&= (n-2)(x_i - y_i) \cdot \|x-y\|^{-n},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \|x-y\|^{2-n} &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left[(n-2)(x_i-y_i)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{-\frac{n}{2}}\right] = \\
&= (-1)\cdot(n-2)\|x-y\|^{-n} + \\
&\quad +(n-2)(x_i-y_i)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\cdot\left(-\frac{n}{2}\right)\cdot(-2)(x_i-y_i) = \\
&= -(n-2)\|x-y\|^{-n} + n(n-2)(x_i-y_i)^2\cdot\|x-y\|^{-n-2}.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
\Delta_y\Big(\|x-y\|^{2-n}\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\Big(\|x-y\|^{2-n}\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\Big[-(n-2)\|x-y\|^{-n} + n(n-2)(x_i-y_i)^2\cdot\|x-y\|^{-n-2}\Big] = \\
&= -n\cdot(n-2)\|x-y\|^{-n} + n(n-2)\cdot\|x-y\|^{-n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \\
&= -n\cdot(n-2)\|x-y\|^{-n} + n(n-2)\cdot\|x-y\|^{-n-2}\cdot\|x-y\|^2 = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Nun genauso für den zweiten Summanden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{2-n}\right) &= \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 1\right)^{1-\frac{n}{2}}\right) = \\
&= \left(1-\frac{n}{2}\right)\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i + 1\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot \\
&\quad \cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\|x\|^2\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}y_j^2\right) - 2\sum_{j=1}^{n}x_j\cdot y_j + 1\right) = \\
&= \left(1-\frac{n}{2}\right)\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 1\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\left[\|x\|^2\cdot 2y_i - 2x_i\right] = \\
&= (2-n)\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 1\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\left[\|x\|^2 y_i - x_i\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{2-n}\right) &= (2-n)\cdot\left(-\frac{n}{2}\right)\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 1\right)^{-\frac{n}{2}-1}\cdot \\
&\quad \cdot 2\cdot\left[\|x\|^2 y_i - x_i\right]^2 + (2-n)\left(\|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + 1\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\|x\|^2 = \\
&= (2-n)\cdot\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n-2}\cdot\left[\|x\|^2\cdot\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 - \right. \\
&\quad \left. - n\cdot\Big(\|x\|^4\cdot y_i^2 - 2\|x\|^2\cdot y_ix_i + x_i^2\Big)\right].
\end{aligned}
$$

Somit folgt:

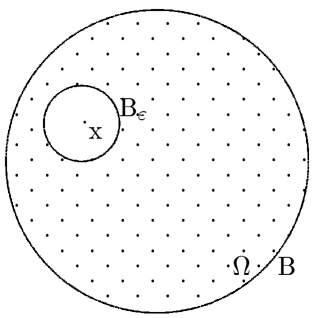
$$
\begin{aligned}
\Delta_y \left(\left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{2-n} \right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \left(\left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{2-n} \right) = \\
&= (2-n) \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{-n-2} \cdot \left[n \cdot \| x \|^2 \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 - \right. \\
&\quad \left. - \; n \cdot \left(\| x \|^4 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2 \, \| x \|^2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \right] = \\
&= (2-n) \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{-n-2} \cdot \left[n \cdot \| x \|^2 \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 - \right. \\
&\quad \left. - \; n \left(\| x \|^4 \cdot \| y \|^2 - 2 \, \| x \|^2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \| x \|^2 \right) \right] = \\
&= (2-n) \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{-n-2} \cdot \left[n \cdot \| x \|^2 \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 - \right. \\
&\quad \left. - \; n \cdot \| x \|^2 \cdot \left(\| x \|^2 \cdot \| y \|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 1 \right) \right] = \\
&= (2-n) \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^{-n-2} \cdot \left[n \cdot \| x \|^2 \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 - \right. \\
&\quad \left. - \; n \cdot \| x \|^2 \cdot \left\| x \cdot \| y \| - \frac{y}{\| y \|} \right\|^2 \right] = \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$\Delta_y G(x,y) = 0 \text{ fast überall in } B.$$

2) Es gilt für $u \in C^2(\overline{B})$ und $x \in B : u(x) = \int_B G(x,y) \cdot (-\Delta u(y)) \, dy$:

Sei $B_\varepsilon = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \| x - y \| \leq \varepsilon \}$. Zu einem vorgegebenen $x \in B$ sei ε so gewählt, daß $B_\varepsilon \subset B$. Sei nun $\Omega := B \backslash B_\varepsilon$.



Mit 1) erhält man nun mit der Greenschen Formel (Forster 3, §15, Satz 4):

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \Delta_y [G(x,y)] u(y) \, dy = \\
&\overset{\text{Green}}{=} \int_\Omega G(x,y) \Delta u(y) \, dy + \int_{\partial\Omega} \Big(u(y) \nabla_y G(x,y) - G(x,y) \nabla u(y) \Big) \, d\vec{S}.
\end{aligned}
$$

Wegen $\partial\Omega = \partial B \cup \partial B_\varepsilon$ folgt also:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G(x,y)\cdot(-\Delta u(y))\,dy &= \int_{\partial B} \Big(u(y)\nabla_y G(x,y) - G(x,y)\nabla u(y)\Big)\,d\vec{S} + \\
&\quad + \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(u(y)\nabla_y G(x,y) - G(x,y)\nabla u(y)\Big)\,d\vec{S} = \\
&\overset{u|_{\partial B}=0}{=} -\int_{\partial B} G(x,y)\nabla u(y)\,d\vec{S} + \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(u(y)\nabla_y G(x,y) - \\
&\quad - G(x,y)\nabla u(y)\Big)\,d\vec{S}.
\end{aligned}$$

Da für $\|y\| = 1$ auch $G(x,y) = 0$ ist, ergibt sich für alle ε mit $B_\varepsilon \subset B$:

$$\int_\Omega G(x,y)\cdot(-\Delta u(y))\,dy = \int_{\partial B_\varepsilon} \Big(u(y)\nabla_y G(x,y) - G(x,y)\nabla u(y)\Big)\,d\vec{S}.$$

Die Integrale auf der rechten Seite werden nun ausgerechnet bzw. abgeschätzt:
Da $u \in C^2(\overline{B})$, gibt es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$, so daß $\|\nabla u(y)\|_{\mathbb{R}^n} \le M$ für alle $y \in \overline{B}$. Damit gilt dann auch für alle $y \in \overline{B}$:

$$\left|\left(\nabla u(y), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n}\right| \le \|\nabla u(y)\|_{\mathbb{R}^n}\cdot\frac{\|x-y\|}{\|x-y\|} = \|\nabla u(y)\|_{\mathbb{R}^n} \le M < \infty.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2(x,y) + 1 - \|x\|^2 + 2(x,y) - \|y\|^2 = \\
&= 1 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x\|^2\cdot\|y\|^2 = \\
&= (1-\|x\|^2)\cdot(1-\|y\|^2) \ge 0
\end{aligned}$$

für $x, y \in \overline{B}$, also gilt

$$0 \le G(x,y) \le \frac{1}{(n-2)n\tau_n}\cdot\|x-y\|^{2-n}\ .$$

Ein (bezüglich Ω) äußeres Einheitsnormalenfeld auf ∂B_ε ist $\frac{x-y}{\|x-y\|}$, man erhält also wegen $\|x-y\| = \varepsilon$ auf ∂B_ε :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\partial B_\varepsilon} G(x,y)\nabla u(y)\,d\vec{S}\right| &= \left|\int_{\partial B_\varepsilon} G(x,y)\cdot\left(\nabla u(y), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n} dS(y)\right| \le \\
&\le \int_{\partial B_\varepsilon} |G(x,y)|\cdot\|\nabla u(y)\|_{\mathbb{R}^n}\ dS(y) \le \frac{M}{(n-2)n\tau_n}\int_{\partial B_\varepsilon} \varepsilon^{2-n}\,dS(y) = \\
&\overset{*}{=} \frac{M}{(n-2)n\tau_n}\int_{\|\xi\|=1} \varepsilon^{2-n}\varepsilon^{n-1}\,dS(\xi) = \frac{M\cdot\varepsilon}{(n-2)n\tau_n}\int_{\|\xi\|=1} dS(\xi) = \frac{M}{(n-2)}\cdot\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei in * die Substitution $y - x = \varepsilon\xi$, $dS(y) = \varepsilon^{n-1}\,dS(\xi)$ gemacht wurde. Also ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B_\varepsilon} G(x,y)\nabla u(y)\,d\vec{S} = 0.$$

In 1) wurde bereits ausgerechnet:

$$\frac{\partial}{\partial y_i}G(x,y) = \frac{1}{n\cdot\tau_n}\cdot\left[(x_i - y_i)\cdot\|x-y\|^{-n} - \left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\Big(\|x\|^2\,y_i - x_i\Big)\right].$$

Damit folgt nun:

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon} u(y)\nabla_y G(x,y)\,d\vec{S} = \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n\cdot\tau_n}\cdot\left(\|x-y\|^{-n}(x-y), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n} dS(y) -$$

$$-\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n\cdot\tau_n}\left(\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left(\|x\|^2 y - x\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n} dS(y).$$

Für den ersten der beiden Summanden ergibt sich mit der Substitution $y - x = \varepsilon\xi$, $dS(y) = \varepsilon^{n-1}\,dS(\xi)$:

$$\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n\cdot\tau_n}\cdot \|x-y\|^{-n-1}\cdot(x-y,x-y)\,dS(y) = \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n\cdot\tau_n}\|x-y\|^{-n+1}\,dS(y) =$$

$$= \frac{\varepsilon^{-n+1}}{n\cdot\tau_n}\int\limits_{\|\xi\|=1} u(x+\varepsilon\xi)\cdot\varepsilon^{n-1}\,dS(\xi) = \frac{1}{n\cdot\tau_n}\int\limits_{\|\xi\|=1} u(x+\varepsilon\xi)\,dS(\xi).$$

Wegen $\frac{1}{n\cdot\tau_n}\int\limits_{\|\xi\|=1} u(x)\,dS(\xi) = \frac{u(x)}{n\cdot\tau_n}\int\limits_{\|\xi\|=1} dS(\xi) = u(x)$ erhält man im Grenzwert:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n\cdot\tau_n}\|x-y\|^{-n-1}(x-y,x-y)\,dS(y) = u(x).$$

Beim zweiten Summanden wird abgeschätzt: Es ist

$$\left(\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left(\|x\|^2 y - x\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq \left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left\|y\cdot\|x\|^2 - x\right\|\cdot\frac{\|x-y\|}{\|x-y\|} =$$

$$= \left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left\|y\cdot\|x\|^2 - x\right\| \leq$$

$$\leq \left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left(\|y\|\cdot\|x\|^2 + \|x\|\right) \leq 2\cdot\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}.$$

Wegen $\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 = \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2(x,y) + 1 = \left\|y\cdot\|x\| - \frac{x}{\|x\|}\right\|^2$ kann man für $x \in B\backslash\{0\}$ weiter abschätzen:

$$\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n} = \left(\|x\|\cdot\left\|y - \frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{1}{\|x\|}\right\|\right)^{-n}.$$

Für $\|x\| < 1$ ist $\frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{1}{\|x\|} \in \mathbb{R}^n\backslash B$, d.h. es ist

$$\left\|y - \frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{1}{\|x\|}\right\| \geq \operatorname{dist}\left(\frac{x}{\|x\|}\cdot\frac{1}{\|x\|}, B\right) = \frac{1}{\|x\|} - 1 =: \widetilde{\delta}.$$

Also ist für $x \in B\backslash\{0\}$:

$$\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n} \leq \|x\|^{-n}\cdot\widetilde{\delta}^{-n}.$$

Für $x = 0$ ist $\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n} = 1$, damit folgt insgesamt: Es gibt ein $\delta \in \mathbb{R}$, so daß für ein festes $x \in B$ und alle $y \in B_\varepsilon$ gilt:

$$\left(\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^{-n}\cdot\left(\|x\|^2 y - x\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)_{\mathbb{R}^n} \leq \delta.$$

Da u stetig ist, gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $|\,u(y)\,| \leq M$ für alle $y \in B$. Nun kann der zweite Summand abgeschätzt werden:

$$\left| \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n \cdot \tau_n} \left(\left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{-n} \cdot \Big(\|x\|^2\, y - x \Big), \frac{x-y}{\|x-y\|} \right)_{\mathbf{R}^n} dS(y) \right| \leq$$

$$\leq \frac{M \cdot \delta}{n \cdot \tau_n} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} dS(y) = \frac{M \cdot \delta}{n \cdot \tau_n} \cdot \varepsilon^{n-1} \cdot n \cdot \tau_n = M \cdot \delta \cdot \varepsilon^{n-1},$$

also

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \frac{u(y)}{n \cdot \tau_n} \left(\left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{-n} \cdot \Big(\|x\|^2\, y - x \Big), \frac{x-y}{\|x-y\|} \right)_{\mathbf{R}^n} dS(y) = 0.$$

Schließlich ist noch

$$\left| \int\limits_{B_\varepsilon} G(x,y)(-\Delta u(y))\, dy \right| \quad \leq \int\limits_{B_\varepsilon} |G(x,y)| \cdot |-\Delta u(y)|\; dy \leq$$

$$\leq \frac{M}{(n-2)n\tau_n} \int\limits_{B_\varepsilon} \|x-y\|^{2-n}\; dy = \frac{M}{(n-2)n\tau_n} \int\limits_{\|\xi\| \leq \varepsilon} \|\xi\|^{2-n}\; d\xi =$$

$$= \frac{M}{(n-2)n\tau_n} \cdot n \cdot \tau_n \int\limits_0^\varepsilon r^{2-n} \cdot r^{n-1}\, dr = \frac{M}{(n-2)} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^\varepsilon =$$

$$= \frac{M}{2(n-2)} \cdot \varepsilon^2,$$

so daß auch

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_\Omega G(x,y)(-\Delta u(y))\, dy = \int\limits_B G(x,y)(-\Delta u(y))\, dy$$

gilt. Damit folgt insgesamt für $x \in B$:

$$\int\limits_B G(x,y)(-\Delta u(y))\, dy = u(x).$$

Für $x \in \partial B$, d.h. $\|x\| = 1$, gilt die Gleichung offensichtlich, da wegen

$$\left\| x \cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| y \cdot \|x\| - \frac{x}{\|x\|} \right\|$$

(s.o.) in diesem Fall $u(x) = G(x,y) = 0$ sind.

2.9.6 Satz

Der durch die Greenschen Funktionen aus Satz 2.9.5 gegebene Operator $K : L^2(B) \longrightarrow L^2(B), Kf(x) := \int_B G(x,y) \cdot f(y)\, dy$ ist vom Hilbert-Schmidt-Typ für $n \in \{1,2,3\}$. Für $n \geq 3$ ist der Integralkern G schwach singulär.

Beweis:

1) $G(x,y) \geq 0$:
Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned}|x-y|^2 - (1-xy)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 - 1 + 2xy - x^2y^2 = \\ &= x^2 \cdot (1-y^2) + y^2 - 1 = \\ &= (x^2-1)(1-y^2) \leq 0,\end{aligned}$$

also $|x-y| \leq |1-xy|$.
Wegen $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ ist $x \cdot y - 1 \leq 0$, also insgesamt $|x-y| + xy - 1 \leq 0$ und daher $G(x,y) \geq 0$.
Für $n \geq 2$ rechnet man ähnlich:

$$\begin{aligned}\left\| x\cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 - \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - 2(x,y) + 1 - \|x\|^2 + 2(x,y) - \|y\|^2 = \\ &= 1 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 = \\ &= (1 - \|x\|^2) \cdot (1 - \|y\|^2) \geq 0.\end{aligned}$$

Also gilt $\|x-y\| \leq \left\| x\cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|$. Damit folgt $G(x,y) \geq 0$ für $n \geq 2$.

2) $n = 1$:
Für $n = 1$ ist $|G(x,y)| \leq \frac{1}{2} \cdot \Big| |x-y| + xy - 1 \Big| \leq \frac{1}{2} \cdot |2+1-1| = 1$, also mit 1): $0 \leq G(x,y) \leq 1$.
Da $1 \in L^2(B \times B)$ ist auch $G(x,y) \in L^2(B \times B)$.

3) $n = 2$:
In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\left\| x\cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 &= \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - 2(x,y) + 1 \leq \\ &\overset{1.1.14}{\leq} \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 + 2\cdot \|x\| \cdot \|y\| + 1 \leq 4.\end{aligned}$$

Weiter gilt bekanntlich $\lim\limits_{r\downarrow 0} r^\alpha \ln r = 0$ für alle $\alpha > 0$, also gibt es ein $c > 0$, so daß $|\sqrt{r} \cdot \ln r| \leq c$ für $r \in [0,2]$, d.h. für $r \in [0,2]$ gilt dann $|\ln r| \leq c \cdot r^{-\frac{1}{2}}$. O.E. sei auch noch $c \geq \frac{1}{2\pi} \ln 4$ gewählt.
Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}0 &\leq G(x,y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left\| x\cdot \|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\| - \frac{1}{2\pi} \ln \|x-y\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \ln 4 + \Big| \ln \|x-y\| \Big| \leq c + c\cdot \|x-y\|^{-\frac{1}{2}} = c \cdot \left(1 + \|x-y\|^{-\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}$$

Es gilt $1 + \|x-y\|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(B \times B)$: Wegen $(a-b)^2 \geq 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $2ab \leq a^2 + b^2$ und daher $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Verwendet man dies und weiter $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2$, d.h. $y \in B_2(x)$ für $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_1(0)} \left(\int\limits_{B_1(0)} \left(1 + \|x-y\|^{-\frac{1}{2}}\right)^2 dy \right) dx &\leq 2 \int\limits_{B_1(0)} \left(\int\limits_{B_1(0)} 1 + \|x-y\|^{-1} \, dy \right) dx \leq \\ &\leq 2 \int\limits_{B_1(0)} \int\limits_{B_1(0)} dy dx + 2 \int\limits_{B_1(0)} \left(\int\limits_{B_2(x)} \frac{1}{\|x-y\|} dy \right) dx =\end{aligned}$$

$$= 2\int\limits_{B_1(0)} \pi\, dx + 2\int\limits_{B_1(0)} \left(2\pi\int\limits_0^2 r\cdot\frac{1}{r}\,dr\right) dx =$$
$$= 2\pi^2 + 8\pi\int\limits_{B_1(0)} dx = 2\pi^2 + 8\pi^2 = 10\pi^2 < \infty.$$

Also ist $1+\|x-y\|^{-\frac{1}{2}} \in L^2(B\times B)$ und damit auch $G \in L^2(B\times B)$.

4) $n \geq 3$:

Nach 1) gilt $0 \leq G(x,y) \leq c\cdot\|x-y\|^{2-n} = \frac{c}{\|x-y\|^{n-2}}$, also ist G schwach singulär. Für $n = 3$ hat man sogar:

$$\int\limits_{B_1(0)}\left(\int\limits_{B_1(0)}\frac{1}{\|x-y\|^2}\,dy\right)dx \leq \int\limits_{B_1(0)}\left(\int\limits_{B_2(x)}\frac{1}{\|x-y\|^2}\,dy\right)dx =$$
$$= \int\limits_{B_1(0)}\left(4\pi\int\limits_0^2 r^2\cdot\frac{1}{r^2}\,dr\right)dx =$$
$$= 8\pi\int\limits_{B_1(0)} dx = \frac{32}{3}\pi^2 < \infty.$$

Demnach ist K für $n = 3$ sogar vom Hilbert-Schmidt-Typ.

2.9.7 Bemerkung

Für $f \in L^2(B)$ ist $Kf \in W^{2,2}(B) \cap W_0^{1,2}(B)$ und es gilt

$$-\Delta\left(\int\limits_B G(x,y)f(y)\,dy\right) = f(x).$$

Ist $\alpha > 0$ und $f \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$, so ist $Kf \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$. Für $f \in C^0(\overline{B})$ gilt aber im allgemeinen nicht $Kf \in C^2(\overline{B})$, sondern nur $Kf \in W^{1,p}(B)$ für große p. Deshalb ist $C^0(\overline{B})$ kein geeigneter Definitionsbereich für K.

2.9.8 Satz

Sei $K : L^2(B) \longrightarrow L^2(B)$ der Operator aus Satz 2.9.6. K ist kompakt und hermitesch. K hat unendlich viele Eigenwerte, die alle reell und positiv sind. Für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...$ gilt $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i = 0$ und im Fall $n \leq 3$ sogar $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\lambda_i^2 < \infty$. Sind $u_1, u_2, ...$ die zugehörigen Eigenvektoren, so ist $\{u_1, u_2, ...\}$ ein VONS in $L^2(B)$. Die Eigenvektoren von K sind aus $C^0(\overline{B})$.

<u>Beweis</u>:
Nach Satz 2.9.6 ist K vom Hilbert-Schmidt-Typ bzw. schwach singulär. Nach Satz 2.4.4 bzw. Satz 2.5.9 erhält man die Kompaktheit.
K ist hermitesch nach Hilfssatz 2.4.5 (der Beweis dieses Hilfssatzes funktioniert auch bei schwach singulären Operatoren), denn es ist $G(x,y) \in \mathbb{R}$ und $G(y,x) = G(x,y)$ wegen

$$\left\|x\cdot\|y\| - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2 = \|x\|^2\cdot\|y\|^2 - 2(x,y) + 1 = \|y\|^2\cdot\|x\|^2 - 2(y,x) + 1 =$$
$$= \left\|y\cdot\|x\| - \frac{x}{\|x\|}\right\|^2.$$

Deshalb sind die Eigenwerte von K reell. K hat unendlich viele verschiedene Eigenwerte: Nach Hilfssatz 2.7.8 hat $L^2(B)$ die Orthogonalzerlegung $L^2(B) = \overline{\mathcal{R}(K)} \oplus \mathcal{N}(K)$. Ist nun

$$Kf = \int_B G(x,y)f(y)\,dy = 0,$$

so ist nach Bemerkung 2.9.7 auch

$$f = -\Delta\left(\int_B G(x,y)f(y)\,dy\right) = -\Delta(0) = 0,$$

also gilt $\mathcal{N}(K) = \{0\}$ und damit $\overline{\mathcal{R}(K)} = L^2(B)$. Nach Satz 2.7.5 gibt es ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren $\{u_1, u_2, ...\}$ und dieses bildet nach Satz 2.7.7 ein VONS in $\overline{\mathcal{R}(K)} = L^2(B)$. Ein VONS in $L^2(B)$ ist aber abzählbar unendlich, also gibt es nach Satz 2.7.5 unter den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ...$ unendlich viele paarweise verschiedene und es ist $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$. 0 ist kein Eigenwert von K, da sonst $\mathcal{N}(K) \neq \{0\}$.
Die Eigenwerte sind alle positiv: Sei $f \in C_0^\infty(B)$. Dann gibt es (siehe Definition der Greenschen Funktion) ein $g \in C_0^\infty(B)$ mit $-\Delta g = f$. Für $f \in C_0^\infty(B)$ gilt:

$$\begin{aligned}(Kf,f) &= (K(-\Delta g), -\Delta g) = (g, -\Delta g) = \int_B g \cdot (-\Delta \overline{g})\,dx = \\ &= -\sum_{i=1}^n \int_B g \frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial x_i^2}\,dx \overset{g|_{\partial B}=0}{=} \sum_{i=1}^n \int_B \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\,dx = \\ &= \int_B \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_i}\,dx = \int_B |\nabla g|^2\,dx \geq 0.\end{aligned}$$

Ist $f \in L^2(B)$, so gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(B)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Wegen $(Kf_n, f_n) \geq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(Kf_n, f_n) = (Kf, f)$ (nach Bemerkung 1.1.15) ist dann auch $(Kf, f) \geq 0$, diese Ungleichung gilt also für alle $f \in L^2(B)$. Ist nun f ein Eigenvektor zu einem Eigenwert λ von K, so gilt $0 \leq (Kf,f) = (\lambda f, f) = \lambda(f,f)$, also $\lambda \geq 0$, denn es gilt $f \neq 0$ bei Eigenvektoren.
Für $n \leq 3$ ist K nach Satz 2.9.6 vom Hilbert-Schmidt-Typ und hat daher nach Hilfssatz 2.4.20 endliche von Neumannsche Norm. Für das VONS $\{u_1, u_2, ...\}$ aus Eigenvektoren gilt daher:

$$\infty > N(K)^2 = \sum_{i=1}^\infty \|Ku_i\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \|\lambda_i u_i\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 \|u_i\|^2 = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2.$$

Die Stetigkeit der Eigenvektoren folgt mit Satz 2.8.2 (K ist ja auch für $n = 1$, $n = 2$ schwach singulär).

2.9.9 Bemerkung

Für die Eigenvektoren u_i von K gilt sogar: $u_i \in C^\infty(\overline{B})$.

2.9.10 Folgerung

Der Operator $-\Delta: W^{2,2}(B) \cap W_0^{1,2}(B) \longrightarrow L^2(B)$ hat unendlich viele positive Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ...$, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$ Es gilt $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$. 0 ist kein Eigenwert von $-\Delta$. Die Eigenvektoren sind aus $C^0(\overline{B})$ (Genauer: Sie sind sogar aus $C^\infty(\overline{B})$ nach Bemerkung 2.9.9) und sie bilden ein VONS in $L^2(B)$.

Beweis:
Aus Satz 2.9.5 (in voller Allgemeinheit – aber das haben wir nicht bewiesen) folgt: Der Operator $\mathrm{K}: \mathrm{L}^2(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{W}^{2,2}(\mathrm{B}) \cap \mathrm{W}_0^{1,2}(\mathrm{B})$ ist die Inverse von $-\Delta$. Also gilt für $\lambda_i \neq 0$:

$$\lambda_i \text{ Eigenwert von K} \iff \frac{1}{\lambda_i} \text{ Eigenwert von } -\Delta.$$

und für die zugehörigen Eigenvektoren:

$$u_i \text{ Eigenvektor von K} \iff u_i \text{ Eigenvektor von } -\Delta.$$

Damit ergeben sich fast alle Aussagen der Folgerung aus dem letzten Satz 2.9.8. Zu zeigen bleibt nur noch, daß 0 kein Eigenwert ist. Die Positivität der Eigenwerte kann man ähnlich wie im letzten Satz zeigen: Sei λ ein Eigenwert von $-\Delta$, u der zugehörige Eigenvektor, d.h. es gelte $-\Delta u = \lambda u$. Dann gilt

$$(-\Delta u, u) = (\lambda u, u) \iff -\int_B \Delta u \cdot u \, dx = \lambda \int_B u^2 \, dx \iff +\int_B \|\nabla u\|^2 \, dx = \lambda \int_B u^2 \, dx.$$

Da u als Eigenvektor nicht 0 ist, folgt $\lambda > 0$.

2.9.11 Bemerkung

Sei B wie oben das Innere der Einheitskugel. Weiter sei $M := \{u \mid u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B}),\ u\,|_{\partial B} = 0\}$ und es seien $f, q: \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gesucht wird eine Lösung $u \in M$ von

$$\Delta u + qu = f.$$

Der Fall $q = 0$ wurde in Satz 2.9.5 gelöst: Es ist

$$u(x) = \int_B -G(x,y) f(y) \, dy.$$

Im Fall $\Delta u = f - qu$ muß demnach gelten:

$$u(x) = \int_B -G(x,y)\Big(f(y) - q(y)u(y)\Big) \, dy = \tilde{f}(x) - \int_B -G(x,y) q(y) u(y) \, dy,$$

wobei

$$\tilde{f}(x) := \int_B -G(x,y) f(y) \, dy$$

gesetzt ist. Definiert man noch $K(x,y) := -G(x,y)q(y)$, so erhält man als Lösung des Problems:

$$u(x) = \int_B K(x,y) u(y) \, dy + \tilde{f}(x),$$

oder umgeformt:

$$u(x) - \int_B K(x,y) u(y) \, dy = \tilde{f}(x).$$

Dies ist eine Gleichung der Form

$$\mathrm{Id}(u) - K(u) = f,$$

wobei K ein kompakter Operator ist (q ist als stetige Funktion in $\overline{B}$ beschränkt, die Kompaktheit folgt also aus Satz 2.9.6). Sie heißt Fredholmsche Integralgleichung der 2. Art. Damit können die Fredholmschen Sätze 2.3.9 angewandt werden, um Aussagen über die Lösungen unserer ursprünglichen Gleichung zu erhalten – auf eine genaue Ausführung wollen wir hier aber verzichten.

Kapitel 3

Beschränkte lineare Operatoren im Banachraum

In diesem Kapitel wird nun versucht, die Sätze, die für Hilberträume gelten, auf Banachräume zu übertragen. Das funktioniert zum Teil für die Fredholmschen Sätze. Auch über die Eigenwerte kompakter Operatoren sind noch Aussagen möglich.

3.1 Die Fredholmschen Sätze für kompakte Operatoren im Banachraum

Im folgenden bezeichnet $\mathcal{B}$ immer einen Banachraum, $L(\mathcal{B})$ die Menge der beschränkten linearen Operatoren $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$. Wie in dem entsprechenden Kapitel über Hilberträume bezeichne V einen kompakten Operator und es sei: $T = I - V$.

3.1.1 Hilfssatz

Die Gleichung $Tx = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann gibt es ein $d > 0$, so daß für alle $x \in \mathcal{B}$ gilt: $\|Tx\| \geq d \cdot \|x\|$.

<u>Beweis</u>:
Es reicht, $\|Tx\| \geq d > 0$ für alle x mit $\|x\| = 1$ zu zeigen. Annahme: Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tx_n\| = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - Vx_n) = 0$. Da V kompakt ist, gibt es wegen $\|x_n\| = 1$ eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und ein $y \in \mathcal{B}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} Vx_{n_j} = y$. Folglich hat man auch $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = y$, also ist $\|y\| = 1$. Demnach gilt $Ty = y - Vy = 0$, Widerspruch zur Voraussetzung.

3.1.2 Hilfssatz

Die Gleichung $Tx = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann ist $\mathcal{R}(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$.

<u>Beweis</u>:
Sei $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in $\mathcal{R}(T)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ und es sei $y_n = Tx_n$. Nach Hilfssatz 3.1.1 ist $\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq d \cdot \|x_n - x_m\|$, also ist $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}$, d.h. es gibt ein $x \in \mathcal{B}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Dann ist auch $y = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, also ist $y \in \mathcal{R}(T)$.

Eine Verschärfung dieses Satzes ist Hilfssatz 3.2.3.

3.1.3 Hilfssatz

1) Sei M ein Teilraum von $\mathcal{B}$ mit $\dim \mathrm{M} < \infty$. Dann ist M abgeschlossen.
2) Sei M ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$ mit $\mathrm{M} \subsetneq \mathcal{B}$. Dann gibt es zu jedem $\lambda, 0 < \lambda < 1$, ein $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $\|\varphi\| = 1$, so daß für alle $\mathrm{f} \in \mathrm{M}$ gilt: $\|\varphi - \mathrm{f}\| \geq \lambda$. Die Aussage bleibt gültig, wenn $\mathcal{B}$ durch einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{G}$ ersetzt wird.

Beweis:

1) Sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ eine Basis von M, sei $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M mit $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = \widetilde{f}$. Zu den f_m gibt es $c_k^{(m)} \in \mathbb{C}$ mit $f_m = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(m)} \varphi_k$. Zeige nun zunächst folgende Ungleichung: Es gibt ein $\alpha > 0$, so daß für alle $g = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ gilt:

$$\|g\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \geq \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis:
Sei $h(c_1, ..., c_n) = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|$, $\Sigma = \left\{ (c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|^2 = 1 \right\}$. Σ ist kompakt, h stetig auf Σ, also nimmt h auf Σ sein Maximum und sein Minimum an. Da $h(c_1, ..., c_n) > 0$ auf Σ, ist $\alpha := \min\limits_{(c_1,...,c_n)\in\Sigma} h(c_1, ..., c_n) > 0$. Folglich gilt für $(c_1, ..., c_n) \neq 0$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \varphi_k \right\| \geq \alpha \iff \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| \geq \alpha \left(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Betrachte nun die Folge $f_m = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^{(m)} \varphi_k$. Da die Folge konvergiert, sind die Normen $(\|f_m\|)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Es gibt also ein $c > 0$ mit

$$c \geq \|f_m\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m)} \varphi_k \right\| \geq \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \left| c_k^{(m)} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Also sind die Folgen $\left(c_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ für $k \in \{1, ..., n\}$ beschränkt. Es gibt also eine Teilfolge $\left(c_1^{(m_i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, die konvergiert, dann wählt man eine Teilfolge $\left(c_2^{(m_{i_l})}\right)_{l\in\mathbb{N}}$, die konvergiert, usw. Insgesamt kann man eine Folge $m_j \subset \mathbb{N}$ so wählen, daß für alle $k \in \{1, ..., n\}$ die Folgen $\left(c_k^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ simultan konvergieren. Sei nun $c_k := \lim\limits_{j\to\infty} c_k^{(m_j)}$ und $f := \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \|f - f_{m_j}\| &= \lim_{j\to\infty} \left\| c_k \varphi_k - \sum_{k=1}^{n} c_k^{(m_j)} \varphi_k \right\| = \lim_{j\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} (c_k - c_k^{(m_j)}) \varphi_k \right\| \leq \\ &\leq \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |c_k - c_k^{(m_j)}| \cdot \|\varphi_k\| = 0. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Teilfolge $(f_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen f. Gleichzeitig konvergiert die ganze Folge gegen $\widetilde{f}$, also konvergiert auch jede Teilfolge gegen $\widetilde{f}$. Da der Grenzwert in $\mathcal{B}$ eindeutig ist, gilt also $\widetilde{f} = f = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, also $\widetilde{f} \in \mathrm{M}$.

2) Sei $M \subsetneq \mathcal{G}$, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{G}$ mit $g \notin M$. Sei $d = \inf_{f \in M} \| g - f \|$. Weil M abgeschlossen ist, ist $d > 0$. Wegen $\lambda < 1$ gibt es ein $f_0 \in M$, so daß $\| g - f_0 \| \le \frac{d}{\lambda}$.

Setze $\varphi := \frac{g - f_0}{\| g - f_0 \|}$, dann ist $\| \varphi \| = 1$ und für $f \in M$ gilt:

$$\varphi - f = \frac{g - f_0}{\| g - f_0 \|} - f = \frac{g - (f_0 + \| g - f_0 \| f)}{\| g - f_0 \|}.$$

Es ist $h = f_0 + \| g - f_0 \| f \in M$, deshalb hat man

$$\| \varphi - f \| = \frac{\| g - h \|}{\| g - f_0 \|} \ge \frac{d}{\frac{d}{\lambda}} = \lambda.$$

3.1.4 Hilfssatz

Der Nullraum $\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{B} \mid Tx = 0\}$ des Operators T ist ein Vektorraum endlicher Dimension.

Beweis:
$\mathcal{N}(T)$ ist Kern eines linearen Operators im Vektorraum. Angenommen, $\mathcal{N}(T)$ ist nicht endlichdimensional.
Dann gibt es eine Menge $\Sigma = \{f_1, f_2, ...\} \subset \mathcal{N}(T)$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Vektoren $f_1, ...f_n$ linear unabhängig sind. Sei $M_n := \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \mid c_1, ...c_k \in \mathbb{C} \right\}$. M_n ist nach Hilfssatz 3.1.3 abgeschlossen.
Weiter gibt es nach diesem Hilfssatz wegen $M_n \subsetneq M_{n+1}$ ein $\varphi_n \in M_{n+1}$ derart, daß $\| \varphi_n \| = 1$ und für alle $f \in M_n : \| f - \varphi_n \| \ge \frac{1}{2}$. Man bekommt also eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{N}(T)$ mit $\| \varphi_n \| = 1$ und $\| \varphi_n - \varphi_m \| \ge \frac{1}{2}$ für $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$. Da V kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und ein $\psi \in \mathcal{B}$ mit $\lim_{j \to \infty} V\varphi_{n_j} = \psi$. Wegen $T\varphi_n = \varphi_n - V\varphi_n = 0$ hat man jetzt auch $\lim_{j \to \infty} \varphi_{n_j} = \psi$, also ist die Folge $(\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Das ist aber ein Widerspruch zu $\| \varphi_{n_i} - \varphi_{n_j} \| \ge \frac{1}{2}$ für $i \neq j$.

3.1.5 Definition

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Banachräume, $L : \mathcal{D}(L) \longrightarrow \mathcal{B}'$ ein linearer Operator mit Wertebereich $\mathcal{R}(L)$. Ist L eineindeutig, so heißt die inverse Abbildung L^{-1} auch inverser Operator. L^{-1} ist linearer Operator von $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{R}(L)$ und Wertebereich $\mathcal{D}(L)$.

3.1.6 Satz (1.Fredholmscher[1] Satz)

Die Gleichung $Tx = (I - V)x = 0$ habe in $\mathcal{B}$ nur die Lösung $x = 0$. Dann hat T eine in $\mathcal{B}$ erklärte Inverse T^{-1}. T^{-1} ist aus $L(\mathcal{B})$ und es gibt einen kompakten Operator W, so daß $T^{-1} = I - W$.

Beweis:
Nach Hilfssatz 3.1.2 ist $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen. Zunächst wird bewiesen: $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$.
Annahme: $T(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T) \subsetneq \mathcal{B}$.
Sei $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}, \mathcal{B}_1 = T(\mathcal{B}), \mathcal{B}_2 = T^2(\mathcal{B}), ..., \mathcal{B}_k = T(\mathcal{B}_{k-1}) = \mathcal{R}(T^k)$.
Es ist $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset ...$ Weiter ist

$$T^k = (I - V)^k = I + \sum_{k=1}^{m} \binom{k}{m} (-V)^m .$$

Nach Hilfssatz 2.5.5 ist $(-V)^m$ kompakt, also hat T^k die Form $T^k = I + K, K$ kompakt.
Man hat auch $T^k x = 0 \Longrightarrow T^{k-1}x = 0 \Longrightarrow ... x = 0$. Nach Hilfssatz 3.1.2 ist also $\mathcal{B}_k = \mathcal{R}(T^k)$ abgeschlossen. Jetzt müssen zwei Fälle unterschieden werden:

[1]Erik Ivar Fredholm (1866-1927)

1. Fall: $\mathcal{B}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_2 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_3 \underset{\neq}{\supset} \ldots$

2. Fall: $\mathcal{B}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_{k+2} = \ldots$

Ein anderer Fall kann nicht eintreten, denn ist für ein $k \in \mathbb{N} : \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1}$, so ist $\mathcal{B}_{k+2} = T(\mathcal{B}_{k+1}) = T(\mathcal{B}_k) = \mathcal{B}_{k+1}$ usw.

1. Fall: Nach Hilfssatz 3.1.3 gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_k \in \mathcal{B}_k, \|\varphi_k\| = 1, \|\varphi_k - f\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $f \in \mathcal{B}_{k+1}$. Sei $m > k$. Dann ist
$$V\varphi_k - V\varphi_m = (I-T)\varphi_k - (I-T)\varphi_m = \varphi_k - (T\varphi_k + \varphi_m - T\varphi_m).$$
Wegen $\varphi_m \in \mathcal{B}_{k+1}, T\varphi_m, T\varphi_k \in \mathcal{B}_{k+1}$ ist $g := T\varphi_k + \varphi_m - T\varphi_m \in \mathcal{B}_{k+1}$, also ist $\|V\varphi_k - V\varphi_m\| = \|\varphi_k - g\| \geq \frac{1}{2}$ für $k \neq m$. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von V, denn $(V\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält eine konvergente Teilfolge. Also kann nur der 2. Fall eintreten.

2. Fall: Es gilt sogar $k = 0$: Sonst gibt es $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ mit $\|\varphi_j\| = 1, \varphi_j \in \mathcal{B}_j$ und $\|\varphi_j - f\| \geq \frac{1}{2}$ für $f \in \mathcal{B}_{j+1}$ nach Hilfssatz 3.1.3. Insbesondere ist $T\varphi_{k-1} \in \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{k+1}$, also gibt es ein $f \in \mathcal{B}_k$ mit $T\varphi_{k-1} = Tf$. Dann ist aber $T(\varphi_{k-1} - f) = 0$, also nach Voraussetzung $\varphi_{k-1} = f$, das ist ein Widerspruch zu $\|\varphi_{k-1} - f\| \geq \frac{1}{2}$ für $f \in \mathcal{B}_k$. Also war $k = 0$, d.h. $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$.

Weil die Gleichung $Tx = 0$ nur die Lösung $x = 0$ in $\mathcal{B}$ hat, ist somit $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ eineindeutig, d.h. man kann die Inverse T^{-1} definieren. Nach Hilfssatz 3.1.1 gibt es ein $d > 0$ mit $\|Tx\| \geq d \cdot \|x\|$ für $x \in \mathcal{B}$, also ist $\|T^{-1}x\| \leq \frac{1}{d} \cdot \|x\|$, d.h. T^{-1} ist beschränkt, also aus $L(\mathcal{B})$. Ist nun $y = x - Vx$, d.h. $x = T^{-1}y$, so hat man $T^{-1}y = x = y + Vx = y + VT^{-1}y$, also $T^{-1} = I + VT^{-1}$. T^{-1} ist beschränkt, V kompakt, also ist nach Hilfssatz 2.5.5 auch $W = VT^{-1}$ kompakt, d.h. T hat die im Satz angegebene Form.

Der zweite Fredholmsche Satz behandelt den Fall, daß $Tx = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ hat.

3.1.7 Satz (2. Fredholmscher Satz)

Es gebe ein $x_1 \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$ derart, daß $Tx_1 = 0$. Dann ist $\mathcal{R}(T) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}$.

Beweis:
Annahme: $\mathcal{R}(T) = \mathcal{B}$. Dann gibt es ein x_2 mit $Tx_2 = x_1 \neq 0$. Es ist $T^2x_2 = Tx_1 = 0$. Weiter gibt es ein x_3 mit $Tx_3 = x_2 \neq 0$, für x_3 gilt dann $T^3x_3 = 0, T^2x_3 = x_1 \neq 0$. Fährt man so fort, so erhält man eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{B}$ mit $Tx_k = x_{k-1}$ für $k \geq 2$ und $T^kx_k = 0$, aber $T^{k-1}x_k = x_1 \neq 0$. Sei $\mathcal{N}_k = \{x \in \mathcal{B} \mid T^kx = 0\}, \mathcal{N}_0 = \{0\}$. Im Beweis des ersten Fredholmschen Satzes, Satz 3.1.6, wurde gezeigt, daß T^k die Form $T^k = I + W$ hat, W kompakt. Also sind die $\mathcal{N}_k$ nach Hilfssatz 3.1.4 endlichdimensional, nach Hilfssatz 3.1.3 damit abgeschlossen. Wegen $x_k \in \mathcal{N}_k, x_k \notin \mathcal{N}_{k-1}, \mathcal{N}_{k-1} \subset \mathcal{N}_k$, hat man demnach
$$\mathcal{N}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_2 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_{k-1} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_k \underset{\neq}{\subset} \ldots$$
Nach Hilfssatz 3.1.3 kann man also eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wählen mit $\|y_k\| = 1, y_k \in \mathcal{N}_k$, für alle $f \in \mathcal{N}_{k-1} : \|y_k - f\| \geq \frac{1}{2}$. Für $k > m$ ist dann
$$Vy_k - Vy_m = (I-T)y_k - (I-T)y_m = y_k - (Ty_k + y_m - Ty_m).$$
Setzt man $f = Ty_k + y_m - Ty_m$, so ist
$$T^{k-1}f = T^ky_k + T^{k-1-m}(T^my_m) - T^{k-m}(T^my_m) = 0,$$
also $f \in \mathcal{N}_{k-1}$. Also gilt für $k \neq m : \|Vy_k - Vy_m\| \geq \frac{1}{2}$. Das ist aber ein Widerspruch zur Kompaktheit von V, denn aus der Folge $(Vy_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kann dann keine konvergente Teilfolge ausgewählt werden.

Die Sätze 3.1.6, 3.1.7 heißen die Fredholmsche Alternative im Banachraum.

3.2 Der Rieszsche Zerlegungssatz, die Eigenwerte eines kompakten Operators, die Neumannsche Reihe

3.2.1 Hilfssatz

Sei M ein endlichdimensionaler Teilraum eines Banachraumes $\mathcal{B}$. Sei $f \in \mathcal{B}$. Dann gibt es ein $f^* \in M$, so daß für alle $g \in M$ gilt:

$$\| f - f^* \| \leq \| f - g \|$$

Beweis:
Sei $d := \inf\limits_{g \in M} \| f - g \|$. Dann gibt es eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ mit $\lim\limits_{m \to \infty} \| f - g_m \| = d$. Es ist $\| g_m \| \leq \| f - g_m \| + \| f \|$, die Folge $(\| f - g_m \|)_{m \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, weil sie konvergiert, also ist auch die Folge $(\| g_m \|)_{m \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Weil M endlichdimensional ist, gilt Bolzano-Weierstraß. Deshalb enthält die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(g_{m_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Setze $f^* := \lim\limits_{j \to \infty} g_{m_j}$, dann ist

$$d = \lim_{j \to \infty} \| f - g_{m_j} \| = \| f - f^* \| \quad \text{und} \quad f^* \in M,$$

denn M ist nach Hilfssatz 3.1.3 abgeschlossen.

3.2.2 Hilfssatz

Seien M,N zwei abgeschlossene Teilräume eines Banachraumes $\mathcal{B}$. Sei N endlichdimensional und es gelte $N \cap M = \{0\}$. Dann gibt es eine Konstante $c = c(M, N) > 0$, so daß für alle $f \in M, g \in N$ gilt:

$$\| f \| + \| g \| \leq c \cdot \| f + g \| .$$

Beweis:
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset N$ derart, daß

$$\| f_n \| + \| g_n \| > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\| f_n + g_n \|}{\| f_n \| + \| g_n \|} \leq \frac{1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$f_n^* = \frac{f_n}{\| f_n \| + \| g_n \|}, \qquad g_n^* = \frac{g_n}{\| f_n \| + \| g_n \|}.$$

Dann ist $f_n^* \in M, g_n^* \in N$ und $\| f_n^* + g_n^* \| \leq \frac{1}{n}$, $\| f_n^* \| + \| g_n^* \| = 1$. Es ist also $\| g_n^* \| \leq 1$, d.h. $(g_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge in dem endlichdimensionalen Vektorraum N über $\mathbb{C}$. Hier gilt Bolzano-Weierstraß, also enthält die Folge eine konvergente Teilfolge $(g_{n_j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$. Sei $g^* := \lim\limits_{j \to \infty} g_{n_j}^*$. Weil N abgeschlossen ist, ist $g^* \in N$. Aus $\| f_n^* + g_n^* \| \leq \frac{1}{n}$ folgt: $\lim\limits_{j \to \infty} f_{n_j}^* = -g^*$. Da M abgeschlossen ist, hat man jetzt auch $-g^* \in M$, also $g^* \in M$. Es ist aber $\| f_n^* \| + \| g_n^* \| = 1$, also

$$1 = \lim_{j \to \infty} \| f_{n_j}^* \| + \| g_{n_j}^* \| = 2 \, \| g^* \|, \quad \text{d.h.} \quad \| g^* \| = \frac{1}{2}.$$

$$g^* \in M \cap N = \{0\}, \; \| g^* \| = \frac{1}{2}$$

liefert den Widerspruch.

Nun kommt eine Verschärfung von Hilfssatz 3.1.2:

3.2.3 Hilfssatz

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $V \in L(\mathcal{B})$ kompakt, $T = I - V$. Dann ist $\mathcal{R}(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}$.

Beweis:
Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(T)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, sei $g_n = Tf_n$. Zu zeigen: $g \in \mathcal{R}(T)$. Nach Hilfssatz 3.1.4 ist $\mathcal{N}(T)$ endlichdimensional. Nach Hilfssatz 3.2.1 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $h_n \in \mathcal{N}(T)$, so daß für alle $h \in \mathcal{N}(T)$ gilt:

$$\|f_n - h\| \geq \|f_n - h_n\| \ .$$

Setze $f'_n := f_n - h_n$. Dann ist für alle $h \in \mathcal{N}(T) : \|f_n - h\| \geq \|f'_n\|$ und es ist $Tf'_n = g_n$. Nun müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1) $(\|f'_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, etwa $\|f'_n\| \leq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da V kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(f'_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\varphi \in \mathcal{B}$, so daß $\lim\limits_{j\to\infty} Vf'_{n_j} = \varphi$.
Wegen $g = \lim\limits_{j\to\infty} g_{n_j} = \lim\limits_{j\to\infty}(f'_{n_j} - Vf'_{n_j})$ gibt es ein $f' \in \mathcal{B}$ mit $\lim\limits_{j\to\infty} f'_{n_j} = f'$. Damit ist

$$Tf' = \lim_{j\to\infty} Tf'_{n_j} = g,$$

also $g \in \mathcal{R}(T)$.

2) $(\|f'_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt.
Dann gibt es eine Teilfolge $(f'_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, daß $\|f'_{n_j}\| > 0$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \|f'_{n_j}\| = \infty$. Es ist $g = \lim\limits_{j\to\infty} g_{n_j} = \lim\limits_{j\to\infty} Tf'_{n_j}$, also gilt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{g_{n_j}}{\|f'_{n_j}\|} = \lim_{j\to\infty} T\frac{f'_{n_j}}{\|f'_{n_j}\|} = 0.$$

Setze $\varphi_j := \dfrac{f'_{n_j}}{\|f'_{n_j}\|}$. Dann ist $\|\varphi_j\| = 1, \lim\limits_{j\to\infty} T\varphi_j = 0$. Da V kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $\psi \in \mathcal{B}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} V\varphi_{j_k} = \psi$. Wegen $0 = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{j_k} - V\varphi_{j_k}$ hat man auch $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{j_k} = \psi$, also ist $T\psi = 0$, d.h. $\psi \in \mathcal{N}(T)$. Andererseits ist aber für alle $h \in \mathcal{N}(T)$:

$$\|f'_{n_j} - h\| = \|f_{n_j} - h_{n_j} - h\| \geq \|f_{n_j} - h_{n_j}\| = \|f'_{n_j}\|$$

nach Wahl von h_{n_j}, da $h_{n_j} - h \in \mathcal{N}(T)$. Also ist auch $\left\|\varphi_j - \dfrac{h}{\|f'_{n_j}\|}\right\| \geq 1$, d.h. für alle $\widetilde{h} \in \mathcal{N}(T)$ gilt: $\|\varphi_j - \widetilde{h}\| \geq 1$. Deshalb gilt auch für alle $\widetilde{h} \in \mathcal{N}(T) : \|\psi - \widetilde{h}\| \geq 1$, also ist $\psi \notin \mathcal{N}(T)$, Widerspruch.

Bezeichnungen: Sei wie immer $T = I - V$. Setze für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &= T^k(\mathcal{B}) = \mathcal{R}(T^k), \\ \mathcal{N}_k &= \{x \in \mathcal{B} \mid T^k x = 0\} = \mathcal{N}(T^k), \\ \mathcal{M}_0 &= \mathcal{B},\ \mathcal{N}_0 = \{0\}. \end{aligned}$$

Es ist $T^k = (I - V)^k = I + \sum\limits_{m=1}^{k} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} (-V)^m$, die Summe bildet einen kompakten Operator, also ist $\mathcal{M}_k$ nach Hilfssatz 3.2.3 abgeschlossen. $\mathcal{N}_k$ ist nach Hilfssatz 3.1.4 endlichdimensional, also nach 3.1.3 ebenfalls abgeschlossen.

3.2.4 Hilfssatz

Es gibt $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derart, daß $\mathcal{B} = \mathcal{M}_0 \underset{\neq}{\supset} ... \underset{\neq}{\supset} \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_{m+1} = ...,\ \{0\} = \mathcal{N}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_1 \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1} ...$, d.h. die absteigende Folge $(\mathcal{M}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und die aufsteigende Folge $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ werden stationär.

Beweis:
Die Behauptung für die $\mathcal{M}_k$ wurde im Beweis von Satz 3.1.6 bewiesen, ohne die Voraussetzung „$Tx = 0$ hat nur $x = 0$ als Lösung“ zu verwenden, also ist der Fall der Räume $\mathcal{M}_k$ damit erledigt.
Im Beweis von Satz 3.1.7 wurde $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{N}_{k+1}$ gezeigt und der Fall $\mathcal{N}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_1 \underset{\neq}{\subset} ... \underset{\neq}{\subset} ...$ ausgeschlossen, ohne die Voraussetzung „$Tx = 0$ hat eine Lösung $x \neq 0$“ dabei zu verwenden. Sei nun für ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$.
Annahme: Es gibt unendlich viele $m_1, m_2, ... \in \mathbb{N}$ derart, daß $N_{m_j} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_{m_{j+1}}$.
Wie im Beweis von Satz 3.1.7 findet man eine Folge $(y_{m_j+1})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $y_{m_j+1} \in \mathcal{N}_{m_j+1}$, $\| y_{m_j+1} \| = 1$ und $\| y_{m_j+1} - f \| \geq \frac{1}{2}$ für $f \in \mathcal{N}_{m_j}$. Für $k > p$ gilt

$$Vy_{m_k+1} - Vy_{m_p+1} = y_{m_k+1} - (Ty_{m_k+1} + y_{m_p+1} - Ty_{m_p+1}).$$

Wegen

$$T^{m_k}(Ty_{m_k+1} + y_{m_p+1} - Ty_{m_p+1}) = T^{m_k+1}y_{m_k+1} + T^{m_k-m_p-1}T^{m_p+1}y_{m_p+1} + T^{m_k-m_p}T^{m_p+1}y_{m_p+1} = 0$$

ist $Ty_{m_k+1} + y_{m_p+1} - Ty_{m_p+1} \in \mathcal{N}_{m_k}$, also ist

$$\| Vy_{m_k+1} - Vy_{m_p+1} \| \geq \frac{1}{2}$$

für $k \neq p, k, p \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(Vy_{m_j+1})_{j \in \mathbb{N}}$ kann keine konvergente Teilfolge enthalten. Das ist ein Widerspruch zur Kompaktheit von V, also wird die Folge $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von einem Index ab stationär.

3.2.5 Hilfssatz

Sei m die in Hilfssatz 3.2.4 eingeführte Zahl. $T|_{\mathcal{M}_m} : \mathcal{M}_m \longrightarrow \mathcal{M}_m$ ist aus $L(\mathcal{M}_m)$. $T|_{\mathcal{M}_m}$ ist injektiv und surjektiv.

Beweis:
$\mathcal{M}_m$ ist abgeschlossen und $T(\mathcal{M}_m) = \mathcal{M}_m$. Also ist $T|_{\mathcal{M}_m}$ aus $L(\mathcal{M}_m)$ und surjektiv. Sei $(T|_{\mathcal{M}_m})f = 0$ für ein $f \in \mathcal{M}_m$. Wäre $f \neq 0$, so wäre nach Satz 3.1.7 $\mathcal{R}(T|_{\mathcal{M}_m}) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{M}_m$, ein Widerspruch. Also ist $T|_{\mathcal{M}_m}$ injektiv.

3.2.6 Hilfssatz

Seien m,n wie in Hilfssatz 3.2.4. Dann ist $n \leq m$.

Beweis:
Sei $f \in \mathcal{N}_{m+1}$, d.h. $T^{m+1}f = 0$. Sei $\varphi = T^m f$, dann ist $\varphi \in \mathcal{M}_m$ und $T\varphi = 0$. Nach Hilfssatz 3.2.5 ist $\varphi = 0$, d.h. $T^m f = 0$. Demnach ist $f \in \mathcal{N}_m$, also ist $\mathcal{N}_{m+1} \subset \mathcal{N}_m$. $\mathcal{N}_m \subset \mathcal{N}_{m+1}$ wurde schon in Hilfssatz 3.2.4 gezeigt, d.h. es ist $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m+1}$.

3.2.7 Hilfssatz

Sei m wie im Hilfssatz 3.2.4, sei $m \geq 1$. Dann ist $\mathcal{N}_{m-1} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}_m$.

Beweis:
Es ist $\mathcal{M}_{m-1} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{M}_m$. Sei $f \in \mathcal{M}_{m-1} \backslash \mathcal{M}_m, g = Tf$. Dann ist $g \in \mathcal{M}_m$; nach Hilfssatz 3.2.5 gibt es ein $h \in \mathcal{M}_m$ mit $g = Tf = Th$, d.h. $T(f - h) = 0$. Setze $\varphi := f - h$. Wegen $f \notin \mathcal{M}_m$ ist $\varphi \neq 0$. Weil

$\varphi \in \mathcal{M}_{m-1}$, gibt es ein $\psi \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$ mit $\varphi = T^{m-1}\psi$. Insbesondere ist $T^m\psi = T\varphi = 0$, also ist $\psi \in \mathcal{N}_m$, aber $\psi \notin \mathcal{N}_{m-1}$, da $\psi \neq 0$ war.

Die Fredholmschen Sätze 3.1.6, 3.1.7 sagen aus: $m = 0 \iff n = 0$. Die letzten beiden Hilfssätze ergeben, daß in allen Fällen $n = m$ ist. Setze $\mathcal{M} := \mathcal{M}_m, \mathcal{N} := \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_m$. Es gilt

$$\mathcal{M} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k \text{ und } \mathcal{N} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k.$$

$\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ sind invariante Teilräume bezüglich T, d.h. $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M},\ T(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$. Nach den Hilfssätzen 3.2.5, 3.2.6 hat man sogar

$$T(\mathcal{M}) = \mathcal{M},\ \ T(\mathcal{N}) = T(\mathcal{N}_m) = \mathcal{N}_{m-1}.$$

3.2.8 Satz (Rieszscher[1] Zerlegungssatz)

Es ist $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Jedes $f \in \mathcal{B}$ läßt sich auf genau eine Weise in der Form $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{N},\ f_2 \in \mathcal{M}$ darstellen, d.h. es ist $\mathcal{B} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$.

Beweis:
Sei $f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Dann gibt es ein φ mit $f = T^m\varphi$ und es gilt $T^m f = 0$. Also ist $T^{2m}\varphi = 0$, d.h. $\varphi \in \mathcal{N}_{2m} = \mathcal{N}_m = \mathcal{N}$. Demnach ist schon $f = T^m\varphi = 0$. Wenn es die Zerlegung gibt, ist sie deshalb eindeutig.
Sei $f \in \mathcal{B}$. Dann ist $T^m f \in \mathcal{M}$. Wegen $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2m}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{B}$ mit $T^m f = T^{2m}\varphi$, also hat man $T^m(f - T^m\varphi) = 0$, d.h. $f - T^m\varphi \in \mathcal{N}$. Setze $f_1 := f - T^m\varphi,\ \ f_2 := T^m\varphi$, dann hat man die gewünschte Zerlegung.

3.2.9 Bemerkung

Die Zahl n mit $\mathcal{N}_{n-1} \subsetneqq \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_{n+1}$ heißt Rieszsche Zahl. Für $n = 1$ gilt $\mathcal{B} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T)$.
Sei nun $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum, V hermitesch. Sei $(I - V)^2 x = 0$. Dann ist

$$0 = ((I-V)^2 x, x) = ((I-V)x, (I-V)x) = \| (I-V)x \|^2 \Longrightarrow (I-V)x = 0 \Longrightarrow \mathcal{N}((I-V)^2) = \mathcal{N}(I-V),$$

d.h. die Rieszsche Zahl ist 1. Im Fall $\mathcal{B} = \mathcal{H}$ kann die Rieszsche Zahl als eine Art Maß für die Abweichung von der Selbstadjungiertheit betrachtet werden.

Während im Fall eines kompakten hermiteschen Operators in 2.7 ein vollständiger Überblick über die Gesamtheit der Eigenwerte gewonnen wurde, ist dies bei einem kompakten Operator im Banachraum schwierig. Einige Aussagen sind jedoch möglich:

3.2.10 Satz

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum, $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ kompakt. Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ die in 3.2.7 eingeführten Teilräume von $\mathcal{B}$. Dann gibt es zwei in $\mathcal{B}$ kompakte Operatoren S und R mit $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(R) = \mathcal{B}$, so daß gilt:
1) $Sf = Vf$ für $f \in \mathcal{N}$
2) $Sf = 0$ für $f \in \mathcal{M}$
3) $Rf = 0$ für $f \in \mathcal{N}$
4) $Rf = Vf$ für $f \in \mathcal{M}$
Es ist $S(\mathcal{B}) \subset \mathcal{N},\ \ R(\mathcal{B}) \subset \mathcal{M}$. Außerdem ist $V = S + R$ und es gilt $SR = RS = 0$. Die Operatoren S, R sind durch 1) bis 4) eindeutig bestimmt.

[1] Friedrich Riesz (1880-1956)

Beweis:

1) Existenz von R und S:

   Sei für $f \in \mathcal{B}$, $f = f_1 + f_2$ die Zerlegung nach dem Rieszschen Zerlegungssatz 3.2.8. Setze $P : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $f \longmapsto f_1$ und $Q : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $f \longmapsto f_2$, dann sind P, Q lineare Operatoren. Wendet man Hilfssatz 3.2.2 auf die Teilräume $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ an, so erhält man:

   Es gibt eine positive Konstante $c(\mathcal{M},\mathcal{N})$, so daß für alle $f \in \mathcal{B}$ gilt:

   $$\|f\| = \|f_1 + f_2\| \geq c(\mathcal{M},\mathcal{N}) \cdot (\|f_1\| + \|f_2\|).$$

   Also ist

   $$\|Pf\| \leq \frac{1}{c(\mathcal{M},\mathcal{N})} \cdot \|f\|, \quad \|Qf\| \leq \frac{1}{c(\mathcal{M},\mathcal{N})} \cdot \|f\|,$$

   d.h. es ist $P,\ Q \in L(\mathcal{B})$. Setze jetzt $S = VP$; $R = VQ$. Nach Hilfssatz 2.5.5 sind S und R kompakt. Wegen $I = P + Q$ ist $V = S + R$.

2) Eindeutigkeit

   Für $f \in \mathcal{B}$ ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathcal{N}$, $f_2 \in \mathcal{M}$ eine eindeutige Zerlegung. Damit ist

   $$Sf = Sf_1 = Vf_1 \ \text{ und } \ Rf = Vf_2.$$

   Also sind Sf, Rf vollständig bestimmt.

3) $SR = RS = 0$:

   Es ist $Vx = Tx - x$, d.h. man hat $V(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$, $V(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$. Also ist $Sf = Vf_1 \in \mathcal{N}$, $Rf = Vf_2 \in \mathcal{M}$. Für $f \in \mathcal{M}$ ist aber $Sf = Sf_2 = VPf_2 = 0$, genauso für $f \in \mathcal{N}$: $Rf = Rf_1 = VQf_1 = 0$. Wegen $VP(\mathcal{B}) \subset \mathcal{N}$ folgt $RS = 0$, wegen $VQ(\mathcal{B}) \subset \mathcal{M}$ ist $SR = 0$.

3.2.11 Satz

Seien R und S die in Satz 3.2.10 eingeführten Operatoren. Dann hat $I - R$ einen in $\mathcal{B}$ erklärten beschränkten inversen Operator und für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{N}\Big((I-V)^k\Big) = \mathcal{N}\Big((I-S)^k\Big),$$

$$\mathcal{R}\Big((I-V)^k\Big) = \mathcal{R}\Big((I-S)^k\Big).$$

Beweis:
Sei $f \in \mathcal{B}$ mit $(I - R)f = 0$. Dann ist $f = Rf = Vf$, wegen $R(\mathcal{B}) \subset \mathcal{M}$ ist $f \in \mathcal{M}$. Aus $f = Vf$ folgt $f - Vf = 0$, d.h. $Tf = 0$. Wegen $Tf = 0, f \in \mathcal{M}$, ist nach Hilfssatz 3.2.5 auch $f = 0$, da R kompakt ist erhält man daraus mit dem 1. Fredholmschen Satz 3.1.6 : $I - R$ ist beschränkt invertierbar.
Wegen $RS = SR = 0$ ist $(I - R)(I - S) = I - V = (I - S)(I - R)$. Deshalb gilt für $k \in \mathbb{N}$:

$$(I-V)^k = (I-R)^k(I-S)^k.$$

Mit $(I - R)$ hat auch $(I - R)^k$ eine beschränkte Inverse, nämlich $[(I - R)^{-1}]^k$. Für $x \in \mathcal{B}$ ist also $(I - V)^k x = 0$ genau dann, wenn $(I - S)^k x = 0$. Demnach gilt

$$\mathcal{N}\Big((I-V)^k\Big) = \mathcal{N}\Big((I-S)^k\Big).$$

Sei nun $g \in \mathcal{R}\Big((I - V)^k\Big)$, d.h. es gibt ein f mit $g = (I - V)^k f = (I - S)^k \Big((I - R)^k f\Big)$. Also ist $g \in \mathcal{R}\Big((I - S)^k\Big)$.

Sei umgekehrt $g \in \mathcal{R}\Big((I-S)^k\Big)$, d.h. es gibt ein f mit $g = (I-S)^k f$. Dann ist

$$g = (I-S)^k (I-R)^k \Big((I-R)^{-1}\Big)^k f = (I-V)^k \left[\Big((I-R)^{-1}\Big)^k f\right],$$

also $g \in \mathcal{R}\Big((I-V)^k\Big)$. Man hat also

$$\mathcal{R}\Big((I-S)^k\Big) = \mathcal{R}\Big((I-V)^k\Big).$$

Bezeichnung: Für einen kompakten Operator V und $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $T_\lambda(V) = I - \lambda V$.

3.2.12 Satz

Sei $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ kompakt. Sei S der in Satz 3.2.10 eingeführte kompakte Operator in $\mathcal{B}$. Dann hat $T_\lambda(S)$ für $\lambda \neq 1$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse.

Beweis:
$T_0(S)$ hat eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse. Sei also $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$. Sei $T_\lambda(S)f = 0$ für ein $f \in \mathcal{B}$. Dann ist $0 = f - \lambda Sf$, d.h. $Sf = \frac{1}{\lambda}f$. Damit gilt

$$(I-S)f = f - \frac{1}{\lambda}f = \frac{\lambda-1}{\lambda}f.$$

Nach Satz 3.2.11 hat man für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{N}\Big((I-S)^k\Big) = \mathcal{N}\Big((I-V)^k\Big).$$

Sei nun m die Rieszsche Zahl nach 3.2.9. Ist $m = 0$, so ist $\mathcal{N} = \{0\}$, also $S = 0$ und deshalb nichts zu zeigen. Für $m \geq 1$ ist also $\mathcal{N}\Big((I-S)^m\Big) = \mathcal{N}\Big((I-V)^m\Big)$. Deshalb gilt für $\widetilde{f} \in \mathcal{N}$:

$$0 = (I-V)^m \widetilde{f} = (I-S)^m \widetilde{f}.$$

Betrachte das oben eingeführte f: Ist $f = f_1 + f_2$ eine Zerlegung nach Satz 3.2.8 mit $f_1 \in \mathcal{M}$, $f_2 \in \mathcal{N}$, so gilt nach 3.2.10: $Sf = Sf_2 \in \mathcal{N}$. Es ist $0 = f - \lambda Sf = f_1 + f_2 - \lambda Sf_2$. 0 hat die nach 3.2.8 eindeutige Zerlegung $0 = 0 + 0$, $f_2 - \lambda Sf_2 \in \mathcal{N}$, also ist $f_1 = 0$ und man hat die Gleichung $f_2 - \lambda Sf_2 = 0$ mit $f_2 \in \mathcal{N}$. Wegen $f_2 \in \mathcal{N}$ ist aber

$$0 = (I-S)^m f_2 = \left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^m f_2,$$

also ist $f_2 = 0$, d.h. $f = 0$. Nach dem ersten Fredholmschen Satz 3.1.6 folgt nun: $T_\lambda(S)^{-1}$ ist in $\mathcal{B}$ erklärt und beschränkt.

3.2.13 Hilfssatz

Sei $A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beschränkter Operator mit $\|A\| < 1$. Dann wird durch die Neumannsche[1] Reihe $R : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$, $R = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ein beschränkter Operator gegeben. $I - A$ hat eine beschränkte Inverse und es gilt:

$$R = (I-A)^{-1}.$$

[1] John von Neumann (1903-1957)

Beweis:

1) R ist wohldefiniert:

   Setze $R_k := \sum\limits_{n=0}^{k} A^n$. Für $k, m \in \mathbb{N}, m > k$ gilt:

$$\| R_m - R_k \| = \left\| \sum_{n=k}^{m} A^n \right\| \leq \sum_{n=k}^{m} \| A^n \| = \sum_{n=k}^{m} \| A \|^n .$$

   Wegen $\| A \| < 1$ ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| A \|^n$ konvergent (geometrische Reihe). Also ist die Folge $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Raum $L(\mathcal{B},\mathcal{B})$. Dieser Raum ist nach Satz B.2.11 vollständig, d.h. die Cauchy-Folge konvergiert. Also ist R wohldefiniert.

2) $R = (I - A)^{-1}$:

   Der Beweis verläuft wie bei der geometrischen Reihe:

   Es ist

$$R_k(I - A) = \sum_{n=0}^{k} A^n - \sum_{n=0}^{k} A^{n+1} = I - A^{k+1}$$

   und

$$(I - A)R_k = (I - A) \sum_{n=0}^{k} A^n = \sum_{n=0}^{k} A^n - \sum_{n=0}^{k} A^{n+1} = I - A^{k+1}.$$

   Wegen $\| A \| < 1$ ist $\lim\limits_{k\to\infty} \| A^k \| = \lim\limits_{k\to\infty} \| A \|^k = 0$, also ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ in $L(\mathcal{B},\mathcal{B})$. Deshalb ist $R(I - A) = \lim\limits_{k\to\infty} R_k(I - A) = I$ und $(I - A)R = \lim\limits_{k\to\infty} (I - A)R_k = I$. Also ist $I - A$ beschränkt invertierbar und es gilt $R = (I - A)^{-1}$.

3.2.14 Hilfssatz

Sei $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ kompakt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $T_\lambda(V) = I - \lambda V$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $0 < | \lambda - 1 | < \varepsilon$ eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse hat.

Beweis:
Es werden zwei verschiedene Beweise gegeben:

1) Es ist $(I - \lambda V) = (I - \lambda R)(I - \lambda S)$. Nach Satz 3.2.11 hat $I - R$ eine beschränkte Inverse. Es gibt also ein $\widetilde{b} > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\| (I - R)^{-1} f \| \leq \widetilde{b} \cdot \| f \| .$$

   Folglich gilt für $b := \dfrac{1}{\widetilde{b}}$:

$$\| (I - R) f \| \geq b \cdot \| f \| .$$

   Wählt man nun ein ε mit $0 < \varepsilon < \dfrac{b}{2 \cdot \| R \|}$, so gilt für alle λ mit $| \lambda - 1 | < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \| (I - \lambda R) f \| &= \| (I - R) f + (1 - \lambda) R f \| \geq \| (I - R) f \| - |1 - \lambda| \cdot \| R f \| \geq \\ &\geq b \cdot \| f \| - \varepsilon \cdot \| R \| \cdot \| f \| \geq \frac{b}{2} \cdot \| f \| . \end{aligned}$$

   Also ist für $f \neq 0$ auch $(I - \lambda R) f \neq 0$, d.h. die Gleichung $(I - \lambda R) = 0$ hat nur die Lösung $f = 0$. R ist kompakt, also auch λR. Nach dem 1. Fredholmschen Satz 3.1.6 ist dann $(I - \lambda R)$ in $\mathcal{B}$ beschränkt invertierbar.

   Nach Satz 3.2.12 ist auch $I - \lambda S$ beschränkt invertierbar für $\lambda \neq 1$, also existiert

$$(I - \lambda V)^{-1} = (I - \lambda S)^{-1} \cdot (I - \lambda R)^{-1}.$$

2) Eine andere Möglichkeit, die Invertierbarkeit von $(I-\lambda R)$ zu zeigen, liefert Hilfssatz 3.2.13: $I-R$ hat nach Satz 3.2.11 eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse $(I-R)^{-1}$. Setze für
$|\widetilde{\lambda}-1| \cdot \|(I-R)^{-1}\| < 1$:

$$R(\widetilde{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot (\widetilde{\lambda}-1)^n \cdot \left[(I-R)^{-1}\right]^{n+1},$$

Nach Hilfssatz 3.2.13 ist $R(\widetilde{\lambda})$ wohldefiniert und es gilt

$$\begin{aligned} R(\widetilde{\lambda}) &= (I-R)^{-1} \cdot \left(I + (\widetilde{\lambda}-1)(I-R)^{-1}\right)^{-1} = \left[\left(I-(\widetilde{\lambda}-1)(I-R)^{-1}\right)(I-R)\right]^{-1} = \\ &= \left[I - R + (\widetilde{\lambda}-1)I\right]^{-1} = (\widetilde{\lambda}I - R)^{-1} = \frac{1}{\widetilde{\lambda}}\left(I - \frac{1}{\widetilde{\lambda}}R\right)^{-1} \end{aligned}$$

Setzt man jetzt $\lambda := \frac{1}{\widetilde{\lambda}}$, so hat also $I - \lambda R$ eine Inverse für $|\frac{1}{\lambda} - 1| < \frac{1}{\|(I-R)^{-1}\|}$. Sei zur Abkürzung $a := \|(I-R)^{-1}\|$. Für $|\widetilde{\lambda}-1|\ \frac{1}{1+a} < \frac{1}{a}$ ist $0 < \widetilde{\lambda} < 2$, also gilt

$$|\widetilde{\lambda}-1| < \frac{|\widetilde{\lambda}|}{2+2a} \iff \left|\frac{1}{\widetilde{\lambda}} - 1\right| < \frac{1}{2+2a} \iff |\lambda - 1| < \frac{1}{2+2a}.$$

Insgesamt folgt: $I - \lambda R$ hat eine in $\mathcal{B}$ erklärte beschränkte Inverse für $|\lambda - 1| < \frac{1}{2+2\|(I-R)^{-1}\|}$. Der Rest folgt wie in 1).

3.2.15 Satz

Sei $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ kompakt. Zu jedem Eigenwert $\widehat{\lambda} \neq 0$ gibt es eine Kreisscheibe $\{z \mid |z - \widehat{\lambda}| < \delta\}$, $\delta > 0$, derart, daß in dieser Kreisscheibe kein weiterer Eigenwert von V liegt. Insbesondere haben die Eigenwerte von V keinen Häufungspunkt $\neq 0$.

Beweis: Sei $\widehat{\lambda}$ ein Eigenwert von $V, \widehat{\lambda} \neq 0$. Sei $\widehat{V} := \frac{1}{\widehat{\lambda}}V$. Dann ist $\widehat{V}$ kompakt. Nach Hilfssatz 3.2.14 hat $T_\lambda(\widehat{V})$ in einer punktierten Kreisscheibe $\{\lambda \mid 0 < |\lambda - 1| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, eine beschränkte Inverse $T_\lambda(\widehat{V})^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$. Also hat $\widehat{V}$ in $0 < |\lambda - 1| < \varepsilon$ keinen Eigenwert, d.h. V hat keinen Eigenwert in $0 < |z - \widehat{\lambda}| < \varepsilon\, |\widehat{\lambda}|$.

3.2.16 Definition (Resolventenmenge, Spektrum)

Sei $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein beschränkter Operator. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ schreibe $\lambda - V := \lambda \cdot I - V$.
$R(V) := \{\widehat{\lambda} \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \mid \widehat{\lambda} - V$ hat beschränkte, in $\mathcal{B}$ erklärte Inverse$\}$,
$S(V) := \mathbb{C}\backslash R(V)$.
R(V) heißt Resolventenmenge von V, S(V) Spektrum von V.

3.2.17 Bemerkungen

1) Ist $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein kompakter Operator, so gilt nach Satz 3.2.15: Ist $\widehat{\lambda} \in S(V), \widehat{\lambda} \neq 0$, so ist $\widehat{\lambda} - V$ in $0 < |z - \widehat{\lambda}| < \varepsilon$ beschränkt invertierbar, d.h. es ist $\{0 < |z - \widehat{\lambda}| < \varepsilon\} \subset R(V)$. $\widehat{\lambda}$ ist also ein isolierter Punkt von S(V), 0 ist der einzig mögliche Häufungspunkt von S(V).

2) Sei $V : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ beschränkt, $\widehat{\lambda} \in S(V)$. Dann gilt:

   a) Ist $\dim \mathcal{N}(\widehat{\lambda} - V) \geq 1$, so ist $\widehat{\lambda}$ Eigenwert

   b) Ist $\dim \mathcal{N}(\widehat{\lambda} - V) = 0$, so existiert $(\widehat{\lambda} - V)^{-1}$ zwar als lineare Abbildung, ist aber kein überall erklärter beschränkter linearer Operator.

Ist V zusätzlich kompakt, so kann b) nicht eintreten, denn nach dem 1. Fredholmschen Satz 3.1.6 folgt aus $\mathcal{N}(\widehat{\lambda} - V) = \mathcal{N}\left(I - \frac{1}{\widehat{\lambda}}V\right) = 0 : \widehat{\lambda} - V$ ist beschränkt invertierbar. Für kompakte Operatoren gilt also: $\widehat{\lambda} \in S(V), \widehat{\lambda} \neq 0 \Longrightarrow \widehat{\lambda}$ Eigenwert.

3.2.18 Beispiel

Betrachte folgendes Sturm-Liouville-Problem: $p \equiv 1, q \equiv 0, a = 0, b = \pi, c_2 = d_2 = 0$. Dies führt auf $\mathcal{D}(L) = \{u \mid u \in C^2([a,b], \mathbb{C}), u(0) = u(\pi) = 0\}, Lu = -u''$

1) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert:

   $Lu = 0$, d.h. $-u'' = 0$ hat als Lösung $u(x) = Ax + B$, mit Konstanten A,B. $u(0) = 0 \Longrightarrow B = 0; u(\pi) = A\pi = 0 \Longrightarrow A = 0$. Also ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert.

2) Bestimmung der Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$:

   Ist λ Eigenwert, so gilt für jede Eigenfunktion: $u'' + \lambda u = 0$. Für diese Differentialgleichung bilden bekanntlich die Funktionen $\cos\sqrt{\lambda}x$ und $\sin\sqrt{\lambda}x$ ein Fundamentalsystem, d.h. jede Eigenfunktion läßt sich in der Form $u(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$ darstellen. Aus $u(0) = 0$ erhält man $A = 0$, also $u(x) = B\sin\sqrt{\lambda}x$. Wegen $u \neq 0$ ist $B \neq 0$, also ergibt die Bedingung $u(\pi) = 0 : \sqrt{\lambda} = k \in \mathbb{Z}$. Also sind alle Zahlen $\lambda = k^2$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ Eigenwerte, die zugehörigen Eigenfunktionen sind $u_k(x) = \sin kx$.

3) Das sind alle Eigenwerte von L:

   Nach Hilfssatz 2.4.11 sind die Eigenwerte von L reell. Sei nun $\lambda < 0$. Sei u eine Lösung von $u'' + \lambda u = 0$. Die Gleichung $x^2 + \lambda = 0$ hat die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ $(-\lambda > 0!)$. Also bilden die Funktionen $e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ ein Lösungsfundamentalsystem, d.h. es gibt Konstanten A und B, so daß
   $$u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$
   Aus $u(0) = 0$ erhält man $0 = A + B$, d.h. $B = -A$. Dann ist
   $$0 = u(\pi) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\pi} - Ae^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = A \cdot (e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}).$$
   Da die Exponentialfunktion streng monoton wächst und $\sqrt{-\lambda}\pi > -\sqrt{-\lambda}\pi$, gilt für alle $\lambda < 0$: $e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} > 0$. Also folgt $A = B = 0$, d.h. $u = 0$, also ist u keine Eigenfunktion. L hat demnach keine weiteren Eigenwerte.

3.3 Der Satz von Hahn-Banach

Sei $\mathcal{N}$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Wir betrachten stetige lineare Abbildungen $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$, d.h. für $x \in \mathcal{N}$ gilt $|f(x)| \leq c \cdot \|x\|$. Wie bestimmt man stetige lineare Funktionale?
Ist $\mathcal{N}$ ein Hilbertraum, so bekommt man sie mit dem Satz von Riesz-Fréchet 1.3.4. Im allgemeinen Fall dagegen ist diese Frage nicht leicht zu beantworten. Hier nur ein Beispiel.

3.3.1 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $\mathcal{N} = \mathcal{B} = L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, $p \neq \infty$. Zu jedem stetigen linearen Funktional $L : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt es genau ein $g \in L^q(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, mit $L(f) = \int_\Omega g(x)f(x)\,dx$.

Für $p = 1$ heißt dies: $g \in L^\infty(\Omega)$.

Beweis:
Gezeigt wird nur p = 1:
Für $f \in L^1(\Omega)$ gelte $|L(f)| \leq c \cdot \int\limits_\Omega |f(x)|\ dx$.
Behauptung: Es gibt ein $g \in L^\infty(\Omega)$, so daß

$$L(f) = \int\limits_\Omega g(x)f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c.$$

Beweis:
Da Ω beschränkt ist, ist $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ nach Satz A.4.13. Durch Einschränkung erhält man also ein stetiges lineares Funktional L auf $L^2(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} |L(f)| &\leq c \cdot \int\limits_\Omega |f(x)|\ dx = c \cdot \int\limits_\Omega |\chi_\Omega(x) \cdot f(x)|\ dx \leq \\ &\overset{A.4.5}{\leq} c \cdot \|\chi_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)} = c \cdot |\Omega|^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}\ . \end{aligned}$$

Da $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist, kann man den Satz von Riesz-Fréchet 1.3.4 anwenden und erhält: Es gibt genau ein $g \in L^2(\Omega)$, so daß für alle $f \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$L(f) = \int\limits_\Omega gf\,dx.$$

Da $\|L\| \leq c$ in $L^1(\Omega)$, gilt für $f \in L^2(\Omega)$:

$$\left|\int\limits_\Omega gf\,dx\right| \leq c \cdot \int\limits_\Omega |f|\ dx.$$

O.E. sei c = 1, sonst betrachte das Funktional $\frac{1}{c} \cdot L$. Setze

$$f(x) := \begin{cases} \frac{|g(x)|}{g(x)}, & \text{falls } |g(x)| > 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $E := \{x \in \Omega \mid |g(x)| > 1\}$. E ist meßbar, also ist f meßbar. Da $|f(x)|$ auf Ω beschränkt ist, ist $f \in L^2(\Omega)$. Dieses f in obige Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\int\limits_E |g(x)|\ dx \leq \int\limits_E 1\,dx \Longleftrightarrow \int\limits_E (|g(x)| - 1)\,dx \leq 0,$$

für $x \in E$ ist aber $|g(x)| - 1 > 0$ nach Definition von E, folglich ist $\chi_E(x) \cdot (|g(x)| - 1) = 0$ fast überall in Ω. Also hat man $\chi_E(x) = 0$ fast überall, d.h. $|E| = 0$. Demnach folgt $|g(x)| \leq 1$ fast überall in Ω, d.h. $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$. Dann folgt: $L(f) = \int\limits_\Omega gf\,dx$ für $f \in L^1(\Omega)$.

3.3.2 Satz (Hahn[1]-Banach[2])

Sei $\mathcal{N}$ ein komplexer (reeller) normierter Vektorraum. $\mathcal{N}$ sei separabel. Sei $\mathcal{M}$ ein Teilraum von $\mathcal{N}$, $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ linear. Sei $\|f\|_\mathcal{M} = \sup\limits_{x \in \mathcal{M}, \|x\| = 1} |f(x)| < \infty$. Dann gibt es ein in $\mathcal{N}$ erklärtes lineares Funktional $F : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ mit $F(x) = f(x)$ für $x \in \mathcal{M}$ und $\|F\|_\mathcal{N} = \|f\|_\mathcal{M}$.

[1] Hans Hahn (1879-1934)
[2] Stefan Banach (1892-1945)

Beweis:

1) $\mathcal{N}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Fortsetzung auf Teilraum $\widetilde{\mathcal{M}}$:

O.E. sei $\|f\|_{\mathcal{M}} = 1$. Sei $y \in \mathcal{N}$ und $\widetilde{\mathcal{M}}$ der kleinste Teilraum, der $\mathcal{M}$ und y enthält. Ist $y \in \mathcal{M}$, so ist $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Sei $y \notin \mathcal{M}$. Für $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ gibt es dann genau eine Darstellung $z = x + ty$ mit $x \in \mathcal{N}, t \in \mathbb{R}$: Die Existenz der Darstellung ist klar, Eindeutigkeit:

Ist $z = x' + t'y = x'' + t''y$, so ist $x' - x'' + y(t' - t'') = 0$, wegen $y \notin \mathcal{M}$ folgt $t' = t''$ und daraus dann $x' = x''$. Nun soll f auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ fortgesetzt werden, so daß für alle $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$ gilt: $|F(z)| \leq \|z\|$. Für eine solche Fortsetzung gilt $F(z) = F(x + ty) = F(x) + tF(y) = f(x) + tF(y)$. Sind $z' = x' + t'y, z'' = x'' + t''y$, so gilt für $\alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}$:

$$\alpha' F(z') + \alpha'' F(z'') = f(\alpha' x' + \alpha'' x'') + (\alpha' t' + \alpha'' t'')F(y) = F(\alpha' z' + \alpha'' z'').$$

Durch Festlegung von $F(y)$ wird also mit $F(z) = f(x) + tF(y)$ eine lineare Fortsetzung von f auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ definiert. $F(y)$ muß so bestimmt werden, daß $|F(z)| \leq \|z\|$ für $z \in \widetilde{\mathcal{M}}$, also:

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad |f(x) + tF(y)| \leq \|x + ty\| \\
\iff \forall t \neq 0, \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad \left|f\left(\frac{x}{t}\right) + F(y)\right| \leq \left\|\frac{x}{t} + y\right\| \\
\iff \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad |f(x) + F(y)| \leq \|x + y\| \\
\iff \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad -\|x + y\| \leq f(x) + F(y) \leq \|x + y\| \\
\iff \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad -f(x) - \|x + y\| \leq F(y) \leq \|x + y\| - f(x) \\
\iff \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad -f(-x) - \|-x + y\| \leq F(y) \leq \|-x + y\| - f(-x) \\
\iff \forall x \in \mathcal{M} \quad &: \quad f(x) - \|y - x\| \leq F(y) \leq \|y - x\| + f(x).
\end{aligned}$$

Für $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ ist

$$f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\| = \|(x_1 - y) - (x_2 - y)\| \leq \|y - x_1\| + \|y - x_2\|,$$

also gilt

$$f(x_1) - \|y - x_1\| \leq f(x_2) + \|y - x_2\| .$$

Setzt man nun

$$c_1 = \sup_{x \in \mathcal{M}} (f(x) - \|y - x\|) \text{ und } c_2 = \inf_{x \in \mathcal{M}} (f(x) + \|y - x\|),$$

so sind nach der eben abgeleiteten Ungleichung c_1, c_2 endliche Größen mit $c_1 \leq c_2$. Wählt man nun $F(y)$ so, daß $c_1 \leq F(y) \leq c_2$, so ist durch $F(z) = f(x) + tF(y), z = x + ty \in \widetilde{\mathcal{M}}$, eine lineare Fortsetzung von f auf $\widetilde{\mathcal{M}}$ gegeben. Wegen

$$f(x) - \|y - x\| \leq F(y) \leq \|y - x\| + f(x) \iff |f(x) + tF(y)| \leq \|x + ty\|$$

gilt für $z \in \widetilde{\mathcal{M}} : |F(z)| \leq \|z\|$.

2) Fortsetzung auf ganz $\mathcal{N}, \mathcal{N}$ reeller Vektorraum:

$\mathcal{N}$ ist separabel. Sei $\{y_1, y_2, ...\}$ dicht in $\mathcal{N}$. Sei $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}, \mathcal{M}_k = < \mathcal{M}, y_1, y_2, ..., y_k >$. Dann gilt $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset ...$ Nach 1) wird f zu einem auf $\mathcal{M}_k$ erklärten linearen Funktional erweitert, wobei die Norm der Fortsetzung gleich der von f ist. Sei $\mathcal{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Durch die Konstruktion in 1) erhält man ein lineares Funktional $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\|F\|_{\mathcal{R}} \leq 1$, das f fortsetzt. $\mathcal{R}$ ist dicht in $\mathcal{N}$. Sei $z \in \mathcal{N}$, seien $z_k \in \mathcal{R}$ mit $\lim_{k \to \infty} z_k = z$. Dann ist $|F(z_n) - F(z_m)| \leq \|z_n - z_m\|$. Setze $F(z) = \lim_{k \to \infty} F(z_k)$. Wie man leicht sieht, ist diese Fortsetzung unabhängig von der Auswahl der Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. F ist linear und es gilt für $z \in \mathcal{N} : |F(z)| \leq \|z\|$.

3) $\mathcal{N}$ ist komplexer Vektorraum:

Dieser Fall soll auf den reellen Fall zurückgeführt werden. Sei $f(x) = f_1(x) + if_2(x), f_1(x) = \operatorname{Re} f(x), f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$. Wegen $| f(x) | \leq \| x \|$ ist auch $| f_k(x) | \leq \| x \|, \ k = 1, 2$. Seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathcal{M}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta f(y) &= f(\alpha x + \beta y) = \\ &= \alpha\Big(f_1(x) + if_2(x)\Big) + \beta\Big(f_1(y) + if_2(y)\Big) = \\ &= \Big(\alpha f_1(x) + \beta f_1(y)\Big) + i\Big(\alpha f_2(x) + \beta f_2(y)\Big) = \\ &= f_1(\alpha x + \beta y) + if_2(\alpha x + \beta y). \end{aligned}$$

Also ist für $k = 1, 2 : f_k(\alpha x + \beta y) = \alpha f_k(x) + \beta f_k(y)$, d.h. die f_k sind $\mathbb{R}$-linear. $\mathcal{N}$ ist als Punktmenge zugleich Vektorraum über $\mathbb{R}$, als solcher werde er mit $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ bezeichnet. Genauso ist $\mathcal{M}$ als Punktmenge ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, der mit $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ bezeichnet wird. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ist Teilraum von $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$. Wie oben gezeigt wurde, sind die f_k lineare Funktionale $f_k : \mathcal{M}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\| f_k \|_{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}} \leq 1$.

Da f ein komplexes Funktional ist, gilt für $x \in \mathcal{M}$: $f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$ einerseits und $if(x) = i(f_1(x) + if_2(x)) = if_1(x) - f_2(x)$ andererseits. Wegen der Linearität von f ist aber $f(ix) = if(x)$, also gilt für $x \in \mathcal{M} : f_2(x) = -f_1(ix)$, d.h. es ist $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$. Für jede komplexe Erweiterung F von f gilt natürlich ebenfalls $F(x) = F_1(x) - iF_1(x)$, wobei $F_1(x) = \operatorname{Re} F(x)$. Nach 2) kann f_1 von $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ auf $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung sei mit F_1 bezeichnet. Es gilt $\| F_1 \|_{\mathcal{N}_{\mathbb{R}}} \leq 1$. Nun sei F in $\mathcal{N}$ über $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$ definiert. Linearität von F über $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F_1(x + y) - iF_1(i(x + y)) = \\ &= F_1(x) + F_1(y) - i(F_1(ix) + F_1(iy)) = \\ &= F_1(x) - iF_1(ix) + F_1(y) - iF_1(iy) = \\ &= F(x) + F(y). \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$F(\alpha x) = F_1(\alpha x) - iF_1(\alpha ix) = \alpha F_1(x) - i\alpha F_1(ix) = \alpha F(x).$$

Außerdem:

$$F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = F_1(ix) + iF_1(x) = iF(x).$$

Also gilt für alle $\gamma \in \mathbb{C} : F(\gamma x) = \gamma F(x)$. Alles zusammen ergibt: Für $x, y \in \mathcal{N}, c, d \in \mathbb{C}$ ist

$$F(cx + dy) = cF(x) + dF(y),$$

d.h. F ist linear.

Bleibt zu zeigen: $\| F \|_{\mathcal{N}} \leq 1$. Sei $x \in \mathcal{N}$. Schreibe $F(x) = re^{it}$ mit $r \geq 0, 0 \leq t < 2\pi$. Dann ist

$$| F(x) | = r = e^{-it} F(x) = F(e^{-it} x) = F_1(e^{-it} x) - iF_1(ie^{-it} x) = F_1(e^{-it} x),$$

denn $| F(x) |$ ist reell. Also ist

$$| F(x) | = | F_1(e^{-it} x) | \leq \| e^{-it} x \| = \| x \|,$$

das ist die Behauptung.

3.3.3 Bemerkung

Ist man bereit, im Beweis des Satzes von Hahn-Banach das Zornsche[1] Lemma zu investieren, so kann auf die Voraussetzung „$\mathcal{N}$ sei separabel“ verzichtet werden.

[1] Max August Zorn (1906-1993)

3.3.4 Satz (Momentenproblem in $L^1(\Omega)$)

Sei $\{f_1, f_2, ...\}$ ein Funktionensystem in $L^1(\Omega), (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge in $\mathbb{C}$. Es gibt genau dann ein $g \in L^\infty(\Omega)$ so, daß für alle $k \in \mathbb{N} : \int_\Omega gf_k\,dx = c_k$, wenn es ein $M \geq 0$ gibt, so daß für alle $n \in \mathbb{N}, \mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^n \mu_k c_k\right| \leq M \cdot \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n \mu_k f_k\right| dx.$$

Das Problem, zu $\{f_1, f_2, ...\} \subset L^1(\Omega)$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ein $g \in L^\infty(\Omega)$ zu finden, daß $\int_\Omega gf_k\,dx = c_k$, heißt allgemeines Momentenproblem in $L^1(\Omega)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $g \in L^\infty(\Omega)$ eine Lösung des Momentenproblems. Setze $M := \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$, dann ist

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^n \mu_k c_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^n \mu_k \int_\Omega gf_k\,dx\right| = \left|\int_\Omega g \sum_{k=1}^n \mu_k f_k\,dx\right| \leq \\ &\leq \int_\Omega \left|g \cdot \sum_{k=1}^n \mu_k f_k\right| dx \overset{A.4.5}{\leq} \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left\|\sum_{k=1}^n \mu_k f_k\right\|_{L^1(\Omega)} = \\ &= M \cdot \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n \mu_k f_k\right| dx.\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$" Sei $f = \sum_{k=1}^n \mu_k f_k, \mathcal{M}_n := < f_1, ..., f_n > \subset L^1(\Omega)$. $L : \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathbb{C}, f \longmapsto \sum_{k=1}^n \mu_k c_k$ definiert ein beschränktes lineares Funktional:

1) L ist wohldefiniert:
   Sei $f = \sum_{k=1}^n \mu_k f_k = \sum_{k=1}^n \mu'_k f_k$. Dann gilt

$$\left|\sum_{k=1}^n (\mu_k - \mu'_k) c_k\right| \leq M \cdot \int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n (\mu_k - \mu'_k) f_k\right| dx = 0$$

   und daher $\sum_{k=1}^n \mu_k c_k = \sum_{k=1}^n \mu'_k c_k$.

2) L ist beschränkt:

$$\frac{|Lf|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} = \frac{\left|\sum_{k=1}^n \mu_k c_k\right|}{\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^n \mu_k f_k\right| dx} \leq M \Longrightarrow \|L\| \leq M.$$

   Nun kann man den Satz von Hahn-Banach 3.3.2 anwenden: $L^1(\Omega)$ ist ein normierter Vektorraum über $\mathbb{C}, \mathcal{M} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{M}_n$ ein Teilraum von $L^1(\Omega)$. $L^1(\Omega)$ ist separabel, $L : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein lineares beschränktes Funktional. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es eine stetige Fortsetzung $\widetilde{L}$ von L auf ganz $L^1(\Omega)$. Es ist also $\widetilde{L} : L^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein beschränktes lineares Funktional mit $c_k = \widetilde{L}f_k$. Nach Satz 3.3.1 gibt es ein $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\widetilde{L}f = \int_\Omega gf\,dx$. Also ist $c_k = \int_\Omega gf_k\,dx$, d.h. g löst das Momentenproblem.

3.3.5 Definition

Das System $\{f_1, f_2, ...\}$ von Funktionen $f_k \in L^1(\Omega), k \in \mathbb{N}$ heißt vollständig in $L^1(\Omega)$, wenn die Menge der endlichen Linearkombinationen dicht in $L^1(\Omega)$ ist.

3.3.6 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. $\{f_1, f_2, ...\}$ ist genau dann vollständig in $L^1(\Omega)$, wenn das Gleichungssystem $\int_\Omega \varphi f_k \, dx = 0, k = 1, 2, ...$ in $L^\infty(\Omega)$ nur die Lösung $\varphi = 0$ besitzt.

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ Sei $\varphi \in L^\infty(\Omega), \varphi \neq 0$ eine Lösung des Gleichungssystems $\int_\Omega \varphi f_k \, dx = 0, k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\varphi \in L^2(\Omega)$ und $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} > 0$. Setzt man $f = \dfrac{\overline{\varphi}}{\| \varphi \|^2_{L^2(\Omega)}}$, so ist $f \in L^1(\Omega)$ und

$$\int_\Omega \varphi f \, dx = \frac{1}{\| \varphi \|^2_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega \varphi\overline{\varphi} \, dx = 1.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_\Omega \varphi f \, dx - \int_\Omega \sum_{k=1}^n c_k \varphi f_k \, dx = \int_\Omega \varphi \left(f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right) dx \leq \\ &\leq \int_\Omega \left| \varphi \left(f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right) \right| dx \overset{A.4.5}{\leq} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_{L^1(\Omega)} . \end{aligned}$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$:

$$0 < \frac{1}{\| \varphi \|_{L^\infty(\Omega)}} \leq \left\| f - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_{L^1(\Omega)} .$$

Die Menge der endlichen Linearkombinationen der $f_1, f_2, ...$ liegt also nicht dicht in $L^1(\Omega)$, d.h. $\{f_1, f_2, ...\}$ ist nicht vollständig.

“$\Leftarrow$ „ Sei $\{f_1, f_2, ...\}$ nicht vollständig. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ und ein $f_0 \in L^1(\Omega)$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(*) \qquad \left\| f_0 - \sum_{k=1}^n c_k f_k \right\|_{L^1(\Omega)} \geq \alpha > 0.$$

Betrachte nun das Momentenproblem

$$\int_\Omega \varphi f_0 \, dx = 1, \int_\Omega \varphi f_k \, dx = 0, \ k \in \mathbb{N}.$$

Ist $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ eine Lösung des Momentenproblems, so ist wegen der ersten Gleichung $\varphi \neq 0$. Es muß also gezeigt werden, daß dieses Momentenproblem eine Lösung besitzt. Dazu wird Satz 3.3.4 verwendet:

Setze $M := \frac{1}{\alpha}$. Dann gilt für $\mu_0, ..., \mu_n \in \mathbb{C} : |\mu_0| \leq M \int_\Omega \left| \mu_0 f_0 + \sum_{k=1}^n \mu_k f_k \right| dx$, denn für $\mu_0 = 0$ ist diese Gleichung trivialerweise erfüllt und für $\mu_0 \neq 0$ hat man äquivalent:

$$1 \leq M \int_\Omega \left| f_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\mu_0} f_k \right| dx.$$

Setzt man nun $c_k := -\frac{\mu_k}{\mu_0}$, so ist schließlich

$$\alpha \leq \int\limits_{\Omega} \left| f_0 - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right| dx = \left\| f_0 - \sum_{k=1}^{n} c_k f_k \right\|_{L^1(\Omega)}$$

und das ist Gleichung (*).

Also besitzt das Momentenproblem eine Lösung, d.h. es gibt ein $\varphi \in L^\infty(\Omega), \varphi \neq 0$ mit $\int\limits_{\Omega} \varphi f_k \, dx = 0, \; k = 1, 2, \ldots$

Kapitel 4

Unbeschränkte Operatoren im Hilbertraum

Warum untersucht man unbeschränkte Operatoren? Die bei wichtigen Problemen wie dem Dirichlet-Problem auftauchenden Operatoren werden unbeschränkt, wenn das Grundgebiet unbeschränkt ist. Die in den bisherigen Kapiteln entwickelte Theorie ist nicht anwendbar, man braucht eine ganz neue Idee: Spektralscharen. Diese erweisen sich auch als nützlich, um Funktionen selbstadjungierter Operatoren zu definieren: Wenn A ein Operator ist, was soll $\sqrt{A}, e^{tA}, \ldots$ sein? Damit wird es dann möglich, partielle Differentialgleichungen zu lösen.

4.1 Abgeschlossene Operatoren

4.1.1 Definition (abgeschlossen)

Sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T)$. T heißt abgeschlossen genau dann, wenn gilt: Ist $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ in $\mathcal{H}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = g$, so folgt $f \in \mathcal{D}(T)$ und $Tf = g$.
Nach Satz 1.4.7 sind beschränkte Operatoren $\widetilde{T}$ in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(\widetilde{T}) = \mathcal{H}$ abgeschlossen.

Bezeichnungen: Sei T ein linearer Operator in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(T), \widetilde{T} \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$. Dann setzt man $\mathcal{D}(T+\widetilde{T}) = \mathcal{D}(T)$ und $(T+\widetilde{T})u = Tu + \widetilde{T}u$ für $u \in \mathcal{D}(T)$. Wenn $\widetilde{T} = c\cdot I, c \in \mathbb{C}$, so schreibt man

$$(T+\widetilde{T})u = Tu + cIu = (T+c)u.$$

4.1.2 Definition (Fortsetzung)

Seien $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \longrightarrow \mathcal{H}, T_2 : \mathcal{D}(T_2) \longrightarrow \mathcal{H}$ lineare Operatoren. Sei $\mathcal{D}(T_1) \subset \mathcal{D}(T_2), T_1x = T_2x$ für $x \in \mathcal{D}(T_1)$. Dann heißt T_2 Fortsetzung von T_1, man schreibt $T_1 \subset T_2$.

4.1.3 Definition (abschließbar)

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. T heißt abschließbar genau dann, wenn folgende Implikation gilt: Ist $(f_n)_{n\in N} \subset \mathcal{D}(T), \lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0, (Tf_n)_{n\in N}$ Cauchy- Folge, so folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = 0$.

4.1.4 Satz

Sei $T_1 : \mathcal{D}(T_1) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. T_1 hat eine abgeschlossene Fortsetzung genau dann, wenn T_1 abschließbar ist.
Wenn T_1 abschließbar ist, dann gibt es eine kleinste abgeschlossene Fortsetzung $\overline{T}_1$ von T_1, d.h. $\overline{T}_1$ hat die folgenden Eigenschaften:

1) $\overline{T}_1$ ist Fortsetzung von T_1,

2) Jede abgeschlossene Fortsetzung T_2 von T_1 ist eine Fortsetzung von $\overline{T}_1$.

$\overline{T}_1$ heißt Abschließung von T_1.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T_1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, $(T_1 f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, d.h. es gibt ein $g \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} T_1 f_n = g$. Sei T_2 eine abgeschlossene Fortsetzung von T_1. Dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} T_2 f_n = g$. Da T_2 abgeschlossen ist und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ gilt, folgt $g = 0$.

„$\Leftarrow$" Sei T_1 abschließbar. Setze

$$\mathcal{D}(\overline{T}_1) := \{f \in \mathcal{H} \mid \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T_1) : \lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ und } \| T_1(f_n - f_m) \| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

$\mathcal{D}(\overline{T}_1)$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Setze jetzt $\overline{T}_1 f := \lim\limits_{n\to\infty} T_1 f_n$ für $f \in \mathcal{D}(\overline{T}_1)$.

1) $\overline{T}_1$ ist wohldefiniert:
Sei $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T_1)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = f, \| T_1(f'_n - f'_m) \| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Setze $h_n := f_n - f'_n$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$ und $\| T_1(h_n - h_m) \| \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Weil T_1 abschließbar ist, folgt $\lim\limits_{n\to\infty} T_1 h_n = 0$, also ist $\overline{T}_1$ wohldefiniert.
2) Linearität von $\overline{T}_1 f$: ist klar.
3) $\overline{T}_1$ ist abgeschlossen:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\overline{T}_1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{T}_1 f_n = g$. Zu f_n gibt es $f'_n \in \mathcal{D}(T_1)$ mit $\| f_n - f'_n \| \le \frac{1}{n}$ und $\| \overline{T}_1 f_n - T_1 f'_n \| \le \frac{1}{n}$, daher folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_1 f'_n = g$. Also ist $f \in \mathcal{D}(\overline{T}_1)$ und $g = \lim\limits_{n\to\infty} T_1 f'_n = \overline{T}_1 f$.

Direkt aus der Definition des abgeschlossenen Operators folgt: Ist T_2 irgendeine abgeschlossene Fortsetzung von T_1, so ist $\mathcal{D}(T_2) \supset \mathcal{D}(\overline{T}_1)$ und $\overline{T}_1 f = T_2 f$ für $f \in \mathcal{D}(\overline{T}_1)$.

Bemerkungen:

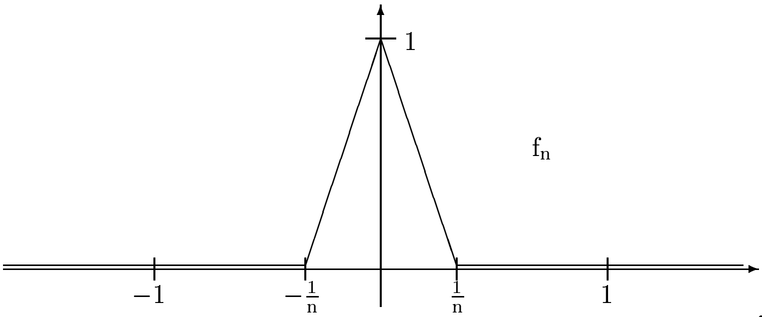
1) Ist $T \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} T f_n = T f$.

2) Ist $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ abgeschlosssen, so ist für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim\limits_{n\to\infty} T f_n = g$: $Tf = g$. Bei abgeschlossenen Operatoren ist also der Limes mit T vertauschbar. Die meisten Differentialoperatoren sind abschließbar.

4.1.5 Beispiel für einen nicht abschließbaren Operator

Sei $\mathcal{H} = L^2((-1,1)), \mathcal{D}(T) = C^0([-1,1])$. Setze für $f \in \mathcal{D}(T), x \in [-1,1] : (Tf)(x) = f(0)$. Dann ist T nicht abschließbar: Betrachte z.B. die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$, wobei:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx+1, & -\frac{1}{n} \le x \le 0 \\ -nx+1, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$



Dann ist für alle $n \in \mathbb{N} : f_n(0) = 1$ und daher $\|Tf_n\|_{L^2((-1,1))} = \sqrt{2}$, aber

$$\|f_n\|_{L^2((-1,1))} = \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{-1}^{1} |f_n(x)| \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^2((-1,1))} = 0$.

4.1.6 Definition

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. Sei $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. $\mathcal{D}(T^*)$ sei die Menge aller $g \in \mathcal{H}$ derart, daß es ein $g^* \in \mathcal{H}$ gibt mit $(Tf, g) = (f, g^*)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$.

4.1.7 Satz

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator, $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Ist $g \in \mathcal{D}(T^*)$, so ist das zugehörige g^* mit $(Tf, g) = (f, g^*)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ eindeutig bestimmt.
Durch $T^* : \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow \mathcal{H}, T^*g := g^*$ wird ein linearer, abgeschlossener Operator gegeben.

Beweis:
Seien $g^*, \widetilde{g}^*$ zwei Elemente mit $(Tf, g) = (f, g^*) = (f, \widetilde{g}^*)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$. Dann ist $(f, g^* - \widetilde{g}^*) = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ und weil $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt $g^* = \widetilde{g}^*$. Also ist T^* wohldefiniert. Die Linearität von T^* ist klar. Sei jetzt $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{D}(T^*)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ und $\lim\limits_{n\to\infty} T^*g_n = h$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H} :\ (Tf, g_n) = (f, T^*g_n)$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}(Tf, g_n) = (Tf, g)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(f, T^*g_n) = (f, h)$ folgt $(Tf, g) = (f, h)$ für alle $f \in \mathcal{H}$, also ist $g \in \mathcal{D}(T^*)$ und es gilt $T^*g = h$.

4.1.8 Beispiele

1) Gewöhnliche Differentialoperatoren
Sei $\mathcal{H} = L^2((a,b)), \mathcal{D}(T) = C_0^N((a,b))$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Sei $p_k \in C^k((a,b)), 1 \leq k \leq N$. Für $f \in \mathcal{D}(T)$ definiere $(Tf)(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} p_k(x) f^{(k)}(x)$. Weil $C_0^\infty((a,b))$ dicht in $L^2((a,b))$ ist (Satz A.5.7), ist auch $\mathcal{D}(T)$ dicht in $L^2((a,b))$ und T ist linear. Seien nun $f, g \in \mathcal{D}(T)$. Dann erhält man durch partielle Integration unter Beachtung von $f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0$:

$$(Tf, g) = \int_a^b \sum_{k=0}^{N} p_k(x) f^{(k)}(x) \cdot \overline{g(x)} \, dx = \int_a^b f(x) \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \overline{(\overline{p_k} g)^{(k)}} \, dx = (f, T^*g).$$

Also ist $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ und es gilt $T^*g = \sum\limits_{k=0}^{N} (-1)^k (\overline{p_k} g)^{(k)}$.

2) Partielle Differentialoperatoren

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $\mathcal{H} = L^2(\Omega), m \in \mathbb{N}$. Für jeden Multiindex α aus $\mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq 2m$ seien Funktionen $A_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ gegeben. Sei $\mathcal{D}(T) = C_0^{2m}(\Omega)$, dann ist $\mathcal{D}(T)$ wieder dicht in $L^2(\Omega)$. Für $f \in \mathcal{D}(T)$ definiere $Tf(x) = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha(x) D^\alpha f(x)$. Mit dem Satz von Gauß erhält man (wegen $D^\beta f\,|_{\partial\Omega} = 0$ für $|\beta| \leq 2m$) für $g \in \mathcal{D}(T)$:

$$(Tf, g) = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha| \leq 2m} A_\alpha(x) D^\alpha f(x) \right) \overline{g(x)}\, dx = \int_\Omega f(x) \sum_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} \overline{D^\alpha(\overline{A}_\alpha g)(x)}\, dx.$$

   Also ist $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T^*)$ und $T^*g = \sum\limits_{|\alpha| \leq 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\overline{A}_\alpha g)$.

4.1.9 Satz

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ linear. Seien $\mathcal{D}(T)$ und $\mathcal{D}(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist T abschließbar und es gilt $T^* = \overline{T}^*$

Beweis:

1) T ist abschließbar:

   Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = g$. Sei $h \in \mathcal{D}(T^*)$ beliebig. Dann ist

$$(g, h) = \lim_{n\to\infty} (Tf_n, h) = \lim_{n\to\infty} (f_n, T^*h) = 0.$$

   Da $\mathcal{D}(T^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt $g = 0$. Also ist T abschließbar.

2) $T^* = \overline{T}^*$:

   a) $\mathcal{D}(\overline{T}^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$:

      Sei $g \in \mathcal{D}(\overline{T}^*)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\overline{T}) : (\overline{T}f, g) = (f, \overline{T}^*g)$. Also gilt insbesondere für $f \in \mathcal{D}(T) : (Tf, g) = (f, \overline{T}^*g)$. Folglich ist $g \in \mathcal{D}(T^*)$, d.h. $\mathcal{D}(\overline{T}^*) \subset \mathcal{D}(T^*)$ und $T^*g = \overline{T}^*g$.

   b) $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(\overline{T}^*)$:

      Sei $g \in \mathcal{D}(T^*)$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(T) : (Tf, g) = (f, T^*g)$. Ist nun $f \in \mathcal{D}(\overline{T})$, so gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ und $\lim\limits_{n\to\infty} Tf_n = \overline{T}f$. Also ist $(\overline{T}f, g) = (f, T^*g)$, d.h. es ist $g \in \mathcal{D}(\overline{T}^*)$, also $\mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{D}(\overline{T}^*)$, und man erhält wieder $\overline{T}^*g = T^*g$.

4.2 Der Graph eines linearen Operators

4.2.1 Bemerkung

Die Menge $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \{(f, g) \mid f, g \in \mathcal{H}\}$ kann zu einem Hilbertraum gemacht werden durch die folgenden Definitionen:

1) $\alpha(f, g) + \beta(h, k) := (\alpha f + \beta h, \alpha g + \beta k)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

2) $((f, g), (h, k)) := (f, h)_\mathcal{H} + (g, k)_\mathcal{H}$, dabei sind $(f, h)_\mathcal{H}, (g, k)_\mathcal{H}$ die Skalarprodukte in $\mathcal{H}$.
   $\|(f, g)\| := (\|f\|_\mathcal{H}^2 + \|g\|_\mathcal{H}^2)^{\frac{1}{2}}$.

4.2.2 Definition (Graph)

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Die Menge $G(T) = \{(f, Tf) \mid f \in \mathcal{D}(T)\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ und heißt der Graph von T.
Sind T_1, T_2 lineare Operatoren und ist T_2 eine Fortsetzung von T_1, so ist dies äquivalent zu $G(T_1) \subset G(T_2)$. In diesem Fall schreibt man $T_1 \subset T_2$.

4.2.3 Hilfssatz

T ist abgeschlosssen genau dann, wenn G(T) abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ist.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei T abgeschlossen, es gelte $\lim_{n\to\infty}(f_n, Tf_n) = (f, g)$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} Tf_n = g$ in $\mathcal{H}$. Mit der Abgeschlossenheit von T folgt: $f \in \mathcal{D}(T)$ und $g = Tf$.

„$\Leftarrow$" Sei G(T) abgeschlossen. Sei $((f_n, Tf_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in G(T) mit $\lim_{n\to\infty}(f_n, Tf_n) = (f, g)$. Dann ist $(f, g) \in G(T)$, d.h. es gibt ein $h \in \mathcal{D}(T)$ mit $(f, g) = (h, Th)$. Ist also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} Tf_n = g$, so ist $f = h$, $g = Th$, d.h. T ist abgeschlossen.

Wir führen einen Operator $U \in L(\mathcal{H} \times \mathcal{H}, \mathcal{H} \times \mathcal{H})$ ein. U wird definiert durch $U : (f, g) \longmapsto (-g, f)$. Es ist $U^2 = -I$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

4.2.4 Hilfssatz

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator, $\mathcal{D}(T)$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} G(T)^{\perp} &= U(G(T^*)), \\ (U(G(T)))^{\perp} &= G(T^*). \end{aligned}$$

Beweis:

1) Sei $(\varphi, \psi) \in G(T)^{\perp}$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(T)$:

$$0 = \Big((f, Tf), (\varphi, \psi)\Big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = (f, \varphi)_{\mathcal{H}} + (Tf, \psi)_{\mathcal{H}}.$$

Also hat man für alle $f \in \mathcal{D}(T) : (Tf, \psi)_{\mathcal{H}} = (f, -\varphi)_{\mathcal{H}}$, d.h. $\psi \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^*\psi = -\varphi$. Also ist $(\varphi, \psi) \in U(G(T^*))$. Ist umgekehrt $(-T^*\psi, \psi) \in U(G(T^*))$, dann folgt für alle $f \in \mathcal{D}(T)$:

$$\Big((f, Tf), (-T^*\psi, \psi)\Big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = (f, -T^*\psi)_{\mathcal{H}} + (Tf, \psi)_{\mathcal{H}} = -(f, T^*\psi)_{\mathcal{H}} + (f, T^*\psi)_{\mathcal{H}} = 0,$$

also ist $(-T^*\psi, \psi) \in G(T)^{\perp}$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

2) $(\varphi, \psi) \in U(G(T))^{\perp}$

$\Longleftrightarrow$ Für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ gilt: $0 = \Big((-Tf, f), (\varphi, \psi)\Big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = -(Tf, \varphi)_{\mathcal{H}} + (f, \psi)_{\mathcal{H}}$

$\Longleftrightarrow$ Für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ gilt: $(Tf, \varphi)_{\mathcal{H}} = (f, \psi)_{\mathcal{H}}$

$\Longleftrightarrow \varphi \in \mathcal{D}(T^*), \psi = T^*\varphi$

$\Longleftrightarrow (\varphi, \psi) \in G(T^*)$.

4.2.5 Hilfssatz

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ linear, sei T abschließbar. Dann ist $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$.

Beweis:

„$\subset$" $\overline{T}$ ist abgeschlossen und es gilt $G(T) \subset G(\overline{T})$. Nach Hilfssatz 4.2.3 ist $G(\overline{T})$ abgeschlossen, also folgt $\overline{G(T)} \subset G(\overline{T})$ (Topologie !).

„$\supset$" Sei $(f, \overline{T}f) \in G(\overline{T})$. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} Tf_n = \overline{T}f$. Also ist $(f_n, Tf_n) \in G(T)$ und es gilt $\lim_{n\to\infty}(f_n, Tf_n) = (f, \overline{T}f)$, d.h. $(f, \overline{T}f) \in \overline{G(T)}$.

Abgeschlossene Operatoren können durch den Begriff der Adjungierten charakterisiert werden:

4.2.6 Satz

Sei $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein abgeschlossener linearer Operator, sei $\mathcal{D}(\mathrm{T})$ dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist auch $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt

$$\mathrm{T}^{**} = \mathrm{T}.$$

Beweis:

1) $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ ist dicht in $\mathcal{H}$:

   Angenommen, $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ ist nicht dicht in $\mathcal{H}$. Dann gibt es ein $\mathrm{h} \in \mathcal{H}, \mathrm{h} \neq 0$ so, daß für alle $\mathrm{g} \in \mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ gilt: $(\mathrm{g},\mathrm{h})_{\mathcal{H}} = 0$. Also ist für alle $\mathrm{g} \in \mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$: $\Big((-\mathrm{T}^*\mathrm{g},\mathrm{g}),(0,\mathrm{h})\Big)_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = 0$, d.h. es ist $(0,\mathrm{h}) \in (\mathrm{U}(\mathrm{G}(\mathrm{T}^*)))^{\perp}$ in $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$. Nach Hilfssatz 4.2.4 folgt: $(0,\mathrm{h}) \in (\mathrm{G}(\mathrm{T})^{\perp})^{\perp}$. Weil T abgeschlossen ist, ist nach 4.2.5: $(\mathrm{G}(\mathrm{T})^{\perp})^{\perp} = \mathrm{G}(\mathrm{T})$, also $(0,\mathrm{h}) \in \mathrm{G}(\mathrm{T})$. Es gibt demnach ein $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ mit $(0,\mathrm{h}) = (\mathrm{f},\mathrm{Tf})$, d.h. $\mathrm{f} = 0$ und damit auch $\mathrm{Tf} = \mathrm{h} = 0$, Widerspruch.

2) $\mathrm{T}^{**} = \mathrm{T}$:

   Nach 1) kann man T^{**} konstruieren. Mit Hilfssatz 4.2.4 erhält man

   $$\mathrm{G}(\mathrm{T}^{**}) = (\mathrm{U}(\mathrm{G}(\mathrm{T}^*)))^{\perp} = (\mathrm{G}(\mathrm{T})^{\perp})^{\perp} = \mathrm{G}(\mathrm{T}).$$

   Also ist $\mathrm{T} = \mathrm{T}^{**}$.

Die Idee des Graphen geht auf John von Neumann[1] zurück.

4.2.7 Satz

Sei $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein abschließbarer Operator in $\mathcal{H}, \mathcal{D}(\mathrm{T})$ sei dicht in $\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ dicht in $\mathcal{H}$ und es gilt

$$\overline{\mathrm{T}} = \mathrm{T}^{**}.$$

Beweis:
Bemerkung: Allgemein gilt: $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2, \mathcal{D}(\mathrm{T}_1)$ dicht $\Longrightarrow \mathrm{T}_2^* \subset \mathrm{T}_1^*$.
Es ist $\mathrm{T} \subset \overline{\mathrm{T}}$, also gilt nach der Bemerkung $\overline{\mathrm{T}}^* \subset \mathrm{T}^*$. Nach Satz 4.2.6 ist $\mathcal{D}(\overline{\mathrm{T}}^*)$ dicht in $\mathcal{H}$, also ist auch $\mathcal{D}(\mathrm{T}^*)$ dicht in $\mathcal{H}$. Nach Satz 4.1.9 ist $\left(\overline{\mathrm{T}}^*\right)^* = \mathrm{T}^{**}$, also mit 4.2.6 : $\mathrm{T}^{**} = \overline{\mathrm{T}}$.

4.3 Hermitesche Operatoren

4.3.1 Definition (hermitescher Operator)

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. H heißt hermitesch genau dann, wenn

1) $\mathcal{D}(\mathrm{H})$ dicht in $\mathcal{H}$ ist,

2) für alle $\mathrm{f},\mathrm{g} \in \mathcal{D}(\mathrm{H})$ gilt: $(\mathrm{Hf},\mathrm{g}) = (\mathrm{f},\mathrm{Hg})$.

Also ist H hermitesch genau dann, wenn $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^*$ ist.

4.3.2 Beispiel

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ beschränkt und offen, $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Omega)$. Sei $\mathrm{m} \in \mathbb{N}, \mathcal{D}(\mathrm{H}) = \mathrm{C}_0^{2\mathrm{m}}(\Omega)$. Für alle Multiindizes $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^{\mathrm{n}}$ mit $|\alpha|,|\beta| \leq \mathrm{m}$ seien Funktionen $\mathrm{A}_{\alpha\beta} \in \mathrm{C}^{\mathrm{m}}(\Omega)$ gegeben mit $\mathrm{A}_{\alpha\beta} = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\overline{\mathrm{A}_{\beta\alpha}}$. Sei für $\mathrm{u} \in \mathcal{D}(\mathrm{H})$:

$$\mathrm{Hu} = \sum_{|\alpha|\ \leq \mathrm{m}, |\beta|\ \leq \mathrm{m}} \mathrm{D}^{\alpha}(\mathrm{A}_{\alpha\beta}\mathrm{D}^{\beta}\mathrm{u}).$$

[1] John von Neumann (1903-1957)

Dann ist H hermitesch: Setze zur Abkürzung $M := \{\gamma \in \mathbb{N}^n \mid |\gamma| \leq m\}$. Seien $f, g \in \mathcal{D}(H)$. Es ist

$$\begin{aligned}
(Hf, g) &= \sum_{\alpha,\beta\in M} \left(D^\alpha (A_{\alpha\beta} D^\beta f), g\right) = \sum_{\alpha,\beta\in M} \int_\Omega D^\alpha \left(A_{\alpha\beta} D^\beta f\right) \overline{g}\, dx = \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in M} \int_\Omega A_{\alpha\beta} D^\beta f \cdot (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{g}\, dx = \sum_{\alpha,\beta\in M} \int_\Omega D^\beta f (-1)^{|\alpha|} A_{\alpha\beta} D^\alpha \overline{g}\, dx = \\
&= \sum_{\alpha,\beta\in M} \int_\Omega f \cdot (-1)^{|\alpha|+|\beta|} D^\beta (A_{\alpha\beta} D^\alpha \overline{g})\, dx = \sum_{\alpha,\beta\in M} \int_\Omega f D^\beta (\overline{A_{\beta\alpha}} D^\alpha \overline{g})\, dx = \\
&= \int_\Omega f \overline{\sum_{\alpha,\beta\in M} D^\beta (A_{\beta\alpha} D^\alpha g)}\, dx = (f, Hg).
\end{aligned}$$

Also ist H hermitesch. Insbesondere ist $\Delta : C_0^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega), \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u$ hermitesch, denn Δ ist von obiger Form mit $A_{ij} = \delta_{ij}$.

4.3.3 Definition (selbstadjungierter Operator)

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator, $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$. A heißt selbstadjungiert in $\mathcal{H}$ genau dann, wenn $A = A^*$ ist.

4.3.4 Hilfssatz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator, $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$. A ist selbstadjungiert genau dann, wenn

1) A hermitesch ist,
2) aus $(Au, v) = (u, v^*)$ für alle $u \in \mathcal{D}(A)$ und irgendwelche $v, v^* \in \mathcal{H}$ folgt: $v \in \mathcal{D}(A), v^* = A^* v$.

Jeder selbstadjungierte Operator ist hermitesch und abgeschlossen.

Beweis: klar

4.3.5 Beispiel für einen selbstadjungierten Operator

Sei $\mathcal{H} = l^2, \mathcal{D}(A) := \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \, |x_n|^2 < \infty \right\}$ und

$$A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow l^2, Ax = (x_1, 2x_2, 3x_3, ...).$$

A ist selbstadjungiert:
Zunächst ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in l^2, denn ist $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, so ist $y^{(m)} := \left(y_n^{(m)}\right)$ mit $y_n^{(m)} := x_n$ für $n \leq m, y_n^{(m)} := 0$ für $n > m$, eine Folge mit $y^{(m)} \in \mathcal{D}(A)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $\lim_{m\to\infty} \| y^{(m)} - x \| = 0$.
Die Gleichung $(Ax, y) = (x, Ay)$ gilt offensichtlich für alle $x, y \in l^2$, also ist A hermitesch.
Sei nun $(Ax, y) = (x, y^*)$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ und zwei feste $y, y^* \in l^2$. Ist $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y^* = (y_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x_n \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n^*}.$$

Sei $x^{(\mu)} = \left(x_n^{(\mu)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n^{(\mu)} = \delta_{n\mu}$, d.h. $x^{(\mu)}$ ist die Folge, deren μ-te Komponente 1 ist, alle anderen sind 0. Setzt man $x^{(\mu)}$ in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$\mu y_\mu = y_\mu^*$$

für alle $\mu \in \mathbb{N}$, d.h. es ist $y \in \mathcal{D}(A)$ und es gilt $y^* = Ay$. Mit dem vorigen Hilfssatz folgt nun die Selbstadjungiertheit von A.

4.3.6 Satz

Sei H hermitesch in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\underline{\mathcal{D}(\mathrm{H}) = \mathcal{H}}$. Dann ist H selbstadjungiert.

Beweis:
H ist hermitesch, also ist $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^*$. Wegen $\mathcal{D}(\mathrm{H}) = \mathcal{D}(\mathrm{H}^*) = \mathcal{H}$ folgt daraus schon: $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$.

4.3.7 Definition (wesentlich selbstadjungierter Operator)

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. H heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn seine Abschließung selbstadjungiert ist.

4.3.8 Bemerkungen

1) H hermitesch $\Longrightarrow$ $\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^*$. Weil H^* abgeschlossen ist, ist H abschließbar.

2) H hermitesch $\Longrightarrow$ $\overline{\mathrm{H}}$ hermitesch.

3) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   a) H ist wesentlich selbstadjungiert.
   b) $\overline{\mathrm{H}^*} = \overline{\mathrm{H}}$.
   c) $\mathrm{H}^* = \overline{\mathrm{H}}$.
   d) $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^{**}$.

   Beweis:

   a) $\Longleftrightarrow$ b) ist klar.
   b) $\Longrightarrow$ c) Nach Satz 4.1.9 ist $\overline{\mathrm{H}^*} = \mathrm{H}^*$, nach b) folgt also $\mathrm{H}^* = \overline{\mathrm{H}}$.
   c) $\Longrightarrow$ d) Nach Satz 4.2.7 ist $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}^{**}$, also nach c) : $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}^{**}$.
   d) $\Longrightarrow$ b) Es ist $\overline{\mathrm{H}^*} \overset{4.1.9}{=} \mathrm{H}^* \overset{c)}{=} \mathrm{H}^{**} \overset{4.2.7}{=} \overline{\mathrm{H}}$.

Wichtig für die folgenden Erörterungen ist die Charakterisierung der Selbstadjungiertheit eines hermiteschen Operators H durch die Teilräume:

$$(\mathrm{H}+\mathrm{i})(\mathcal{D}(\mathrm{H})) = \mathcal{R}(\mathrm{H}+\mathrm{i}),$$

$$(\mathrm{H}-\mathrm{i})(\mathcal{D}(\mathrm{H})) = \mathcal{R}(\mathrm{H}-\mathrm{i}).$$

4.3.9 Satz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. H ist selbstadjungiert genau dann, wenn

$$\mathcal{R}(\mathrm{H}+\mathrm{i}) = \mathcal{H},$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{H}-\mathrm{i}) = \mathcal{H}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ Es gilt:

$$\begin{aligned} \|(\mathrm{H} \pm \mathrm{i})\mathrm{f}\|^2 &= (\mathrm{Hf} \pm \mathrm{if}, \mathrm{Hf} \pm \mathrm{if}) = \\ &= \|\mathrm{Hf}\|^2 + \|\mathrm{f}\|^2 \pm (\mathrm{if}, \mathrm{Hf}) \pm (\mathrm{Hf}, \mathrm{if}) = \\ &= \|\mathrm{Hf}\|^2 + \|\mathrm{f}\|^2 \pm \mathrm{i}(\mathrm{f}, \mathrm{Hf}) \mp \mathrm{i}(\mathrm{Hf}, \mathrm{f}) = \\ &= \|\mathrm{Hf}\|^2 + \|\mathrm{f}\|^2 . \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\| (H \pm i)f \| \geq \| f \|$. Also kann man $(H \pm i)^{-1}$ auf $\mathcal{R}(H \pm i)$ erkären. Es ist $\| (H \pm i)^{-1} \| \leq 1$. Zeige zunächst: $\mathcal{R}(H \pm i)$ ist abgeschlossen: Seien $g_n \in \mathcal{R}(H \pm i)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g$. Zu g_n gibt es eindeutig bestimmte $f_n \in \mathcal{D}(H)$ mit $g_n = (H \pm i)f_n$. Es ist

$$\| g_n - g_m \| = \| (H \pm i)(f_n - f_m) \| \geq \| f_n - f_m \|,$$

also gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$. Also hat man $\lim\limits_{n \to \infty} Hf_n = g \mp if$. Weil H abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{D}(H)$ und $Hf = g \mp if$, d.h. $(H \pm i)f = g$, also $g \in \mathcal{R}(H \pm i)$. Folglich ist $\mathcal{R}(H \pm i)$ abgeschlossen.

Ist nun $\mathcal{R}(H + i) \neq \mathcal{H}$, so gibt es ein $g \in \mathcal{H}$ mit $\| g \| = 1$, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(H)$ gilt: $((H + i)f, g) = 0$. Dann ist für alle $f \in \mathcal{D}(H) : (Hf, g) = -i(f, g) = (f, ig)$. Weil H selbstadjungiert ist, folgt: $g \in \mathcal{D}(H), Hg = ig$. Demnach ist $(H - i)g = 0$, also $0 = \| (H - i)g \| \geq \| g \|$, d.h. $g = 0$. Das ist ein Widerspruch zu $\| g \| = 1$, also ist $\mathcal{R}(H + i) = \mathcal{H}$.

Analog sieht man $\mathcal{R}(H - i) = \mathcal{H}$.

„$\Leftarrow$ “ Sei $\mathcal{R}(H \pm i) = \mathcal{H}$. Für alle $f \in \mathcal{D}(H)$ gelte $(Hf, g) = (f, g^*)$. Dann ist für alle $f \in \mathcal{D}(H)$:

$$((H + i)f, g) = (f, g^* - ig).$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $h \in \mathcal{D}(H)$ mit $g^* - ig = (H - i)h$. Damit ist

$$((H + i)f, g) = (f, (H - i)h) = (f, Hh) + (f, -ih) \overset{\text{H hermitesch}}{=} (Hf, h) + (if, h) = ((H + i)f, h)$$

für alle $f \in \mathcal{D}(H)$. Also ist $g = h$ und damit $h \in \mathcal{D}(H), g^* = Hh$. D.h., H ist selbstadjungiert.

4.3.10 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Dann ist $\overline{\mathcal{R}(H \pm i)} = \mathcal{R}(\overline{H} \pm i)$.

Beweis:

„$\subset$ “ Sei $g \in \overline{\mathcal{R}(H + i)}, g = \lim\limits_{n \to \infty} (H + i)f_n$ mit $f_n \in \mathcal{D}(H)$. Es ist $\| f_n - f_m \| \leq \| (H + i)(f_n - f_m) \|$, also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$. Genauso gilt $\| H(f_n - f_m) \| \leq \| (H + i)(f_n - f_m) \|$, folglich konvergiert auch $(Hf_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sei $\widetilde{g} = \lim\limits_{n \to \infty} Hf_n$, d.h. $\widetilde{g} = g - if$. Dann ist $f \in \mathcal{D}(\overline{H}), \overline{H}f = g - if$, d.h. $(\overline{H} + i)f = g$. Damit gilt $g \in \mathcal{R}(\overline{H} + i)$. Analog sieht man: $\overline{\mathcal{R}(H - i)} \subset \mathcal{R}(\overline{H} - i)$.

„$\supset$“ Sei $g \in \mathcal{R}(\overline{H} + i)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $f \in \mathcal{D}(H)$ mit $g = \overline{H}f + if$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(H)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f, \lim\limits_{n \to \infty} \overline{H}f_n = \overline{H}f$. Dann ist $\lim\limits_{n \to \infty} (H + i)f_n = (\overline{H} + i)f = g$, also ist $g \in \overline{\mathcal{R}(H + i)}$. Analog sieht man $\mathcal{R}(\overline{H} - i) \subset \overline{\mathcal{R}(H - i)}$.

4.3.11 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{D}(H), z \in \mathbb{C}$:

$$\| (H - z)f \| \geq |\operatorname{Im} z| \cdot \| f \| .$$

Beweis:
Sei $z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $H - a$ hermitesch. Sei $b \neq 0$, denn für $b = 0$ ist nichts zu zeigen. Es ist

$$\| (H - z)f \| = \| ((H - a) - ib)f \| = |b| \cdot \left\| \frac{1}{b}(H - a) - if \right\| \geq |b| \cdot \| f \|,$$

also hat man die Behauptung.

Als Konsequenz aus Hilfssatz 4.3.11 ergibt sich, daß jeder Operator $H - z$, wobei H hermitesch und $\operatorname{Im} z \neq 0$ ist, eine beschränkte Inverse $(H - z)^{-1}$ hat, die auf $\mathcal{R}(H - z)$ erkärt ist. Es ist

$$\| (H - z)^{-1} f \| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \| f \|, f \in \mathcal{R}(H - z).$$

4.3.12 Satz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. H ist genau dann wesentlich selbsadjungiert, wenn $\overline{\mathcal{R}(\mathrm{H} \pm \mathrm{i})} = \mathcal{H}$.

Beweis:
Nach Satz 4.3.9 gilt: $\overline{\mathrm{H}}$ selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}(\overline{\mathrm{H}} \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$. Mit Hilfssatz 4.3.10 folgt daraus: $\overline{\mathrm{H}}$ selbstadjungiert $\Longleftrightarrow$ $\overline{\mathcal{R}(\mathrm{H} \pm \mathrm{i})} = \mathcal{H}$.

4.3.13 Hilfssatz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Gibt es ein VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ in $\mathcal{H}$ und $\lambda_k \in \mathbb{C}, \lambda_k \neq \pm\mathrm{i}$, so daß für $k = 1,2,...$ gilt: $\mathrm{H}\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$, so ist H wesentlich selbstadjungiert.

Beweis:
$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid f = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k\varphi_k, N \in \mathbb{N}, c_1, ..., c_N \in \mathbb{C} \right\}$ liegt in $\mathcal{D}(\mathrm{H})$ und ist dicht in $\mathcal{H}$. Sei $g \in \mathcal{H}$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ und $d_1, ..., d_{N(\varepsilon)} \in \mathbb{C}$ so, daß $\left\| g - \sum\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} d_k\varphi_k \right\| < \varepsilon$. Sei nun $c_k := \dfrac{d_k}{\lambda_k + \mathrm{i}}, f_{N(\varepsilon)} = \sum\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} c_k\varphi_k$. (Wegen $\lambda_k \neq -\mathrm{i}$ ist das wohldefiniert). Dann ist $(\mathrm{H}+\mathrm{i})f_{N(\varepsilon)} = \sum\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} d_k\varphi_k$, also hat man $\|g - (\mathrm{H}+\mathrm{i})f_{N(\varepsilon)}\| < \varepsilon$, d.h. $\mathcal{R}(\mathrm{H}+\mathrm{i})$ ist dicht in $\mathcal{H}$. Die gleiche Rechnung mit $\lambda_k - \mathrm{i}$ statt $\lambda_k + \mathrm{i}$ zeigt, daß auch $\mathcal{R}(\mathrm{H}-\mathrm{i})$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Nach Satz 4.3.12 ist H damit wesentlich selbstadjungiert.

4.3.14 Hilfssatz

1) Seien T_1, T_2 lineare Operatoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit dichten Definitionsbereichen $\mathcal{D}(T_1)$, $\mathcal{D}(T_2)$. Sei $T_2 \subset T_1$. Dann ist $T_1^* \subset T_2^*$.
2) Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert, $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Sei $A \subset T$. Dann ist $A = T$.

Beweis:

1) Sei $y \in \mathcal{D}(T_1^*)$. Dann ist für $x \in \mathcal{D}(T_2)$: $(T_2x, y) = (T_1x, y) = (x, T_1^*y)$. Also ist $y \in \mathcal{D}(T_2^*)$ und $T_2^*y = T_1^*y$.
2) Es ist $A \subset T \subset T^* \subset A^* = A$, also $T = A$.

4.3.15 Beispiele

Sei $\mathcal{H} = L^2((-\pi, \pi))$.

1) $\mathcal{D}(H_0) = C_0^2((-\pi, \pi)), H_0 : \mathcal{D}(H_0) \longrightarrow \mathcal{H}, H_0u = -u''$.
   $\mathcal{D}(H_0)$ ist ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}, H_0$ ist hermitesch, aber nicht wesentlich selbstadjungiert: Für $u \in \mathcal{D}(H_0), v \in C^2((-\pi, \pi))$ gilt:

$$\begin{aligned}((H_0 - \mathrm{i})u, v) &= \int_{-\pi}^{\pi} (u'' - \mathrm{i}u)\overline{v}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (-u\overline{v''} - \mathrm{i}u\overline{v})\,dx = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u(-\overline{v''} - \mathrm{i}\overline{v})\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\overline{u}(-v'' + \mathrm{i}v)}\,dx.\end{aligned}$$

   Wähle $v = e^{\sqrt{\mathrm{i}}x} \in C^2(-\pi, \pi)$, dann ist $v'' = \mathrm{i}v$, d.h. $-v'' + \mathrm{i}v = 0$. Es gibt also ein $v \in \mathcal{H}, v \neq 0$, so daß für alle $u \in \mathcal{D}(H_0)$ gilt: $((H_0 - \mathrm{i})u, v) = 0$. v ist demnach orthogonal zu $\mathcal{R}(H_0 - \mathrm{i})$, $v \neq 0$, d.h. $\mathcal{R}(H_0 - \mathrm{i})$ ist nicht dicht in $\mathcal{H}$, also nach 4.3.12 ist H_0 nicht wesentlich selbstadjungiert.

2) $\mathcal{D}(H_1)=\{u\in C^2([-\pi,\pi]), u(-\pi)=u(\pi), u'(-\pi)=u'(\pi)\}$. $H_1:\mathcal{D}(H_1)\longrightarrow\mathcal{H}, H_1u=-u''$.
H_1 ist hermitesch: Seien $u,v\in\mathcal{D}(H_1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}(H_1u,v) &= \int_{-\pi}^{\pi} u''v\,dx=[u'v]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi} u'v'\,dx=-\int_{-\pi}^{\pi} u'v'\,dx=\\ &= -[uv']_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi} uv''\,dx=\int_{-\pi}^{\pi} uv''\,dx=(u,H_1v).\end{aligned}$$

H_1 ist wesentlich selbstadjungiert: $\varphi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, k\in\mathbb{Z}$, bilden ein VONS in $L^2((-\pi,\pi))$. Es gilt $\varphi_k\in\mathcal{D}(H_1)$ und $H_1\varphi_k=k^2\varphi_k$, also folgt mit Hilfssatz 4.3.13 : H_1 ist wesentlich selbstadjungiert. H_1 ist natürlich nicht selbstadjungiert, denn es ist $\mathcal{R}(H_1+i)\subset C^0([-\pi,\pi])\subsetneqq L^2((-\pi,\pi))$.

3) $\mathcal{D}(H_2)=\{u\in L^2((-\pi,\pi))\mid \exists N\in\mathbb{N}, u_1,...,u_N\in\mathbb{C}$ mit $u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=-N}^{N}u_ke^{ikx}$ fast überall in $(-\pi,\pi)\}, H_2:\mathcal{D}(H_2)\longrightarrow\mathcal{H}, H_2u=-u''$.
Dann ist $H_2\subset H_1$. Die Zahlen u_k in der Definition von $\mathcal{D}(H_2)$ sind eindeutig bestimmt, es ist nämlich

$$u_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{-ikx}\,dx.$$

$\mathcal{D}(H_2)$ ist dicht in $\mathcal{H}, H_2$, hermitesch. Nach Hilfssatz 4.3.13 ist H_2 wesentlich selbstadjungiert. Offenbar ist $\overline{H}_2\subset\overline{H}_1$. Aufgrund des Hilfssatzes 4.3.14 ist damit schon $\overline{H}_2=\overline{H}_1$.

4) $\mathcal{D}(H_3)=\left\{u\in L^2((-\pi,\pi))\mid \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}k^4\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{-ikx}\,dx\right|^2<\infty\right\}$,

$H_3:\mathcal{D}(H_3)\longrightarrow\mathcal{H}, H_3u=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(x)e^{-ikx}\,dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$.

$$\begin{aligned}u(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)e^{-ikt}\,dt\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx},\\ -u''(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2u_k\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}.\end{aligned}$$

H_3u ist also die zweimal gliedweise differenzierte Reihe, von der L^2-Konvergenz gefordert wird. Offenbar ist $H_2\subset H_3$. Zu zeigen: H_3 ist selbstadjungiert. Zunächst ist H_3 hermitesch, denn es ist für $u,f\in\mathcal{D}(H_3)$:

$$\begin{aligned}(H_3u,f) &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)e^{-ikt}\,dt\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\cdot},f(.)\right)=\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)e^{-ikt}\,dt\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iky}\overline{f(y)}\,dy=\\ &= \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N}k^2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)e^{-ikt}\,dt\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{iky}\overline{f(y)}\,dy=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} u(t)e^{-ikt}\,dt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \overline{f(y)}\,dy = \\
&= \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cdot k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\sqrt{2\pi}} \overline{f(y)}\,dy \cdot \frac{e^{-ikt}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \\
&= \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{\sum_{k=-N}^{N} k^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}}\,dy \cdot \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}}\,dt = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}}\,dy \cdot \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}}\,dt = \\
&= (u, H_3 f).
\end{aligned}
$$

Zum Beweis der Selbstadjungiertheit müssen nun die Gleichungen $(H_3 + i)u = f$ bzw. $(H_3 - i)u = f$ für jedes $f \in L^2((-\pi,\pi))$ gelöst werden. Sei dazu $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$. Sei $f = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} f_k \varphi_k$, dann ist $u_1 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_{1k}\varphi_k$ mit $u_{1k} = \frac{f_k}{k^2 + i}$ die Lösung von $(H_3 + i)u = f$, denn es ist

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 \left| \frac{f_k}{k^2 + i} \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^4 \frac{|f_k|^2}{k^4 + 1} \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k|^2,
$$

also ist $u_1 \in \mathcal{D}(H_3)$. Nun ist

$$
(H_3 + i)u_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 + i)u_{1k}\varphi_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k^2 + i) \cdot \frac{f_k}{k^2 + i}\varphi_k = f.
$$

Für „$-$“ zeigt man analog: Die Lösung von $(H_3 - i)u = f$ ist $u_2 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_{2k}\varphi_k$ mit $u_{2k} = \frac{f_k}{k^2 - i}$. Mit Hilfssatz 4.3.14 erhält man: $H_3 = \overline{H}_2 = \overline{H}_1$.

4.3.16 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\mathcal{R}(H + c) = \mathcal{H}$, dann ist H selbstadjungiert.

Beweis:
Sei $g \in \mathcal{D}(H^*)$. Für $f \in \mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H + c)$ gilt dann: $(Hf, g) = (f, H^*g)$, also auch $((H + c)f, g) = (f, H^*g) + (f, cg) = (f, (H^* + c)g)$. Wegen $\mathcal{R}(H+c) = \mathcal{H}$ gibt es ein $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ mit $(H+c)\varphi = (H^* + c)g$. Also ist

$$
\begin{aligned}
((H + c)f, g) &= (f, (H + c)\varphi) = (f, H\varphi) + (f, c\varphi) = \\
&\overset{\text{H hermitesch}}{=} (Hf, \varphi) + (cf, \varphi) = ((H + c)f, \varphi).
\end{aligned}
$$

Wegen $\mathcal{R}(H + c) = \mathcal{H}$ folgt $g = \varphi$, also ist $\mathcal{D}(H^*) \subset \mathcal{D}(H)$ und damit $H^* = H$.

4.3.17 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $(H + c)^{-1}$ dicht definiert und beschränkt ist in $\mathcal{H}$, d.h. $\|(H + c)^{-1} f\| \leq d \cdot \|f\|$, so ist H wesentlich selbstadjungiert.

Beweis:
Setzt man in die Ungleichung im Satz $f = (H + c)g$ ein, $g \in \mathcal{D}(H)$, so ist $a \cdot \|g\| \leq \|(H + c)g\|$, wobei $a = \frac{1}{d}$ (o.E. $d > 0$). Wenn man zeigen kann, daß $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(H + c)} \subset \mathcal{R}(\overline{H} + c)$, so folgt nach Satz 4.3.16 : $\overline{H}$ ist selbstadjungiert. Weil $\mathcal{D}((H + c)^{-1})$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, hat man $\overline{\mathcal{R}(H + c)} = \mathcal{H}$. Sei nun $g \in \overline{\mathcal{R}(H + c)}$. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(H + c) = \mathcal{D}(H)$ derart, daß $\lim\limits_{n\to\infty} (H + c)f_n = g$. Es ist $\|f_n - f_m\| \leq a \cdot \|(H + c)(f_n - f_m)\|$, also gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Damit ist

$$\|H(f_n - f_m)\| = \|(H + c)(f_n - f_m) - c(f_n - f_m)\| \leq \|(H + c)(f_n - f_m)\| + |c| \cdot \|f_n - f_m\|,$$

d.h. auch die Folge $(Hf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Deshalb ist $f \in \mathcal{D}(\overline{H})$ und $(\overline{H} + c)f = g$, d.h. $g \in \mathcal{R}(\overline{H} + c)$.

Kapitel 5

Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren

5.1 Die Resolvente eines selbstadjungierten Operators

5.1.1 Definition

Sei $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein linearer Operator. Die Resolventenmenge von T ist die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

1) $\mathcal{R}(T - z) = \mathcal{H}$,
2) $(T - z)x = 0 \Longrightarrow x = 0$,
3) $(T - z)^{-1}$ ist beschränkt.

Die Resolventenmenge von T wird mit $\Sigma(T)$ bezeichnet. $S(T) := \mathbb{C}\backslash\Sigma(T)$ heißt Spektrum von T. Wenn $z \in \Sigma(T)$, so heißt $(T - z)^{-1}$ die Resolvente von T in z, die Abbildung

$$R(.,T) : \ \Sigma(T) \longrightarrow L(\mathcal{H},\mathcal{H}), \ z \longmapsto (T - z)^{-1}$$

heißt Resolvente von T.

5.1.2 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq 0$. Dann ist $z \in \Sigma(A)$ und es gilt

$$\| (A - z)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

Beweis:
Nach Hilfssatz 4.3.11 gilt $\| (A - z)f \| \geq |\operatorname{Im} z| \cdot \| f \|$ für $f \in \mathcal{D}(A)$, also sind die Bedingungen 2) und 3) aus der Definition erfüllt. Wie im ersten Teil des Beweises von Satz 4.3.9 folgt: $\mathcal{R}(A - z)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, wenn $\operatorname{Im} z \neq 0$. Ist $\mathcal{R}(A - z) \subsetneq \mathcal{H}$, so gibt es ein $g \in \mathcal{H}, g \neq 0$, mit $((A - z)f, g) = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann ist

$$(Af, g) = (zf, g) = (f, \overline{z}g).$$

Also ist $g \in \mathcal{D}(A), Ag = \overline{z}g$. Weil $g \in \mathcal{D}(A)$, ist aber

$$0 = ((A - z)g, g) = ((\overline{z} - z)g, g) = (\overline{z} - z)(g, g) = (-2\operatorname{Im} z) \cdot \| g \| .$$

Folglich ist $g = 0$, Widerspruch.

5.1.3 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Es gilt $\lambda_0 \in \Sigma(A)$ genau dann, wenn es ein $c > 0$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$\|(A - \lambda_0)f\| \geq c \cdot \|f\| .$$

<u>Beweis</u>:

„$\Rightarrow$" Sei $\lambda_0 \in \Sigma(A)$. Dann gibt es ein $c' > 0$ mit $\|(A - \lambda_0)^{-1}f\| \leq c' \cdot \|f\|$. Setzt man $f = (A - \lambda_0)g$, so ist $\frac{1}{c'} \cdot \|g\| \leq \|(A - \lambda_0)g\|$.

„$\Leftarrow$" Wie im ersten Teil des Beweises von Satz 4.3.9 zeigt man: $\mathcal{R}(A - \lambda_0)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$. Wie im Beweis des vorigen Satzes 5.1.2 folgt: $\mathcal{R}(A - \lambda_0) = \mathcal{H}$.

Für die Resolvente in $z \in \Sigma(A)$ eines selbstadjungierten Operators schreiben wir $R_z = R_z(A) = (A - z)^{-1}$.

5.1.4 Satz (Resolventen-Gleichung)

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Seien $z_1, z_2 \in \Sigma(A)$. Dann ist $R_{z_1} - R_{z_2} = (z_1 - z_2)R_{z_1}R_{z_2}$.

<u>Beweis</u>:
Sei $z \in \Sigma(A)$, dann gilt für $f \in \mathcal{H} : (A - z)R_z f = f$ und für $f \in \mathcal{D}(A) : R_z(A - z)f = f$. Nun gilt für $g \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
(R_{z_1} - R_{z_2})g &= (A - z_1)^{-1}g - (A - z_2)^{-1}g = \\
&= (A - z_1)^{-1}(A - z_2)(A - z_2)^{-1}g - (A - z_1)^{-1}(A - z_1)(A - z_2)^{-1}g = \\
&= (A - z_1)^{-1}\Big((A - z_2)(A - z_2)^{-1} - (A - z_1)(A - z_2)^{-1}\Big)g = \\
&= (A - z_1)^{-1}\Big(A - z_2 - (A - z_1)\Big)(A - z_2)^{-1}g = \\
&= (z_1 - z_2)R_{z_1}R_{z_2}g.
\end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt die Holomorphie von R_z, doch soll dies mit der Resolventenreihe bewiesen werden.

5.1.5 Satz

Sei $z_0 \in \Sigma(A)$ und $|z - z_0| < \|R_{z_0}\|^{-1}$. Dann ist $z \in \Sigma(A)$ und es gilt

$$R_z = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k R_{z_0}^{k+1},$$

wobei die Reihe in der Norm von $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ konvergiert.

<u>Beweis</u>:
Nach Satz 3.2.13 gilt: Ist $B \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B}), \|B\| < 1$, so ist $(I - B)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} B^k$. Nach Voraussetzung ist $|z - z_0| \cdot \|R_{z_0}\| < 1$, also kann Satz 3.2.13 auf $(z - z_0)R_{z_0}$ angewendet werden und man erhält:

$$\Big(I - (z - z_0)R_{z_0}\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(z - z_0)^k R_{z_0}^k.$$

Setze jetzt $C := \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k R_{z_0}^{k+1} = R_{z_0}\Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)^{-1} = \Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)^{-1}R_{z_0}$. Zu zeigen ist: $C = R_z$; $Cf \in \mathcal{D}(A)$ für $f \in \mathcal{H}$.
Es ist

$$\begin{aligned}
(A-z)Cf &= (A-z_0)\Big(I-(z-z_0)(A-z_0)^{-1}\Big)Cf = \\
&= (A-z_0)\Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)\Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)^{-1}R_{z_0}f = \\
&= (A-z_0)(A-z_0)^{-1}f = f.
\end{aligned}$$

Also gilt $\mathcal{R}(A-z) = \mathcal{H}$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
C(A-z)f &= \Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)^{-1}R_{z_0}(A-z)f = \\
&= \Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)^{-1}R_{z_0}(A-z_0)\Big(I-(z-z_0)R_{z_0}\Big)f = \\
&= f.
\end{aligned}$$

Demnach ist $A - z$ bijektiv und C eine beschränkte Inverse. Also ist $z \in \Sigma(A)$.

5.1.6 Folgerung

Ist $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator, so ist $\Sigma(A)$ offen in $\mathbb{C}$.

5.1.7 Folgerung

Für $f, g \in \mathcal{H}$ ist die Funktion $\Phi(z) = (R_z f, g)$ holomorph in $\Sigma(A)$ mit der Entwicklung

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(R_{z_0}^{k+1}f, g)(z-z_0)^k$$

um $z_0, |z-z_0| < \|R_{z_0}\|^{-1}$.

5.1.8 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert, $z \in \Sigma(A)$. Dann ist $R_z^* = R_{\overline{z}}$.

Beweis:
Seien $f, g \in \mathcal{D}(A)$. Dann ist $((A-z)f, g) = (f, (A-\overline{z})g)$. Setzt man $f = R_z u$, $g = R_{\overline{z}}v$, so gilt demnach $(u, R_{\overline{z}}v) = (R_z u, v)$. Wenn f,g $\mathcal{D}(A)$ durchlaufen, so durchlaufen u,v $\mathcal{H}$. Also gilt für alle $u, v \in \mathcal{H} : (R_z u, v) = (u, R_{\overline{z}}v)$, d.h. $R_z^* = R_{\overline{z}}$.

5.2 Spektralscharen

5.2.1 Der endlichdimensionale Fall

Sei $\mathcal{H}$ ein n-dimensionaler unitärer Raum, A ein hermitescher Operator in $\mathcal{H}$. A ist also durch eine hermitesche $n \times n$ - Matrix gegeben, die auch mit A bezeichnet sei. $\varphi_1, ..., \varphi_n$ sei ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren, die zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ gehören. Dann ist

$$\begin{aligned}
f &= \sum_{i=1}^{n}(f, \varphi_i)\varphi_i, \\
Af &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f, \varphi_i)\varphi_i,
\end{aligned}$$

$$R_z f \quad = \quad (A - z)^{-1} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i - z}(f, \varphi_i)\varphi_i \text{ für } \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Jeder Eigenwert kommt so oft vor, wie seine Vielfachheit angibt. Sei für $f \in \mathcal{H}$:

$$E(\lambda)(f) := \begin{cases} \sum\limits_{i, \lambda_i \leq \lambda} (f, \varphi_i)\varphi_i, & \text{wenn } \lambda \geq \lambda_1 \\ 0, & \text{wenn } \lambda < \lambda_1. \end{cases}$$

$E(\lambda)$ ist ein beschränkter, überall erklärter Operator in $\mathcal{H}$. Er ist konstant auf $(-\infty, \lambda_1), (\lambda_n, +\infty)$ und auf $[\lambda_i, \lambda_{i+1})$ für $\lambda_i \neq \lambda_{i+1}$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= 0 \text{ für } \lambda < \lambda_1, \\ E(\lambda) &= I \text{ für } \lambda \geq \lambda_n, \\ \Big(E(\lambda_i + \varepsilon) - E(\lambda_i - \varepsilon)\Big)f &= \sum_{j, \lambda_j = \lambda_i} (f, \varphi_j)\varphi_j, \end{aligned}$$

falls ε so klein, daß in $[\lambda_i - \varepsilon, \lambda_i + \varepsilon)$ kein weiterer Eigenwert liegt. Die $E(\lambda)$ springen, wenn λ durch einen Eigenwert hindurchgeht. Es ist $E(\lambda + 0)f := \lim\limits_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} E(\lambda + \varepsilon)f = E(\lambda)f$ für $f \in \mathcal{H}$. Also ist $E(\lambda)f$ stetig von rechts. Es gilt

$$\begin{aligned} E(\lambda)E(\mu) &= E(\min(\lambda, \mu)), \\ E(\lambda)^* &= E(\lambda), \end{aligned}$$

wie man leicht nachrechnet. Insbesondere ist $E^2(\lambda) = E(\lambda)$, d.h. $E(\lambda)$ ist ein Projektor. Die Menge $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ heißt eine Spektralschar.

5.2.2 Hilfssatz

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{H}$ abgeschlossene Teilräume. Seien P_1, P_2 die (orthogonalen) Projektionen von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$. Dann gilt:

$$\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Longleftrightarrow P_2 P_1 = P_1.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \Longrightarrow P_1 f \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$, also $P_2 P_1 f = P_1 f$ für $f \in \mathcal{H}$.

„$\Leftarrow$ “ Sei $f \in \mathcal{M}_1 \Longrightarrow P_1 f = f$. Es ist $P_2 P_1 f = P_1 f = f$ nach Voraussetzung, also $P_2 f = f \Longrightarrow f \in \mathcal{M}_2$.

5.2.3 Definition

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ sei ein Projektor $E(\lambda)$ in $\mathcal{H}$ gegeben, d.h. $E(\lambda) \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $E^2(\lambda) = E(\lambda), E^*(\lambda) = E(\lambda)$. Es gelte für die $E(\lambda)$:

1) $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$.

2) $E(\lambda + 0)f = \lim\limits_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} E(\lambda + \varepsilon)f = E(\lambda)f$, d.h. der Grenzwert existiert für jedes $f \in \mathcal{H}$ und ist $E(\lambda)f$.

3) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)f = 0$.

4) Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E(\lambda)f = f$.

Dann heißt die Familie $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ Spektralschar.

Warnung: $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E(\lambda) = I$ stimmt i.a. nicht in der Operatorennorm!

5.2.4 Hilfssatz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Dann gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda).$$

Beweis:
Das folgt sofort aus 1).

5.2.5 Definition

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, sei $-\infty < a \leq b < \infty, \Delta = [a, b]$. Dann setzt man

$$E(\Delta) := E(b) - E(a).$$

5.2.6 Hilfssatz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. $E(\Delta)$ ist immer ein Projektor. Sind Δ', Δ'' abgeschlosssene, endliche Intervalle mit $\mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Delta}'' = \emptyset$, so gilt

$$E(\Delta')E(\Delta'') = 0 = E(\Delta'')E(\Delta').$$

Dies ist äquivalent zu

$$E(\Delta')\mathcal{H} =: \mathcal{M}(\Delta') \perp \mathcal{M}(\Delta'') := E(\Delta'')\mathcal{H}.$$

Ist $\Delta \subset \Delta'$, so ist $E(\Delta)E(\Delta') = E(\Delta) = E(\Delta')E(\Delta)$, d.h. es ist $E(\Delta)\mathcal{H} \subset E(\Delta')\mathcal{H}$.

Beweis:
Seien $f, g \in \mathcal{H}, \Delta = [a, b]$. Es ist

$$(E(\Delta)f, g) = (E(b)f, g) - (E(a)f, g) = (f, E(b)g) - (f, E(a)g) = (f, E(\Delta)g),$$

also $E(\Delta)^* = E(\Delta)$. Weiter gilt

$$E(\Delta)E(\Delta) \overset{5.2.4}{=} E^2(b) + E^2(a) - 2E(a)E(b) \overset{1)}{=} E(b) + E(a) - 2E(a) = E(b) - E(a) = E(\Delta).$$

Folglich ist $E(\Delta)$ ein Projektor.
Sei $\Delta' = [a, b], \ \ \Delta'' = [c, d]$. Wegen $\mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Delta}'' = \emptyset$ kann o.E. $c \geq b$ gelten. Nun ist

$$\begin{aligned} E(\Delta')E(\Delta'') &= \Big(E(b) - E(a)\Big)\Big(E(d) - E(c)\Big) = \\ &= E(b)E(d) - E(a)E(d) - E(b)E(c) + E(a)E(c) = \\ &\overset{1)}{=} E(b) - E(a) - E(b) + E(a) = 0. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.2.4 ist dann auch

$$E(\Delta'')E(\Delta') = E(\Delta')E(\Delta'') = 0.$$

Sei jetzt $c \leq a < b \leq d, \ \Delta = [a, b], \ \Delta' = [c, d]$. Dann ist für $g \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} E(\Delta')E(\Delta)g &= \Big(E(d) - E(c)\Big)\Big(E(b) - E(a)\Big)g = \\ &= \Big(E(d)E(b) - E(d)E(a) - E(c)E(b) + E(c)E(a)\Big)g = \\ &= \Big(E(b) - E(a) - E(c) + E(c)\Big)g = E(\Delta)g. \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 5.2.4 folgt auch

$$E(\Delta)E(\Delta')g = E(\Delta)g.$$

5.2.7 Hilfssatz

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta(\varepsilon) = \sup\{\widetilde{\delta} \mid |f(\lambda_1) - f(\lambda_2)| \le \varepsilon,\ \lambda_1, \lambda_2 \in [a,b],\ |\lambda_1 - \lambda_2| \le \widetilde{\delta}\}$. Seien $\mathcal{Z}' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_{m+1})$, $\mathcal{Z}'' = (\lambda''_1, ..., \lambda''_{n+1})$ zwei Zerlegungen von $[a,b]$ mit $a = \lambda'_1 < \lambda'_2 < ... < \lambda'_{m+1} = b$, $a = \lambda''_1 < \lambda''_2 < ... < \lambda''_{n+1} = b$ und

$$\max_{1 \le i \le m} |\lambda'_{i+1} - \lambda'_i| \le \delta(\varepsilon),$$

$$\max_{1 \le k \le n} |\lambda''_{k+1} - \lambda''_k| \le \delta(\varepsilon).$$

Sei

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{i=1}^{m} f(\lambda^*_i)(E(\lambda'_{i+1}) - E(\lambda'_i)), \\ T'' &= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda^{**}_k)(E(\lambda''_{k+1}) - E(\lambda''_k)) \end{aligned}$$

mit $\lambda^*_i \in [\lambda'_i, \lambda'_{i+1}]$, $\lambda^{**}_k \in [\lambda''_k, \lambda''_{k+1}]$.
Dann ist $\| T' - T'' \|_{L(\mathcal{H},\mathcal{H})} \le 2\varepsilon$.

Beweis:
$\mathcal{Z}'''$ sei die Zerlegung von $[a,b]$ mit den Teilungspunkten $\lambda'_1, ..., \lambda'_{m+1}, \lambda''_1, ..., \lambda''_{n+1}$. In $[\lambda'_k, \lambda'_{k+1}]$ mögen die Teilungspunkte $\lambda'_k = \lambda_{k_1}, ..., \lambda_{k_{p_k}}, \lambda_{k_{p_k+1}} = \lambda'_{k+1}$ liegen mit $\lambda'_k = \lambda_{k_1} < \lambda_{k_2} < ... < \lambda_{k_{p_k}} < \lambda_{k_{p_k+1}} = \lambda'_{k+1}$, die zu $\mathcal{Z}'''$ gehören. Sei $\mu_{k_s} \in [\lambda_{k_s}, \lambda_{k_{s+1}}]$, $1 \le k \le m$, $1 \le s \le p_k$. Setze

$$\begin{aligned} T''' &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{p_k} f(\mu_{k_s}) \Big(E(\lambda_{k_{s+1}}) - E(\lambda_{k_s}) \Big). \\ \text{Es ist} \qquad T' &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{p_k} f(\lambda^*_k) \Big(E(\lambda_{k_{s+1}}) - E(\lambda_{k_s}) \Big), \\ \text{also hat man} \quad T''' - T' &= \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{p_k} \Big(f(\mu_{k_s}) - f(\lambda^*_k) \Big) \Big(E(\lambda_{k_{s+1}}) - E(\lambda_{k_s}) \Big). \end{aligned}$$

Es gilt: Sind $\Delta_1, ..., \Delta_q$ abgeschlossene Intervalle mit $\mathring{\Delta}_i \cap \mathring{\Delta}_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q \in \mathbb{C}$, so ist

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{q} \varepsilon_j E(\Delta_j) f \right\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_i \overline{\varepsilon_j} \Big(E(\Delta_i) f, E(\Delta_j) f \Big) \overset{5.2.6}{=} \sum_{i,j=1}^{q} \varepsilon_i \overline{\varepsilon_j} \Big(E(\Delta_j) E(\Delta_i) f, f \Big) = \\ &\overset{5.2.6}{=} \sum_{j=1}^{q} |\varepsilon_j|^2 \Big(E(\Delta_j) f, f \Big). \end{aligned}$$

Setzt man $\Delta_{k_s} = [\lambda_{k_s}, \lambda_{k_{s+1}}]$, $\varepsilon_{k_s} = f(\mu_{k_s}) - f(\lambda^*_k)$, so erhält man wegen $|\varepsilon_{k_s}| \le \varepsilon$ nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \| (T' - T''') f \|^2 &\le \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=1}^{p_k} \Big(E(\Delta_{k_s}) f, f \Big) = \varepsilon^2 \Big((E(b) - E(a)) f, f \Big) = \\ &= \varepsilon^2 \Big((E(b) - E(a)) f, (E(b) - E(a)) f \Big) \overset{5.2.6}{=} \varepsilon^2 \, \| (E(b) - E(a)) f \|^2 \le \\ &\le \varepsilon^2 \cdot \| E(b) - E(a) \|^2 \cdot \| f \|^2 \le \varepsilon^2 \cdot \| f \|^2, \end{aligned}$$

weil $E(b) - E(a)$ ein Projektor ist. Analog zeigt man:

$$\| (T'' - T''') f \|^2 \le \varepsilon^2 \cdot \| f \|^2 .$$

Damit folgt schließlich

$$\| T' - T'' \| \le \| T' - T''' \| + \| T''' - T'' \| \le 2\varepsilon,$$

also die Behauptung.

Hilfssatz 5.2.7 ermöglicht die folgende Definition:

5.2.8 Definition

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Sei $\Delta = [a,b], \varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Für $n = 1,2,...$ seien abgeschlossene Intervalle $\Delta_1^{(n)}, ..., \Delta_{k_n}^{(n)}$ gegeben mit $\Delta = \bigcup_{j=1}^{k_n} \Delta_j^{(n)}$, $\mathring{\Delta}_i^{(n)} \cap \mathring{\Delta}_j^{(n)} = \emptyset$ für $i \neq j$, $\lim_{n\to\infty} \max |\Delta_i^{(n)}| = 0$. Dann konvergieren die beschränkten, überall erklärten Operatoren

$$T_n = \sum_{i=1}^{k_n} \varphi\left(\lambda_i^{(n)}\right) E\left(\Delta_i^{(n)}\right)$$

in der Norm von $L(\mathcal{H},\mathcal{H})$. Das Grenzelement hängt nicht von der Auswahl der Zerlegungsfolge $\left(\Delta_1^{(n)}, ..., \Delta_{k_n}^{(n)}\right)$ ab, wenn diese die Voraussetzungen in Hilfssatz 5.2.7 erfüllt. Es hängt auch nicht von der Auswahl der $\lambda_i^{(n)} \in \Delta_i^{(n)}$ ab. Es wird mit

$$\int_a^b \varphi(\lambda) dE(\lambda) = \int_\Delta \varphi(\lambda) dE(\lambda) = \varphi(E, \Delta)$$

bezeichnet.

5.2.9 Definition

Sei I ein endliches, abgeschlossenes, offenes oder halboffenes Intervall, sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f heißt von beschränkter Variation, wenn es eine Zahl $c \in \mathbb{R}_0^+$ gibt, so daß für jedes $(n+1)-$Tupel $(x_0, ..., x_n), x_i \in I$ für $0 \le i \le n, x_0 < x_1 < ... < x_n, n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le c.$$

Das Infimum aller solcher c heißt Totalvariation von f auf I, kurz $T(I) = T_f(I)$. Ist $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, so heißt f genau dann von beschränkter Variation, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ von beschränkter Variation sind.
f heißt von beschränkter Variation auf $[a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty)$, wenn es ein c wie oben gibt, so daß

$$\begin{array}{llllllll} T_f([a,b]) < c & \text{für alle b,} & a & < & b & < & +\infty, & \text{bzw.} \\ T_f([a,b]) < c & \text{für alle a} & -\infty & < & a & < & b\ , & \text{bzw.} \\ T_f([a,b]) < c & \text{für alle a,b,} & -\infty & < & a & < & b & < +\infty. \end{array}$$

5.2.10 Bemerkungen

1) Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend, $|f|$ beschränkt. Dann ist f von beschränkter Variation.

2) Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ von beschränkter Variation. Dann gibt es $f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}, f_i$ von beschränkter Variation und monoton steigend, so daß $f = f_1 - f_2$.

3) Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, $f \in \mathcal{H}$. Dann ist die Abbildung $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f, f)$ monoton steigend und beschränkt, also von beschränkter Variation.

4) Sei $I = [a,b], \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und von beschränkter Variation, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $\left(x_0^{(n)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls [a,b] mit $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_{k_n}^{(n)} = b$, es gelte $\delta(n) = \max_{1\le m\le k_n} \left(x_m^{(n)} - x_{m-1}^{(n)}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Seien $\xi_m^{(n)} \in \left[x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}\right]$. Dann konvergieren die Summen

$$\sum_{m=1}^{k_n} f(\xi_m^{(n)}) \left(\alpha(x_m^{(n)}) - \alpha(x_{m-1}^{(n)})\right)$$

gegen einen Grenzwert für $n \longrightarrow \infty$. Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Zerlegungsfolge $\left(x_0^{(n)}, ..., x_{k_n}^{(n)}\right)$ von $[a,b]$ und der Auswahl der $\xi_m^{(n)} \in \left[x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)}\right]$.

Beweis:

zu 1) Es ist
$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) = f(x_n) - f(x_0) \leq 2 \sup_{x \in I} |f(x)|,$$
also ist f von beschränkter Variation.

zu 2) Sei $a := \inf\{\xi \mid \xi \in I\}$. Setze $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = T_f(I \cap [a,x])$ und $f_2(x) = T_f(I \cap [a,x]) - f(x)$. Dann ist $f = f_1 - f_2, f_1, f_2$ sind monoton steigend und von beschränkter Variation. Für $I = [a,b]$ kann man auch wählen:
$$f_1(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) - T_f([a,x])\Big),$$
$$f_2(x) = \frac{1}{2}\Big(- T_f([a,x]) - f(x)\Big).$$
Die Größen rechts heißen positive und negative unbestimmte Variation von f.

zu 3) Sei $a < b,\ \Delta := [a,b]$. Dann ist
$$\begin{aligned} \Big(E(b)f,f\Big) - \Big(E(a)f,f\Big) &= \Big((E(b) - E(a))f,f\Big) = \Big(E(\Delta)f,f\Big) = \\ &\overset{5.2.6}{=} \Big(E(\Delta)^2 f,f\Big) \overset{5.2.6}{=} \Big(E(\Delta)f, E(\Delta)f\Big) = \\ &= \| E(\Delta)f \|^2 \geq 0. \end{aligned}$$
Also ist obige Abbildung monoton steigend. Wegen $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)f = 0$ und $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E(\lambda)f = f$ ist $\lim\limits_{\lambda \to -\infty}(E(\lambda)f,f) = 0$ und $\lim\limits_{\lambda \to \infty}(E(\lambda)f,f) = \| f \|^2$, also ist die Abbildung auch beschränkt und nach 1) von beschränkter Variation.

zu 4) ohne Beweis.

5.2.11 Definition (Stieltjes Integral[1])

Sei $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend und von beschränkter Variation, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Der nach 5.2.10, 4) existierende Grenzwert der Summen $\sum\limits_{m=1}^{k_n} f(\xi_m^{(n)}) \left(\alpha(x_m^{(n)}) - \alpha(x_{m-1}^{(n)})\right)$ wird mit
$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f\, d\alpha$$
bezeichnet. Dieser Grenzwert heißt Stieltjes-Integral der Funktion f(x) nach der Funktion $\alpha(x)$. Das Riemann-Integral[2] ist ein Sonderfall des Stieltjes-Integrals, der sich für $\alpha(x) = x$ ergibt.
Hat $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkte Variation und ist $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ eine Zerlegung wie in 5.2.10, 2), so setzt man
$$\int_a^b f(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha_1 - \int_a^b f\, d\alpha_2.$$

[1]Thomas Jean Stieltjes (1856 - 1894)
[2]Bernhard Riemann (1826 - 1866)

Ist $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation, $\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha, \alpha_2 = \operatorname{Im}\alpha$, so setzt man $\int\limits_a^b f\, d\alpha = \int\limits_a^b f\, d\alpha_1 + i \int\limits_a^b f\, d\alpha_2$.
Ist α von beschränkter Variation auf $[a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, +\infty)$, so setzt man

$$\begin{aligned}
\int_a^{+\infty} |d\alpha(x)| &:= \inf\{c \mid c > T_\alpha([a, b]) \forall b, \quad a < b < +\infty\}, \\
\int_{-\infty}^{b} |d\alpha(x)| &:= \inf\{c \mid c > T_\alpha([a, b]) \forall a, \quad -\infty < a < b\}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} |d\alpha(x)| &:= \inf\{c \mid c > T_\alpha([a, b]) \forall a, b, \quad -\infty < a < b < +\infty\}.
\end{aligned}$$

Wenn $f : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt ist, wenn $\alpha : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation ist und $\lim\limits_{b \to +\infty, a \to -\infty} \int\limits_a^b f\, d\alpha$ existiert, so setzt man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\, d\alpha = \lim_{b \to +\infty, a \to -\infty} \int_a^b f\, d\alpha.$$

Die Integrale $\int\limits_a^{+\infty} f\, d\alpha$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f\, d\alpha$ werden analog erklärt. Alle diese Definitionen können auf komplexwertige f durch Betrachtung von $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ übertragen werden.

Im folgenden soll die Funktion $(E(\lambda)f, g), f, g \in \mathcal{H}$ mit der Theorie der Funktionen von beschränkter Variation studiert werden.

5.2.12 Satz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Dann hat die Funktion $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f, g)$ beschränkte Variation auf $(-\infty, +\infty)$ für alle $f, g \in \mathcal{H}$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |d(E(\lambda)f, g)| \le \|f\| \cdot \|g\| .$$

Ist $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig auf $\Delta = [a, b]$, so ist

$$(\varphi(E, \Delta)f, g) = \int_\Delta \varphi(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g).$$

<u>Beweis</u>:

Sei $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta_i$, $\mathring{\Delta}_j \cap \mathring{\Delta}_k = \emptyset$ für $j \neq k$. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |(E(\Delta_i)f, g)| &\overset{5.2.6}{=} \sum_{i=1}^{n} |(E(\Delta_i)f, E(\Delta_i)g)| \overset{1.1.14}{\le} \sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)f\| \cdot \|E(\Delta_i)g\| \le \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)f\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|E(\Delta_i)g\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{n}(E(\Delta_i)f,f)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(E(\Delta_i)g,g)\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \|E(\Delta)f\| \cdot \|E(\Delta)g\| \leq \|f\| \cdot \|g\| \,.
\end{aligned}
$$

Da Δ beliebig war, ist damit bewiesen, daß die Funktion $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f,g)$ beschränkte Variation auf $(-\infty,+\infty)$ hat und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |d(E(\lambda)f,g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ gilt.

Für den zweiten Teil wird $\Delta = [a,b]$ in abgeschlossene Intervalle $\Delta_i^{(n)}$ zerlegt, sei also $\Delta = \bigcup\limits_{i=1}^{k_n} \Delta_i^{(n)}$, $\mathring{\Delta}_j^{(n)} \cap \mathring{\Delta}_k^{(n)} = \emptyset$ für $j \neq k$, $\max\limits_{1\leq i\leq k_n} |\Delta_i^{(n)}| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sei $T_n = \sum\limits_{i=1}^{k_n} \varphi(\lambda_i^{(n)})E(\Delta_i^{(n)})$. Dann ist

$$
(T_nf,g) = \sum_{i=1}^{k_n} \varphi(\lambda_i^{(n)}) \left(E(\Delta_i^{(n)})f,g\right)
$$

und es gilt

$$
\lim_{n\to\infty}(T_nf,g) = (\varphi(E,\Delta)f,g) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} \varphi(\lambda_i^{(n)}) \left(E(\Delta_i^{(n)})f,g\right) = \int_{\Delta} \varphi(\lambda)d\,(E(\lambda)f,g),
$$

also

$$
(\varphi(E,\Delta)f,g) = \int_{\Delta} \varphi(\lambda)d\,(E(\lambda)f,g).
$$

5.2.13 Satz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, $\Delta = [a,b], \varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(E,\Delta)\| &\leq \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|, \\
\|\varphi(E,\Delta)f\| &\leq \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)| \cdot \|E(\Delta)f\| \,.
\end{aligned}
$$

<u>Beweis</u>:
Seien die Bezeichnungen wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 5.2.12. Sei $f\in \mathcal{H}$. Es ist

$$
\begin{aligned}
\|T_nf\|^2 &= \sum_{i=1}^{k_n} |\varphi(\lambda_i^{(n)})|^2 \cdot \|E(\Delta_i^{(n)})f\|^2 \leq \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \|E(\Delta_i^{(n)})f\|^2 = \\
&= \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \left(E(\Delta_i^{(n)})f, E(\Delta_i^{(n)})f\right) = \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 \cdot \sum_{i=1}^{k_n} \left(E(\Delta_i^{(n)})f,f\right) = \\
&= \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 \cdot (E(\Delta)f,f) = \max_{\lambda\in\Delta} |\varphi(\lambda)|^2 \cdot \|E(\Delta)f\|^2 \,.
\end{aligned}
$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} T_nf = \varphi(E,\Delta)f$ und $\|E(\Delta)f\| \leq \|f\|$ gelten die beiden Abschätzungen im Satz.

5.2.14 Satz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, sei $\Delta = [a,b]$, $\varphi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\varphi(E,\Delta)^* = \overline{\varphi}(E,\Delta)$, wobei $\overline{\varphi}(\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)}$ für $\lambda \in \Delta$.

Beweis:

$$\begin{aligned}(\varphi(E,\Delta)f,g) &= \int\limits_{\Delta}\varphi(\lambda)\,d(E(\lambda)f,g) = \int\limits_{\Delta}\varphi(\lambda)\,d(f,E(\lambda)g) = \int\limits_{\Delta}\varphi(\lambda)\,d\overline{(E(\lambda)g,f)} = \\ &= \overline{\int\limits_{\Delta}\overline{\varphi}(\lambda)\,d(E(\lambda)f,g)} = \overline{(\overline{\varphi}(E,\Delta)g,f)} = (f,\overline{\varphi}(E,\Delta)g).\end{aligned}$$

5.2.15 Satz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt. Dann existiert $\lim\limits_{a\to-\infty,b\to+\infty}\int\limits_a^b \varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f$ für jedes $f \in \mathcal{H}$, der Grenzwert wird bezeichnet mit

$$\varphi(E)f = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f.$$

Dabei gilt $\varphi(E) \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ und

$$\|\varphi(E)\| \leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|\varphi(\lambda)|\ .$$

Vorbemerkung:
Die Funktion $\alpha : \lambda \longmapsto (E(\lambda)f,f), \lambda \in \mathbb{R}$ ist monoton steigend, denn es ist für $\lambda < \mu$:

$$\begin{aligned}\alpha(\mu)-\alpha(\lambda) &= \Big((E(\mu)-E(\lambda))f,f\Big) = \Big(E([\lambda,\mu])f,f\Big) = \\ &= \Big(E([\lambda,\mu])f,E([\lambda,\mu])f\Big) = \|E([\lambda,\mu])f\|^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Beweis:
Sei $a' < a < b' < b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_{a'}^{b'}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f - \int\limits_a^b\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f\right\| &= \left\|\int\limits_{a'}^{a}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f + \int\limits_b^{b'}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f\right\| \leq \\ &\leq \left\|\int\limits_{a'}^{a}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f\right\| + \left\|\int\limits_b^{b'}\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f\right\| \leq \\ &\overset{5.2.13}{\leq} \sup_{a'\leq\lambda\leq a}|\varphi(\lambda)|\cdot\|(E(a)-E(a'))f\| + \sup_{b\leq\lambda\leq b'}|\varphi(\lambda)|\cdot\|(E(b')-E(b))f\| = \\ &= \sup_{a'\leq\lambda\leq a}|\varphi(\lambda)|\cdot\Big((E(a)-E(a'))f,f\Big)^{\frac{1}{2}} + \sup_{b\leq\lambda\leq b'}|\varphi(\lambda)|\cdot\Big((E(b')-E(b))f,f\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \sup_{\lambda\leq a}|\varphi(\lambda)|\cdot\Big(E(a)f,f\Big)^{\frac{1}{2}} + \sup_{b\leq\lambda}|\varphi(\lambda)|\cdot\Big((I-E(b))f,f\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Das letzte Ungleichheitszeichen folgt wegen der Monotonie von $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f,f)$ (siehe Vorbemerkung) und $E(\lambda)f \longrightarrow 0$ für $\lambda \longrightarrow -\infty, E(\lambda)f \longrightarrow f$ für $\lambda \longrightarrow +\infty$.

Mit $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$ folgt die Existenz von $\lim\limits_{a\to-\infty,b\to+\infty}\int\limits_a^b\varphi(\lambda)\,dE(\lambda)f$. Aus der zweiten Ungleichung in Satz 5.2.13 erhält man auch

$$\|\varphi(E)\| \leq \sup_{\lambda\in\mathbb{R}}|\varphi(\lambda)|\ .$$

Zusatz: Gilt $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} \varphi(\lambda) = 0$, so ist

$$\lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \left\| \int_a^b \varphi(\lambda)\, dE(\lambda) - \varphi(E) \right\| = 0.$$

Beweis:
In diesem Fall kann man in obiger Rechnung weiter abschätzen:

$$\sup_{\lambda \leq a} |\varphi(\lambda)| \cdot \Big(E(a)f, f\Big)^{\frac{1}{2}} + \sup_{b \leq \lambda} |\varphi(\lambda)| \cdot \Big((I - E(b))f, f\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{\lambda \leq a} |\varphi(\lambda)| \cdot \|f\| + \sup_{b \leq \lambda} |\varphi(\lambda)| \cdot \|f\|,$$

wählt man also a, b genügend groß, so gilt:

$$\left\| \int_a^b \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)f - \int_a^b \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)f \right\| \leq \varepsilon \cdot \|f\|.$$

Aus der Formel für $\|T_n f\|^2$ im Beweis von Satz 5.2.13 ergibt sich für $a < b, f \in \mathcal{H}$ und $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig:

$$\left\| \int_a^b \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)f \right\|^2 = \int_a^b |\varphi(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f).$$

Ist $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, so gilt auch

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f).$$

5.2.16 Satz

Seien $\Delta_1 = [a, b], \Delta_2 = [c, d]$ kompakte Intervalle mit $\mathring{\Delta}_1 \cap \mathring{\Delta}_2 = \emptyset$. Seien $\varphi : \Delta_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \psi : \Delta_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Dann gilt:

$$\varphi(E, \Delta_1)\psi(E, \Delta_2) = 0.$$

Beweis:
Approximiert man $\varphi(E, \Delta_1), \psi(E, \Delta_2)$ durch Riemannsche Summen, so ergibt sich:

$$\left(\sum_{i=1}^{k_n} \varphi(\lambda_i^{(n)}) E(\Delta_{1,i}^{(n)}) \right) \left(\sum_{j=1}^{p_m} \psi(\mu_j^{(m)}) E(\Delta_{2,j}^{(m)}) f \right) = \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{p_m} \varphi(\lambda_i^{(n)}) \psi(\mu_j^{(m)}) E(\Delta_{1,i}^{(n)}) E(\Delta_{2,j}^{(m)}) f \overset{5.2.6}{=} 0,$$

da $\mathring{\Delta}_{1,i}^{(n)} \cap \Delta_{2,j}^{(m)} = \emptyset$, also ist $\varphi(E, \Delta_1)\psi(E, \Delta_2) = 0$.

5.2.17 Satz

Seien $\varphi, \psi : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig auf dem kompakten Intervall $\Delta = [a, b]$. Dann gilt:

$$\varphi(E, \Delta)\psi(E, \Delta) = (\varphi\psi)(E, \Delta).$$

Beweis:
Wieder werden $\varphi(E, \Delta), \psi(E, \Delta)$ mit Riemannschen Summen approximiert, es ist

$$\sum_{i=1}^{k_n} \varphi\left(\lambda_i^{(n)}\right) E\left(\Delta_i^{(n)}\right) \sum_{j=1}^{n} \psi\left(\lambda_j^{(n)}\right) E\left(\Delta_j^{(n)}\right) = \sum_{i=1}^{k_n} \varphi\left(\lambda_i^{(n)}\right) \psi\left(\lambda_i^{(n)}\right) E\left(\Delta_i^{(n)}\right),$$

da $\mathring{\Delta}_i^{(n)} \cap \mathring{\Delta}_j^{(n)} = \emptyset$ für $i \neq j$. Hieraus erhält man die Behauptung für die Grenzwerte.

5.3 Die Stieltjes-Umkehrformel. Weitere Eigenschaften von Funktionen beschränkter Variation.

5.3.1 Bemerkungen (Eigenschaften von Funktionen beschränkter Variation)

Sei $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation. Es gilt:

1) Die Grenzwerte $\rho(\lambda + 0) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \rho(\lambda + \varepsilon)$, $\rho(\lambda - 0) = \lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \rho(\lambda - \varepsilon)$ und $\rho(-\infty) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} \rho(\lambda)$ existieren.

2) Die Menge der Unstetigkeitsstellen von ρ ist höchstens abzählbar.

Beweis:
siehe RIESZ - NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis

5.3.2 Satz (Stieltjes-Umkehrformel)

Sei $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation. Dann existiert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}} \, \mathrm{d}\rho(\lambda)$ für $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}\, \mathrm{z} \neq 0$ und die Funktion $\mathrm{F}(\mathrm{z}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}} \, \mathrm{d}\rho(\lambda), \mathrm{Im}\, \mathrm{z} \neq 0$, ist holomorph. Es gilt

$$|\mathrm{F}(\mathrm{z})| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, \mathrm{z}|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \,.$$

Für $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$ gilt die Stieltjes[1] - Umkehrformel:

$$\frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_2 + 0) + \rho(\lambda_2 - 0)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_1 + 0) + \rho(\lambda_1 - 0)\Big) = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Big(\mathrm{F}(\lambda + \mathrm{i}\varepsilon) - \mathrm{F}(\lambda - \mathrm{i}\varepsilon)\Big) \, \mathrm{d}\lambda.$$

Beweis:

Sei $\mathrm{a} = \lambda_1 < \ldots < \lambda_{\mathrm{n}} < \lambda_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{b}$. Dann gilt für $\mathrm{Im}\, \mathrm{z} \neq 0, \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z}} \Big(\rho(\lambda_{\mathrm{i}+1}) - \rho(\lambda_{\mathrm{i}})\Big) - \int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}} \, \mathrm{d}\rho(\lambda) \right| &= \left| \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \int\limits_{\lambda_{\mathrm{i}}}^{\lambda_{\mathrm{i}+1}} \left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z}} - \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}} \right) \mathrm{d}\rho(\lambda) \right| \leq \\
&\leq \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \max_{\lambda_{\mathrm{i}} \leq \lambda \leq \lambda_{\mathrm{i}+1}} \left| \frac{\lambda - \lambda_{\mathrm{i}}}{(\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z})(\lambda - \mathrm{z})} \right| \cdot \int\limits_{\lambda_{\mathrm{i}}}^{\lambda_{\mathrm{i}+1}} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \leq \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{\delta}{|\mathrm{Im}\, \mathrm{z}|^2} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \int\limits_{\lambda_{\mathrm{i}}}^{\lambda_{\mathrm{i}+1}} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| = \frac{\delta}{|\mathrm{Im}\, \mathrm{z}|^2} \int\limits_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \leq \frac{\delta}{|\mathrm{Im}\, \mathrm{z}|^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho(\lambda)|,
\end{aligned}$$

wobei $\delta := \max\limits_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}} (\lambda_{\mathrm{i}+1} - \lambda_{\mathrm{i}})$. $(*)$ gilt wegen $\lambda_{\mathrm{i}}, \lambda \in \mathbb{R}$, denn es ist

$$\begin{aligned}
|(\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z}) \cdot (\lambda - \mathrm{z})| &= |\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z}| \cdot |\lambda - \mathrm{z}| = \\
&= \sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda_{\mathrm{i}} - \mathrm{z}))^2 + (\mathrm{Im}\, \mathrm{z})^2} \cdot \sqrt{(\mathrm{Re}(\lambda - \mathrm{z}))^2 + (\mathrm{Im}\, \mathrm{z})^2} \geq |\mathrm{Im}\, \mathrm{z}|^2 \,.
\end{aligned}$$

[1] Thomas Jean Stieltjes (1856-1894)

Daher konvergieren für $\delta > 0$ die Riemannschen Summen gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{\mathrm{Im}\, z \neq 0\}$. Also ist $\int\limits_a^b \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda)$ holomorph in $\{\mathrm{Im}\, z \neq 0\}$. (Dies folgt aus dem Satz von Morera[1]: Ist $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt für jedes Rechteck $Q \subset D$: $\int\limits_{\partial Q} f(\xi)\, d\xi = 0$, so ist f holomorph. Die Integralbedingung gilt für jedes Element der Folge, die Folge konvergiert gleichmäßig, also dürfen Limes und Integral vertauscht werden und die Integralbedingung gilt auch für die Grenzfunktion.)
Wegen

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_c^d \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda) \right| &\leq \max_{c \leq \lambda \leq d} \left| \frac{1}{\lambda - z} \right| \int\limits_c^d |\, d\rho(\lambda)\,| \leq \\
&\leq \max_{c \leq \lambda \leq d} \frac{1}{\sqrt{|\,\mathrm{Im}\, z\,|^2 + |\,\mathrm{Re}\,(z - \lambda)\,|^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, d\rho(\lambda)\,| \leq \\
&\leq \frac{1}{|\,\mathrm{Im}\, z\,|} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, d\rho(\lambda)\,|
\end{aligned}$$

existiert $\lim\limits_{a \to -\infty, b \to \infty} \int\limits_a^b \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda)$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{\mathrm{Im}\, z \neq 0\}$. Deshalb ist auch F holomorph und es gilt die im Satz angegebene Abschätzung für $|\,F(z)\,|$.
Sei nun $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$F(\lambda + i\varepsilon) - F(\lambda - i\varepsilon) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu - (\lambda + i\varepsilon)} - \frac{1}{\mu - (\lambda - i\varepsilon)} \right) d\rho(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2}\, d\rho(\mu).$$

Deshalb ist für $\lambda_1 < \lambda_2$:

$$D(\varepsilon) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Big(F(\lambda + i\varepsilon) - F(\lambda - i\varepsilon) \Big)\, d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2}\, d\lambda \right) d\rho(\mu).$$

Die Reihenfolge der Intergrale darf dabei wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ vertauscht werden. Das innere Integral ergibt

$$K(\mu, \varepsilon) = K(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon) := \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2}\, d\lambda = \frac{1}{\pi} \left[\arctan\left(\frac{\lambda - \mu}{\varepsilon} \right) \right]_{\lambda = \lambda_1}^{\lambda = \lambda_2}.$$

Die Funktion K besitzt die folgenden Eigenschaften:

1) $0 < K(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon) < 1$.
2) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} K(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon) = 0$, wenn $\mu \leq \lambda_1 - \eta$ oder $\mu \geq \lambda_2 + \eta$, wobei $\eta > 0$ eine feste Zahl ist. Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $\mu \leq \lambda_1 - \eta$ und $\mu \geq \lambda_2 - \eta$.
3) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} K(\mu, \lambda_1, \lambda_2, \varepsilon) = 1$, wenn $\mu \in [\lambda_1 + \eta, \lambda_2 - \eta]$, wobei $\eta > 0$ ist mit $0 < \eta < \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$. Die Konvergenz ist gleichmäßig für $\mu \in [\lambda_1 + \eta, \lambda_2 - \eta]$.

Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, so existiert für $a < c \leq b$ stets

$$\int\limits_a^{c-0} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) := \lim_{\delta \downarrow 0} \int\limits_a^{c-\delta} f(\lambda)\, d\rho(\lambda),$$

[1] Giacinto Morera (1856-1909)

denn für $0 < \delta'' < \delta' < c - a$ gilt:

$$\left| \int_{a}^{c-\delta''} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_{a}^{c-\delta'} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) \right| = \left| \int_{c-\delta'}^{c-\delta''} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) \right| =$$

$$= \left| \int_{c-\delta'}^{c-\delta''} \Big(f(\lambda) - f(c)\Big)\, d\rho(\lambda) + f(c) \cdot \Big(\rho(c-\delta'') - \rho(c-\delta')\Big) \right| \leq$$

$$\leq |f(c) - f(c-\delta')| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| + |f(c)| \cdot |\rho(c-\delta'') - \rho(c-\delta')| .$$

Da f stetig ist und ρ einen linksseitigen Grenzwert in c besitzt (nach 5.3.1), erhält man die Existenz von $\int_{a}^{c-0} f(\lambda)\, d\rho(\lambda)$. Ebenso existiert $\int_{c+0}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{c+\delta}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda)$ für $a \leq c < b$. Es ist

$$\int_{a}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{a}^{c-\delta} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int_{c+\delta}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

für $c \in (a,b), 0 < \delta < \min\{c-a, b-c\}$, denn diese Gleichung gilt mit Riemannschen Summen. Für $\delta \longrightarrow 0$ folgt daraus

$$\int_{a}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{a}^{c-0} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) + \int_{c+0}^{b} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) + f(c)\Big(\rho(c+0) - \rho(c-0)\Big),$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \to 0} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) &= \lim_{\delta \to 0} \left[\int_{c-0}^{c+\delta} f(\lambda) - f(c)\, d\rho(\lambda) + f(c) \cdot \Big(\rho(c+\delta) - \rho(c-\delta)\Big) \right] = \\ &= f(c)\Big(\rho(c+0) - \rho(c-0)\Big), \end{aligned}$$

das Integral verschwindet ja für $\delta \to 0$ wegen der Stetigkeit von f. Damit erhält man nun:

$$\begin{aligned} D(\varepsilon) = \quad & \int_{-\infty}^{\lambda_1-\eta} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-0} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_1-0}^{\lambda_1+0} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \\ + & \int_{\lambda_1+0}^{\lambda_1+\eta} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_2-\eta}^{\lambda_2-0} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \\ + & \int_{\lambda_2-0}^{\lambda_2+0} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_2+0}^{\lambda_2+\eta} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu) + \int_{\lambda_2+\eta}^{\infty} K(\mu,\varepsilon)\, d\rho(\mu). \end{aligned}$$

Die Integrale seien nun der Reihe nach mit $I_1, ..., I_9$ bezeichnet. Wie oben gesehen, gilt

$$I_3 = K(\lambda_1, \varepsilon) \cdot \Big(\rho(\lambda_1 + 0) - \rho(\lambda_1 - 0)\Big),$$

$$I_7 = K(\lambda_2, \varepsilon) \cdot \Big(\rho(\lambda_2 + 0) - \rho(\lambda_2 - 0)\Big).$$

Wegen

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{K}(\lambda_1,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\varepsilon} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{K}(\lambda_2,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(-\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}$$

gibt es zu vorgegebenem $\delta > 0$ ein $\varepsilon_1(\delta)$, so daß für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(\delta)$ gilt:

$$\left|\mathrm{I}_3(\varepsilon) + \mathrm{I}_7(\varepsilon) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_1+0) - \rho(\lambda_1-0)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_2+0) - \rho(\lambda_2-0)\Big)\right| < \delta.$$

Weiter gibt es wegen der Eigenschaft 3) von K zu vorgegebenen $\delta,\eta > 0$ ein $\varepsilon_2(\eta,\delta)$, so daß für $0 < \varepsilon < \varepsilon_2(\eta,\delta)$ gilt:

$$\left|\mathrm{I}_5(\varepsilon,\eta) - \int\limits_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta}\mathrm{d}\rho(\lambda)\right| \leq \left(\sup_{\lambda_1+\eta\leq\lambda\leq\lambda_2-\eta}|\mathrm{K}(\lambda,\varepsilon)-1|\right)\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{d}\rho(\lambda)| < \delta.$$

Analog erhält man mit Hilfe der Eigenschaft 2) von K: Zu vorgegebenen $\delta,\eta > 0$ gibt es ein $\varepsilon_3(\eta,\delta)$, so daß für $0 < \varepsilon < \varepsilon_3(\eta,\delta)$:

$$|\mathrm{I}_1(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_9(\varepsilon,\eta)| \leq \delta.$$

Zur Abschätzung der restlichen Integrale sieht man zunächst für monoton wachsendes reellwertiges ρ durch Betrachten der Riemannschen Summen:

$$\limsup_{\gamma\downarrow 0}\int\limits_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\gamma}|\mathrm{d}\rho(\mu)| \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \lim_{\gamma\downarrow 0}\Big(\rho(\lambda_1-\gamma) - \rho(\lambda_1-\eta)\Big) = \rho(\lambda_1-0) - \rho(\lambda_1-\eta),$$

d.h., in diesem Fall gilt nach Bemerkung 5.3.1

$$\lim_{\eta\to 0}\left(\limsup_{\gamma\downarrow 0}\int\limits_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\gamma}|\mathrm{d}\rho(\mu)|\right) = 0.$$

Bemerkung 5.2.10, 2), liefert dies nun auch für allgemeines ρ. Daraus folgt mit der Eigenschaft 1) von K:

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta\to 0}|\mathrm{I}_2(\varepsilon,\eta)| &= \lim_{\eta\to 0}\left|\lim_{\gamma\downarrow 0}\int\limits_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\gamma}\mathrm{K}(\mu,\varepsilon)\,\mathrm{d}\rho(\mu)\right| \leq \\
&\leq \lim_{\eta\to 0}\left(\limsup_{\gamma\downarrow 0}\max_{\lambda_1-\eta\leq\mu\leq\lambda_1-\gamma}|\mathrm{K}(\mu,\varepsilon)|\cdot\int\limits_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\gamma}|\mathrm{d}\rho(\mu)|\right) \leq \\
&\overset{1)}{\leq} \lim_{\eta\to 0}\left(\limsup_{\gamma\downarrow 0}\int\limits_{\lambda_1-\eta}^{\lambda_1-\gamma}|\mathrm{d}\rho(\mu)|\right) = 0.
\end{aligned}$$

Genauso kann man bei $\mathrm{I}_4, \mathrm{I}_6, \mathrm{I}_8$ vorgehen und erhält schließlich: Zu vorgegebenem $\delta > 0$ gibt es ein $\eta_0(\delta)$, so daß für $0 < \eta < \eta_0(\delta)$ gilt:

$$|\mathrm{I}_2(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_4(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_6(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_8(\varepsilon,\eta)| \leq \delta.$$

Wählt man nun zu vorgegebenem $\delta > 0$ zunächst $\widetilde{\eta} > 0$ so klein, daß $\widetilde{\eta} < \eta_0(\delta)$ und außerdem $|\rho(\lambda_2 - \eta) - \rho(\lambda_2 - 0)| < \delta$ und $|\rho(\lambda_1 + 0) - \rho(\lambda_1 + \eta)| < \delta$ für $0 < \eta < \widetilde{\eta}$ und wählt man dann ε mit $0 < \varepsilon < \min\{\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\eta,\delta), \varepsilon_3(\eta,\delta)\}$, so folgt insgesamt:

$$\begin{aligned}
&\left|\mathrm{D}(\varepsilon) - \frac{1}{2}\Big[\big(\rho(\lambda_2+0)+\rho(\lambda_2-0)\big) - \big(\rho(\lambda_1+0)+\rho(\lambda_1-0)\big)\Big]\right| \leq \\
\leq\ & |\mathrm{I}_2(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_4(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_6(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_8(\varepsilon,\eta)| + |\mathrm{I}_1(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_9(\varepsilon,\eta)| + \\
& + \Bigg|\mathrm{I}_3(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_5(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_7(\varepsilon,\eta) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_2+0) - \rho(\lambda_2-0)\Big) - \rho(\lambda_2-0) - \\
& -\frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_1+0) - \rho(\lambda_1-0)\Big) + \rho(\lambda_1+0) - \int\limits_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} \mathrm{d}\rho(\mu) + \int\limits_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} \mathrm{d}\rho(\mu)\Bigg| \leq \\
\leq\ & 2\delta + \left|\mathrm{I}_5(\varepsilon,\eta) - \int\limits_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} \mathrm{d}\rho(\mu)\right| + \\
& + \left|\mathrm{I}_3(\varepsilon,\eta) + \mathrm{I}_7(\varepsilon,\eta) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_1+0) - \rho(\lambda_1-0)\Big) - \frac{1}{2}\Big(\rho(\lambda_2+0) - \rho(\lambda_2-0)\Big)\right| + \\
& + \left|\int\limits_{\lambda_1+\eta}^{\lambda_2-\eta} \mathrm{d}\rho(\mu) - \rho(\lambda_2-0) + \rho(\lambda_1+0)\right| \leq \\
\leq\ & 4\delta + |\rho(\lambda_2-\eta) - \rho(\lambda_2-0)| + |\rho(\lambda_1+0) - \rho(\lambda_1+\eta)| \leq 6\delta.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Umkehrformel bewiesen.

5.3.3 Satz (Hellysches[1] Auswahlprinzip)

Sei $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen beschränkter Variation mit $|\rho_n(\lambda)| \leq M$, $V(\rho_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho_n(\lambda)| \leq M$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Teilfolge $(\rho_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation mit $|\rho(\lambda)| \leq M$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \leq M$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \rho_{n_j}(\lambda) = \rho(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis:
siehe Natanson, Isidor P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

5.3.4 Satz (Hellyscher Konvergenzsatz)

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} f(\lambda) = 0$. Sei $\rho_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen beschränkter Variation mit $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(\lambda) = \rho(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho_n(\lambda)| \leq M$. Dann ist auch ρ von beschränkter Variation mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \leq M$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\rho_n(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\rho(\lambda).$$

[1] Eduard Helly (1884-1943)

Beweis:
Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition der Totalvariation. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $\lambda_1, ..., \lambda_{m+1}$ mit $-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{m+1} < \infty$, so daß $|\,f(\lambda)\,| \leq \varepsilon$ für $\lambda \leq \lambda_1$ und $\lambda \geq \lambda_{m+1}, |f(\lambda) - f(\lambda_j)| \leq \varepsilon$ für $\lambda_j \leq \lambda \leq \lambda_{j+1}$. Dann gilt:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)(\rho(\lambda_{j+1}) - \rho(\lambda_j))\right| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| \leq \varepsilon M,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho_n(\lambda) - \sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)(\rho_n(\lambda_{j+1}) - \rho_n(\lambda_j))\right| \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho_n(\lambda)| \leq \varepsilon M.$$

Da f stetig ist, $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} f(\lambda) = 0$, ist f beschränkt, sei also $|f(\lambda)| \leq N$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, daß $|\rho(\lambda_i) - \rho_n(\lambda_i)| < \frac{\varepsilon}{N}$ für $i = 1, ..., m+1$. Dann gilt für $n \geq n_0$ nach obigen Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho_n(\lambda)\right| \leq \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{m} f(\lambda_j)\Big[\big(\rho(\lambda_{j+1}) - \rho(\lambda_j)\big) - \big(\rho_n(\lambda_{j+1}) - \rho_n(\lambda_j)\big)\Big]\right| + 2\varepsilon M \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} N \cdot \Big(\big|\rho(\lambda_{j+1}) - \rho_n(\lambda_{j+1})\big| + \big|\rho(\lambda_j) - \rho_n(\lambda_j)\big|\Big) + 2\varepsilon M \leq \\
&\leq m \cdot 2\varepsilon + M \cdot 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

also folgt die Behauptung.

5.3.5 Definition ($\Gamma(M)$)

Sei $M > 0$. Dann bezeichnet $\Gamma(M)$ die Menge aller Funktionen $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation mit den Eigenschaften

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| \leq M$,
2) $\rho(-\infty) = 0$,
3) $\rho(\lambda + 0) = \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \rho(\lambda + \varepsilon) = \rho(\lambda)$.

5.3.6 Hilfssatz

Sei $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation mit $\int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| \leq M$. Dann liegt die Funktion

$$\rho^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \rho^*(\lambda) = \rho(\lambda + 0) - \rho(-\infty)$$

in $\Gamma(M)$. Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} f(\lambda) = 0$, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\rho^*(\lambda).$$

Beweis:
Es ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho^*(\lambda)| \leq \mathrm{M}$, denn dies gilt für die Funktionen $\lambda \longmapsto \rho(\lambda+\varepsilon)-\rho(-\infty)$ und damit nach dem Hellyschen Konvergenzsatz 5.3.4 auch für ρ^*. Weiter folgt aus 5.3.4, daß ρ^* von beschränkter Variation ist. Deshalb existiert nach 5.3.1 der Grenzwert $\rho^*(\lambda+0)$. Weil – wieder nach 5.3.1 die Menge der Unstetigkeitsstellen von ρ höchstens abzählbar ist, gibt es eine Folge $(\mathrm{a}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}, \mathrm{a}_\nu > 0, \lim\limits_{\nu\to\infty} \mathrm{a}_\nu = 0$, so daß ρ in jeder der Stellen $\lambda + \mathrm{a}_\nu$ stetig ist. Dann ist

$$\begin{aligned}\rho^*(\lambda+0) &= \lim_{\nu\to\infty} \rho^*(\lambda+\mathrm{a}_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \Big(\rho(\lambda+\mathrm{a}_\nu+0) - \rho(-\infty)\Big) = \\ &= \lim_{\nu\to\infty} \Big(\rho(\lambda+\mathrm{a}_\nu) - \rho(-\infty)\Big) = \rho^*(\lambda).\end{aligned}$$

Ebenso folgt: $\rho^*(-\infty) = 0$. Also ist $\rho^* \in \Gamma(\mathrm{M})$.
Sei nun $\varepsilon' > 0$. Wir wählen $\mathrm{m}, \lambda_\mathrm{j}, \varepsilon_0$ so, daß

1) $|\mathrm{f}(\lambda)| \leq \varepsilon'$ für $\lambda \leq \lambda_1$ und für $\lambda \geq \lambda_{\mathrm{m}+1}$,
2) $|\mathrm{f}(\lambda) - \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})| \leq \epsilon'$ für $\lambda_\mathrm{j} + \varepsilon \leq \lambda \leq \lambda_{\mathrm{j}+1} + \varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Dann folgt:

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho^*(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho(\lambda)\right| = \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho^*(\lambda) - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})\Big(\rho^*(\lambda_{\mathrm{j}+1}) - \rho^*(\lambda_\mathrm{j})\Big) + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \Big[\mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})\Big(\rho^*(\lambda_{\mathrm{j}+1}) - \rho^*(\lambda_\mathrm{j})\Big) - \right.\\ &\quad -\mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big(\rho(\lambda_{\mathrm{j}+1}+\varepsilon) - \rho(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big)\Big] + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big(\rho(\lambda_{\mathrm{j}+1}+\varepsilon) - \rho(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big) - \\ &\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho(\lambda)\right| \leq \\ &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho^*(\lambda) - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})\Big(\rho^*(\lambda_{\mathrm{j}+1}) - \rho^*(\lambda_\mathrm{j})\Big)\right| + \\ &\quad + \left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \Big[\mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})\Big(\rho^*(\lambda_{\mathrm{j}+1}) - \rho^*(\lambda_\mathrm{j})\Big) - \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big(\rho(\lambda_{\mathrm{j}+1}+\varepsilon) - \rho(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big)\Big]\right| + \\ &\quad + \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\,\mathrm{d}\rho(\lambda) - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big(\rho(\lambda_{\mathrm{j}+1}+\varepsilon) - \rho(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big)\right| \leq \\ &\leq 2\cdot\varepsilon'\cdot\mathrm{M} + \left|\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \Big[\mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j})\Big(\rho^*(\lambda_{\mathrm{j}+1}) - \rho^*(\lambda_\mathrm{j})\Big) - \mathrm{f}(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big(\rho(\lambda_{\mathrm{j}+1}+\varepsilon) - \rho(\lambda_\mathrm{j}+\varepsilon)\Big)\Big]\right|\end{aligned}$$

für $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Mit $\varepsilon \longrightarrow 0$ folgt die Behauptung.

5.3.7 Definition ($\Gamma^*(\mathrm{M})$)

Mit $\Gamma^*(\mathrm{M})$ wird die Menge aller in $\{\mathrm{z} \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\mathrm{z} \neq 0\}$ holomorphen Funktionen F bezeichnet, welche eine Darstellung

$$\mathrm{F}(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\,\mathrm{d}\rho(\lambda), \mathrm{Im}\,\mathrm{z} \neq 0$$

mit einem $\rho \in \Gamma(\mathrm{M})$ besitzen.

5.3.8 Satz

Seien $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(\mathrm{M})$. Es gelte für $\mathrm{z} \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \mathrm{z} \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}\rho_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}\rho_2(\lambda).$$

Dann gilt $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Aus der Stieltjes - Umkehrformel 5.3.2 folgt für $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mu < \lambda$:

$$\frac{1}{2}(\rho_2(\lambda+0)+\rho_2(\lambda-0))-\frac{1}{2}(\rho_2(\mu+0)+\rho_2(\mu-0)) = \frac{1}{2}(\rho_1(\lambda+0)+\rho_1(\lambda-0))-\frac{1}{2}(\rho_1(\mu+0)+\rho_1(\mu-0)).$$

Da $\rho_1$bzw. ρ_2 an höchstens abzählbar vielen Stellen unstetig sind (nach 5.3.1), liegt die Menge E aller Punkte, an denen ρ_1 und zugleich ρ_2 stetig sind, dicht in $\mathbb{R}$. Für $\lambda, \mu \in \mathrm{E}$ hat man damit

$$\rho_2(\lambda) - \rho_2(\mu) = \rho_1(\lambda) - \rho_1(\mu)$$

Für $\mu \longrightarrow -\infty$ ergibt sich wegen $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(\mathrm{M}) :\ \rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$ für $\lambda \in \mathrm{E}$. Wegen $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(\mathrm{M})$ gilt für $\lambda \in \mathbb{R} :\ \rho_{\mathrm{i}}(\lambda + 0) = \rho_{\mathrm{i}}(\lambda)$. Wie im Beweis von Hilfssatz 5.3.6 kann man nun $\mathrm{a}_\nu > 0$ wählen, so daß $\lim\limits_{\nu\to\infty} \mathrm{a}_\nu = 0, \lambda + \mathrm{a}_\nu \in \mathrm{E}$. Dann ist $\rho_{\mathrm{i}}(\lambda) = \lim\limits_{\nu\to\infty} \rho_{\mathrm{i}}(\lambda + \mathrm{a}_\nu)$, wegen $\rho_1(\lambda + \mathrm{a}_\nu) = \rho_2(\lambda + \mathrm{a}_\nu)$ folgt also: $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$, d.h. es gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R} : \rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$.

5.3.9 Satz

Sei $(\mathrm{F}_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\Gamma^*(\mathrm{M})$. Dann existiert eine Teilfolge $(\mathrm{F}_{\mathrm{k}_\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ von $(\mathrm{F}_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ und ein $\mathrm{F} \in \Gamma^*(\mathrm{M})$, so daß für $\mathrm{z} \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \mathrm{z} \neq 0$, gilt: $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{k}_\mathrm{n}}(\mathrm{z}) = \mathrm{F}(\mathrm{z})$.

Beweis:
Zu F_k gibt es ein $\rho_\mathrm{k} \in \Gamma(\mathrm{M})$, so daß für $\operatorname{Im} \mathrm{z} \neq 0$ gilt: $\mathrm{F}_\mathrm{k}(\mathrm{z}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_\mathrm{k}(\lambda)}{\lambda - \mathrm{z}}$. Wegen $\rho_\mathrm{k} \in \Gamma(\mathrm{M})$ gilt $\rho_\mathrm{k}(-\infty) = 0$ und $|\rho_\mathrm{k}(-\mathrm{N}) - \rho_\mathrm{k}(\lambda)| \leq \mathrm{M}$ für $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. Mit $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$ folgt $|\rho_\mathrm{k}(\lambda)| \leq \mathrm{M}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach dem Hellyschen Auswahlprinzip 5.3.3 gibt es eine Teilfolge $(\rho_{\mathrm{k}_\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ von $(\rho_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ von beschränkter Variation so, daß $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \rho_{\mathrm{k}_\mathrm{n}}(\lambda) = \rho(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{d}\rho(\lambda)| \leq \mathrm{M}$, $|\rho(\lambda)| \leq \mathrm{M}$.
Nach dem Hellyschen Konvergenzsatz 5.3.4 folgt jetzt für $\operatorname{Im} \mathrm{z} \neq 0$: $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{F}_{\mathrm{k}_\mathrm{n}}(\mathrm{z}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho(\lambda)}{\lambda - \mathrm{z}}$. Sei $\rho^*(\lambda) := \rho(\lambda + 0) - \rho(-\infty)$. Nach Hilfssatz 5.3.6 ist $\rho^* \in \Gamma(\mathrm{M})$ und es gilt

$$\mathrm{F}(\mathrm{z}) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho(\lambda)}{\lambda - \mathrm{z}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho^*(\lambda)}{\lambda - \mathrm{z}}.$$

Also ist $\mathrm{F} \in \Gamma^*(\mathrm{M})$.

5.4 Integraldarstellung der Resolvente

In diesem Paragraphen soll eine Darstellungsformel für die Resolvente $(A - z)^{-1}, \operatorname{Im} z \neq 0$ eines selbstadjungierten Operators A in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ hergeleitet werden. Die Formel ist von folgendem Typ:

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda, f, g), \quad f, g \in \mathcal{H},$$

Wobei $\lambda \longmapsto \rho(\lambda, f, g)$ eine Funktion mit beschränkter Variation in $(-\infty, \infty)$ ist. Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei separabel (das ist z.B. für $L^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, erfüllt).

5.4.1 Hilfssatz (M. H. Stone[1])

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ hermitesch. Dann gibt es einen Teilraum $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}(H)$ und eine Folge $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkten hermiteschen Operatoren mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\mathcal{D}(H_n) = \mathcal{H}$.

2) $\mathcal{D}'$ ist dicht in $\mathcal{D}(H)$ bezüglich der Graphennorm von H, d.h.: Zu jedem $f \in \mathcal{D}(H)$ gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| + \|Hf - Hf_n\| = 0$. Insbesondere ist $\mathcal{D}'$ dicht in $\mathcal{H}$.

3) Für jedes $f \in \mathcal{D}'$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n f = Hf$.

4) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existieren $a_n, b_n, a_n < b_n$, und eine Spektralschar $\{E_n(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit

$$H_n = \int_{a_n}^{b_n} \lambda\, dE_n(\lambda).$$

Weiter gibt es $\lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_{k_n}^{(n)}$ derart, daß $a_n < \lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < ... < \lambda_{k_n}^{(n)} < b_n$ und $E_n(\lambda)$ konstant ist für $\lambda < \lambda_1^{(n)}, \lambda > \lambda_{k_n}^{(n)}, \lambda_j^{(n)} \leq \lambda < \lambda_{j+1}^{(n)}, j \in \{1, ..., k_n - 1\}$.

Beweis:
Nach Satz 1.1.18 ist $\mathcal{R}(H \pm i)$ separabel. Sei $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die dicht ist in $\mathcal{R}(H + i)$, seien $f_k \in \mathcal{D}(H)$ mit $g_k = (H + i)f_k$. Sei $\mathcal{M}_n$ der Teilraum von $\mathcal{H}$, der von den $f_1, ..., f_n$ aufgespannt wird. Er besteht aus Elementen der Form $\sum\limits_{m=1}^{n} c_m f_m, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$. Es ist $\dim \mathcal{M}_n \leq n$. Setze $\mathcal{D}' := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$. Da $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, ist $\mathcal{D}'$ ein Teilraum von $\mathcal{H}$. Zu jedem $f \in \mathcal{D}'$ gibt es ein $n(f) \in \mathbb{N}$ und $c_1, ..., c_{n(f)} \in \mathbb{C}$ mit $f = \sum\limits_{m=1}^{n(f)} c_m f_m$.
Zeige: $\mathcal{D}'$ ist dicht in $\mathcal{D}(H)$ bezüglich der Graphennorm von H:
Sei $f \in \mathcal{D}(H), g = (H + i)f$. Dann gibt es eine Teilfolge $(g_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ von $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{\nu\to\infty} g_{k_\nu} = g$ und es ist $g_{k_\nu} = (H + i)f_{k_\nu}$. Dann ist

$$\|g_{k_\nu} - g\|^2 = \|(H + i)(f_{k_\nu} - f)\|^2 \geq \|f_{k_\nu} - f\|^2$$

und auch

$$\|(H + i)(f_{k_\nu} - f)\|^2 \geq \|Hf_{k_\nu} - Hf\|^2,$$

beide „ $\geq$ “ wurden im Beweis von Satz 4.3.9 gezeigt. Also folgt $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_{k_\nu} = f$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} Hf_{k_\nu} = Hf$. Insgesamt hat man also $\lim\limits_{\nu\to\infty} \|H(f_{k_\nu} - f)\|^2 + \|f_{k_\nu} - f\|^2 = 0$. Weil $f_{k_\nu} \in \mathcal{M}_{k_\nu} \subset \mathcal{D}'$, folgt 2).

[1] Marshall Harvey Stone (1903-1989)

Sei E_n die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}_n$ ($\mathcal{M}_n$ ist abgeschlossen, weil endlichdimensional). Setze $H_n := E_n H E_n$. Dann ist H_n auf $\mathcal{H}$ erklärt, also 1) erfüllt. Ist $f \in \mathcal{D}'$, so gibt es ein $p = n(f)$, so daß $f \in \mathcal{M}_p$. Also ist $E_n f = f$ für $n \geq n(f)$. Folglich ist für $n \geq n(f)$: $H_n f = E_n H E_n f = E_n H f$. Wegen

$$\| E_n H f \| \leq \| E_n \| \cdot \| H f \| = \| H f \|$$

ist die Folge $(\| E_n H f \|)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt. Für f,g $\in \mathcal{D}'$ gilt weiter:

$$\lim_{n\to\infty} (E_n H f, g) = \lim_{n\to\infty} (H f, E_n g) = (H f, g).$$

Weil $\mathcal{D}'$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt daher nach Satz 2.1.5: $E_n H f \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} H f$. E_n ist eine Projektion, also ist $\| E_n H f \|^2 = (E_n H f, E_n H f) = (E_n H f, H f)$. Mit $E_n H f \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} H f$ folgt nun wieder aus Satz 2.1.5:

$$\lim_{n\to\infty} \| E_n H f \|^2 = \lim_{n\to\infty} (E_n H f, H f) = (H f, H f) = \| H f \|^2 .$$

Nach Bemerkung 1.1.15 folgt jetzt für $f \in \mathcal{D}'$:

$$\lim_{n\to\infty} H_n f = \lim_{n\to\infty} E_n H E_n f = \lim_{n\to\infty} E_n H f = H f,$$

also ist 3) erfüllt.
Offenbar gilt für $f, g \in \mathcal{D}'$: $(H_n f, g) = (f, H_n g)$, H_n ist also hermitesch. H_n ist beschränkt: Es ist $H_n f = E_n H E_n f$. Da E_n ein Projektor ist, gilt $E_n f \in \mathcal{M}_n$, $\| E_n f \| \leq \| f \|$. $\mathcal{M}_n$ ist endlichdimensional, sei $\{\varphi_1, ..., \varphi_k\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{M}_n$ und es gelte $E_n f = \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_i$. Es ist also

$$\| E_n f \|^2 = \sum_{i=1}^{k} | c_i |^2 \leq \| f \|^2 .$$

Weiter hat man $H E_n f = \sum_{i=1}^{k} c_i H \varphi_i$, man berechnet also:

$$\| H E_n f \|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} c_i H \varphi_i, \sum_{j=1}^{k} c_j H \varphi_j \right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} (H\varphi_i, H\varphi_j) \leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} | c_i | \cdot | c_j | \cdot | (H\varphi_i, H\varphi_j) | .$$

Setzt man nun $M := \max\{ | (H\varphi_i, H\varphi_j) | \mid 1 \leq i, j \leq k \}$ und benutzt weiter, daß

$$2 \cdot | c_i | \cdot | c_j | \leq | c_i |^2 + | c_j |^2,$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}
\| H E_n f \|^2 &\leq M \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} | c_i | \cdot | c_j | \leq M \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (| c_i |^2 + | c_j |^2) = \\
&= M \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{k} (k \cdot | c_i |^2 + \sum_{j=1}^{k} | c_j |^2) = M \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(k \cdot \sum_{j=1}^{k} | c_j |^2 + k \cdot \sum_{i=1}^{k} | c_i |^2 \right) = \\
&= M \cdot k \cdot \sum_{i=1}^{k} | c_i |^2 \leq M \cdot k \cdot \| f \|^2 .
\end{aligned}$$

Also ist der Operator $H E_n$ beschränkt und damit – weil E_n beschränkt ist – auch der Operator $H_n = E_n H E_n$.
Offenbar gilt $H_n(\mathcal{M}_n) \subset \mathcal{M}_n$. Da H_n hermitesch ist, gibt es eine Orthonormalbasis $\{\varphi_1^{(n)}, ..., \varphi_{p_n}^{(n)}\}$ von $\mathcal{M}_n$, $\dim \mathcal{M}_n = p_n$, so daß für $j = 1, ..., p_n$ gilt: $H_n \varphi_j^{(n)} = \mu_j^{(n)} \varphi_j^{(n)}$. Die $\mu_j^{(n)}$ sind reell und die

Eigenwerte der Restriktion von H_n auf $\mathcal{M}_n$. Sei $e_{\mu_j^{(n)}}$ die Vielfachheit von $\mu_j^{(n)}$. Sei $E_j^{(n)}f = (f, \varphi_j^{(n)})\varphi_j^{(n)}$. Dann ist

$$H_n f = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} \left(f, \varphi_j^{(n)}\right) \varphi_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f.$$

Setzt man noch $E_0^{(n)} := I - \sum_{j=1}^{p_n} E_j^{(n)}$, wobei I die Identität in $\mathcal{H}$ ist, und $\mu_0^{(n)} := 0$, so ergibt sich: Ist $f = f_1 + f_2, f_1 \in \mathcal{M}_n, f_2 \in \mathcal{M}_n^{\perp}$, so ist

$$H_n f = E_n H E_n (f_1 + f_2) = E_n H E_n f_1 = H_n f_1 = \sum_{j=1}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f_1 = \sum_{j=0}^{p_n} \mu_j^{(n)} E_j^{(n)} f.$$

Setze für $\lambda \in \mathbb{R} : E_n(\lambda) := \sum_{\{j | \mu_j^{(n)} \leq \lambda\}} E_j^{(n)}$. Ist diese Summe leer, so sei $E_n(\lambda) := 0$. Dann ist $E_n(\lambda) = I$ für $\lambda \geq b_n > \max\{\mu_j^{(n)} \mid 0 \leq j \leq p_n\}$ und $E_n(\lambda) = 0$ für $\lambda \leq a_n < \min\{\mu_j^{(n)} \mid 0 \leq j \leq p_n\}$. Es ist leicht zu sehen, daß $\lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0} E_n(\lambda + \varepsilon) f = E_n(\lambda) f, E_n(\lambda)^* = E_n(\lambda)$ und $E_n(\lambda) E_n(\mu) = E_n(\min(\lambda, \mu))$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Also ist $\{E_n(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar.

Nun bleibt noch zu zeigen, daß $H_n = \int_{a_n}^{b_n} \lambda \, dE_n(\lambda)$. Wähle dazu eine Teilung $\mathcal{Z}_m = \left(\lambda_1^{(m)}, ..., \lambda_{m+1}^{(m)}\right)$ von $[a_n, b_n]$ (a_n, b_n wie oben), d.h. $a_n = \lambda_1^{(m)} < \lambda_2^{(m)} < ... < \lambda_{m+1}^{(m)} = b_n, m \in \mathbb{N}$, mit $\lim_{m \to \infty} \delta(\mathcal{Z}_m) = \lim_{m \to \infty} \max_{1 \leq j \leq m} \left|\lambda_{j+1}^{(m)} - \lambda_j^{(m)}\right| = 0$. Weiter sei jedes $\mu_j^{(n)}$ in je einem Intervall $\left(\lambda_k^{(m)}, \lambda_{k+1}^{(m)}\right)$ enthalten. Sei $M_m := \left\{k \mid \left(\lambda_k^{(m)}, \lambda_{k+1}^{(m)}\right) \text{ enthält ein } \mu_j^{(n)}\right\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{a_n}^{b_n} \lambda \, dE_n(\lambda) &= \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)} \left(E_n(\lambda_{k+1}^{(m)}) - E_n(\lambda_k^{(m)})\right) = \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{k \in M_m} \lambda_k^{(m)} \left(E_n(\lambda_{k+1}^{(m)}) - E_n(\lambda_k^{(m)})\right) = \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{k \in M_m} \mu_j^{(n)} \left(E_n(\lambda_{k+1}^{(m)}) - E_n(\lambda_k^{(m)})\right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß $E_n(\lambda)$ konstant ist auf Intervallen $\left(\lambda_k^{(m)}, \lambda_k^{(m+1)}\right)$, die kein $\mu_j^{(n)}$ enthalten. Also ist schließlich

$$\int_{a_n}^{b_n} \lambda \, dE_n(\lambda) = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{i_n} \mu_i^{(n)} \sum_{j = e_{\mu_1^{(n)}} + ... + e_{\mu_{i-1}^{(n)}} + 1}^{e_{\mu_1^{(n)}} + ... + e_{\mu_{i-1}^{(n)}} + e_{\mu_i^{(n)}}} E_j^{(n)} + \underbrace{\mu_0^{(n)}}_{=0} E_0^{(n)} = H_n.$$

Dabei sind $\mu_1^{(n)}, ..., \mu_{i_n}^{(n)}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte, $e_{\mu_i^{(n)}}$ die zugehörigen Vielfachheiten.

5.4.2 Bemerkungen

1) Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei H' die Einschränkung von H auf $\mathcal{D}'$ ($\mathcal{D}'$ wie in Hilfssatz 5.4.1). Dann ist H' wesentlich selbstadjungiert.

   Beweis:
   Sei $g \in \mathcal{H}, f \in \mathcal{D}(H)$ mit $(H + i)f = g$. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{D}'$ mit $\lim_{n \to \infty} f_n = f, \lim_{n \to \infty} H' f_n = Hf$. Dann ist $\lim_{n \to \infty} (H' + i) f_n = (H + i) f = g$, also ist $\mathcal{R}(H' + i)$ dicht in $\mathcal{H}$. Ebenso zeigt man: $\mathcal{R}(H' - i)$ ist dicht in $\mathcal{H}$.

2) Die gleiche Rechnung wie am Ende des Beweises von 5.4.1 zeigt:

$$z\int_{a_n}^{b_n} dE_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{i_n} z \sum_{j=e_{\mu_1^{(n)}}+\ldots+e_{\mu_{i-1}^{(n)}}+1}^{e_{\mu_1^{(n)}}+\ldots+e_{\mu_i^{(n)}}} E_j^{(n)} + z\cdot E_0^{(n)} = z\cdot I,$$

wobei I die Identität in $\mathcal{H}$ ist.

5.4.3 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $(H_n)_{n\in N}$ eine Folge von selbstadjungierten Operatoren in $\mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(H_n)$ derart, daß gilt:

1) Es gibt einen Teilraum $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}(H)$ derart, daß die Einschränkung H' von H auf $\mathcal{D}'$ wesentlich selbstadjungiert ist.

2) Für $f \in \mathcal{D}'$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} H_n f = Hf$.

Dann gilt für $f \in \mathcal{H}$ und $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq 0 : \lim\limits_{n\to\infty} R_z^{(n)} f = R_z f$, wobei $R_z^{(n)} = (H_n - z)^{-1}$.

Beweis:
Sei $\mathcal{H}_z' := \{g \in \mathcal{H} \mid \exists f \in \mathcal{D}' : g = (H-z)f\}$ für $\operatorname{Im} z \neq 0$. Wie im Beweis von Hilfssatz 4.3.10 zeigt man für $\operatorname{Im} z \neq 0 : \overline{\mathcal{R}(H'-z)} = \mathcal{R}(\overline{H}-z)$. Weil $\overline{H}$ selbstadjungiert ist, folgt aus Satz 5.1.2: $\mathcal{R}(\overline{H}-z) = \mathcal{H}$.
Also ist $\overline{\mathcal{H}_z'} = \overline{\mathcal{R}(H'-z)} = \mathcal{H}$, d.h. $\mathcal{H}_z'$ ist dicht in $\mathcal{H}$.
Sei nun $g \in \mathcal{H}_z'$. Dann ist

$$\begin{aligned} R_z^{(n)}g - R_z g &= (H_n - z)^{-1}g - (H-z)^{-1}g = \\ &= (H_n - z)^{-1}(H-z)(H-z)^{-1}g - (H_n-z)^{-1}(H_n-z)(H-z)^{-1}g = \\ &= (H_n-z)^{-1}(H-H_n)(H-z)^{-1}g. \end{aligned}$$

Also ist

$$\| R_z^{(n)}g - R_z g \| \overset{5.1.2}{\leq} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \| (H-H_n)(H-z)^{-1}g \| .$$

Wegen $(H-z)^{-1}g \in \mathcal{D}'$ gilt nach Voraussetzung: $\lim\limits_{n\to\infty} \| (H-H_n)(H-z)^{-1}g \| = 0$, also

$$\lim_{n\to\infty} \| R_z^{(n)}g - R_z g \| = 0.$$

Für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$\| R_z^{(n)}f - R_z f \| \leq \| R_z^{(n)}f \| + \| R_z f \| \overset{5.1.2}{\leq} \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \| f \| + \frac{1}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \| f \| = \frac{2}{|\operatorname{Im} z|} \cdot \| f \|,$$

also ist $\| R_z^{(n)} - R_z \| \leq \dfrac{2}{|\operatorname{Im} z|}$. Sei $\varepsilon > 0$. Zu $f \in \mathcal{H}$ wähle nun $g \in \mathcal{H}_z'$ so, daß $\dfrac{2}{|\operatorname{Im} z|} \| f - g \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Dann wähle man n so groß, daß $\| (R_z^{(n)} - R_z)g \| < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Jetzt folgt:

$$\begin{aligned} \| R_z^{(n)}f - R_z f \| &= \| (R_z^{(n)} - R_z)f - (R_z^{(n)} - R_z)g + (R_z^{(n)} - R_z)g \| \leq \\ &\leq \| (R_z^{(n)} - R_z)(f-g) \| + \| (R_z^{(n)} - R_z)g \| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also hat man für alle $f \in \mathcal{H} : \lim\limits_{n\to\infty} R_z^{(n)} f = R_z f$.

5.4.4 Hilfssatz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{D}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann gilt die folgende Integraldarstellung für $\mathrm{R_z}, \mathrm{Im\,z} \neq 0$:

$$(\mathrm{R_z f, g}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}\rho(\lambda, \mathrm{f, g}),$$

wobei die Abbildung $\lambda \longmapsto \rho(\lambda, \mathrm{f, g})$ ein Element aus $\Gamma(\|\mathrm{f}\| \cdot \|\mathrm{g}\|)$ ist.

Beweis:
Sei $(\mathrm{H_n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ die approximierende Folge von beschränkten hermiteschen Operatoren, die in Hilfssatz 5.4.1 konstruiert wurde. Sei $\{\mathrm{E_n}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die in Hilfssatz 5.4.1 konstruierte Spektralschar. Die Einschränkung von H auf $\mathcal{D}'$ ist nach Bemerkung 5.4.2 wesentlich selbstadjungiert. Nach Hilfssatz 5.4.3 gilt: $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{R_z^{(n)} f} = \mathrm{R_z f}$. Wir zeigen nun: $\mathrm{R_z^{(n)}} = \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{dE_n}(\lambda)$.
Wie im Beweis von Hilfssatz 5.4.1 folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \frac{\mathrm{dE_n}(\lambda)}{\lambda - \mathrm{z}} &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i_n}} \left(\mu_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})} - \mathrm{z}\right)^{-1} \sum_{\mathrm{j}=\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}-1}^{(\mathrm{n})}}+1}^{\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})}}} \mathrm{E_j^{(n)}} + \left(\mu_0^{(\mathrm{n})} - \mathrm{z}\right)^{-1} \mathrm{E_0^{(n)}}; \\
\int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} (\lambda - \mathrm{z})\, \mathrm{dE_n}(\lambda) &= \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i_n}} \left(\mu_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})} - \mathrm{z}\right) \sum_{\mathrm{j}=\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}-1}^{(\mathrm{n})}}+1}^{\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})}}} \mathrm{E_j^{(n)}} + \left(\mu_0^{(\mathrm{n})} - \mathrm{z}\right) \mathrm{E_0^{(n)}}.
\end{aligned}$$

Es ist $\mathrm{E_j^{(n)} E_{j'}^{(n)}} = 0$ für $\mathrm{j} \neq \mathrm{j}'$, denn es ist

$$\mathrm{E_j^{(n)} E_{j'}^{(n)} f} = \mathrm{E_j^{(n)}} \left(\mathrm{f}, \varphi_{\mathrm{j}'}^{(\mathrm{n})}\right) \varphi_{\mathrm{j}'}^{(\mathrm{n})} = \left(\mathrm{f}, \varphi_{\mathrm{j}'}^{(\mathrm{n})}\right) \left(\varphi_{\mathrm{j}'}^{(\mathrm{n})}, \varphi_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{n})}\right) \varphi_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{n})} = 0$$

für $\mathrm{j, j'} \neq 0$ und für $\mathrm{j} \neq 0$ gilt

$$\mathrm{E_j^{(n)} E_0^{(n)}} = \mathrm{E_j^{(n)}} \left(\mathrm{I} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p_n}} \mathrm{E_i^{(n)}}\right) = \mathrm{E_j^{(n)}} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p_n}} \mathrm{E_j^{(n)} E_i^{(n)}} = \mathrm{E_j^{(n)}} - \mathrm{E_j^{(n)} E_j^{(n)}} = 0$$

mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Hilfssatz 5.4.1. Also erhält man:

$$\int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{dE_n}(\lambda) \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} (\lambda - \mathrm{z})\, \mathrm{dE_n}(\lambda) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i_n}} 1 \cdot \sum_{\mathrm{j}=\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}-1}^{(\mathrm{n})}}+1}^{\mathrm{e}_{\mu_1^{(\mathrm{n})}}+\ldots+\mathrm{e}_{\mu_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{n})}}} \mathrm{E_j^{(n)}} + 1 \cdot \mathrm{E_0^{(n)}} = \mathrm{Id}.$$

Es ist also wegen $\mathrm{H_n} - \mathrm{z} = \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \lambda\, \mathrm{dE_n}(\lambda) - \mathrm{z} \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \mathrm{dE_n}(\lambda) = \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} (\lambda - \mathrm{z})\, \mathrm{dE_n}(\lambda)$:

$$\mathrm{R_z^{(n)}} = (\mathrm{H_n} - \mathrm{z})^{-1} = \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{dE_n}(\lambda).$$

Nun ist nach Satz 5.2.12:

$$(\mathrm{R_z^{(n)} f, g}) = \int\limits_{\mathrm{a_n}}^{\mathrm{b_n}} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}(\mathrm{E_n}(\lambda)\mathrm{f, g}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}(\mathrm{E_n}(\lambda)\mathrm{f, g}).$$

Die Funktion $\lambda \longmapsto \rho_n(\lambda, f, g) := (E_n(\lambda)f, g)$ hat beschränkte Variation auf $(-\infty, \infty)$ nach Satz 5.2.12 und nach diesem Satz gilt weiter: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, d(E_n(\lambda)f, g)\,| \leq \|\, f\,\| \cdot \|\, g\,\|$. Die definierten Eigenschaften der Spektralschar zeigen: $\rho_n(\lambda, f, g) \in \Gamma(\|\, f\,\| \cdot \|\, g\,\|)$, also ist $(R_z^{(n)} f, g) \in \Gamma^*(\|\, f\,\| \cdot \|\, g\,\|)$. Nach Satz 5.3.9 gibt es für feste f,g eine Teilfolge $\big((R^{(n_j)} f, g)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ von $\Big((R_z^{(n)} f, g)\Big)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $\Phi \in \Gamma^*(\|\, f\,\| \cdot \|\, g\,\|)$, so daß für $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z \neq 0$ gilt:

$$\lim_{j \to \infty} \Big(R_z^{(n_j)} f, g\Big) = \Phi(z).$$

Gleichzeitig gilt aber nach Hilfssatz 5.4.3:

$$\lim_{j \to \infty} \Big(R_z^{(n_j)} f, g\Big) = (R_z f, g),$$

also ist $\Phi(z) = (R_z f, g) \in \Gamma^*(\|\, f\,\| \cdot \|\, g\,\|)$ und das ist die Behauptung.

5.5 Fundamentaleigenschaften der Funktion $\lambda \longmapsto \rho(\lambda, f, g)$

Ziel in diesem Pragraphen ist es, zu zeigen, daß es eine Spektralschar $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ gibt, so daß $\rho(\lambda, f, g) = (E(\lambda)f, g)$.

5.5.1 Hilfssatz

Seien f,g : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} f(\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} g(\lambda) = 0$. Sei $\rho \in \Gamma(M)$. Dann ist

$$G(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} g(\mu)\, d\rho(\mu)$$

aus $\Gamma(M')$ für ein geeignetes $M' \geq 0$. Außerdem ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda)\, d\rho(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dG(\lambda).$$

Beweis:

1) G ist stetig von rechts:

Sei λ fest, $\varepsilon > 0$, dann ist $G(\lambda+\varepsilon) - G(\lambda) = \int\limits_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} g(\mu)\, d\rho(\mu)$. Sei $\lambda = \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{n+1} = \lambda + \varepsilon$. Dann ist

$$\left| \sum_{j=1}^{n} g(\mu_j)\Big(\rho(\mu_{j+1}) - \rho(\mu_j)\Big) \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{j=1}^{n} \Big(g(\mu_j) - g(\lambda)\Big)\Big(\rho(\mu_{j+1}) - \rho(\mu_j)\Big) \right| + \left| \sum_{j=1}^{n} g(\lambda)\Big(\rho(\mu_{j+1}) - \rho(\mu_j)\Big) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \leq s,t \leq \lambda+s} |\, g(s) - g(t)\,| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, d\rho(\mu)| + \left| \sum_{j=1}^{n} g(\lambda)\Big(\rho(\mu_{j+1}) - \rho(\mu_j)\Big) \right| =$$

$$= \sup_{\lambda \leq s,t \leq \lambda+\varepsilon} |g(s) - g(t)| \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, d\rho(\mu)| + \Big| g(\lambda)\Big(\rho(\lambda + \varepsilon) - \rho(\lambda)\Big) \Big| ,$$

also ist G stetig von rechts.

2) $G \in \Gamma(M')$ für ein geeignetes $M' \geq 0$:

Sei $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{n+1}$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} |G(\lambda_{i+1}) - G(\lambda_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} g(\lambda)\, d\rho(\lambda) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |g(\lambda)| \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |d\rho(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |g(\lambda)| \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| =: M',$$

also ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |dG(\lambda)| \leq M'$. Weiter ist $|G(\lambda)| \leq \sup\limits_{\mu \leq \lambda} |g(\mu)| \cdot M$, es folgt also $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} G(\lambda) = 0$. 1) und 2) zusammen ergeben: $G \in \Gamma(M')$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) g(\lambda) d\rho(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dG(\lambda)$:

Sei $\eta > 0$ vorgegeben. Wähle $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 < ... < \lambda_{n+1}$ so, daß gilt:

a) $|g(\lambda) - g(\lambda_i)| \leq \eta$ für $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}$,

b) $\sup\limits_{\lambda \leq \lambda_1} |f(\lambda)| \cdot M' \leq \frac{\eta}{3}$,

c) $\sup\limits_{\lambda \geq \lambda_{n+1}} |f(\lambda)| \cdot M' \leq \frac{\eta}{3}$,

d) $\left| \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_{n+1}} f(\lambda)\, dG(\lambda) - \sum\limits_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \Big(G(\lambda_{i+1}) - G(\lambda_i) \Big) \right| \leq \frac{\eta}{3}$,

e) $\sup\limits_{\lambda \leq \lambda_1} |f(\lambda) \cdot g(\lambda)| \cdot M \leq \frac{\eta}{3}$,

f) $\sup\limits_{\lambda \geq \lambda_{n+1}} |f(\lambda) \cdot g(\lambda)| \cdot M \leq \frac{\eta}{3}$,

g) $\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_{n+1}} f(\lambda) g(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \sum\limits_{i=1}^{n} f(\lambda_i) g(\lambda_i) \Big(\rho(\lambda_{i+1}) - \rho(\lambda_i) \Big) \leq \frac{\eta}{3}$.

Nun ist

$$1. \quad \left| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \Big(G(\lambda_{i+1}) - G(\lambda_i) \Big) - \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) g(\lambda_i) \Big(\rho(\lambda_{i+1}) - \rho(\lambda_i) \Big) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} g(\lambda)\, d\rho(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} f(\lambda_i) g(\lambda_i)\, d\rho(\lambda) \right| =$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \Big(g(\lambda) - g(\lambda_i) \Big)\, d\rho(\lambda) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i)| \cdot \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |g(\lambda) - g(\lambda_i)| |d\rho(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \cdot \eta \cdot \sum_{i=1}^{n} \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} |d\rho(\lambda)| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \cdot \eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |d\rho(\lambda)| \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |f(\lambda)| \cdot M \cdot \eta.$$

2. $$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\Big(\mathrm{G}(\lambda_{i+1}) - \mathrm{G}(\lambda_i)\Big) \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\lambda_1} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_{n+1}} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\Big(\mathrm{G}(\lambda_{i+1}) - \mathrm{G}(\lambda_i)\Big) + \int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda \leq \lambda_1} |\mathrm{f}(\lambda)| \cdot \mathrm{M}' + \left| \int_{\lambda_1}^{\lambda_{n+1}} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\Big(\mathrm{G}(\lambda_{i+1}) - \mathrm{G}(\lambda_i)\Big) \right| + \sup_{\lambda \geq \lambda_{n+1}} |\mathrm{f}(\lambda)| \cdot \mathrm{M}'$$

$$\leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

3. $\left| \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\mathrm{g}(\lambda_i)\Big(\rho(\lambda_{i+1}) - \rho(\lambda_i)\Big) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\mathrm{g}(\lambda)\, \mathrm{d}\rho(\lambda) \right| \leq \eta$ folgt analog zu 2).

Insgesamt erhält man

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\mathrm{g}(\lambda)\, \mathrm{d}\rho(\lambda) \right| =$$

$$\begin{aligned} = & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\, \mathrm{dG}(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\Big(\mathrm{G}(\lambda_{i+1}) - \mathrm{G}(\lambda_i)\Big) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\Big(\mathrm{G}(\lambda_{i+1}) - \mathrm{G}(\lambda_i)\Big) \right. \\ & - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\mathrm{g}(\lambda_i)\Big(\rho(\lambda_{i+1}) - \rho(\lambda_i)\Big) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\lambda_i)\mathrm{g}(\lambda_i)\Big(\rho(\lambda_{i+1}) - \rho(\lambda_i)\Big) \\ & \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\lambda)\mathrm{g}(\lambda)\, \mathrm{d}\rho(\lambda) \right| \leq \\ \geq & \quad \eta + \eta \cdot \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\mathrm{f}(\lambda)| \cdot \mathrm{M} + \eta, \end{aligned}$$

also folgt die Formel.

5.5.2 Hilfssatz

Sei ρ wie in Hilfssatz 5.4.4. Dann gibt es für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ hermitesche Operatoren $\mathrm{E}(\lambda)$ aus $\mathrm{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ mit $\|\mathrm{E}(\lambda)\| \leq 1$, so daß
$$\rho(\lambda, \mathrm{f}, \mathrm{g}) = (\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f}, \mathrm{g}).$$

Beweis:

Seien $\mathrm{c_i} \in \mathbb{C}, \mathrm{f_i}, \mathrm{g_i}, \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathcal{H}$ für i = 1,2. Für $\operatorname{Im} \mathrm{z} \neq 0$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}\rho(\lambda, \mathrm{c_1 f_1} + \mathrm{c_2 f_2}, \mathrm{g}) \overset{5.4.4}{=} (\mathrm{R_z}(\mathrm{c_1 f_1} + \mathrm{c_2 f_2}), \mathrm{g}) =$$

$$= \quad \mathrm{c_1}(\mathrm{R_z f_1}, \mathrm{g}) + \mathrm{c_2}(\mathrm{R_z f_2}, \mathrm{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - \mathrm{z}}\, \mathrm{d}\Big(\mathrm{c_1}\rho(\lambda, \mathrm{f_1}, \mathrm{g}) + \mathrm{c_2}\rho(\lambda, \mathrm{f_2}, \mathrm{g})\Big).$$

Sei $M := \| g \| \cdot \max\{\| c_1 f_1 + c_2 f_2 \|, | c_1 | \cdot \| f_1 \|, | c_2 | \cdot \| f_2 \|\}$. Dann sind die Abbildungen $\lambda \longmapsto \rho(\lambda, c_1 f_1 + c_2 f_2, g)$ und $\lambda \longmapsto c_1 \rho(\lambda, f_1, g) + c_2 \rho(\lambda, f_2, g)$ aus $\Gamma(M)$. Aus Satz 5.3.8 folgt:

$$\rho(\lambda, c_1 f_1 + c_2 f_2, g) = c_1 \rho(\lambda, f_1, g) + c_2 \rho(\lambda, f_2, g).$$

In derselben Weise zeigt man

$$\rho(\lambda, f, c_1 g_1 + c_2 g_2) = \overline{c_1} \rho(\lambda, f, g_1) + \overline{c_2} \rho(\lambda, f, g_2).$$

Nach Satz 5.1.8 ist $R_z^* = R_{\overline{z}}$, also gilt $(R_z f, g) = (f, R_{\overline{z}} g) = \overline{(R_{\overline{z}} g, f)}$. Folglich ist für $\operatorname{Im} z \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda, f, g)}{\lambda - z} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda, g, f)}{\lambda - \overline{z}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\overline{\rho(\lambda, g, f)}}{\lambda - z}.$$

Da $\rho(\lambda, f, g), \overline{\rho(\lambda, g, f)} \in \Gamma(\| f \| \cdot \| g \|)$, folgt wieder mit Satz 5.3.8: $\rho(\lambda, f, g) = \overline{\rho(\lambda, g, f)}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Weiter gilt $|\rho(\lambda, f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Also ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $\rho(\lambda, ., .)$ eine hermitesche Sesquilinearform mit $| \rho(\lambda, f, g) | \leq \| f \| \cdot \| g \|$. Nach Satz 1.7.5 gibt es nun für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ einen hermiteschen Operator $E(\lambda) \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ mit $\rho(\lambda, f, g) = (E(\lambda) f, g)$ und $\| E(\lambda) \| \leq 1$.

5.5.3 Hilfssatz

Es gibt genau eine Abbildung $\lambda \longmapsto \rho(\lambda, f, g) \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$ derart, daß für $f, g \in \mathcal{H}, \operatorname{Im} z \neq 0$ gilt:

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda, f, g)}{\lambda - z}.$$

Die Operatoren $E(\lambda)$ aus Hilfssatz 5.5.2 bilden eine Spektralschar.

Beweis:
Nach Hilfssatz 5.4.4 folgt die Existenz von ρ, nach Satz 5.3.8 die Eindeutigkeit. Zu zeigen ist also nur der zweite Teil.

1) $E(\lambda)E(\mu) = E\Big(\min(\lambda, \mu)\Big)$; $E(\lambda)$ ist Projektor:

   Nach Satz 5.1.4 gilt für $z_1 \neq z_2, \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 \neq 0$:

$$\frac{R_{z_1} - R_{z_2}}{z_1 - z_2} = R_{z_1} R_{z_2}.$$

   Daher ist

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda) f, g)}{\lambda - z_1} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda) f, g)}{\lambda - z_2} \right) \cdot \frac{1}{z_1 - z_2} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda) f, g)}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} = \left(\frac{R_{z_1} - R_{z_2}}{z_1 - z_2} f, g \right) =$$

$$\overset{5.1.4}{=} (R_{z_1} R_{z_2} f, g) = (R_{z_2} f, R_{\overline{z_1}} g) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda, f, R_{\overline{z_1}} g)}{\lambda - z_2} \overset{5.5.2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda) f, R_{\overline{z_1}} g)}{\lambda - z_2}.$$

Setzt man nun $\sigma_{z_1}(\lambda) := \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d(E(\mu)f, g)}{\mu - z_1}$, so gilt nach Hilfssatz 5.5.1 und obigen Rechnungen:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{z_1}(\lambda)}{\lambda - z_2} \overset{5.5.1}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda)f, g)}{(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda)f, R_{\overline{z}}g)}{\lambda - z_2}.$$

Nach Satz 5.3.8 folgt $\sigma_{z_1}(\lambda) = (E(\lambda)f, R_{\overline{z_1}}g)$, also ist

$$(E(\lambda)f, R_{\overline{z_1}}g) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d(E(\mu)f, g)}{\mu - z_1}.$$

Schreibt man nun z statt z_1, so gilt also für $\operatorname{Im} z \neq 0$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d(E(\mu)f, g)}{\mu - z} = (E(\lambda)f, R_{\overline{z}}g) = \overline{(R_{\overline{z}}g, E(\lambda)f)} =$$

$$\overset{5.4.4}{=} \overline{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\mu)g, E(\lambda)f)}{\mu - \overline{z}}} \overset{5.5.2}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\mu)E(\lambda)f, g)}{\mu - z},$$

also zusammengefaßt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d(E(\mu)f, g)}{\mu - z} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\mu)E(\lambda)f, g)}{\mu - z}.$$

Setzt man nun für λ fest, aber beliebig:

$$\tau_\lambda(\mu) := \begin{cases} \rho(\mu, f, g), \mu \leq \lambda \\ \rho(\lambda, f, g), \mu \geq \lambda \end{cases} = \begin{cases} \Big(E(\mu)f, g\Big), & \mu \leq \lambda \\ \Big(E(\lambda)f, g\Big), & \mu \geq \lambda \end{cases} = \Big(E\big(\min(\mu, \lambda)\big)f, g\Big),$$

so folgt mit obiger Gleichung für $f, g \in \mathcal{H}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau_\lambda(\mu)}{\mu - z} = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{d(E(\mu)f, g)}{\mu - z} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\mu)E(\lambda)f, g)}{\mu - z}.$$

Nach Satz 5.3.8 erhält man daraus für $f, g \in \mathcal{H}$:

$$\Big(E\big(\min(\mu, \lambda)\big)f, g\Big) = \tau_\lambda(\mu) = \Big(E(\mu)E(\lambda)f, g\Big),$$

also hat man für $f \in \mathcal{H}$:

$$E(\mu)E(\lambda)f = E(\min(\mu, \lambda))f \quad \text{und} \quad E(\lambda)^2 = E(\lambda),$$

d.h. $E(\lambda)$ ist ein Projektor.

2) $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda + \varepsilon)f = E(\lambda)f$:

Wegen $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f, g) \in \Gamma(\|f\| \cdot \|g\|)$ folgt für $g \in \mathcal{H}$:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Big(E(\lambda + \varepsilon)f, g\Big) = \Big(E(\lambda)f, g\Big).$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|(E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))f\| &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(E(\lambda+\varepsilon)f,f\Big)+\Big(E(\lambda)f,f\Big)-2\Big(E(\lambda)f,f\Big)= \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(E(\lambda+\varepsilon)f,f\Big)-\Big(E(\lambda)f,f\Big)=0,\end{aligned}$$

also ist für $\lambda \in \mathbb{R}: \lim\limits_{\varepsilon>0,\varepsilon\to 0} E(\lambda+\varepsilon)f = E(\lambda)f$.

3) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)f = 0:$

Aus $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f,f) \in \Gamma(\|f\|\cdot\|f\|)$ erhält man $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(E(\lambda)f,f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Wegen $(E(\lambda)f,f) = (E(\lambda)^2 f,f) = \|E(\lambda)f\|^2$ folgt daraus $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)f = 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$.

4) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)f = f:$

Es ist $0 \le \|(E(\lambda+\varepsilon)-E(\lambda))f\| \overset{2)}{=} (E(\lambda+\varepsilon)f,f)-(E(\lambda)f,f)$. Also ist die Funktion $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f,f)$ monoton steigend. Wegen $|(E(\lambda)f,f)| = |(E(\lambda)f,E(\lambda)f)| = \|E(\lambda)f\|^2 \le \|f\|^2$ ist die Funktion beschränkt, also existiert $\lim\limits_{\lambda\to\infty}(E(\lambda)f,f)$. Sei $\lambda < \mu$. Dann ist

$$\|E(\mu)f-E(\lambda)f\|^2 = (E(\mu)f,f)-(E(\lambda)f,f) \le \sup_{\lambda<\mu}|(E(\mu)f,f)-(E(\lambda)f,f)| =: \varepsilon(\lambda)$$

und es gilt $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\varepsilon(\lambda) = 0$. Demnach existiert zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein $L(f) \in \mathcal{H}$, so daß $\lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)f = L(f)$. Sei jetzt $g := f - L(f) = f - \lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)f$. Für $\mu \in \mathbb{R}$ folgt:

$$E(\mu)g = E(\mu)f - \lim_{\lambda\to\infty} E(\mu)E(\lambda)f = 0,$$

da $E(\mu)E(\lambda) = E(\mu)$ für $\lambda \ge \mu$. Sei $h \in \mathcal{H}$ beliebig, $\operatorname{Im} z \neq 0$, dann ist

$$(R_z g,h) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(E(\mu)g,h)}{\mu - z} = 0,$$

also $\Big((H-z)^{-1}g,h\Big) = 0$. Insbesondere gilt für alle $u \in \mathcal{D}(H): \Big((H-z)^{-1}g,(H-\overline{z})u\Big) = 0$, also wegen $R_z^* = R_{\overline{z}}$ nach 5.1.8: $(g,u) = 0$ für alle $u \in \mathcal{D}(H)$. Da $\mathcal{D}(H)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt $g = 0$, d.h. es ist $f = L(f) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} E(\lambda)f$.

1) - 4) sind gerade die definierenden Eigenschaften einer Spektralschar.

5.5.4 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann gibt es genau eine Spektralschar $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $(H-z)^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\lambda)}{\lambda - z}$, wobei das Integral in der Norm von $L(\mathcal{H},\mathcal{H})$ konvergiert.

Beweis:

Die Konvergenz von $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\lambda)}{\lambda - z} := \lim\limits_{a\to-\infty,b\to\infty}\int\limits_{a}^{b}\frac{dE(\lambda)}{\lambda - z}$ folgt aus Satz 5.2.15, weil $E(\lambda)$ eine Spektralschar ist.

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Spektralschar aus Hilfssatz 5.5.3. Dann ist für $f,\ g \in \mathcal{H}$:

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, d(E(\lambda)f, g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\lambda)f}{\lambda - z}, g \right),$$

also hat man $R_z f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\lambda)f}{\lambda - z}$.

Wenn es eine zweite Spektralschar $\{\widetilde{E}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ gibt mit $R_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z}$, so folgt für $f, g \in \mathcal{H}$ und $\operatorname{Im} z \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\widetilde{E}(\lambda)f, g)}{\lambda - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda)f, g)}{\lambda - z}.$$

Nach Satz 5.3.8 folgt daraus bereits $(E(\lambda)f, g) = (\widetilde{E}(\lambda)f, g)$ für $f, g \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R}$, und damit $E(\lambda)f = \widetilde{E}(\lambda)f$ für $f \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

5.6 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

In diesem Paragraphen wird das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE(\lambda)f$ auch für unbeschränkte stetige Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachtet. Zunächst wird der spezielle Fall $\varphi(\lambda) = \lambda$ behandelt, der allgemeine Fall wird später in 5.9 untersucht.

Erwartung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z}\, dE(\lambda)f &= (H - z)^{-1} f \\
\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)f &= Hf \\
\int_{-\infty}^{\infty} c\, dE(\lambda)f &= c \cdot \mathrm{Id}(f) \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{t\lambda}\, dE(\lambda)f &\stackrel{?}{=} e^{tH} f, t \geq 0
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten tatsächlich. In 5.9 werden wir sehen, wann man $e^{tH}f$ sinnvoll definieren kann.

5.6.1 Hilfssatz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar, sei $f \in \mathcal{H}$. Es existiert

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f =: \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)f$$

genau dann, wenn

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b \lambda^2 d(E(\lambda)f, f) =: \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)f, f)$$

existiert.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Es existiere $\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f$. Dann gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für alle $a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b$, gilt:

$$\left\| \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 \le M.$$

Nehme nun wie in Definition 5.2.8 die Riemannschen Summen T_n für $\varphi(\lambda) = \lambda$. Das ergibt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, \sum_{i=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f \right) &= \sum_{i=1}^{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_i^{(n)} \lambda_j^{(n)} \left(E\left(\Delta_j^{(n)}\right) E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{k_n} \left(\lambda_i^{(n)}\right)^2 \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f \right).
\end{aligned}$$

Also ist $0 \le \int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f) \le M$ für alle $a,\ b \in \mathbb{R}$ und $\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f)$ existiert.

„$\Leftarrow$" Es existiere $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f)$. Sei $-\infty < c < a < b < d < \infty$. Es ist

$$\begin{aligned}
\left\| \int_c^d \lambda \, dE(\lambda)f - \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 &= \left\| \int_c^a \lambda \, dE(\lambda)f + \int_b^d \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 = \\
= \left\| \int_c^a \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 &+ \left(\int_c^a \lambda \, dE(\lambda)f, \int_b^d \lambda \, dE(\lambda)f \right) + \left(\int_b^d \lambda \, dE(\lambda)f, \int_c^a \lambda \, dE(\lambda)f \right) + \\
&+ \left\| \int_b^d \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2.
\end{aligned}$$

Die gleiche Rechnung mit Riemannschen Summen wie im ersten Teil des Beweises zeigt:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_c^a \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 &= \int_c^a \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f); \\
\left\| \int_b^d \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 &= \int_b^d \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f);
\end{aligned}$$

$$\left(\int\limits_c^a \lambda\, dE(\lambda)f, \int\limits_b^d \lambda\, dE(\lambda)f\right) = \left(\int\limits_b^d \lambda\, dE(\lambda)f, \int\limits_c^a \lambda\, dE(\lambda)f\right) = 0,$$

da $[b,d] \cap [a,c] = \emptyset$ und $E(\Delta')E(\Delta'') = 0$ für $\mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Delta}'' = \emptyset$ nach Hilfssatz 5.2.6. Also ist

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_c^d \lambda\, dE(\lambda)f - \int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)f\right\|^2 &= \int\limits_c^a \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) + \int\limits_b^d \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) \leq \\ &\leq \int\limits_{-\infty}^a \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) + \int\limits_b^\infty \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f).\end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale konvergieren gegen 0 für $a \longrightarrow -\infty$, $b \longrightarrow +\infty$, also existiert

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)f.$$

5.6.2 Satz

Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ eine Spektralschar. Sei $\mathcal{D} := \left\{f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) < +\infty\right\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$. Der lineare Operator H, definiert durch

$$H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{H},\ Hf = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)f$$

ist selbstadjungiert.

Beweis:

1) H ist wohldefiniert und linear:
Nach Hilfssatz 5.6.1 ist H wohldefiniert. Seien $f, g \in \mathcal{D}$. Es ist

$$\int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)(f+g) = \int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)f + \int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)g.$$

Mit $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$ folgt: $f + g \in \mathcal{D}$, d.h. $\mathcal{D}$ ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$. Aus der Gleichung ergibt sich auch die Linearität von H.

2) H ist hermitesch:

Sei nun $H_{ab} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},\ H_{ab}f = \int\limits_a^b \lambda\, dE(\lambda)f$. Dann ist für $f, g \in \mathcal{H}$:

$$(H_{ab}f, g) = \int\limits_a^b \lambda\, d(E(\lambda)f, g) = \int\limits_a^b \lambda\, d(f, E(\lambda)g) = (f, H_{ab}g).$$

Also ist H_{ab} ein überall erklärter beschränkter hermitescher Operator. Für $f, g \in \mathcal{D}$ gilt daher:

$$(Hf, g) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} (H_{ab}f, g) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} (f, H_{ab}g) = (f, Hg).$$

$\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{H}$:

Sei $-\infty < a < b < \infty, \Delta = [a,b], f \in \mathcal{H}$. Zeige zunächst: $g = E(\Delta)f \in \mathcal{D}$. Es ist

$$E(\lambda)g = E(\lambda)\Big(E(b) - E(a)\Big)f = \begin{cases} 0, & \lambda \le a \\ \Big(E(\lambda) - E(a)\Big)f, & a \le \lambda \le b \\ \Big(E(b) - E(a)\Big)f, & \lambda \ge b. \end{cases}$$

Also gilt für $c < a < b < d$:

$$\int_c^d \lambda \, dE(\lambda)g = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)g = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)g.$$

Nach Hilfssatz 5.6.1 folgt: $g \in \mathcal{D}$. Wegen $\lim\limits_{a\to-\infty,b\to\infty} E(\Delta)f = \lim\limits_{a\to-\infty,b\to\infty} \Big(E(b) - E(a)\Big)f = f$ erhält man damit: $\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{H}$. Also ist H hermitesch.

3) H ist selbstadjungiert:

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$, sei $c < a < b < d$. Nehme eine Zerlegung von $[c,d]$ der folgenden Form: $c = \mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_{k+1} = a < \mu_{k+2} < ... < \mu_{n+1} = b < \mu_{n+2} < ... < \mu_{\widetilde{n}+1} = d$. Dann ist

$$\int_a^b (\lambda - z) \, dE(\lambda) \left(\int_c^d \frac{1}{\lambda - z} \, dE(\lambda)h \right)$$

der Grenzwert der Riemannschen Summen

$$\sum_{j=k}^{n} (\mu_j - z)\Big(E(\mu_{j+1}) - E(\mu_j)\Big) \cdot \left[\sum_{j=1}^{\widetilde{n}} \frac{1}{\mu_j - z}\Big(E(\mu_{j+1}) - E(\mu_j)\Big)h \right] =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \Big(E(\mu_{j+1} - E(\mu_j)\Big)h = \Big(E(b) - E(a)\Big)h$$

für $h \in \mathcal{H}$, wenn $\max\limits_{1\le j\le \widetilde{n}} |\, \mu_{j+1} - \mu_j \,|$ gegen 0 konvergiert. Dabei wurde wieder $E(\Delta')E(\Delta'') = 0$ für $\mathring{\Delta}' \cap \mathring{\Delta}'' = \emptyset$ nach 5.2.6 benutzt. Also ist

$$\int_a^b (\lambda - z) \, dE(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} \, dE(\lambda)h \right) = \Big(E(b) - E(a)\Big)h.$$

Sei nun $f \in \mathcal{H}$ beliebig, $g := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} \, dE(\lambda)f$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Big(E(b) - E(a)\Big)f &= \int_a^b (\lambda - z) \, dE(\lambda)g = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)g - z \int_a^b dE(\lambda)g = \\ &= \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)g - z \cdot \Big(E(b) - E(a)\Big)g. \end{aligned}$$

Für $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow \infty$ erhält man daraus: $\lim\limits_{a\to-\infty,b\to\infty} \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)g$ existiert (weil die anderen Grenzwerte existieren), d.h. $g \in \mathcal{D}(H)$ nach 5.6.1 und $f = (H - z)g$. Also ist $\mathcal{R}(H - z) = \mathcal{H}$ und damit H selbstadjungiert nach Satz 4.3.9.

5.6.3 Satz (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren)

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum. Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Dann existiert genau eine Spektralschar $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ derart, daß $\mathcal{D}(H) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty \right\}$,

$$Hf = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) f$$

für $f \in \mathcal{D}(H)$.

Beweis:
Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die Spektralschar aus Satz 5.5.4. Sei wieder $-\infty < c < a < b < d < \infty$. Wähle eine Zerlegung von $[c, d]$ wie im Beweis von Satz 5.6.2. Dann erhält man für die Riemannschen Summen wie in 5.6.2:

$$\sum_{j=1}^{\tilde{n}} \frac{1}{\mu_j - z} \Big(E(\mu_{j+1}) - E(\mu_j) \Big) \cdot \left[\sum_{j=k}^{n} (\mu_j - z) \Big(E(\mu_{j+1}) - E(\mu_j) \Big) f \right] = \Big(E(b) - E(a) \Big) f$$

für $\operatorname{Im} z \neq 0, f \in \mathcal{H}$ beliebig. Setzt man also $\Delta = [a, b], g := \int\limits_a^b (\lambda - z) \, dE(\lambda) f$, so ergibt sich für $c \longrightarrow -\infty, d \longrightarrow \infty : (H - z)^{-1} g = E(\Delta) f$, (so war die Spektralschar in 5.5.4 gewählt). Also ist $E(\Delta) f \in \mathcal{D}(H)$ und es gilt $(H - z) E(\Delta) f = g$. Es ist also

$$HE(\Delta)f - zE(\Delta)f = g = \int_a^b (\lambda - z) \, dE(\lambda) f = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) f - zE(\Delta) f,$$

also gilt für $f \in \mathcal{H}$:

$$HE(\Delta)f = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) f.$$

Sei $g \in \mathcal{D}(H)$, dann ist

$$(HE(\Delta)f, g) = \int_a^b \lambda \, d(E(\lambda)f, g) = \int_a^b \lambda \, d(f, E(\lambda)g) = \left(f, \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) g \right).$$

Außerdem gilt auch $(HE(\Delta)f, g) = (f, E(\Delta)Hg)$, also insgesamt $(f, E(\Delta)Hg) = \left(f, \int\limits_a^b \lambda \, dE(\lambda) g \right)$ für $f \in \mathcal{H}, g \in \mathcal{D}(H)$, daraus erhält man für alle $g \in \mathcal{D}(H)$:

$$E(\Delta)Hg = \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) g.$$

Wegen $\lim\limits_{a \to -\infty, b \to \infty} E(\Delta)Hg = Hg$ folgt damit

$$Hg = \lim_{a \to -\infty, b \to \infty} \int_a^b \lambda \, dE(\lambda) g = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) g.$$

Nach Hilfssatz 5.6.1 folgt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)g, g) < \infty$. Also ist $\left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty \right\} \supset \mathcal{D}(H)$.

Für „$\subset$ " sei $f \in \mathcal{H}$ mit $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty$. Sei $\Delta_n = [-n, n]$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie eben gezeigt, ist $E(\Delta_n)f \in \mathcal{D}(H)$ und es gilt $HE(\Delta_n)f = \int\limits_{-n}^{n} \lambda \, dE(\lambda)f$. Nach Hilfssatz 5.6.1 existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \lambda \, dE(\lambda)f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)f$. Weiter gilt $\lim\limits_{n\to\infty} E(\Delta_n)f = f$. Da H als selbstadjungierter Operator abgeschlossen ist, folgt: $f \in \mathcal{D}(H), Hf = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda)f$, also gilt auch „$\subset$ ". Es gibt demnach eine Spektralschar, die den beiden Forderungen des Satzes genügt.
Eindeutigkeit der Spektralschar:
Die Rechnung mit Riemannschen Summen im Beweis von Satz 5.6.2, 3), zeigt, daß für $f \in \mathcal{H}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ und jede Spektralschar $\widetilde{E}(\lambda)$ gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)}{\lambda - z} \int\limits_{a}^{b} (\lambda - z) \, d\widetilde{E}(\lambda)f = \Big(\widetilde{E}(b) - \widetilde{E}(a)\Big)f.$$

Ist nun $\widetilde{E}(\lambda)$ eine Spektralschar wie im Satz, so existiert $g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z) \, d\widetilde{E}(\lambda)f$ und es ist $g = (H - z)f$. Also ist

$$(H - z)^{-1}g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\widetilde{E}(\lambda)g}{\lambda - z} = f.$$

Diese Formel gilt also für jede Spektralschar $\widetilde{E}(\lambda)$ mit den im Satz angegebenen Eigenschaften. Nach Satz 5.5.4 gibt es aber genau eine Spektralschar, die diese Gleichung erfüllt.

5.7 Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators

In diesem Paragraphen sei $\mathcal{H}$ stets unendlichdimensional und separabel.

5.7.1 Definition

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die eindeutig bestimmte Spektralschar, die nach Satz 5.6.3 zu H gehört. Sei $\Delta = [a, b]$ für $-\infty < a < b < \infty$. Dann heißt

$$\mathcal{M}(\Delta) = E(\Delta)\mathcal{H} = \Big(E(b) - E(a)\Big)\mathcal{H}$$

der zu Δ gehörige Spektralraum.

5.7.2 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. λ_0 liegt in $S(H)$ genau dann, wenn für <u>jedes</u> $\Delta = [a, b]$ mit $\lambda_0 \in (a, b)$ gilt: $+\infty \geq \dim \mathcal{M}(\Delta) > 0$.

<u>Beweis</u>:

„$\Leftarrow$ " Im Beweis von Satz 5.6.3 wurde gezeigt: $\mathcal{M}(\Delta) \subset \mathcal{D}(H)$. Sei $+\infty \geq \dim \mathcal{M}(\Delta) > 0$ für jedes Δ mit $\lambda_0 \in \mathring{\Delta}$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathcal{M}(\Delta)$ mit $\|\varphi\| = 1$. Wegen $\varphi \in \mathcal{M}(\Delta)$ ist $\varphi = E(\Delta)\varphi$. Es ist

$$(H - \lambda_0)\varphi \quad = \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0) \, dE(\lambda)\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0) \, dE(\lambda)E(\Delta)\varphi =$$

$$\overset{(*)}{=} \int\limits_a^b (\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{E}(\Delta)\varphi = \int\limits_a^b (\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{dE}(\lambda)\varphi.$$

(*) gilt, da $\mathrm{HE}(\Delta)\mathrm{f} = \int\limits_a^b \lambda\,\mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{f}$, wie im Beweis von Satz 5.6.3 gezeigt wurde. Sei nun $\Delta = [\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{H}-\lambda_0)\varphi\|^2 &= \left\| \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{dE}(\lambda)\varphi \right\|^2 = \\
&= \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\varphi,\varphi) \leq \varepsilon^2 \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\varphi,\varphi) = \\
&= \varepsilon^2\Big(\big(\mathrm{E}(\lambda_0+\varepsilon)-\mathrm{E}(\lambda_0-\varepsilon)\big)\varphi,\varphi\Big) \leq \varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Also existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathrm{H})$ mit $\|\varphi_\varepsilon\| = 1$ und $\|(\mathrm{H}-\lambda_0)\varphi_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Nach Satz 5.1.3 folgt: $\lambda_0 \in \mathrm{S(H)}$.

„$\Rightarrow$" Sei $\dim \mathcal{M}([\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]) = 0$ für ein $\varepsilon > 0$. Sei $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{H})$. Dann ist

$$(\mathrm{H}-\lambda_0)\mathrm{f} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)\,\mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{f} \quad \text{und}$$

$$\|(\mathrm{H}-\lambda_0)\mathrm{f}\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f})$$

(siehe Beweis von Hilfssatz 5.6.1). Sei $\lambda_0-\varepsilon \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_0+\varepsilon$. Angenommen, es gibt ein $\mathrm{f}_0 \in \mathcal{H}$ mit $\|\mathrm{E}(\lambda_2)\mathrm{f}_0\|^2 - \|\mathrm{E}(\lambda_1)\mathrm{f}_0\|^2 > 0$. Dann ist auch $\|(\mathrm{E}(\lambda_2)-\mathrm{E}(\lambda_1))\mathrm{f}_0\|^2 > 0$, d.h. $\mathrm{g} = \Big(\mathrm{E}(\lambda_2)-\mathrm{E}(\lambda_1)\Big)\mathrm{f}_0 \neq 0$.

Es ist aber $\mathrm{g} \in \mathrm{E}([\lambda_1,\lambda_2])\mathcal{H} \subset \mathcal{M}([\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon])$, also widerspricht dies der Voraussetzung. Demnach ist

$$\int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) = \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} \varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\,\|\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f}\|^2 = 0$$

für alle Funktionen $\varphi(\lambda)$ und alle $\mathrm{f} \in \mathcal{H}$. Somit gilt für $\mathrm{f} \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\|(\mathrm{H}-\lambda_0)\mathrm{f}\|^2 &= \int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) + \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) + \\
&\quad + \int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) + \int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) \geq \\
&\geq \varepsilon^2 \left(\int\limits_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} \mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) + \int\limits_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}(\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f},\mathrm{f}) \right) =
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} d(E(\lambda)f,f) + \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} d(E(\lambda)f,f) + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} d(E(\lambda)f,f) \right) =$$

$$= \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)f,f) = \varepsilon^2 \cdot (f,f) = \varepsilon^2 \cdot \|f\|^2 .$$

Nach Satz 5.1.3 folgt aus $\|(H-\lambda_0)f\|^2 \geq \varepsilon^2 \cdot \|f\|^2$ für ein festes ε und alle $f \in \mathcal{H} : \lambda_0 \in \Sigma(H)$.

5.7.3 Bemerkung und Definition

Nach 5.3.1 existiert für $f, g \in \mathcal{H}$ der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \Big(E(\lambda-\varepsilon)f, g\Big)$. Folglich konvergiert

$$\left\| \Big(E(\lambda-\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon')\Big) f \right\|^2 = \Big(E(\lambda-\varepsilon)f,f\Big) - \Big(E(\lambda-\varepsilon')f,f\Big)$$

gegen 0 für $\varepsilon, \varepsilon' \longrightarrow 0$. Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda-\varepsilon)f$ für $f \in \mathcal{H}$. Es sei

$$E(\lambda-0)f := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} E(\lambda-\varepsilon)f.$$

Dann ist $E(\lambda-0) \in L(\mathcal{H},\mathcal{H})$, $\|E(\lambda-0)\| \leq 1$, $E^2(\lambda-0) = E(\lambda-0)$ und $E(\lambda-0)$ ist hermitesch.

5.7.4 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Alle Eigenwerte von H sind reell. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Eigenwert von H genau dann, wenn $E(\lambda_0)f$ nicht für jedes $f \in \mathcal{H}$ auch stetig von links ist. (Die Abbildung $\lambda \longmapsto E(\lambda)f$ ist für jedes $f \in \mathcal{H}$ stetig von rechts.) Anders formuliert lautet der Satz: $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von H $\Longleftrightarrow E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0) \neq 0$.

Beweis:

„$\Leftarrow$ “ Sei $E(\lambda_0) - E(\lambda_0-0) \neq 0$. Dann gibt es ein $f_0 \in \mathcal{H}$ mit $\Big(E(\lambda_0) - E(\lambda_0-0)\Big)f_0 = g_0 \neq 0$. Seien $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ und $0 < \delta < \varepsilon, \varepsilon'$. Dann ist

$$\Big(E(\lambda_0+\varepsilon') - E(\lambda_0-\varepsilon)\Big)\Big(E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta)\Big) = E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \Big(E(\lambda_0+\varepsilon') - E(\lambda_0-\varepsilon)\Big)g_0 &= \Big(E(\lambda_0+\varepsilon') - E(\lambda_0-\varepsilon)\Big)\left(\lim_{\delta\downarrow 0}\Big(E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta)\Big)f_0\right) = \\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\Big(E(\lambda_0+\delta) - E(\lambda_0-\delta)\Big)f_0 = g_0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} E(\lambda_0+\varepsilon')g_0 &= g_0 + E(\lambda_0-\varepsilon)g_0 \\ \text{bzw. } E(\lambda_0-\varepsilon)g_0 &= E(\lambda_0+\varepsilon')g_0 - g_0. \end{aligned}$$

Läßt man nun eine der Größen $\varepsilon, \varepsilon'$ wachsen und hält die andere fest, so hat man: $E(\lambda)g_0$ ist konstant für $\lambda > \lambda_0 + \varepsilon'$ und für $\lambda < \lambda_0 - \varepsilon$. Also ist

$$(H-\lambda_0)g_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)\, dE(\lambda)g_0 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon'} (\lambda-\lambda_0)\, dE(\lambda)g_0$$

und mit $\Delta' := [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon']$:

$$\begin{aligned} \|(H-\lambda_0)g_0\|^2 &= \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon'} (\lambda-\lambda_0)^2\, d(E(\lambda)g_0, g_0) \leq \\ &\leq \max(\varepsilon^2, \varepsilon'^2) \cdot \int\limits_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon'} d(E(\lambda)g_0, g_0) = \max(\varepsilon^2, \varepsilon'^2) \cdot (E(\Delta')g_0, g_0) \leq \\ &\leq \max(\varepsilon^2, \varepsilon'^2) \cdot \|g_0\|^2 . \end{aligned}$$

Für $\varepsilon, \varepsilon' \longrightarrow 0$ erhält man $\|(H-\lambda_0)g_0\|^2 = 0$, also ist $Hg_0 = \lambda_0 g_0$. Weil $g_0 \neq 0$ ist, ist g_0 Eigenvektor und λ_0 Eigenwert.

„$\Rightarrow$" Sei λ_0 Eigenwert, $\varphi_0 \in \mathcal{D}(H), \varphi_0 \neq 0$, mit $H\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$. Dann ist

$$0 = \|(H-\lambda_0)\varphi_0\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d(E(\lambda)\varphi_0, \varphi_0).$$

Wähle $\Delta = [a,b]$ so, daß $\lambda_0 \notin \Delta$. Dann folgt – weil die Funktion $\lambda \longmapsto (E(\lambda)\varphi_0, \varphi_0)$ monoton steigt nach 5.2.10:

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d(E(\lambda)\varphi_0, \varphi_0) \geq \int\limits_{a}^{b} (\lambda-\lambda_0)^2\, d(E(\lambda)\varphi_0, \varphi_0) \geq \\ &\geq \operatorname{dist}^2(\lambda_0, \Delta) \int\limits_{a}^{b} d(E(\lambda)\varphi_0, \varphi_0) = \operatorname{dist}^2(\lambda_0, \Delta) \cdot \|E(\Delta)\varphi_0\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist $E(\Delta)\varphi_0 = E(b)\varphi_0 - E(a)\varphi_0 = 0$. Variiert man nun Δ, so ergibt sich: $E(\lambda)\varphi_0$ ist konstant für $\lambda > \lambda_0$ oder $\lambda < \lambda_0$. Aus $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)\varphi_0 = 0$ erhält man $E(\lambda)\varphi_0 = 0$ für $\lambda < \lambda_0$, wegen $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E(\lambda)\varphi_0 = \varphi_0$ folgt $E(\lambda)\varphi_0 = \varphi_0$ für $\lambda > \lambda_0$. Die rechtsseitige Stetigkeit von $E(\lambda)\varphi_0$ liefert $E(\lambda)\varphi_0 = \varphi_0$ für $\lambda \geq \lambda_0$. Insbesondere ist $\Big(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)\Big)\varphi_0 = \varphi_0 \neq 0$, also $E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0) \neq 0$.

5.7.5 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $-\infty < a < b < \infty, \Delta = [a,b]$. Sei die Dimension von $\mathcal{M}(\Delta) = E(\Delta)\mathcal{H}$ endlich, etwa $\dim \mathcal{M}(\Delta) = m > 0$. Dann existieren m paarweise orthogonale Eigenvektoren $\varphi_1, ..., \varphi_m$ zu H mit den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_m$, d.h. es ist $H\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ für $1 \leq i \leq m$. $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ ist eine Basis von $\mathcal{M}(\Delta)$ und für die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$ gilt: $a < \lambda_i \leq b$.

Beweis:
Sei $f \in \mathcal{M}(\Delta)$. Im Beweis von Satz 5.6.3 wurde gezeigt:

$$E(\Delta) \subset \mathcal{D}(H)$$

und

$$Hf \overset{f \in \mathcal{M}(\Delta)}{=} HE(\Delta)f = \int\limits_{a}^{b} \lambda\, dE(\lambda)f = E(\Delta)Hf.$$

Also ist $H\mathcal{M}(\Delta) \subset \mathcal{M}(\Delta)$, d.h. $\mathcal{M}(\Delta)$ ist invarianter Teilraum unter H. Die Einschränkung von H auf $\mathcal{M}(\Delta)$ ist also eine (beschränkte) hermitesche Abbildung von $\mathcal{M}(\Delta)$ in sich. Also hat $\mathcal{M}(\Delta)$ eine

Orthonormalbasis $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ mit $H\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$ und reellen Zahlen $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Nach obiger Gleichung aus 5.6.3 ist

$$\lambda_i = (H\varphi_i, \varphi_i) = \int_a^b \lambda \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i).$$

Man kann abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_a^b \lambda \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) &\leq b \cdot \int_a^b d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) = b \cdot (E(\Delta)\varphi_i, \varphi_i) = \\ &= b \cdot \| E(\Delta)\varphi_i \|^2 \leq b\end{aligned}$$

und analog

$$\int_a^b \lambda \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) \geq a \cdot \int_a^b d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) \geq a.$$

Also ist $a \leq \lambda_i \leq b$.
Angenommen es gibt ein λ_i mit $\lambda_i = a$. Dann ist nach dem zweiten Teil des Beweises von Satz 5.7.4:

$$\Big(E(\lambda_i) - E(\lambda_i - 0)\Big)\varphi_i = \Big(E(a) - E(a - 0)\Big)\varphi_i \neq 0.$$

Es ist aber $\varphi_i = E(\Delta)\varphi_i = \Big(E(b) - E(a)\Big)\varphi_i$ wegen $\varphi_i \in \mathcal{M}(\Delta)$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &\neq \Big(E(a) - E(a - 0)\Big)\Big(E(b) - E(a)\Big)\varphi_i = \\ &= \Big(E(a) - E(a) - \big(E(a - 0) - E(a - 0)\big)\Big)\varphi_i = 0,\end{aligned}$$

Widerspruch. Also ist $a < \lambda_i \leq b$.

In den folgenden Definitionen wird das Spektrum eines selbstadjungierten Operators zerlegt.

5.7.6 Definition (wesentliches oder essentielles Spektrum)

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die zu H gehörige Spektralschar. Ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zum wesentlichen (= essentiellen) Spektrum $S_e(H)$ von H, wenn $\mathcal{M}(\Delta) = E(\Delta)\mathcal{H}$ unendliche Dimension hat für jedes kompakte Intervall Δ mit $\lambda_0 \in \mathring{\Delta}$.

5.7.7 Definition (diskretes Spektrum)

Sei H wie in der vorigen Definition. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ gehört genau dann zum diskreten Teil $S_d(H)$ des Spektrums, wenn es ein kompaktes Intervall Δ gibt mit $\lambda_0 \in \mathring{\Delta}$ und $0 < \dim \mathcal{M}(\Delta) < +\infty$, $1 \leq \dim \mathcal{M}([\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon])$ für alle $\varepsilon > 0$ mit $[\lambda_0 - \varepsilon, \ \lambda_0 + \varepsilon] \subset \Delta$.

5.7.8 Definition

Sei H wie oben definiert. $+\infty$ gehört zum wesentlichen Spektrum genau dann, wenn die Teilräume $(I - E(N))\mathcal{H}, N \in \mathbb{N}$, alle unendliche Dimension haben.
$-\infty$ gehört zum wesentlichen Spektrum von H genau dann, wenn die Teilräume $E(-N)\mathcal{H}, N \in \mathbb{N}$, unendliche Dimension haben.

Trivialerweise ist $S_e(H) \subset S(H)$ und $S_d(H) \subset S(H)$ nach Satz 5.7.2. Dann ist

$$S(H) \cup \{\pm\infty\} = (S_e(H) \cup \{\pm\infty\}) \cup S_d(H),$$

$$S_e(H) \cap S_d(H) = \emptyset.$$

5.7.9 Satz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in S_d(H)$. Dann ist λ_0 Eigenwert von H und isolierter Punkt von S(H), d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon] \cap S(H) = \{\lambda_0\}$.

Beweis:
Sei $\lambda_0 \in S_d(H)$. Sei $V = \bigcap_{n \geq n_0, n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}([\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}])$ mit n_0 hinreichend groß. Betrachte die Folge $\left(\dim \mathcal{M}([\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}])\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Folge ist monoton fallend mit endlichem Wertevorrat, denn ist $\Delta = [a, b] \subset \Delta' = [c, d]$, so ist $E(\Delta)\mathcal{H} \subset E(\Delta')\mathcal{H}$ nach 5.2.6. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\dim \mathcal{M}([\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}]) \geq 1$. Also gibt es ein n_1, so daß für alle $m \geq n_1$ gilt:

$$\dim \mathcal{M}\left(\left[\lambda_0 - \frac{1}{m}, \lambda_0 + \frac{1}{m}\right]\right) = \min_{n \geq n_0} \dim \mathcal{M}\left(\left[\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}\right]\right) \geq 1.$$

Folglich ist $+\infty > \dim V \geq 1$. Es gibt also ein $g_0 \in V \backslash \{0\}$ und $f_m \in \mathcal{H}$ für $m \geq n_1$, so daß

$$g_0 = \left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{m}\right) - E\left(\lambda_0 - \frac{1}{m}\right)\right) f_m.$$

Seien nun $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. Dann gibt es ein $n_2(\varepsilon, \varepsilon')$, so daß $\frac{1}{m} \leq \varepsilon, \varepsilon'$ für $m \geq n_2(\varepsilon, \varepsilon')$. Es ist

$$\begin{aligned}\Big(E(\lambda_0 + \varepsilon') - E(\lambda_0 - \varepsilon)\Big) g_0 &= \Big(E(\lambda_0 + \varepsilon') - E(\lambda_0 - \varepsilon)\Big)\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{m}\right) - E\left(\lambda_0 - \frac{1}{m}\right)\right) f_m = \\ &= \left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{m}\right) - E\left(\lambda_0 - \frac{1}{m}\right)\right) f_m = g_0.\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Satz 5.7.4 folgt: $Hg_0 = \lambda_0 g_0$. Also ist λ_0 Eigenwert.
Sei $\Delta = [a, b]$ ein Intervall mit $\lambda_0 \in \mathring{\Delta}$, wie es nach Definition 5.7.7 existiert. Sei $\mu \in S(H) \cap (a, b)$. Obige Rechnungen zeigen: μ ist Eigenwert von H, der zugehörige Eigenvektor g_1, der wie oben konstruiert wird, liegt in $\mathcal{M}(\Delta)$. Also ist $g_0 = E(\Delta)g_0$, d.h. g_0 ist Eigenvektor zum Eigenwert μ der Restriktion von H auf $\mathcal{M}(\Delta) - \mathcal{M}(\Delta)$ ist invarianter Teilraum unter H, siehe Beweis von Satz 5.7.5. Diese Restriktion hat aber nur endlich viele Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Also ist $\mu \in \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, d.h. $S(H) \cap (a, b)$ besteht aus höchstens m isolierten Punkten. Insbesondere ist λ_0 isolierter Punkt von S(H).

Der Beweis von Satz 5.7.9 zeigt nicht nur, daß $\lambda_0 \in S_d(H)$ ein Eigenwert von H und isolierter Punkt von S(H) ist, sondern auch, daß λ_0 endliche Vielfachheit hat, d.h. $\widetilde{V} = \{g \in \mathcal{D}(H) \mid Hg = \lambda_0 g\}$ ist endlichdimensional.
Wie im Beweis von Satz 5.7.4 zeigt man, daß $E(\Delta)g = g$ für $g \in \widetilde{V}$, wenn λ_0 im offenen Kern des kompakten Intervalls Δ liegt. Für das Δ aus Definition 5.7.7 ist $\widetilde{V} \subset E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{M}(\Delta), \dim \mathcal{M}(\Delta) < \infty$.

5.7.10 Satz (Weylsches[1] Kriterium)

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Eine reelle Zahl λ_0 gehört genau dann zum essentiellen Spektrum $S_e(H)$ von H, wenn es eine Folge $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(H)$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

1) $\|\varphi_i\| = 1$ für $i \in \mathbb{N}$,

2) $\varphi_i \overset{i \to \infty}{\rightharpoonup} 0$,

3) $\lim_{i \to \infty} (H - \lambda_0)\varphi_i = 0$.

[1] Hermann Weyl (1885-1955)

Beweis:

„$\Rightarrow$ “ Sei $\lambda_0 \in S_e(H)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sezte $\Delta_n = [\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 + \frac{1}{n}]$. Dann ist $\dim \Delta_n = +\infty$. Es gibt eine Folge $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_i \in \mathcal{M}(\Delta_i), \|\varphi_i\| = 1, (\varphi_i, \varphi_k) = 0$ für $i \neq k$, d.h. $\varphi_i \overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Konstruktion der Folge:

Sei $\Delta_n^{(1)} = [\lambda_0 - \frac{1}{n}, \lambda_0 - \frac{1}{n+1}], \Delta_n^{(2)} = [\lambda_0 + \frac{1}{n+1}, \lambda_0 + \frac{1}{n}]$. Dann ist $\Delta_n \backslash \mathring{\Delta}_{n+1} = \Delta_n^{(1)} \cup \Delta_n^{(2)}$. Nun werden zwei Fälle unterschieden:

1) Es gibt eine Folge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Indizes mit $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_j}^{(1)}\right) \neq \{0\}$ oder $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_j}^{(2)}\right) \neq \{0\}$.

   Dann wählt man ein $\varphi_{n_j} \neq 0$ in $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_j}^{(1)}\right)$ bzw. $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_j}^{(2)}\right)$ mit $\|\varphi_{n_j}\| = 1$. Weil die Räume $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_j}^{(i)}\right)$ und $\mathcal{M}\left(\Delta_{n_k}^{(m)}\right)$ orthogonal sind für $i \neq m$ oder $j \neq k$ nach Hilfssatz 5.2.6, sind auch die φ_{n_j} paarweise orthogonal. Nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10 gilt für $f \in \mathcal{H}$: $\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \varphi_{n_j})|^2$, also ist $\lim_{j\to\infty}(f, \varphi_{n_j}) = 0$ und damit $\varphi_{n_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

2) Es gibt ein n_0, so daß $\mathcal{M}\left(\Delta_n^{(1)}\right) = \mathcal{M}\left(\Delta_n^{(2)}\right) = \{0\}$ für $n \geq n_0$.

   Es ist $\mathcal{M}(\Delta_n) = \mathcal{M}(\Delta_{n+1}) \oplus \mathcal{M}\left(\Delta_n^{(1)}\right) \oplus \mathcal{M}\left(\Delta_n^{(2)}\right)$ eine orthogonale Zerlegung von $\mathcal{M}(\Delta_n)$ nach 5.2.6. Also ist $\mathcal{M}(\Delta_{n_0}) = \mathcal{M}(\Delta_{n_0+1}) = \ldots$ usw. Wähle nun in $\mathcal{M}(\Delta_{n_0})$ ein VONS $\{\varphi_{n_0}, \varphi_{n_0+1}, \ldots\}$. Dann ist $\varphi_i \in \mathcal{M}(\Delta_i)$ für $i = n_0, n_0+1, \ldots$ und Bessels Ungleichung 1.1.10 zeigt wieder : $\varphi_i \overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} 0$.

Für die so konstruierte Folge $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\|(H - \lambda_0)\varphi_i\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) = \int_{\lambda_0 - \frac{1}{i}}^{\lambda_0 + \frac{1}{i}} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i),$$

denn $(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i)$ ist außerhalb von Δ_i konstant – φ_i ist ja in $E(\Delta_i)\mathcal{H}$ und $E(\lambda)E(\Delta_i)$ ist konstant außerhalb von Δ_i. Damit ist

$$\begin{aligned}\|(H - \lambda_0)\varphi_i\|^2 \quad &\leq \quad \frac{1}{i^2} \int_{\lambda_0 - i}^{\lambda_0 + i} d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) = \frac{1}{i^2} \|E(\Delta_i)\varphi_i\|^2 = \\ &\overset{\varphi_i \in E(\Delta_i)\mathcal{H}}{=} \quad \frac{1}{i^2} \|\varphi_i\|^2 = \frac{1}{i^2}.\end{aligned}$$

Also folgt $\lim_{i\to\infty}(H - \lambda_0)\varphi_i = 0$.

„$\Leftarrow$ “ Sei $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie im Satz. Annahme: $\lambda_0 \notin S_e(H)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, daß $\dim \mathcal{M}([\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]) < \infty$. Weil $\lambda \longmapsto (E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i)$ monoton ist nach 5.2.10, ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|(H - \lambda_0)\varphi_i\|^2 \quad &\geq \quad \int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) \geq \\ &\geq \quad \varepsilon^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0 - \varepsilon} d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{\infty} d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) \right) = \\ &= \quad \varepsilon^2 \cdot \left(\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{\lambda_0 - \varepsilon} d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) + \lim_{b\to\infty} \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^{b} d(E(\lambda)\varphi_i, \varphi_i) \right) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^2 \cdot \Bigg(\lim_{a\to-\infty} \Big(\big(E(\lambda_0-\varepsilon)\varphi_i,\varphi_i\big) - \big(E(a)\varphi_i,\varphi_i\big)\Big) + \\
&\quad + \lim_{b\to\infty} \Big(\big(E(b)\varphi_i,\varphi_i\big) - \big(E(\lambda_0+\varepsilon)\varphi_i,\varphi_i\big)\Big)\Bigg) = \\
&= \varepsilon^2 \cdot \Big(\big(E(\lambda_0-\varepsilon)\varphi_i,\varphi_i\big) + \big(\varphi_i,\varphi_i\big) - \big(E(\lambda_0+\varepsilon)\varphi_i,\varphi_i\big)\Big) = \\
&= \varepsilon^2 \cdot \Big(\|E(\lambda_0-\varepsilon)\varphi_i\|^2 + \|\varphi_i\|^2 - \|E(\lambda_0+\varepsilon)\varphi_i\|^2 \Big) = \\
&= \varepsilon^2 \cdot \Bigg(1 - \Big(\big(E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)\big)\varphi_i,\varphi_i\Big)\Bigg) = \\
&= \varepsilon^2 \cdot \Bigg(1 - \Big\| \big(E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)\big)\varphi_i \Big\|^2 \Bigg).
\end{aligned}
$$

Der Operator $E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)$ ist die Projektion von $\mathcal{H}$ auf einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathcal{H}$ und daher nach Beispiel 2.2.5 kompakt. Aus $\varphi_i \overset{i\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ erhält man mit Satz 2.2.11: $\lim\limits_{i\to\infty} \Big(E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)\Big)\varphi_i = 0$. Also gibt es ein i_0, so daß für $i \geq i_0$ gilt: $\|(H-\lambda_0)\varphi_i\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\lim\limits_{i\to\infty}(H-\lambda_0)\varphi_i = 0$.

5.7.11 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und sei λ_0 Häufungspunkt von $S(H)$. Dann gilt: $\lambda_0 \in S_e(H)$.

Beweis:
Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Zahlen mit $\lambda_n \in S(H)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Zu jedem λ_n wähle ein Intervall $\Delta_n = [a_n, b_n]$ derart, daß $\lambda_n \in \mathring{\Delta}_n$ und $\mathring{\Delta}_n \cap \mathring{\Delta}_m = \emptyset$ für $n \neq m$. Ist nun $\Delta = [a,b]$ ein Intervall mit $\lambda_0 \in \mathring{\Delta}$, so enthält Δ unendlich viele Intervalle Δ_n, etwa $\Delta_{n_1}, \Delta_{n_2}, \ldots$ Nach 5.2.6 ist $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}(\Delta_{n_j}) \subset \mathcal{M}(\Delta)$ und $\mathcal{M}(\Delta_{n_j}) \perp \mathcal{M}(\Delta_{n_k})$ für $j \neq k$. Wegen $\lambda_{n_j} \in \mathcal{M}(\Delta_{n_j})$ ist $\dim \mathcal{M}(\Delta_{n_j}) \geq 1$, also $\dim \mathcal{M}(\Delta) = \infty$.

5.7.12 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\Delta = [a,b] \subset \Sigma(H)$. Dann ist $E(b) = E(\lambda) = E(a)$ für $a \leq \lambda \leq b$.

Beweis:
Nach Satz 5.7.2 gibt es zu jedem $\lambda \in [a,b]$ ein $\Delta_\lambda = [a_\lambda, b_\lambda]$ mit $\lambda \in [a_\lambda, b_\lambda]$ und $\mathcal{M}(\Delta_\lambda) = \{0\}$. Wegen $[a,b] \subset \bigcup\limits_{\lambda\in[a,b]} (a_\lambda, b_\lambda)$, $[a,b]$ kompakt, folgt: Es gibt $\lambda_1, \ldots \lambda_N \in [a,b]$ mit $[a,b] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} (a_{\lambda_j}, b_{\lambda_j})$. O.E sei $\lambda_1 < \ldots < \lambda_N$. Dann ist $a \in (a_{\lambda_1}, b_{\lambda_1})$. Wegen $\mathcal{M}(\Delta_{\lambda_1}) = \{0\}$ ist $E(\lambda) = E(a_{\lambda_1}) = E(b_{\lambda_1})$ für $a_{\lambda_1} \leq \lambda \leq b_{\lambda_1}$. Wegen $a_{\lambda_1} < a_{\lambda_2} < b_{\lambda_1} < b_{\lambda_2}$ folgt $E(\lambda) = E(a_{\lambda_1}) = E(b_{\lambda_1}) = E(a_{\lambda_2}) = E(b_{\lambda_2})$ für $a_{\lambda_1} \leq \lambda \leq b_{\lambda_2}$ usw. Schließlich ist $E(\lambda) = E(a) = E(b)$ für alle λ mit $a_{\lambda_1} \leq \lambda \leq b_{\lambda_N}$.

5.7.13 Hilfssatz

Sei $H : \mathcal{D}(H) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von H. Dann ist

$$\{\varphi \in \mathcal{D}(H) \mid H\varphi = \lambda_0\varphi\} = \Big(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)\Big)\mathcal{H}.$$

Beweis:

Der zweite Teil des Beweises von Satz 5.7.4 zeigt, daß $\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{H}) \mid \mathrm{H}\varphi = \lambda_0\varphi\} \subset \Big(\mathrm{E}(\lambda_0)-\mathrm{E}(\lambda_0-0)\Big)\mathcal{H}$. Andererseits erfüllt $\mathrm{g} = \Big(\mathrm{E}(\lambda_0) - \mathrm{E}(\lambda_0 - 0)\Big)\mathrm{f}$ für jedes $\mathrm{f} \in \mathcal{H}$ die Gleichung $\mathrm{Hg} = \lambda_0\mathrm{g}$, wie im ersten Teil des Beweises von Satz 5.7.4 gezeigt wurde.

5.7.14 Hilfssatz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ beschränkt und hermitesch. Dann ist H selbstadjungiert. Sei $\{\mathrm{E}(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die zu H gehörige Spektralschar. Ist $\mathrm{N} > \|\mathrm{H}\|$, so ist

$$\mathrm{H} = \int_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \lambda \, \mathrm{dE}(\lambda)$$

und das Integral konvergiert in $\mathrm{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Beweis:
Nach Satz 4.3.6 ist H selbstadjungiert. Weiter ist

$$\|(\mathrm{H}+\lambda)\mathrm{f}\| \geq |\lambda| \cdot \|\mathrm{f}\| - \|\mathrm{Hf}\| \geq |\lambda| \cdot \|\mathrm{f}\| - \mathrm{N}\cdot \|\mathrm{f}\| = (|\lambda| - \mathrm{N})\cdot \|\mathrm{f}\| \, .$$

Nach Satz 5.1.3 ist $\{\lambda \mid |\lambda| > \mathrm{N}\} \subset \Sigma(\mathrm{H})$. Hilfssatz 5.7.12 zeigt: $\mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{I}$ für $\lambda > \mathrm{N}, \mathrm{E}(\lambda) = 0$ für $\lambda < -\mathrm{N}$. Da $\lambda \longmapsto \mathrm{E}(\lambda)\mathrm{f}$ stetig von rechts ist, hat man $\mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{I}$ für $\lambda \geq \mathrm{N}$. Ersetzt man N durch $\mathrm{N} - \varepsilon$ mit $\mathrm{N} - \varepsilon > \|\mathrm{H}\|, \varepsilon > 0$, so folgt $\mathrm{E}(\lambda) = 0$ für $\lambda \leq -\mathrm{N}$. Also erhält man obige Formel für H. Die Konvergenz liefert Satz 5.6.3.

5.7.15 Satz

Sei $\mathrm{H} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ beschränkt und hermitesch. H ist genau dann kompakt, wenn $\mathrm{S_e}(\mathrm{H}) = \{0\}$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei H kompakt, sei $\lambda_0 \in \mathrm{S_e}(\mathrm{H})$. Der Beweis von Hilfssatz 5.7.14 zeigt: $\pm\infty \notin \mathrm{S_e}(\mathrm{H})$. Also ist λ_0 endlich. Nach Satz 5.7.10 gibt es eine Folge $(\varphi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ mit $\|\varphi_\mathrm{i}\| = 1, \varphi_\mathrm{i} \overset{\mathrm{i}\to\infty}{\rightharpoonup} 0$, $\lim\limits_{\mathrm{i}\to\infty} \|(\mathrm{H}-\lambda_0)\varphi_\mathrm{i}\| = 0$. Weil H kompakt ist, folgt $\lim\limits_{\mathrm{i}\to\infty} \mathrm{H}\varphi_\mathrm{i} = 0$. Also ist $\lambda_0 = 0$. Zu zeigen bleibt: $\mathrm{S_e}(\mathrm{H}) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Annahme: $\mathrm{S_e}(\mathrm{H}) \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Sei $\mathrm{N} > \|\mathrm{H}\|$. Wie im Beweis von Hilfssatz 5.7.14 gezeigt, ist $\mathcal{M}([-\mathrm{N},\mathrm{N}]) = \mathrm{E}([-\mathrm{N},\mathrm{N}])\mathcal{H} = \mathcal{H}$. Nach Annahme gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\dim \mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon]) < +\infty$. Es ist $\mathcal{H} = \mathcal{M}([-\mathrm{N},\mathrm{N}]) = \mathcal{M}([-\mathrm{N},-\varepsilon]) \oplus \mathcal{M}([-\varepsilon,\varepsilon]) \oplus \mathcal{M}([\varepsilon,\mathrm{N}])$ eine orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H}$. Nun ist aber $\dim \mathcal{M}([-\mathrm{N},-\varepsilon]) < \infty$, da $\mathrm{S_e}(\mathrm{H}) \cap [-\mathrm{N},-\varepsilon] = \emptyset$ und analog $\dim \mathcal{M}([\varepsilon,\mathrm{N}]) < \infty$. Also ist $\dim \mathcal{H} < \infty$ und das widerspricht der Generalvoraussetzung in 5.7.

„$\Leftarrow$" Sei $\{0\} = \mathrm{S_e}(\mathrm{H})$, sei $\mathrm{N} > \|\mathrm{H}\|$. Dann ist für $\mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} > \frac{1}{\mathrm{N}}$:

$$\dim \mathcal{M}\left(\left[-\mathrm{N}, -\frac{1}{\mathrm{n}}\right]\right) < \infty,$$

$$\dim \mathcal{M}\left(\left[\frac{1}{\mathrm{n}}, \mathrm{N}\right]\right) < \infty.$$

Sei $\Delta_\mathrm{n}^- = [-\mathrm{N}, -\frac{1}{\mathrm{n}}], \Delta_\mathrm{n}^+ = [\frac{1}{\mathrm{n}}, \mathrm{N}]$. Dann sind $\mathrm{E}(\Delta_\mathrm{n}^-), \mathrm{E}(\Delta_\mathrm{n}^+)$ Projektoren auf endlichdimensionale Teilräume und deshalb nach Beispiel 2.2.5 kompakt. Verwendet man die Darstellung $\mathrm{Hf} = \int_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \lambda \, \mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{f}$ aus Hilfssatz 5.7.14, so ergibt sich wegen

$$\mathrm{E}(\lambda)\mathrm{E}(\Delta_\mathrm{n}^+) = \begin{cases} 0, & \lambda < \frac{1}{\mathrm{n}} \\ \mathrm{E}(\lambda) - \mathrm{E}(\frac{1}{\mathrm{n}}), & \frac{1}{\mathrm{n}} \leq \lambda \leq \mathrm{N} \\ \mathrm{E}(\Delta_\mathrm{n}^+), & \lambda > \mathrm{N} \end{cases} \quad (\text{entsprechend für } \mathrm{E}(\lambda)\mathrm{E}(\Delta_\mathrm{n}^-)) :$$

$$\mathrm{HE}(\Delta_n^+)f = \int_{-N}^{N} \lambda\, dE(\lambda)E(\Delta_n^+)f = \int_{\frac{1}{n}}^{N} \lambda\, dE(\lambda)f = E(\Delta_n^+)Hf$$

und

$$\mathrm{HE}(\Delta_n^-)f = \int_{-N}^{N} \lambda\, dE(\lambda)E(\Delta_n^-)f = \int_{-N}^{-\frac{1}{n}} \lambda\, dE(\lambda)f = E(\Delta_n^-)Hf,$$

die letzte Gleichheit wurde im Beweis von Satz 5.6.3 begründet. Also ist

$$\left\|\Big(E(\Delta_n^+)+E(\Delta_n^-)\Big)Hf - Hf\right\| = \left\|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \lambda\, dE(\lambda)f\right\| \overset{5.2.13}{\leq} \max_{\lambda\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} |\lambda| \cdot \left\|E\left(\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\right) f\right\| \leq \frac{1}{n}\cdot \|f\| \,.$$

Demnach ist $\lim\limits_{n\to\infty} \| H - (E(\Delta_n^+) + E(\Delta_n^-))H \| = 0$. Da H beschränkt und $E(\Delta_n^+) + E(\Delta_n^-)$ kompakt ist, ist nach Satz 2.2.9 auch $\Big(E(\Delta_n^+) + E(\Delta_n^-)\Big)$ H kompakt. Nach Hilfssatz 2.4.1 folgt die Kompaktheit von H.

5.7.16 Folgerung

Sei $H : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ein beschränkter hermitescher Operator. Sei H kompakt, $H \not\equiv 0$. Dann besteht $S_d(H)$ genau aus abzählbar vielen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots > 0$ und es gibt ein VONS $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_1, \psi_2, \ldots\}$ in $\mathcal{H}$ mit $H\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, H\psi_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$.
Die Menge $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ ist ein VONS im abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{N} = \{z \in \mathcal{H} \mid Hz = 0\}$ von $\mathcal{H}$, wenn $+\infty \geq \dim\mathcal{N} \geq 1$. Ist $\dim\mathcal{N} = 0$, so bilden die $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ ein VONS in $\mathcal{H}$.

Beweis:
Weil $H \not\equiv 0$, gibt es nach Satz 2.7.3 einen Eigenwert $\neq 0$. Sei $N > \|H\|$. Satz 5.7.15 und Hilfssatz 5.7.11 ergeben: In $\left[-N, -\frac{1}{m}\right]$ und $\left[\frac{1}{m}, N\right]$, $m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{N}$, liegen höchstens endlich viele Punkte von S(H), etwa $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_m}$. Diese werden geordnet: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{k_m}|$. Für $\left[-N, -\frac{1}{m+1}\right]$, $\left[\frac{1}{m+1}, N\right]$ gilt dasselbe. Die Punkte aus S(H) in diesen beiden Intervallen seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_m}, \lambda_{k_m+1}, \ldots, \lambda_{k_{m+1}}$ mit $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{k_m}| > |\lambda_{k_m+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_{k_{m+1}}|$. Auf diese Weise fahre fort.
Die Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sind isolierte Punkte von S(H). Also gilt nach Hilfssatz 5.7.12

$$E(\lambda_j) = E(\lambda_j + \varepsilon),$$

$$E(\lambda_j - 0) = E(\lambda_j - \varepsilon)$$

für j = 1,2,... und $\varepsilon > 0, \varepsilon$ hinreichend klein. Nach Satz 5.7.2 ist $\dim\mathcal{M}([\lambda_j - \varepsilon, \lambda_j + \varepsilon]) \geq 1$ und daher $E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0) \neq 0$. Mit Satz 5.7.4 erhält man: λ_j ist Eigenwert von H. Die Räume $\Big(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0)\Big)\mathcal{H}$ sind paarweise orthogonal und haben endliche Dimension. Nach Hilfssatz 5.7.13 existiert ein endliches Orthonormalsystem $\left\{\varphi_j^{(1)}, \ldots, \varphi_j^{(p_j)}\right\}$, das $\Big(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0)\Big)\mathcal{H}$ aufspannt und für das gilt: $H\varphi_j^{(r)} = \lambda_j\varphi_j^{(r)}, r = 1, \ldots, p_j$. Es ist

$$\begin{aligned}\Big(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0)\Big)f &= \sum_{r=1}^{p_j} \Big((E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))f, \varphi_j^{(r)}\Big)\, \varphi_j^{(r)} = \\ &= \sum_{r=1}^{p_j} \Big(f, (E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0))\varphi_j^{(r)}\Big)\, \varphi_j^{(r)} = \\ &= \sum_{r=1}^{p_j} \Big(f, \varphi_j^{(r)}\Big)\, \varphi_j^{(r)}\end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{Hf} = \lim_{m\to\infty}\left(\int_{-N}^{-\frac{1}{m}} \lambda\, dE(\lambda)f + \int_{\frac{1}{m}}^{N} \lambda\, dE(\lambda)f\right) = \lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{k_m}\lambda_j\sum_{r=1}^{p_j}\left(f,\varphi_j^{(r)}\right)\varphi_j^{(r)}.$$

Nun wird die Numerierung geändert: Anstelle von $\lambda_1,...,\lambda_{k_m},\lambda_{k_m+1},...,\lambda_{k_{m+1}},...$ usw. wird nur noch $\lambda_1,\lambda_2,...$ geschrieben, dabei erscheint λ_j p_j-mal. Infolgedessen hat man auch $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ statt $\left\{\varphi_1^{(1)},...,\varphi_1^{(p_1)},\varphi_2^{(1)},...,\varphi_2^{(p_z)},...\right\}$. Dann folgt:

$$\mathrm{Hf} = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(f,\varphi_j)\varphi_j = \sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{Hf},\varphi_j)\varphi_j.$$

Nach der Besselschen Ungleichung ist also $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ ein VONS in $\mathcal{R}(H)$. Zu zeigen ist noch: $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ ist sogar ein VONS in $\overline{\mathcal{R}(H)}$.
Sei $g\in\mathcal{H},(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Hf}_n = g$. Sei $c_j^{(n)} := (f_n,\varphi_j)$. Nach der Parsevalschen Gleichung 1.1.20 folgt:

$$\|H(f_n - f_m)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2\cdot\left|c_j^{(n)} - c_j^{(m)}\right|^2.$$

Also bildet die Folge $\left(c_j^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ für jedes j, d.h. es gibt d_j mit $\lim\limits_{n\to\infty}c_j^{(n)} = d_j$. Es ist

$$\|\mathrm{Hf}_n\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2\cdot\left|c_j^{(n)}\right|^2$$

nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10. Weil die Folge $(\mathrm{Hf}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, ist $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\mathrm{Hf}_n\|^2 < \infty$. Also ist für alle $n\in\mathbb{N}$: $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2\cdot\left|c_j^{(n)}\right|^2 \leq M$. Demnach ist für $k\in\mathbb{N}$ beliebig: $\sum\limits_{j=1}^{k}|\lambda_j|^2\cdot \left|c_j^{(n)}\right|^2 \leq M$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{k}|\lambda_j|^2\cdot\left|c_j^{(n)}\right|^2 = \sum\limits_{j=1}^{k}|\lambda_j|^2\cdot|d_j|^2 \leq M$. Da dies für alle k gilt, folgt $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2\cdot|d_j|^2 \leq M < \infty$. Sei jetzt $\tilde{g} := \sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j d_j\varphi_j$. Nach Bemerkung 1.1.22 ist $\tilde{g}$ in $\mathcal{H}$ damit wohldefiniert. Setzt man $A_n := \left(\lambda_j c_j^{(n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und $B := (\lambda_j d_j)_{j\in\mathbb{N}}$, so sind A_n, B Elemente von l^2. Wegen

$$\|H(f_n - f_m)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|^2\cdot\left|c_j^{(n)} - c_j^{(m)}\right|^2 = \|A_n - A_m\|^2$$

ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in l^2, die wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_j c_j^{(n)} = \lambda_j d_j$ gegen B in l^2 konvergiert. Mit Bemerkung 1.1.22 ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Hf}_n = \tilde{g}$. Also ist $g = \tilde{g} = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j d_j\varphi_j$ und $\lambda_j d_j = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_j c_j^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{Hf}_n,\varphi_j) = (g,\varphi_j)$. Demnach ist $g = \sum\limits_{j=1}^{\infty}(g,\varphi_j)\varphi_j$, also ist $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ ein VONS von $\overline{\mathcal{R}(H)}$.
Es ist $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(H)}\oplus\mathcal{N}$ eine orthogonale Zerlegung. Ist $\infty\geq\dim\mathcal{N}\geq 1$, so nehme ein VONS $\{\psi_1,\psi_2,...\}$ von $\mathcal{N}$ zu $\{\varphi_1,\varphi_2...\}$ hinzu und erhalte ein VONS von $\mathcal{H}$. Ist $\dim\mathcal{N} = 0$, so ist $\overline{\mathcal{R}(H)} = \mathcal{H}$ und $\{\varphi_1,\varphi_2,...\}$ ist bereits ein VONS in $\mathcal{H}$.

Bemerkung: Damit wurden die bereits in den Sätzen 2.7.5, 2.7.7, 2.7.8 auf andere Art erhaltenen Ergebnissse erneut bewiesen.

Nun soll das Verhalten des Spektrums eines selbstadjungierten Operators unter relativ-kompakten Störungen untersucht werden.

5.7.17 Definition (relativ-kompakt)

Seien A,B lineare Operatoren in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. B heißt kompakt relativ zu A (oder A-kompakt) genau dann, wenn gilt:
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_k \in \mathcal{D}(A)$, es existiere ein D>0 mit $\|f_k\| + \|Af_k\| \leq D$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, so daß $\lim\limits_{m\to\infty} Bf_{k_m}$ existiert.

5.7.18 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Sei B hermitesch in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$, B sei A-kompakt. Sei $C : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}, Cf = Af + Bf$. Sei C selbstadjungiert. Dann ist $S_e(A) \cap \mathbb{R} \subset S_e(C) \cap \mathbb{R}$.

Beweis:
Sei $\lambda_0 \in S_e(A) \cap \mathbb{R}$. Nach dem Weylschen Kriterium 5.7.10 gibt es eine Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ mit $\|\varphi_k\| = 1, \varphi_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \|(A - \lambda_0)\varphi_k\| = 0$. Also gibt es ein D>0, so daß $\|\varphi_k\| + \|A\varphi_k\| \leq D$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weil B A-kompakt ist, gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in \mathcal{H}$, so daß $\lim\limits_{j\to\infty} B\varphi_{k_j} = f$. Sei $g \in \mathcal{D}(A)$. Dann ist

$$(f, g) = \lim_{j\to\infty} (B\varphi_{k_j}, g) = \lim_{j\to\infty} (\varphi_{k_j}, Bg) = 0,$$

da $\varphi_{k_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 0$. Weil $\mathcal{D}(A)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist, folgt $f = 0$. Weiter ist

$$\|C\varphi_{k_j} - \lambda_0\varphi_{k_j}\| \leq \|A\varphi_{k_j} - \lambda_0\varphi_{k_j}\| + \|B\varphi_{k_j}\| .$$

Für $j \longrightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0, also ist nach dem Weylschen Kriterium 5.7.10: $\lambda_0 \in S_e(C)$.

Bemerkung: Es liege die Situation von Satz 5.7.18 vor. Zusätzlich sei B auch C-kompakt. Dann folgt nach Satz 5.7.18 unter Vertauschung der Rollen von A und C: $Au = Cu - Bu$ und

$$S_e(A) \cap \mathbb{R} \subset S_e(C) \cap \mathbb{R} \subset S_e(A) \cap \mathbb{R},$$

$$\text{also } \ S_e(A) \cap \mathbb{R} = S_e(C) \cap \mathbb{R}.$$

5.7.19 Definition

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Man sagt, A hat diskretes Spektrum genau dann, wenn für jedes Intervall $\Delta = [a, b]$ gilt: $\dim \mathcal{M}(\Delta) < \infty$.

Selbstadjungierte Operatoren mit diskretem Spektrum können folgendermaßen charakterisiert werden:

5.7.20 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. A hat diskretes Spektrum genau dann, wenn eines (und damit beide) der folgenden Kritierien erfüllt ist:

1) $S_e(A) \subset \{-\infty, +\infty\}$
2) $S(A)\cap\mathbb{R}$ besteht aus abzählbar vielen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ..., \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty, 1 \leq \dim\Big(E(\lambda_j) - E(\lambda_j - 0)\Big) = e_j < +\infty$.

Es gibt in diesem Fall ein Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ von Elementen $\varphi_k \in \mathcal{D}(A)$ so, daß $A\varphi_k = \lambda_k\varphi_k$ und $Af = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k(f, \varphi_k)\varphi_k$ für $f \in \mathcal{D}(A)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$" A habe diskretes Spektrum. Betrachte das Intervall $[n, n+1]$ für $n \in \mathbb{Z}$. Wie im Beweis von Satz 5.7.9 gezeigt, enthält $S(A) \cap (n, n+1]$ höchstens endlich viele Eigenwerte $\lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_{k_n}^{(n)}$. Nach Satz 5.7.4 und weil A diskretes Spetrum hat, ist $1 \leq \dim \left(E(\lambda_j^{(n)}) - E(\lambda_j^{(n)} - 0)\right) \mathcal{H} < +\infty$ für $j = 1, ... k_n$. Die Eigenwerte können natürlich wie im Satz beschrieben angeordnet werden. Also wurde bewiesen: $S(A) \cap \mathbb{R}$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$

Annahme: $S(A)$ ist beschränkt, etwa $S(A) \subset [-M+\varepsilon, M-\varepsilon]$ für ein $\varepsilon > 0$. Dann ist $Af = \int\limits_{-M}^{M} \lambda \, dE(\lambda) f$. Also ist nach Satz 5.2.13:

$$\| Af \| \leq \max_{\lambda \in [-M, M]} |\lambda| \cdot \| E([-M, M]) f \| \leq M \cdot \| f \|,$$

d.h. A ist beschränkt.

$[-M+\varepsilon, M-\varepsilon] \cap S(A)$ enthält höchstens endlich viele paareweise verschiedene Eigenwerte, etwa $\lambda_1, ..., \lambda_N$ mit Vielfachheiten $1 \leq e_1, ..., e_N < \infty$. Sonst würde $[-M+\varepsilon, M-\varepsilon]$ einen Häufungspunkt der Eigenwerte enthalten und dieser wäre nach Hilfssatz 5.7.11 ein Punkt aus $S_e(H)$. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß A diskretes Spektrum hat. Wie im Beweis von Folgerung 5.7.16 folgt für $f \in \mathcal{D}(A)$: $Af = \sum\limits_{k=1}^{N} \lambda_k \sum\limits_{\mu=1}^{e_k} \left(f, \varphi_k^{(\mu)}\right) \varphi_k^{(\mu)}$, wobei die $\varphi_k^{(1)}, ... \varphi_k^{(e_k)}$ eine Orthonormalbasis von $\left(E(\lambda_k) - E(\lambda_k - 0)\right)\mathcal{H}$ bilden. Insbesondere erlaubt A eine beschränkte hermitesche Erweiterung auf $\mathcal{H}$. Der Wertebereich dieser Erweiterung ist in dem endlichdimensionalen Teilraum enthalten, der von den $\varphi_k^{(\mu)}$ aufgespannt wird. Weil A selbstadjungiert ist, fällt diese Erweiterung nach Hilfssatz 4.3.14 mit A zusammen. Außerdem ist A kompakt ($\mathcal{R}(A)$ ist endlichdimensional). Also ist nach Satz 5.7.15: $0 \in S_e(A)$. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, d.h. man hat $\lim\limits_{n \to \infty} |\lambda_n| = \infty$ und $S(A)$ ist unbeschränkt. Also gilt 2). 1) folgt sofort aus der Definition 5.7.19 oder aus 2).

„$\Leftarrow$" Aus 2) folgt, daß $S_e(A) \subset \{-\infty, +\infty\}$. Daraus folgt wegen

$$S(A) \cap \mathbb{R} = S_d(A) \cup (S_e(A) \cap \mathbb{R}), S_e(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset,$$

sofort, daß A diskretes Spektrum hat.

$Af = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, \varphi_k) \varphi_k$:

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = \infty, M_n, -M_n \notin S(A)$, d.h. die M_n und die $-M_n$ seien keine Eigenwerte. Dann ist

$$Af = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{-M_n}^{M_n} \lambda \, dE(\lambda) f = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{\mu=1}^{e_k} \left(f, \varphi_k^{(\mu)}\right) \varphi_k^{(\mu)},$$

siehe Beweis von Folgerung 5.7.16. Wie dort wird umnumeriert, so daß in der Folge $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ jeder Eigenwert so oft auftritt, wie seine Vielfachheit angibt. Dann erhält man die Entwicklung des Satzes.

5.7.21 Satz (Rellich[1], Friedrichs[2])

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. A hat genau dann diskretes Spektrum, wenn jede Folge $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$, für die es ein $D > 0$ gibt, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\|\varphi_k\|^2 + \|A\varphi_k\|^2 \leq D^2$, eine konvergente Teilfolge enthält.

Beweis:

„⇒" A habe diskretes Spektrum. Nach Satz 5.7.20 gibt es dann ein Orthonormalsystem $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ und Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, ...$ mit $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ...$, so daß für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt: $Ax = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, \varphi_k)\varphi_k$. Sei $x_k := (x, \varphi_k)$ für $x \in \mathcal{H}$. Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, so gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \, |x_k|^2 = \|Ax\|^2, \; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \|x\|^2 .$$

(Letzteres nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10).
Sei nun $\left(x^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ eine Folge wie im Satz angegeben. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+\lambda_k)^2 \cdot \left|x_k^{(p)}\right|^2 \leq D^2$$

für $p \in \mathbb{N}$. Insbesondere folgt für $\widetilde{x}^{(p)} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{(p)} \varphi_k$, daß

$$\left\|\widetilde{x}^{(p)}\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(p)}\right|^2 \leq D^2$$

für alle $p \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_k^{(p)})_{k\in\mathbb{N}} =: A_p$ ist also ein Element aus l^2. Wegen $\|A_p\|^2 \leq D^2$ für alle $p \in \mathbb{N}$ gibt es nach Satz 2.1.4 eine Teilfolge $(A_{p_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ und ein $A^* = (x_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ in l^2, so daß $A_{p_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} A^*$. Anders ausgedrückt gilt also für jede Folge $B := (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus l^2: $\lim\limits_{j\to\infty} (A_{p_j}, B) = (A^*, B)$, d.h. $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{(p_j)} \overline{y_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^* \overline{y_k}$. Insbesondere erhält man daraus, wenn

man z.B. $y_k = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ setzt: $\lim\limits_{j\to\infty} x_k^{(p_j)} = x_k^*$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei nun $x^* := \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^* \varphi_k$ (wohldefiniert nach 1.1.22). Dann ist

$$\left\|\widetilde{x}^{(p_j)} - x^*\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(p_j)} - x_k^*\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{N} \left|x_k^{(p_j)} - x_k^*\right|^2 + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^*|^2 + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left|x_k^{(p_j)}\right|^2 .$$

Aus $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \left|x_k^{(p_j)}\right|^2 (1+\lambda_k^2) \leq D^2$ erhält man wegen der Anordnung der $|\lambda_i|$ die Abschätzung $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \left|x_k^{(p_j)}\right|^2 \leq \dfrac{D^2}{1+\lambda_{N+1}^2}$ für alle j. Da $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = +\infty$, kann man also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ so finden, daß für $N \geq N(\varepsilon)$ und alle j gilt:

$$2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\left|x_k^{(p_j)}\right|^2 + |x_k^*|^2 \right) \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

[1] Franz Rellich (1906-1955)
[2] Kurt Otto Friedrichs (1901-1983)

Nun wählt man noch j so groß, daß $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(p_j)} - x_k^* \right|^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Dann ist insgesamt $\left\| \widetilde{x}^{(p_j)} - x^* \right\|^2 \leq \varepsilon^2$, also folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \widetilde{x}^{(p_j)} = x^*$. Zu zeigen ist noch: $\widetilde{x}^{(p)} = x^{(p)}$.

A hat genau dann diskretes Spektrum, wenn $A + \gamma I, \gamma \in \mathbb{R}$, diskretes Spektrum hat. In diesem Fall ist $S(A)+\gamma := \{\lambda+\gamma \mid \lambda \in S(A)\} = S(A+\gamma I)$. Nach Satz 5.7.20 kann man $\gamma \in \mathbb{R}$ so wählen, daß $-\gamma \in \Sigma(A)$, d.h. $A + \gamma I$ hat eine beschränkte und überall erkärte Inverse. Sei $y \in \mathcal{D}(A)$, sei $y^{(N)} := \sum\limits_{k=1}^{N} y_k\varphi_k$ und sei $\widetilde{y} := \sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\varphi_k$. Dann folgt nach Satz 5.7.20:

$$\lim_{N\to\infty} (A+\gamma)y^{(N)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k+\gamma)y_k\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k+\gamma)y_k\varphi_k = (A+\gamma)y.$$

Andererseits ist auch $\lim\limits_{N\to\infty} y^{(N)} = \widetilde{y}$. A ist als selbstadjungierter Operator abgeschlossen, also ist $(A+\gamma)y = (A+\gamma)\widetilde{y}$. Weil $A + \gamma I$ beschränkt invertierbar ist, folgt daraus $y = \widetilde{y}$.

Also ist $\widetilde{x}^{(p)} = x^{(p)}$. Aus der Folge $\left(x^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ wurde somit eine konvergente Teilfolge ausgewählt, d.h. „$\Rightarrow$ “ ist bewiesen.

„$\Leftarrow$ “ Angenommen, A hat kein diskretes Spektrum. Dann gibt es ein Intervall $\Delta = [a,b]$ mit $a<b$, $\dim \mathcal{M}(\Delta) = \infty$. Sei $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem in $\mathcal{M}(\Delta)$, wie im Beweis von Satz 5.6.3 gezeigt wurde, vertauscht $E(\Delta)$ mit A. Im Beweis von Hilfssatz 5.6.1 wurde gezeigt:

$$\left\| \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)f \right\|^2 = \int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)f, f).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k\|^2 + \|A\varphi_k\|^2 &= (E(\Delta)\varphi_k, \varphi_k) + \|AE(\Delta)\varphi_k\|^2 = \\
&= \int_a^b d(E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) + \left\| \int_a^b \lambda \, dE(\lambda)\varphi_k \right\|^2 = \\
&= \int_a^b d(E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) + \int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) = \\
&= \int_a^b (1+\lambda^2) \, d(E(\lambda)\varphi_k, \varphi_k) \leq \\
&\overset{5.2.13}{\leq} \max_{\lambda\in\Delta} |1+\lambda^2| \cdot |(E(\Delta)\varphi_k, \varphi_k)| = \\
&= \max_{\lambda\in\Delta} (1+\lambda^2) \cdot \|\varphi_k\|^2 = \max_{\lambda\in\Delta} |1+\lambda^2| \, .
\end{aligned}$$

Also gibt es nach Voraussetzung eine Teilfolge $(\varphi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die konvergiert. Nach der Besselschen Ungleichung 1.1.10 gilt für $y \in \mathcal{H}$: $\|y\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |(\varphi_k, y)|^2$, also ist $\varphi_{k_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 0$. Da die Folge $(\varphi_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, muß folglich gelten: $\lim\limits_{j\to\infty} \varphi_{k_j} = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zu $\|\varphi_k\| = 1$, also hat A diskretes Spektrum.

5.7.22 Definition

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. A heißt <u>nach unten beschränkt</u> genau dann, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $f \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$(Af, f) \geq \gamma \cdot \|f\|^2 \, .$$

5.8 Beispiel: Der Schrödinger - oder Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms

5.8.1 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt wird durchgehend der separable Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ betrachtet, mit Ausnahme der folgenden Definition, wo $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Für $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ bezeichne $\widehat{u}(\xi)$ die in Abschnitt 1.8 behandelte Fouriertransformierte von u. Nach dem Theorem von Fourier-Plancherel 1.8.8 war

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \int\limits_{K_{R_m}(0)} e^{-i\xi x} u(x)\, dx,$$

wobei R_m eine Folge war mit $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = \infty$. Für Funktionen u mit $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx.$$

In 1.8.10 wurde bewiesen, daß für $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\widehat{\partial_j u}(\xi) = i \cdot \xi_j \cdot \widehat{u}(\xi).$$

Definiert man also für $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ den Laplace-Operator Δ wie üblich durch $\Delta u(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x)$, so ist nach obiger Formel:

$$(\widehat{-\Delta u})(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} (i^2 \xi_j^2) \cdot \widehat{u}(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right) \cdot \widehat{u}(\xi) = |\xi|^2 \cdot \widehat{u}(\xi).$$

In der folgenden Definition soll der Laplace-Operator für einen größeren Definitionsbereich definiert werden:

5.8.2 Definition (Laplace-Operator)

Sei $H^{2,2}(\mathbb{R}^n) = H^2(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid f(\xi) = |\xi|^2 \cdot |\widehat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Definiere nun den Laplace-Operator $\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ durch $\widehat{-\Delta u}(\xi) = |\xi|^2\, \widehat{u}(\xi)$ für $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.
Da die Fouriertransformation nach dem Theorem von Fourier-Plancherel 1.8.8 bijektiv ist, ist $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ durch diese Definition eindeutig bestimmt.

5.8.3 Bemerkungen (Eigenschaften von $H^m(\mathbb{R}^n)$)

Allgemeiner definiert man für Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $m \in \mathbb{N}$:

$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid$ Zu jedem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ gibt es eine Funktion $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ derart, daß für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt: $\int\limits_\Omega f\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_\alpha \varphi\, dx\}$.

Man setzt $D^\alpha f := f_\alpha$, $D^\alpha f$ heißt Distributionsableitung oder schwache Ableitung von f. Für das so definierte $H^m(\Omega)$ gilt:

1) f_α ist in $L^2(\Omega)$ eindeutig bestimmt.

2) Für $f, g \in H^m(\Omega), r, s \in \mathbb{C}$ gilt: $(rf + sg)_\alpha = rf_\alpha + sg_\alpha$.

3) Für $f, g \in H^m(\Omega)$ wird durch

$$(f, g) := \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha f) \cdot (D^\alpha \overline{g})\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^m(\Omega)$ definiert.

4) Mit dem Skalarprodukt wird $H^m(\Omega)$ zu einem Hilbertraum, d.h. $H^m(\Omega)$ ist vollständig.

5) $H^m(\mathbb{R}^n) = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}}$, d.h. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $H^m(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der H^m-Norm.

6) Für alle $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ gilt: $(\widehat{D^\alpha u})(\xi) = i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi)$.

7) $H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid f(\xi) = |\xi|^m \cdot |\hat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

8) Durch $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^2 + 1)^2 \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ wird eine äquivalente Norm auf $H^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben.

9) Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so daß für $\varphi \in H^m(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$c_1 \, \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 \, \|\varphi\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \, .$$

Beweis:

1) Seien $f_\alpha, g_\alpha \in L^2(\Omega)$, so daß $\int\limits_\Omega f \, D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g_\alpha \varphi \, dx$. Dann ist für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) : (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (f_\alpha - g_\alpha)\varphi \, dx = 0$, also $(\varphi, \overline{f_\alpha - g_\alpha})_{L^2(\Omega)} = 0$. $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^2(\Omega)$, also folgt nach Satz 1.2.4: $\overline{f_\alpha - g_\alpha} = 0$ fast überall, d.h. $f_\alpha = g_\alpha$ in $L^2(\Omega)$.

2) Es ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega (rf + sg) D^\alpha \varphi \, dx &= \int\limits_\Omega rf D^\alpha \varphi \, dx + \int\limits_\Omega sg D^\alpha \varphi \, dx = \\
&= r \cdot (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega f_\alpha \varphi \, dx + s \cdot (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g_\alpha \varphi \, dx = \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega (rf_\alpha + sg_\alpha)\varphi \, dx.
\end{aligned}$$

3) Es gilt:

$$\begin{aligned}
(\lambda f_1 + \mu f_2, g) &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha(\lambda f_1 + \mu f_2))(D^\alpha \overline{g}) \, dx = \\
&\overset{2)}{=} \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (\lambda D^\alpha f_1 + \mu D^\alpha f_2)(D^\alpha \overline{g}) \, dx = \\
&= \lambda \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha f_1) \cdot (D^\alpha \overline{g}) \, dx + \mu \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha f_2)(D^\alpha \overline{g}) \, dx = \\
&= \lambda(f_1, g) + \mu(f_2, g),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(f, g)} &= \overline{\sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha f)(D^\alpha \overline{g}) \, dx} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega \overline{(D^\alpha f)(D^\alpha \overline{g})} \, dx = \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega (D^\alpha \overline{f})(D^\alpha g) \, dx = (g, f),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f,f) &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega (D^\alpha f)(D^\alpha \overline{f})\,dx = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega (D^\alpha f)(\overline{D^\alpha f})\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha f|^2\,dx \ge \int_\Omega |f|^2\,dx \ge 0.\end{aligned}$$

Ist $f \neq 0$, so ist $\int_\Omega |f|^2\,dx > 0$, also $(f,f) > 0$. Für $f = 0$ ist $D^\alpha f = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, also $(f,f) = 0$.

4) $H^m(\Omega)$ ist vollständig bezüglich $\|f\| := (f,f)$:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^m(\Omega)$, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n,m > N(\varepsilon)$ gilt:

$$\|f_n - f_m\|_{H^m}^2 = (f_n - f_m, f_n - f_m) = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha(f_n - f_m)|^2\,dx \le \varepsilon.$$

Dann ist für $|\alpha| \le m$:

$$\|D^\alpha f_n - D^\alpha f_m\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |D^\alpha f_n - D^\alpha f_m|^2\,dx \le \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha(f_n - f_m)|^2\,dx = \|f_n - f_m\|_{H^m}^2 \le \varepsilon.$$

Also bilden die $(D^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Da $L^2(\Omega)$ vollständig ist, konvergieren diese Folgen in $L^2(\Omega)$. Setze nun: $f := \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} f_n$ $(|\alpha| = 0)$ und $f_\alpha := \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} D^\alpha f_n$ $(|\alpha| > 0)$. Es gilt:

a) $f \in H^m(\Omega)$:
Ist $\text{l.i.m.} f_n = f$, so gilt nach 1.1.15 für alle $g \in L^2(\Omega)$: $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n, g) = (f,g)$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\overline{g}\,dx = \int_\Omega f\overline{g}\,dx = \int_\Omega \text{l.i.m.} f_n\overline{g}\,dx.$$

Benutzt man dies, so erhält man für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), f_\alpha$ wie oben definiert:

$$\begin{aligned}\int_\Omega fD^\alpha\varphi\,dx &= \int_\Omega \text{l.i.m.} f_n D^\alpha\varphi\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n D^\alpha\varphi\,dx = \\ &= \lim_{n\to\infty}(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (f_n)_\alpha\varphi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \text{l.i.m.}(f_n)_\alpha\varphi\,dx = \\ &= (-1)^\alpha\int_\Omega f_\alpha\varphi\,dx.\end{aligned}$$

Also gilt: $f \in H^m(\Omega)$ und $D^\alpha f = f_\alpha = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} D^\alpha f_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f_m\|_{H^m} = 0$:
Ist $\text{l.i.m.} f_n = f$, so gilt nach 1.1.15: $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|^2 = \|f\|^2$ also $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n|^2\,dx = \int_\Omega |f|^2\,dx$.
Verwendet man noch $\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}(D^\alpha f_n - D^\alpha f) = 0$ (nach a)), so erhält man:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{H^m}^2 &= \lim_{n\to\infty}\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega |D^\alpha(f_n - f)|^2\,dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |D^\alpha f_n - D^\alpha f|^2\,dx = 0,\end{aligned}$$

also die Behauptung.

5) ohne Beweis

6) Nach 1.8.10, 5), gilt die Formel für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach 5) oben gibt es zu $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^m} = 0$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u - D^\alpha u_n\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}} = 0$.
Also gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$: $\lim\limits_{n\to\infty} D^\alpha u_n = D^\alpha u$. Die Fouriertransformation ist als isometrische Abbildung stetig, also gilt in $L^2(\mathbb{R}^n)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{D^\alpha u_n} = \widehat{D^\alpha u}$. Wegen $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $\widehat{D^\alpha u_n}(\xi) = i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}_n(\xi)$, d.h. in $L^2(\mathbb{R}^n)$ hat man folgende Gleichungskette:

$$\widehat{D^\alpha u}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \widehat{D^\alpha u_n}(\xi) = \lim_{n\to\infty} i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \widehat{u_n}(\xi) = i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi).$$

Da der Grenzwert einer Folge in $L^2(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt ist, hat man damit die Behauptung.

7) „$\subset$" Ist $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, so ist $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ für alle $|\alpha| \leq m$. Die Fouriertransformation ist eine bijektive Abbildung in $L^2(\mathbb{R}^n)$ (1.8.8), also ist $\widehat{D^\alpha u} \overset{6)}{=} i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Damit ist $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi_i|^{2m} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$ für alle i, d.h. auch $\int\limits_{\mathbb{R}^n} n^m \left(\sum\limits_{i=1}^n |\xi_i|^{2m}\right) \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$. Wegen

$$\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^m \leq (n \cdot \max_i |\xi_i|^2)^m = n^m \cdot \max_i(\xi_i)^{2m} \leq n^m \cdot \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2m}$$

folgt damit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m} \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi < \infty$ und daraus die Behauptung.

„$\supset$" Sei $|\alpha| \leq m$. Dann ist

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha| &= |\xi_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\alpha_n}| = |\xi_1|^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot |\xi_n|^{\alpha_n} \leq (\max_i |\xi_i|)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \leq \\ &\leq (\max_i |\xi_i|)^m \leq \left(\left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^m = |\xi|^m . \end{aligned}$$

Folglich ist $i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und daher $u_\alpha := \mathcal{F}^{-1}(i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi))$ wohldefiniert, wobei $\mathcal{F}^{-1}$ die Inverse der Fouriertransformation bezeichnet. Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_\alpha \overline{\varphi} \, dx &= (u_\alpha, \varphi)_{L^2} \overset{1.8.8}{=} (\widehat{u_\alpha}, \widehat{\varphi})_{L^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{u_\alpha}(\xi) \cdot \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \, d\xi = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\widehat{\varphi}(\xi)} \, d\xi = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{i^{|\alpha|} \cdot \xi^\alpha \cdot \widehat{\varphi}(\xi)} \, d\xi = \\ &\overset{6)}{=} (-1)^{|\alpha|} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{(\widehat{D^\alpha \varphi})(\xi)} \, d\xi = (-1)^{|\alpha|} \cdot (\hat{u}, \widehat{D^\alpha \varphi})_{L^2} = \\ &\overset{1.8.8}{=} (-1)^{|\alpha|} \cdot (u, D^\alpha \varphi)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \overline{\varphi}(x) \, dx. \end{aligned}$$

Also ist $u_\alpha = D^\alpha u$ und damit $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$.

8) Man errechnet zunächst:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{|\alpha|\leq 2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha u)(D^\alpha \overline{u}) \, dx = \sum_{|\alpha|\leq 2} (D^\alpha u, D^\alpha u)_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq 2} (\widehat{D^\alpha u}, \widehat{D^\alpha u})_{L^2} = \\ &= \sum_{|\alpha|\leq 2} \left(i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi), i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)\right)_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq 2} i^{|\alpha|} \cdot \overline{i^{|\alpha|}} (\xi^\alpha \hat{u}(\xi), \xi^\alpha \hat{u}(\xi))_{L^2} = \\ &= \sum_{|\alpha|\leq 2} (\xi^\alpha \hat{u}(\xi), \xi^\alpha \hat{u}(\xi))_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq 2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq 2} |\xi^\alpha|^2 \right) \cdot |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{|\alpha|=2} |\xi^\alpha|^2 \right) \cdot |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Beachtet man nun, daß

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \xi_j^2 \leq \sum_{|\alpha|=2} |\xi^\alpha|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \xi_j^2$$

gilt (die Terme mit $i \neq j$ kommen in der mittleren Summe einmal vor, in der rechten dagegen zweimal), so erhält man einerseits

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^2(\mathbf{R}^n)} &\leq \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + 2\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \xi_j^2 \right) \cdot |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^2 \cdot |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 \cdot |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^2(\mathbf{R}^n)} &\geq \int_{\mathbf{R}^n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^2 \cdot \xi_j^2 \right) |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^n} (1 + |\xi|^2)^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi. \end{aligned}$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Normen bewiesen.

9) Es ist

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H^m(\mathbf{R}^n)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^n} (D^\alpha f)(D^\alpha \overline{f}) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha f|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|^2_{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \right)^2 &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|^2_{L^2} + \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m, \beta \neq \alpha} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \cdot \|D^\beta \varphi\|_{L^2} \geq \\ &\geq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|^2_{L^2}, \end{aligned}$$

also kann $c_1 = 1$ gewählt werden. Weiter ist wegen $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \right)^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\alpha \varphi\|_{L^2} \cdot \|D^\beta \varphi\|_{L^2} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq m}\frac{1}{2}\cdot(\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2+\|D^\beta\varphi\|_{L^2}^2)=\\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{|\alpha|\leq m}\left(r\cdot\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2+\sum_{|\beta|\leq m}\|D^\beta\varphi\|_{L^2}^2\right)=\\
&= \frac{1}{2}\left(r\cdot\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2+r\cdot\sum_{|\beta|\leq m}\|D^\beta\varphi\|_{L^2}^2\right)=\\
&= r\cdot\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha\varphi\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

wobei $r := \sharp\{\alpha\in\mathbb{N}^n \mid |\alpha|\leq m\}$. Mit $c_2 := \sqrt{r}$ gilt also auch die zweite Abschätzung.

Von nun an sei $\underline{n=3}$. Als Norm in $H^2(\mathbb{R}^n)$ werden wir die in 8) definierte Norm verwenden.

5.8.4 Hilfssatz

Sei $u\in H^2(\mathbb{R}^3)$. Dann ist u stetig und beschränkt.

Beweis:

Es ist $u(x)=\underset{m\to\infty}{\text{l.i.m.}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\displaystyle\int_{K_{R_m}(0)} e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi$. Es gilt aber:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}|e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)|\,d\xi &= \int_{\mathbb{R}^3}|\hat{u}(\xi)|\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\xi|^2+1}\cdot(|\xi|^2+1)\,|\hat{u}(\xi)|\,d\xi\leq\\
&\overset{A.4.5}{\leq}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{(|\xi|^2+1)^2}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^2+1)^2\,|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=\\
&= c\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^2+1)^2\cdot|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=c\cdot\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\,.
\end{aligned}$$

Also ist für $u\in H^2(\mathbb{R}^3)$ die Funktion $\xi\longmapsto|e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)|$ über $\mathbb{R}^3$ integrierbar und deshalb

$$u(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)\,d\xi.$$

Weiter ist damit bewiesen: u ist beschränkt, es ist $u(x)\leq\tilde{c}\cdot\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$.

Nun wird noch eine Abschätzung für $e^{ih\xi}-1$ benötigt: Es ist

$$e^{ih\xi}-1 = \int_0^1\frac{d}{d\tau}e^{i\tau\xi}-1\,d\tau=i\cdot h\cdot\xi\int_0^1 e^{i\tau h\xi}\,d\tau.$$

Folglich ist

$$|e^{ih\xi}-1| = |h|\cdot|\xi|\cdot\left|\int_0^1 e^{i\tau h\xi}\,d\tau\right|\leq|h|\cdot|\xi|\cdot\int_0^1|e^{i\tau h\xi}|\,d\tau=|h|\cdot|\xi|.$$

Also ist

$$\frac{|e^{ih\xi}-1|}{|h|^{\frac{1}{4}}\cdot|\xi|^{\frac{1}{4}}} \leq |h|^{\frac{3}{4}}\cdot|\xi|^{\frac{3}{4}}\leq 1\ \text{ für }\ |h|\cdot|\xi|\leq 1$$

und

$$\frac{|e^{ih\xi}-1|}{|h|^{\frac{1}{4}}\cdot|\xi|^{\frac{1}{4}}} \leq |e^{ih\xi}-1|\leq 2\ \text{ für }\ |h|\cdot|\xi|\geq 1.$$

Insgesamt gilt also in allen Fällen: $|e^{ih\xi}-1| \leq 2\cdot |h|^{\frac{1}{4}} \cdot |\xi|^{\frac{1}{4}}$. Mit dieser Abschätzung rechnet man nun:

$$\begin{aligned}
|u(x+h)-u(x)| &\leq c\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} |e^{i(x+h)\xi}-e^{ix\xi}|\cdot|\hat{u}(\xi)|\ d\xi = \\
&= c\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} |e^{ih\xi}-1|\cdot|e^{ix\xi}|\cdot|\hat{u}(\xi)|\ d\xi = \\
&= c\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} |e^{ih\xi}-1|\cdot|\hat{u}(\xi)|\ d\xi \leq \\
&\leq c\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} 2\,|h|^{\frac{1}{4}}\cdot|\xi|^{\frac{1}{4}}\cdot|\hat{u}(\xi)|\ d\xi = \\
&= 2c\,|h|^{\frac{1}{4}}\cdot \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{|\xi|^{\frac{1}{4}}}{|\xi|^2+1}(|\xi|^2+1)\cdot|\hat{u}(\xi)|\ d\xi \leq \\
&\overset{A.4.5}{\leq} 2c\,|h|^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{|\xi|^{\frac{1}{2}}}{(|\xi|^2+1)^2}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(|\xi|^2+1)^2\,|\hat{u}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \\
&= 2\tilde{c}\cdot|h|^{\frac{1}{4}}\cdot\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

Also ist u stetig.

5.8.5 Hilfssatz

Der Operator $-\Delta : H^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ ist selbstadjungiert.

Beweis:
$\mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^3)$, da $C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \subset H^2(\mathbb{R}^3)$ und $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R}^3)$.
Unter Verwendung des Theorems von Fourier-Pancherel 1.8.8 erhält man für $u, f \in \mathcal{D}(-\Delta) = H^2(\mathbb{R}^3)$:

$$(-\Delta u, f) = (\widehat{-\Delta u}, \hat{f}) = \Big(|\xi|^2\,\hat{u}(\xi), \hat{f}(\xi)\Big) = \Big(\hat{u}(\xi), |\xi|^2\,\hat{f}(\xi)\Big) = (\hat{u}, \widehat{-\Delta f}) = (u, -\Delta f).$$

$-\Delta$ ist also hermitesch.
Die Selbstadjungiertheit von $-\Delta$ folgt aus Satz 4.3.9, wenn gezeigt werden kann, daß die Gleichungen

$$-\Delta u + iu = f,$$
$$-\Delta w - iw = f$$

für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ Lösungen $u, w \in H^2(\mathbb{R}^3)$ besitzen. Da die Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R}^3)$ nach 1.8.8 bijektiv ist, sind die obigen Gleichungen äquivalent zu den fouriertransformierten Gleichungen

$$|\xi|^2\,\hat{u}(\xi) + i\cdot\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$
$$|\xi|^2\,\hat{w}(\xi) - i\cdot\hat{w}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

Setzt man also $\hat{u}(\xi) := \dfrac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2+i}\ \big(\in L^2(\mathbb{R}^3)\big)$, so ist

$$\begin{aligned}
|\xi|^2\cdot|\hat{u}(\xi)| &= \left|\frac{|\xi|^2}{|\xi|^2+i}\right|\cdot|\hat{f}(\xi)| = \left|\frac{|\xi|^2\,(|\xi|^2-i)}{|\xi|^4+1}\right|\cdot|\hat{f}(\xi)| \leq \\
&\leq \left(\frac{|\xi|^4}{|\xi|^4+1}+\frac{|\xi|^2}{|\xi|^4+1}\right)\cdot|\hat{f}(\xi)| \leq 2\cdot|\hat{f}(\xi)|\,.
\end{aligned}$$

Also ist $|\xi|^2\cdot|\hat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^3)$, d.h. die eindeutig bestimmte Funktion u mit $\hat{u}(\xi) = \dfrac{\hat{f}(\xi)}{|\xi|^2+i}$ liegt in $H^2(\mathbb{R}^3)$. Analog behandelt man die Gleichung für $\hat{w}$.

5.8.6 Hilfssatz

Jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ ist in $\Sigma(-\Delta)$. Jedes $z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$ ist in $\Sigma(-\Delta)$.

Beweis:
Die erste Aussage folgt aus Satz 5.1.2, weil $-\Delta$ nach Hilfssatz 5.8.5 selbstadjungiert ist.
Sei nun $\lambda < 0$. Betrachte die Gleichung $(-\Delta - \lambda)u = f$. Durch Fouriertransformation (siehe 5.8.5) geht die Gleichung über in $\widehat{f}(\xi) = (|\xi|^2 + |\lambda|)\widehat{u}(\xi)$, also $\widehat{u}(\xi) = \dfrac{1}{|\xi|^2 + |\lambda|} \cdot \widehat{f}(\xi)$. Wegen $|\xi|^2 \cdot |\widehat{u}(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|$ ist $|\xi|^2 \cdot |\widehat{u}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und folglich das zugehörige u aus $H^2(\mathbb{R}^3)$. Wegen

$$\|u\|_{L^2} = \|\widehat{u}\|_{L^2} \leq \left\| \frac{1}{|\lambda|} \cdot \widehat{f} \right\|_{L^2} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|\widehat{f}\|_{L^2} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \|f\|_{L^2}$$

ist $-\Delta - \lambda$ beschränkt invertierbar, d.h. $\lambda \in \Sigma(-\Delta)$.

Von nun an wird zur Vereinfachung der Schreibweise $A := -\Delta$ gesetzt.

5.8.7 Hilfssatz

Jedes $\lambda \in [0, +\infty)$ liegt im wesentlichen Spektrum $S_e(A)$ von A. Außerdem gehört $+\infty$ zum wesentlichen Spektrum von A.

Beweis:
Sei $\lambda \in (0, \infty)$. Es genügt, $\lambda \in S(A)$ zu zeigen, denn dann ist nach Hilfssatz 5.7.11 bereits $\lambda \in S_e(A)$. Um $\lambda \in S(A)$ einzusehen, genügt es, ein $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ zu finden, so daß die Gleichung

$$(A - \lambda)u = f \iff (|\xi|^2 - \lambda)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$

keine Lösung $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ hat. Wähle $\widehat{f}(\xi) = e^{-(|\xi|^2 - \lambda)}$. Dies ist wegen $e^{-(|\xi|^2-\lambda)} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ zulässig. Sei $0 < \varepsilon < 1$. Dann gilt für $\lambda + 1 > |\xi|^2 > \lambda + \varepsilon$:

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{|\xi|^2 - \lambda} = \frac{e^{-(|\xi|^2-\lambda)}}{|\xi|^2 - \lambda}.$$

Sei nun $(\varepsilon_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < \epsilon_\nu < 1$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} \varepsilon_\nu = 0$. Hat nun die Gleichung $(A - \lambda)u = f$ eine Lösung in $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
+\infty \quad > \quad & \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\lambda+1>|\xi|^2>\lambda+\varepsilon_\nu} \left| \frac{e^{-(|\xi|^2-\lambda)}}{|\xi|^2 - \lambda} \right|^2 d\xi \geq \widetilde{c} \cdot \lim_{\nu\to\infty} \inf \int\limits_{\lambda+1>|\xi|^2>\lambda+\varepsilon_\nu} \frac{1}{(|\xi|^2 - \lambda)^2}\, d\xi = \\
\overset{(*)}{=} \quad & c \cdot \lim_{\nu\to\infty} \inf \int\limits_{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu}}^{\sqrt{\lambda+1}} \frac{r^2}{(r^2-\lambda)^2}\, dr \geq \lambda \cdot c \lim_{\nu\to\infty} \inf \int\limits_{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu}}^{\sqrt{\lambda+1}} \frac{1}{(r^2-\lambda)^2}\, dr = \\
= \quad & \lambda \cdot c \cdot \lim_{\nu\to\infty} \inf \int\limits_{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu}}^{\sqrt{\lambda+1}} \frac{1}{(r-\sqrt{\lambda})^2 (r+\sqrt{\lambda})^2}\, dr \geq \\
\geq \quad & \frac{\lambda \cdot c}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+1})^2} \lim_{\nu\to\infty} \inf \int\limits_{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu}}^{\sqrt{\lambda+1}} \frac{1}{(r-\sqrt{\lambda})^2}\, dr = \\
= \quad & \frac{\lambda \cdot c}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+1})^2} \lim_{\nu\to\infty} \inf \left[-\frac{1}{r-\sqrt{\lambda}} \right]_{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu}}^{\sqrt{\lambda+1}} = \\
= \quad & \frac{\lambda \cdot c}{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda+1})^2} \lim_{\nu\to\infty} \inf \left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda+1} - \sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda+\varepsilon_\nu} - \sqrt{\lambda}} \right) = \infty.
\end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, also ist $\lambda \in S(A)$ für $\lambda \in (0, \infty)$. Dabei wurde in (*) die Gleichung

$$\int_K f(\|x\|)\,dx = \tau_n \cdot n \cdot \int_a^b r^{n-1} f(r)\,dr$$

verwendet, wobei $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq \|x\| \leq b\}$ und τ_n das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel ist.
Nach Hilfssatz 5.7.11 erhält man auch $0 \in S(A)$. Sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Delta = [a, b]$ mit $N < a < b$. Dann ist $\dim E(\Delta)\mathcal{H} = \infty$, weil für $\lambda \in \Delta$ gilt: $\lambda \in S_e(A)$. Ist nun $d > b$ so ist $\Delta \subset \widetilde{\Delta} = [N, d]$, also gilt nach 5.2.6: $E(\Delta)\mathcal{H} \subset E(\widetilde{\Delta})\mathcal{H}$. Es ist $\lim\limits_{d\to\infty} E(\widetilde{\Delta})f = \lim\limits_{d\to\infty} E(d)f - E(N)f = (I - E(N))f$, also ist $E(\Delta)\mathcal{H} \subset (I - E(N))\mathcal{H}$. Folglich hat $(I - E(N))\mathcal{H}$ unendliche Dimension für $N \in \mathbb{N}$, d.h. $+\infty$ gehört zum wesentlichen Spektrum.

5.8.8 Bemerkung

$A = -\Delta$ hat keine Eigenwerte.

Beweis:
Wäre λ ein Eigenwert von A, so gäbe es ein $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ mit $(A - \lambda)u = 0$. Diese Gleichung ist äquivalent zur fouriertransformierten Gleichung $(|\,\xi\,|^2 - \lambda)\hat{u}(\xi) = 0$, also zu $|\,\xi\,|^2\ \hat{u}(\xi) = \lambda\hat{u}(\xi)$. Für kein $\hat{u} \neq 0$ ist diese Gleichung erfüllt, d.h. auch $(A - \lambda)u = 0$ wird nur von $u = 0$ gelöst. Somit ist kein $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von A.

5.8.9 Hilfssatz

Sei $c \neq 0$ konstant, $c \in \mathbb{R}$. Erkläre eine lineare Abbildung B von $\mathcal{D}(A)$ in die auf $\mathbb{R}^3$ fast überall erklärten meßbaren Funktionen durch $Bu = \frac{c}{|x|} \cdot u$. Dann ist B ein linearer Operator in $\mathcal{H}$. B ist relativ zu A kompakt.

Beweis:

1) Für $u \in \mathcal{D}(A) = H^2(\mathbb{R}^3)$ gilt: $\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2}\,|u(x)|^2\ dx < +\infty$:

In Hilfssatz 5.8.4 wurde gezeigt: u ist beschränkt. Deshalb kann man abschätzen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2}\,|u(x)|^2\ dx \quad &\leq \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^2}\,dx \cdot \sup_{y\in\mathbb{R}^3} |u(y)|^2 + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^2}\,|u(x)|^2\ dx \leq \\
&\overset{5.8.4}{\leq} \int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^2}\,dx \cdot c \cdot \|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{|x|>1} |u(x)|^2\ dx \leq \\
&\leq \tilde{c} \cdot \|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{r^2}\,dr + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \\
&= \tilde{c} \cdot \|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\ .
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{c}{|\,x\,|} \cdot u(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, d.h. B ist ein Operator $B : \mathcal{D}(A) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$.

2) B ist A-kompakt:

Es ist $0 \leq (|\xi|^2 - 1)^2 = |\xi|^4 - 2|\xi|^2 + 1 \Longrightarrow 2|\xi|^2 \leq |\xi|^4 + 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^2 + 1)^2 \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^4 + 2|\xi|^2 + 1) \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \\
&\leq 2 \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^4 |\widehat{u}(\xi)|^2 + |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \\
&= 2 \cdot (\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Also hat man die Abschätzung $\|u\|_{H^2} \leq \sqrt{2}(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$.

Sei nun $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ eine Folge mit $\| u_k \|_{L^2} + \| Au_k \|_{L^2} \leq c_1$. Dann ist wegen obiger Abschätzung

$$\|u_k\|_{H^2} \leq \sqrt{2} \cdot c_1. \tag{$*$}$$

Nach Hilfssatz 5.8.4 ist

$$|u_k(x)| \leq \widetilde{c} \cdot \|u_k\|_{H^2} \leq \bar{c}$$

und

$$|u_k(x+h) - u_k(x)| \leq \widetilde{c} \cdot |h|^{\frac{1}{4}} \cdot \|u_k\|_{H^2} \leq \bar{c} \cdot |h|^{\frac{1}{4}} .$$

Die Folge $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also für jedes $R > 0$ in $\overline{K_R(0)}$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig. Wähle nun eine streng monoton wachsende Folge R_i mit $\lim\limits_{i \to \infty} R_i = \infty$, $R_1 > 0$ und sukzessive Teilfolgen: Nach dem Satz von Ascoli–Arzelà A.6.2 gibt es zu R_1 eine Teilfolge $\left(u_{k_{1,n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $\left(u_{k_{1,n}} \mid \overline{K_{R_1}(0)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig in $C^0(\overline{K_{R_1}(0)})$ konvergiert. Nun wählen wir sukzessive Teilfolgen

$$\left(u_{k_{m,n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset \left(u_{k_{m-1,n}}\right)_{n \in \mathbb{N}},$$

so daß $\left(u_{k_{m,n}} \mid \overline{K_{R_m}(0)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig in $C^0(\overline{K_{R_m}(0)})$ konvergiert. Die Diagonalfolge

$$u_{k_n} := u_{k_{n,n}}$$

konvergiert nun lokal gleichmäßig in $\mathbb{R}^3$, d.h. für *jedes* R konvergiert $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ in $C^0(\overline{K_R(0)})$. Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle nun zunächst R so groß, daß $\frac{4c_1^2 c^2}{R^2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann wähle N so groß, daß $3\tau_3 c^2 R \, \|u_{k_m} - u_{k_n}\|_{C^0(\overline{K_R(0)})}^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|Bu_{k_m} - Bu_{k_n}\|_{L^2}^2 &= \int_{|x| \leq R} \frac{c^2}{|x|^2} \, |u_{k_m}(x) - u_{k_n}(x)|^2 \, dx + \\
&\quad + \int_{|x| > R} \frac{c^2}{|x|^2} \, |u_{k_m}(x) - u_{k_n}(x)|^2 \, dx \leq \\
&\leq c^2 \cdot \Bigg(\sup_{x \in K_R(0)} |u_{k_m}(x) - u_{k_n}(x)|^2 \cdot \int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^2} \, dx + \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \int_{|x| > R} |u_{k_m}(x) - u_{k_n}(x)|^2 \, dx \Bigg) \leq \\
&\leq 3c^2 \cdot \tau_3 \cdot R \cdot \|u_{k_m} - u_{k_n}\|_{C^0(\overline{K_R(0)})}^2 + \frac{c^2}{R^2} \|u_{k_m} - u_{k_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c^2}{R^2} \cdot \left(\|u_{k_m}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|u_{k_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right)^2 \overset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{c^2}{R^2} \cdot 4c_1^2 \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $(Bu_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\mathbb{R}^3)$, d.h. die Folge konvergiert in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Folglich ist der Operator B A-kompakt.

5.8.10 Satz

Seien $A : H^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3), Au = -\Delta u$ und $B : H^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3), u(x) \longmapsto \dfrac{c}{|x|}u(x)$ die oben behandelten Operatoren. Sei

$$C : H^2(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3), u(x) \longmapsto -\Delta u(x) + \frac{c}{|x|}u(x) = Au + Bu.$$

Dann ist C selbstadjungiert und es gilt $S_e(A) \cap \mathbb{R} \subset S_e(C) \cap \mathbb{R}$.

Beweis:
B ist die Multiplikation mit der reellen Funktion $\frac{c}{|x|}$, also ist B hermitesch. Da nach Hilfssatz 5.8.5 auch A hermitesch ist, ist $C = A + B$ hermitesch. Zum Beweis der Selbstadjungiertheit von C genügt es nach Satz 4.3.16, ein $\lambda > 0$ zu finden, sodaß $\mathcal{R}(C + \lambda) = \mathcal{H}$.
Dazu zunächst drei Abschätzungen:

1) Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $c(\varepsilon) > 0$, so daß

$$\| Bu \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \varepsilon \cdot \| u \|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + c(\varepsilon) \cdot \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}:$$

Für $\delta > 0$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2} \| Bu \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|^2} |u(x)|^2 \, dx \le \\
&\le c_1 \cdot \int_{|x| \le \delta} \frac{1}{|x|^2} dx \cdot \| u \|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{|x| > \delta} \frac{1}{|x|^2} |u(x)|^2 \, dx \le \\
&\le c_2 \cdot \delta \cdot \| u \|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{\delta^2} \| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} .
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{c} \cdot \| Bu \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le \sqrt{c_2 \delta} \cdot \| u \|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{\delta} \cdot \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Wählt man nun speziell $\delta := \dfrac{\varepsilon^2}{c_2 \cdot c^2}$, so erhält man eine Abschätzung wie behauptet.

2) Es ist $\| (A + \lambda)u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ge \frac{1}{2} \| u \|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}\lambda \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ für $\lambda \ge 1$:
Es gilt

$$\| (A + \lambda)u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \| \widehat{Au} + \lambda \hat{u} \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^2 + \lambda)^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Also ist zum einen

$$\| (A + \lambda)u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ge \int_{\mathbb{R}^3} (|\xi|^2 + 1)^2 \, |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \| u \|^2_{H^2(\mathbb{R}^3)}$$

und zum anderen

$$\| (A + \lambda)u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ge \int_{\mathbb{R}^3} \lambda^2 \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \lambda^2 \cdot \| u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} .$$

Zusammengenommen hat man $\| (A + \lambda)u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \ge \frac{1}{2} \| u \|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2}\lambda \| u \|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$.

3) Es gibt ein $\lambda_0 > 1$, so daß für $\lambda \geq \lambda_0 > 1$ gilt:

$$\| Cu + \lambda u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \geq \frac{1}{4} \| u \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} + \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)}:$$

Nimmt man 1) und 2) zusammen, so erhält man für $\lambda > 1$:

$$\begin{aligned} \| Cu + \lambda u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} &\geq \| (A + \lambda)u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} - \| Bu \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \| u \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} + \frac{1}{2}\lambda \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} - \varepsilon \| u \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} - c(\varepsilon) \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} . \end{aligned}$$

Wähle nun $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und λ_0 so groß, daß $\frac{1}{2}\lambda > c(\frac{1}{4}) + 1$ ist. Dann gilt für $\lambda \geq \lambda_0 > 1$:

$$\| Cu + \lambda u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \geq \frac{1}{4} \| u \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} + \| u \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} .$$

Sei nun $f \in \mathcal{H}$ beliebig. Betrachte die Gleichung $(C + \lambda_0)u = f$. Da der Operator $A + \lambda_0$ nach Hilfssatz 5.8.6 beschränkt invertierbar ist, kann man $u = (A+\lambda_0)^{-1}w$ setzen und erhält die äquivalente Gleichung

$$\Big(I + B(A + \lambda_0)^{-1}\Big)w = f.$$

Der Operator $T := B(A + \lambda_0)^{-1}$ ist kompakt: Sei $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\| w_k \| \leq D$. Setze $u_k := (A + \lambda_0)^{-1}w_k$, dann ist also $\| (A + \lambda_0)u_k \| \leq D$. Nach obiger Abschätzung 2) folgt:

$$\| u_k \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} + \| u_k \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq \| u_k \|_{H^2(\mathbf{R}^3)} + \lambda_0 \cdot \| u_k \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \overset{2)}{\leq} 2 \cdot \| (A + \lambda_0)u_k \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq 2 \cdot D.$$

Weil

$$\begin{aligned} \| u_k \|^2_{H^2(\mathbf{R}^3)} &= \int\limits_{\mathbf{R}^3} (|\xi|^2 + 1)^2 \, |\hat{u}_k(\xi)|^2 \, d\xi \geq \int\limits_{\mathbf{R}^3} (|\xi|^2 \cdot |\hat{u}_k(\xi)|)^2 \, d\xi = \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^3} |\widehat{Au_k}|^2 \, d\xi = \| \widehat{Au_k} \|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)} = \| Au_k \|^2_{L^2(\mathbf{R}^3)}, \end{aligned}$$

erhält man schließlich die Ungleichung

$$\| Au_k \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} + \| u_k \|_{L^2(\mathbf{R}^3)} \leq 2 \cdot D.$$

Weil nach Hilfssatz 5.8.9 der Operator B relativ zu A kompakt ist, enthält die Folge $(Bu_k)_{k\in\mathbf{N}} = (B(A+\lambda_0)^{-1}w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine konvergente Teilfolge, der Operator $T = B(A+\lambda_0)^{-1}$ ist also nach Definition kompakt.
Sei nun w eine Lösung der Gleichung

$$(I + T)w = \Big(I + B(A + \lambda_0)^{-1}\Big)w = 0.$$

Setzt man $u = (A + \lambda_0)^{-1}w$, so erhält man $(C + \lambda_0)u = 0$. Daraus folgt wegen Abschätzung 3): $u = 0$, also auch $w = 0$. Aus Hilfssatz 2.3.7 folgt: $\mathcal{R}(I + T) = \mathcal{H}$, weil auch $\mathcal{R}(A + \lambda_0) = \mathcal{H}$ nach Hilfssatz 5.8.6, folgt daraus schließlich $\mathcal{R}(C + \lambda_0) = \mathcal{H}$ und damit – nach Satz 4.3.16 – die Selbstadjungiertheit von C.
Die Aussage über das Spektrum von C folgt dann mit Satz 5.7.18.

5.8.11 Satz

Seien die Bezeichnungen wie im letzten Satz. Der Operator B ist relativ zu C kompakt und es gilt $S_e(A) \cap \mathbb{R} = S_e(C) \cap \mathbb{R}$. $+\infty$ gehört zum wesentlichen Spektrum von C.

Beweis:
Nach Abschätzung 3) im Beweis von Satz 5.8.10 gibt es ein $\lambda_0 > 1$, so daß für $u \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(C)$ gilt:

$$4 \cdot \| u \|_{H^2} \leq \| (C + \lambda_0) u \|_{L^2} \leq \| Cu \|_{L^2} + \lambda_0 \| u \|_{L^2} \leq \lambda_0 \cdot (\| Cu \|_{L^2} + \| u \|_{L^2}).$$

Man hat also die Ungleichung $\| u \|_{H^2} \leq \frac{\lambda_0}{4} \cdot (\| Cu \|_{L^2} + \| u \|_{L^2})$. Nun kann man analog zum Beweis von Hilfssatz 5.8.9 vorgehen und erhält schließlich: B ist bezüglich C kompakt.
Die Aussage über das Spektrum folgt aus der Bemerkung nach Satz 5.7.18. $+\infty \in S_e(C)$ folgt wie in Hilfssatz 5.8.7.

5.8.12 Bemerkung

In der Physik ist

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{e^2}{|x|}$$

der Schrödinger[1]- oder Hamiltonoperator[2] des Wasserstoffproblems. Wie in diesem Paragraphen gezeigt wurde, hat er keine positiven Eigenwerte. Man kann zeigen, daß $S_d(\widehat{H}) = \left\{ -\frac{me^4}{2\hbar^2 N^2} \mid N \in \mathbb{N} \right\}$, der zum Eigenwert $-\frac{me^4}{2\hbar^2 N^2}$ gehörige Eigenraum hat die Dimension N^2.

5.9 Funktionen eines selbstadjungierten Operators

In den letzten beiden Abschnitten wollen wir Funktionen selbstadjungierter Operatoren definieren: Was bedeutet $\sqrt{A}$, e^{itA}, $\cos A$ usw. Damit kann man dann einige Differentialgleichungen, die in der Physik auftreten, lösen. Beispielsweise die Wärmeleitungsgleichung: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, u(t,x) beschreibe die Temperaturverteilung in $\overline{\Omega}$ zur Zeit t. Es gelte:

1) $u(t,x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und alle $t \geq 0$.
2) $u(0,x) = u_0(x)$.

Die Funktion u genügt dann der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{d}{dt}u + (-\Delta)u = 0.$$

Schreibt man nun A für $-\Delta$ und tut so, als wäre A eine Konstante, so hat man die altbekannte Differentialgleichung $y' + Ay = 0$ mit der Lösung $y(t) = e^{-At}y_0$. Die Idee ist nun, dies auf unser Problem zu übertragen: Sei $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ und $u : \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \longrightarrow L^2(\Omega)$. u heißt stetig, wenn

$$\lim_{h \to 0} \| u(t+h) - u(t) \| = 0,$$

und differenzierbar, wenn es eine Abbildung $u' : \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\} \longrightarrow \mathcal{H}$ gibt mit

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\| = 0.$$

[1]Erwin Schrödinger (1887-1961)
[2]William Rowan Hamilton (1805-1865)

Wir suchen nun eine stetig differenzierbare Lösung von

$$\begin{aligned} u' + Au &= 0, \\ u(0) &= u_0 \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

wobei A ein selbstadjungierter Operator ist. Tatsächlich ist dann

$$u(t) = e^{-At} u_0$$

die gesuchte Lösung und es gilt

$$u'(t) = -Ae^{-At} u_0 = -Au(t).$$

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist dann $u(t, x) := u(t)(x)$.
Wir werden nun in diesem Abschnitt sehen, wie Funktionen selbstadjungierter Operatoren definiert werden können und ein paar Eigenschaften dieser neuen Operatoren zeigen. Im nächsten Abschnitt dann wird eine Differentialgleichung auf die eben beschriebene Art gelöst, allerdings nicht die Wärmeleitungsgleichung, sondern die Schrödingergleichung: Bei der Lösung der Wärmeleitungsgleichung muß man auf Eigenschaften des Laplace-Operators zurückgreifen, die wir im letzten Abschnitt nicht behandelt haben, bei der Schrödingergleichung entfällt diese Schwierigkeit. Die Lösungsmethode funktioniert grundsätzlich aber auch bei der Wärmeleitungsgleichung und einigen anderen Problemen.

In diesem Abschnitt sei immer $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator und $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ die zu A gehörige Spektralschar.

5.9.1 Hilfssatz

Sei $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $f \in \mathcal{H}$. Dann existiert $\lim\limits_{a\to-\infty, b\to\infty} \int\limits_a^b u(\lambda)\, dE(\lambda)f =: \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, dE(\lambda)f$ genau dann, wenn $\lim\limits_{a\to-\infty, b\to\infty} \int\limits_a^b |u(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) =: \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f)$ existiert.

Beweis:
Wie der Beweis von Hilfssatz 5.6.1, aber dabei λ ersetzt durch $u(\lambda)$ und λ^2 ersetzt durch $u^2(\lambda) = |u(\lambda)|^2$.

5.9.2 Satz

Sei $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $\mathcal{D}(u(A)) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) < +\infty \right\}$. Dann ist $\mathcal{D}(u(A))$ ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$. Der Operator $u(A)$, definiert durch $u(A) : \mathcal{D}(u(A)) \longrightarrow \mathcal{H}, u(A)f = \lim\limits_{a\to-\infty, b\to\infty} \int\limits_a^b u(\lambda)\, dE(\lambda)f$ ist selbstadjungiert.

Beweis:
Wie der Beweis von Satz 5.6.2. Dabei muß wieder nur λ durch $u(\lambda)$ ersetzt werden.

5.9.3 Bemerkung und Definition

Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Sei $u(\lambda) = \operatorname{Re} w(\lambda), v(\lambda) = \operatorname{Im} w(\lambda)$. Setze $\mathcal{D}(w(A)) := \mathcal{D}(u(A)) \cap \mathcal{D}(v(A))$, $w(A) : \mathcal{D}(w(A)) \longrightarrow \mathcal{H}, w(A)f = u(A)f + iv(A)f$. Dann ist $\mathcal{D}(w(A))$ ebenfalls dicht in $\mathcal{H}$.

Beweis:
Es ist $\mathcal{D}(w(A)) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |v(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) < \infty \right\}$. Wegen $|u(\lambda)|^2 + |v(\lambda)|^2 = u^2(\lambda) + v^2(\lambda) = |w(\lambda)|^2$ ist $\mathcal{D}(w(A)) = \mathcal{D}(|w|(A))$. $|w|$ ist aber eine reelle stetige Funktion, also ist $\mathcal{D}(|w|(A))$ nach Satz 5.9.2 dicht in $\mathcal{H}$.

5.9.4 Hilfssatz

Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, sei $u(\lambda) = \operatorname{Re} w(\lambda), v(\lambda) = \operatorname{Im} w(\lambda)$. Dann existiert

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) =: \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g)$$

für $f \in \mathcal{D}(w(A)), g \in \mathcal{H}$ und es ist

$$(w(A)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g),$$

$$\| w(A)f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | w(\lambda) |^2 \; d(E(\lambda)f, f).$$

<u>Beweis</u>:
Sei $-\infty < c < a < b < d < +\infty$. Dann ist

$$\left| \int_a^b w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) - \int_c^d w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) \right| \le \left| \int_c^a w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) \right| + \left| \int_b^d w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) \right| .$$

Nehme die Riemannschen Summen $T_n f$ wie im Beweis von Satz 5.2.12, d.h.

$$T_k = \sum_{i=1}^{k_n} w\left(\lambda_i^{(n)}\right) E\left(\Delta_i^{(n)}\right).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
| (T_n f, g) |^2 \quad &= \quad \left| \left(\sum_{i=1}^{k_n} w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \cdot E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, g \right) \right|^2 = \\
&= \left| \sum_{u=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right| \cdot \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, E\left(\Delta_i^{(n)}\right) g \right) \right|^2 \le \\
&\le \left| \sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right| \cdot \left\| E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f \right\| \cdot \left\| E\left(\Delta_i^{(n)}\right) g \right\| \right|^2 \le \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \left| \left(\sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right|^2 \cdot \left\| E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{k_n} \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) g, g \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right|^2 = \\
&= \left| \sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right|^2 \cdot \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f \right) \right| \cdot \left(E(\Delta) g, g \right) = \\
&= \| E(\Delta) g \|^2 \cdot \left| \sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right|^2 \cdot \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f \right) \right| \le \\
&\le \| g \|^2 \cdot \left| \sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right) \right|^2 \cdot \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f \right) \right| .
\end{aligned}$$

Für $n \longrightarrow \infty$ erhält man daraus:

$$\left| \int_c^a w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) \right| \le \| g \| \cdot \left(\int_c^a | w(\lambda) |^2 \; d(E(\lambda)f, f) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Das zweite Integral wird entsprechend behandelt. Also existiert für $f \in \mathcal{D}(w(A))$ und $g \in \mathcal{H}$ der Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g)$$

und nach Satz 5.2.12 gilt

$$\lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \left(\int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f, g \right).$$

Nun ist

$$\int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f = \int_a^b u(\lambda)\, dE(\lambda)f + i \int_a^b v(\lambda)\, dE(\lambda)f$$

und

$$w(A)f = u(A)f + iv(A)f \overset{5.9.2}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, dE(\lambda)f + i \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, dE(\lambda)f.$$

Setzt man das ein, so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, d(E(\lambda)f, g) = (w(A)f, g).$$

Weiter ist

$$\| w(A)f \|^2 = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \left(\int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f, \int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f \right)$$

und

$$\left\| \int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} (T_n f, T_n f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \left| w\left(\lambda_i^{(n)}\right)\right|^2 \left(E\left(\Delta_i^{(n)}\right) f, f\right) = \int_a^b | w(\lambda) |^2\, d(E(\lambda)f, f).$$

Für $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ erhält man also:

$$\| w(A)f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | w(\lambda) |^2\, d(E(\lambda)f, f).$$

5.9.5 Bemerkung

Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig und $| w(\lambda) | \le M < \infty$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{D}(w(A)) = \mathcal{H}$ und $\| w(A) \| \le M$.

Beweis:
Für $f \in \mathcal{H}$ ist

$$\int_a^b | w(\lambda) |^2\, d(E(\lambda)f, f) \le M^2 \int_a^b d(E(\lambda)f, f) \overset{5.2.12}{\le} M^2 \cdot \| f \|^2,$$

also ist auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} | w(\lambda) |^2\, d(E(\lambda)f, f) \le M^2 \cdot \| f \|^2 < \infty$$

und daher mit Hilfssatz 5.9.1: $\mathcal{D}(w(A)) = \mathcal{H}$. Nach Satz 5.9.4 ist

$$\|w(A)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) \leq M^2 \cdot \|f\|^2,$$

also $\|w(A)f\| \leq M \cdot \|f\|$ und damit $\|w(A)\| \leq M$.

5.9.6 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert. Seien $w_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $i = 1{,}2$. Dann ist

$$(w_1 + w_2)(A) \supset w_1(A) + w_2(A),$$

$$(w_1 \cdot w_2)(A) \supset w_1(A)w_2(A).$$

Genauer: $w_1(A)w_2(A)$ ist die Einschränkung von $(w_1w_2)(A)$ auf $\mathcal{D}(w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_1w_2(A))$. Es gilt

$$(w_1w_2)(A) = w_1(A)w_2(A) \Longleftrightarrow \mathcal{D}(w_2(A)) \supset \mathcal{D}((w_1w_2)(A)).$$

Weiter ist $\mathcal{D}(w_1(A) + w_2(A)) = \mathcal{D}((w_1 + w_2)(A)) \cap \mathcal{D}(w_1(A)) = \mathcal{D}((w_1 + w_2)(A)) \cap \mathcal{D}(w_2(A))$. Es gilt: $w_1(A) + w_2(A) = (w_1 + w_2)(A) \Longrightarrow (\mathcal{D}((w_1 + w_2)(A)) \subset \mathcal{D}(w_1(A)) \vee \mathcal{D}((w_1 + w_2)(A)) \subset \mathcal{D}(w_2(A)))$.

Beweis:

1) Beweis der Aussagen für $(w_1 + w_2)(A)$:
Man definiert wie üblich $\mathcal{D}(w_1(A) + w_2(A)) := \mathcal{D}(w_1(A)) \cap \mathcal{D}(w_2(A))$. Sei also $f \in \mathcal{D}(w_1(A)) \cap \mathcal{D}(w_2(A))$. Dann folgt nach Satz 5.9.2

$$\Big(w_1(A) + w_2(A)\Big)f = \lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int_a^b \Big(w_1(\lambda) + w_2(\lambda)\Big) \, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(w_1(\lambda) + w_2(\lambda)\Big) \, dE(\lambda)f.$$

Also ist nach Hilfssatz 5.9.1 $f \in \mathcal{D}\Big((w_1 + w_2)(A)\Big)$, d.h. es ist $w_1(A) + w_2(A) \subset (w_1 + w_2)(A)$.

Sei nun $\int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda) + w_2(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty$. Nach Hilfssatz 5.9.1 ist das äquivalent dazu, daß $\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) + w_2(\lambda) \, dE(\lambda)f < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) \, dE(\lambda)f < \infty$. Man hat also $\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) + w_2(\lambda) \, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda) \, dE(\lambda)f + \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\lambda) \, dE(\lambda)f$, denn das Integral auf der linken Seite und das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung existieren, also existiert auch das zweite Integral auf der rechten Seite. Folglich ist $\int_{-\infty}^{\infty} w_2(\lambda) \, dE(\lambda)f < \infty$, was nach Hilfssatz 5.9.1 wieder äquivalent ist zu $\int_{-\infty}^{\infty} |w_2(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) < \infty$. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|w_1(\lambda)|^2 + |w_2(\lambda)|^2) \, d(E(\lambda)f, f) < \infty.$$

Vertauscht man in dieser Argumentation die Rollen von $w_1(\lambda)$ und $w_2(\lambda)$, so erhält man für $i = 1{,}2$:

$$\mathcal{D}\Big((w_1 + w_2)(A)\Big) \cap \mathcal{D}(w_i(A)) \subset \mathcal{D}\Big(w_1(A) + w_2(A)\Big).$$

Wegen

$$\begin{aligned}|w_1(\lambda)+w_2(\lambda)|^2 &\leq \Big|\,|w_1(\lambda)|+|w_2(\lambda)|\,\Big|^2 = \\ &= |w_1(\lambda)|^2+2\,|w_1(\lambda)|\cdot|w_2(\lambda)|+|w_2(\lambda)|^2 \leq 2(|w_1(\lambda)|^2+|w_2(\lambda)|^2)\end{aligned}$$

folgt aus der Existenz der beiden Integrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_i(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f,f)$, $i = 1{,}2$, sofort die Existenz von $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, w_1(\lambda)+w_2(\lambda)\,|^2 \; d(E(\lambda)f,f)$, d.h. es gilt auch die umgekehrte Inklusion, also für $i = 1{,}2$:

$$\mathcal{D}\Big((w_1+w_2)(A)\Big) \cap \mathcal{D}(w_i(A)) = \mathcal{D}\Big(w_1(A)+w_2(A)\Big).$$

Ist nun $(w_1+w_2)(A) = w_1(A)+w_2(A)$, so ist demnach $\mathcal{D}\Big((w_1+w_2)(A)\Big) = \mathcal{D}\Big(w_1(A)+w_2(A)\Big)$, d.h. für $i = 1{,}2$ gilt $\mathcal{D}\Big((w_1+w_2)(A)\Big) \subset \mathcal{D}(w_i(A))$. Gilt umgekehrt diese Inklusion, so ist $\mathcal{D}\Big(w_1(A)+w_2(A)\Big) = \mathcal{D}\Big((w_1+w_2)(A)\Big)$, also hat man dann $(w_1+w_2)(A) = w_1(A)+w_2(A)$.

2) Beweis der Aussagen für $(w_1 \cdot w_2)(A)$:

Sei $f \in \mathcal{D}(w_2(a))$. Wie im Beweis von Satz 5.6.3 zeigt man: $E(\lambda)w_2(A)f = w_2(A)E(\lambda)f$. Insbesondere ist $E(\lambda)\mathcal{D}(w_2(A)) \subset \mathcal{D}(w_2(A))$. Nach Hilfssatz 5.9.4 gilt nun:

$$\begin{aligned}\|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 &= \|w_2(A)E(\lambda)f\|^2 \overset{5.9.4}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_2(\mu)|^2 \; d\Big(E(\mu)E(\lambda)f, E(\lambda)f\Big) = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 \; d\Big(E(\mu)f, E(\lambda)f\Big) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 \; d(E(\mu)f,f).\end{aligned}$$

Für $w_2(A)f \in \mathcal{D}(w_1(A))$, d.h. $f \in \mathcal{D}\Big(w_1(A)w_2(A)\Big)$, ist

$$\begin{aligned}\infty &> \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; d\Big(E(\lambda)w_2(A)f, w_2(A)f\Big) = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; d\,\|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; dG(\lambda),\end{aligned}$$

wobei $G(\lambda) := \|E(\lambda)w_2(A)f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 \; d(E(\mu)f,f)$.

<u>Behauptung:</u> $\int\limits_a^b |w_1(\lambda)|^2 \; dG(\lambda) = \int\limits_a^b |w_1(\lambda)w_2(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f,f)$.

Beweis dieser Behauptung:

Vergleiche Beweis von Hilfssatz 5.5.1. Dieser Hilfssatz kann nicht angewendet werden, weil über $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} |w_i(\lambda)|$ nichts bekannt ist. Man folgert aber ähnlich: Sei $a = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n+1} = b$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \; \Big(G(\lambda_{j+1}) - G(\lambda_j)\Big) = \sum_{j=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \int\limits_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} |w_2(\mu)|^2 \; d(E(\mu)f,f) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \cdot \sum_{i=1}^{m_j} \left|w_2(\mu_i^{(j)})\right|^2 \cdot \Big(\big(E(\mu_{i+1}^{(j)}) - E(\mu_i^{(j)})\big)f, f\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m_j} |w_2(\lambda_j)|^2 \cdot \Big(\big(E(\mu_{i+1}^{(j)}) - E(\mu_i^{(j)})\big)f, f\Big)\right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m_j} \left(\left|w_2(\mu_i^{(j)})\right|^2 - |w_2(\lambda_j)|^2\right) \Big(\big(E(\mu_{i+1}^{(j)}) - E(\mu_i^{(j)})\big)f, f\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \cdot |w_2(\lambda_j)|^2 \cdot \Big(\big(E(\lambda_{j+1}) - E(\lambda_j)\big)f, f\Big) + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} |w_1(\lambda_j)|^2 \int_{\lambda_j}^{\lambda_{j+1}} (|w_2(\mu)|^2 - |w_2(\lambda_j)|^2)\, d(E(\mu)f, f).
\end{aligned}$$

Die zweite Summe wird beliebig klein, wenn $\max\limits_{1 \le j \le n} |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ klein wird, denn die Funktion $|w_2(\mu)|^2$ ist als stetige Funktion auf dem Intervall $[\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ gleichmäßig stetig. Die erste Summe konvergiert dann gegen $\int_a^b |w_1(\lambda) w_2(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f)$, also folgt die (Zwischen-)Behauptung.

Für $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$ erhält man mit dieser Behauptung

$$+\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda) w_2(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f),$$

d.h. es ist $f \in \mathcal{D}(w_1 w_2(A))$. Also gilt insbesondere $\mathcal{D}\Big(w_1(A) w_2(A)\Big) \subset \mathcal{D}(w_1 w_2(A))$.

Sei $f \in \mathcal{D}(w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_1 w_2(A))$. Nach obigen Rechnungen gilt dann

$$\begin{aligned}
+\infty \quad &> \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda) w_2(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; dG(\lambda) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 \; d\Big(E(\lambda) w_2(A) f, w_2(A) f\Big),
\end{aligned}$$

d.h. es ist $w_2(A)f \in \mathcal{D}(w_1(A))$. Folglich ist $\mathcal{D}(w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_1 w_2(A)) \subset \mathcal{D}\Big(w_1(A) w_2(A)\Big) \subset \mathcal{D}(w_1 w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_2(A))$, also ist $\mathcal{D}(w_1 w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_2(A)) = \mathcal{D}\Big(w_1(A) w_2(A)\Big)$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(w_1 w_2(A)) = \mathcal{D}\Big(w_1(A) w_2(A)\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}(w_2(A)) \cap \mathcal{D}(w_1 w_2(A)) = \mathcal{D}(w_1 w_2(A)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}(w_2(A)) \supset \mathcal{D}(w_1 w_2(A)).
\end{aligned}$$

Sei nun zunächst $f \in \mathcal{D}(w_2(A))$. Dann ist

$$\begin{aligned}
E(\lambda) w_2(A) f \quad &= \quad w_2(A) E(\lambda) f = \int_{-\infty}^{\infty} w_2(\mu)\, d\Big(E(\mu) E(\lambda) f, E(\lambda) f\Big) = \\
&= \int_{-\infty}^{\lambda} w_2(\mu)\, d\Big(E(\mu) f, E(\lambda) f\Big) = \int_{-\infty}^{\lambda} w_2(\mu)\, d(E(\mu) f, f).
\end{aligned}$$

Also folgt wie in der Zwischenbehauptung für $f \in \mathcal{D}\Big(w_1(A)w_2(A)\Big)$:

$$\int_a^b w_1(\lambda)\, dE(\lambda)w_2(A)f = \int_a^b w_1(\lambda)w_2(\lambda)\, dE(\lambda)f.$$

Für $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$ erhält man daraus für $f \in \mathcal{D}\Big(w_1(A)w_2(A)\Big)$:

$$(w_1 w_2)(A)f = w_1(A)w_2(A)f.$$

5.9.7 Folgerung

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert, $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$w^n(A) = (w(A))^n.$$

Ist $w(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt diese Gleichung sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

1) $n \in \mathbb{N}$:
Sei $w_1(\lambda) := w(\lambda), w_2(\lambda) := w_1^n(\lambda)$. Zeige die Behauptung induktiv: Sei $f \in \mathcal{D}(w_1 w_2(A)) = \mathcal{D}(w_1^{n+1}(A))$. Dann ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^{2(n+1)}\ d(E(\lambda)f, f) < +\infty$.

In der folgenden Rechnung wird die Höldersche Ungleichung für Summen verwendet: Sind $a_\nu \geq 0, b_\nu \geq 0$ und gilt p,q > 1 mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so ist $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \leq \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Sei nun $-\infty < a = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{m+1} = b < +\infty, \Delta_j^{(m)} = [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$. Dann gilt für die Riemannschen Summen zu $|w_2(\lambda)|^2$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} |w_1(\lambda_j)|^{2n} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^{m} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big)^{1-\frac{2n}{2(n+1)}} \cdot |w_1(\lambda_j)|^{2n} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big)^{\frac{2n}{2(n+1)}} \leq \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{j=1}^{m} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big)\right)^{\frac{2}{2(n+1)}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |w_1(\lambda_j)|^{2(n+1)} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big)\right)^{\frac{2n}{2(n+1)}} = \\
&= \Big(E[a,b]f, f\Big)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |w_1(\lambda_j)|^{2(n+1)} \Big(E(\Delta_j^{(m)})f, f\Big)\right)^{\frac{n}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Für $\max\limits_{1 \leq j \leq m} |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \longrightarrow 0$ erhält man also:

$$\int_a^b |w_1(\lambda)|^{2n}\ d(E(\lambda)f, f) \leq \|f\|^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\int_a^b |w_1(\lambda)|^{2(n+1)}\ d(E(\lambda)f, f)\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

Mit $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$ folgt: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ w_2(\lambda)\ |^2\ d(E(\lambda)f, f) > \infty$, also $f \in \mathcal{D}(w_2(A))$, d.h. $\mathcal{D}(w_1 w_2(A)) \subset \mathcal{D}(w_2(A))$. Nach Satz 5.9.6 folgt daraus $w_1^{n+1}(A) = w_1(A)w_1^n(A)$ und nach Induktionsvoraussetzung damit $w_1^{n+1}(A) = (w_1(A))^{n+1}$

2) $n = -1$

Hat man die Behauptung für $n = -1$ gezeigt, so folgt sie wegen 1) für alle negativen n. Sei also $w(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $w^{-1}(\lambda)w(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist nach Satz 5.9.6 $w^{-1}(A)w(A)$ die Restriktion der Identität auf $\mathcal{D}(w^{-1}(A))$. Dies heißt: $w(A)$ hat eine Inverse und es ist $(w(A))^{-1} = w^{-1}(A)$.

5.9.8 Satz

Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$(w(A))^* = \overline{w}(A), w(A) = (\overline{w}(A))^*.$$

Insbesondere ist $w(A)$ abgeschlossen. Hierbei ist $\overline{w}(A)$ der Operator, der zur Funktion $\overline{w}$ gehört, $\overline{w}(\lambda) = \overline{w(\lambda)}$.

Beweis:
Sei $w(\lambda) = r(\lambda) \cdot \widetilde{w}(\lambda)$ mit $r(\lambda) = |w(\lambda)| + 1, |\widetilde{w}(\lambda)| \leq 1$. Es gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (|w(\lambda)| + 1)^2 \, d(E(\lambda)f, f) < +\infty \Longleftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) < +\infty :$$

„$\Rightarrow$ " ist klar

„$\Leftarrow$ " Es ist $(|w(\lambda)| + 1)^2 = |w(\lambda)|^2 + 1 + 2\,|w(\lambda)|$. $|w(\lambda)|^2$ ist nach Voraussetzung integrierbar, die Konstante 1 ist integrierbar und wegen $2\,|w(\lambda)| \leq 1 + |w(\lambda)|^2$ ist dann auch $2\,|w(\lambda)|$ integrierbar.

Also ist $\mathcal{D}(w(A)) = \mathcal{D}(r(A))$. Wegen $|\widetilde{w}(\lambda)| \leq 1$ ist

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{w}(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)f, f) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(E(\lambda)f, f) \leq \|f\|^2 < \infty,$$

d.h. $\mathcal{D}(\widetilde{w}(A)) = \mathcal{H}$. Also gilt für $w(A) = (r\widetilde{w})(A)$:

$$w(A) = r(A)\widetilde{w}(A) \overset{5.9.6}{=} (r\widetilde{w})(A) = (\widetilde{w}r)(A) \overset{5.9.6}{=} \widetilde{w}(A)r(A).$$

Da r eine reelle Funktion ist, ist der Operator $r(A)$ nach Satz 5.9.2 selbstadjungiert. $\widetilde{w}(A)$ ist aus $L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Es ist $\widetilde{w}(A) = (\operatorname{Re}\widetilde{w})(A) + i \cdot (\operatorname{Im}\widetilde{w})(A)$, wobei $(\operatorname{Re}\widetilde{w})(A)$ und $(\operatorname{Im}\widetilde{w})(A)$ beschränkte selbstadjungierte Operatoren mit Definitionsbereich $\mathcal{H}$ sind. Also ist

$$(\widetilde{w}(A))^* = \overline{\widetilde{w}}(A).$$

Sei $y \in \mathcal{D}(w(A)^*)$. Dann ist

$$(x, w(A)^*y) = (\widetilde{w}(A)r(A)x, y) = (r(A)x, \overline{\widetilde{w}}(A)y) = (x, r(A)\overline{\widetilde{w}}(A)y),$$

Also ist $y \in \mathcal{D}(r(A)\overline{\widetilde{w}}(A))$. Deshalb folgt

$$(w(A))^* \subset r(A)\overline{\widetilde{w}}(A) \overset{5.9.6}{\subset} \overline{w}(A).$$

Wie oben sieht man $\overline{w}(A) = r(A)\overline{\widetilde{w}}(A)$.
Sei $f \in \mathcal{D}(\overline{w}(A)), g \in \mathcal{D}(w(A))$. Dann ist

$$(\widetilde{w}(A)r(A)g, f) = (r(A)g, \overline{\widetilde{w}}(A)f) = (g, r(A)\overline{\widetilde{w}}(A)f).$$

Demnach gilt auch $\overline{w}(A) \subset (w(A))^*$. Also hat man insgesamt

$$(w(A))^* = r(A)\overline{\widetilde{w}}(A) = \overline{w}(A).$$

5.9.9 Satz

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert und nach unten beschränkt, d.h. es gebe ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so daß für alle $u \in \mathcal{D}(A)$ gilt: $(Au, u) \geq \gamma \cdot \|u\|^2$. Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann ist für $f \in \mathcal{D}(w(A))$

$$w(A)f = \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, dE(\lambda)f$$

und

$$w(A)f - w(\gamma)E(\gamma)f = \lim_{b\to\infty} \int_\gamma^b w(\lambda)\, dE(\lambda)f = \int_\gamma^\infty w(\lambda)\, dE(\lambda)f.$$

Wenn insbesondere $w : [\gamma, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion ist, die irgendwie zu einer stetigen Funktion $\widehat{w} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt ist, so ist für $f \in \mathcal{D}(\widehat{w}(A))$:

$$\widehat{w}(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}(\lambda)\, dE(\lambda)f = \int_\gamma^\infty w(\lambda)\, dE(\lambda)f + w(\gamma)E(\gamma)f =: w(A)f.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\widehat{w}(A)) &= \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) < \infty \right\} = \\ &= \left\{ f \in \mathcal{H} \mid \int_{\gamma-0}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) < \infty \right\} =: \mathcal{D}(w(A)). \end{aligned}$$

Der Wert von $\int_{\gamma-0}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) := \lim_{\varepsilon\to0, b\to\infty} \int_{\gamma-\varepsilon}^{b} |\widehat{w}(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f)$ hängt nicht von der Festsetzung $\widehat{w}$ von w ab und es gilt

$$\int_{\gamma-0}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f) = |w(\gamma)|^2 \cdot \|E(\gamma)f\|^2 + \int_\gamma^\infty |w(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f).$$

Insbesondere gilt für $f \in \mathcal{D}(w(A))$:

$$\|w(A)f\|^2 = \int_{\gamma-0}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \; d(E(\lambda)f, f).$$

Beweis:

$w(A)f = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\, dE(\lambda)f$ ist bereits klar. Sei nun $\delta \in \mathbb{R}$ mit $\delta < \gamma$. Dann ist für $u \in \mathcal{D}(A)$:

$$((A - \delta)u, u) = (Au, u) - \delta(u, u) \geq (\gamma - \delta) \cdot \|u\|^2 .$$

Also ist $\|(A-\delta)u\| \cdot \|u\| \geq |((A-\delta)u, u)| \geq (\gamma-\delta)\, \|u\|^2$, d.h. für $u \in \mathcal{D}(A)$ gilt: $\|(A-\delta)u\| \geq (\gamma-\delta) \cdot \|u\|$. Aus Satz 5.1.3 folgt $\delta \in \Sigma(A)$. Nach Hilfssatz 5.7.12 sind die Operatoren $E(\lambda)$ konstant für $\lambda < \gamma$, d.h. $E(\lambda) = 0$ für $\lambda < \gamma$. Betrachte jetzt die Zerlegung $a = \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_i = \gamma < \lambda_{i+1} < ... < \lambda_{n+1} = b$. Sei $\Delta_j^{(n)} = [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$, $\widehat{w} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $w = \widehat{w}\,|_{[\gamma+\infty)}$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{w}(\lambda_j) E\left(\Delta_j^{(n)}\right) f = \widehat{w}(\lambda_{i-1})E(\gamma)f + \sum_{j=i}^{n} w(\lambda_j) E\left(\Delta_j^{(n)}\right) f.$$

Für $\max\limits_{1\leq j\leq n} |\lambda_{j+1}-\lambda_j| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ erhält man

$$\int\limits_a^b \widehat{w}(\lambda)\,dE(\lambda)f = w(\gamma)E(\gamma)f + \int\limits_\gamma^b w(\lambda)\,dE(\lambda)f.$$

Daraus wird für $a \longrightarrow -\infty, b \longrightarrow +\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}(\lambda)\,dE(\lambda)f = w(\gamma)E(\gamma)f + \int\limits_\gamma^{\infty} w(\lambda)\,dE(\lambda)f.$$

(Damit ist auch $w(A)f - w(\gamma)E(\gamma)f = \int\limits_\gamma^{\infty} w(\lambda)\,dE(\lambda)f$ für eine stetige Funktion $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ bewiesen).
Mit der gleichen Zerlegung wie oben ergibt sich auch

$$\sum_{j=1}^n |\widehat{w}(\lambda_j)|^2 \left(E(\Delta_j^{(n)})f,f\right) = |\widehat{w}(\lambda_{i-1})|^2\ (E(\gamma)f,f) + \sum_{j=i}^n |w(\lambda_j)|^2 \left(E(\Delta_j^{(n)})f,f\right),$$

d.h. für $\max\limits_{1\leq j\leq n} |\lambda_{j+1}-\lambda_j| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ erhält man

$$\int\limits_a^b |\widehat{w}(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) = |w(\gamma)|^2 \cdot \|E(\gamma)f\|^2 + \int\limits_\gamma^b |w(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f).$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma-\varepsilon}^b |\widehat{w}(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) &= \int\limits_\gamma^b |w(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) + |w(\gamma)|^2 \cdot \|E(\gamma)f\|^2, \\ \text{d.h.}\quad \int\limits_{\gamma-0}^b |\widehat{w}(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) &= \int\limits_\gamma^b |w(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) + |w(\gamma)|^2 \cdot \|E(\gamma)f\|^2 . \end{aligned}$$

Für $a \to -\infty, b \to +\infty$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) &= |w(\gamma)|^2\|E(\gamma)f\|^2 + \int\limits_\gamma^{\infty} |w(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) = \\ &= \int\limits_{\gamma-0}^{\infty} |\widehat{w}(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)f,f) \end{aligned}$$

und diese Beziehung gilt in folgendem Sinn: Wenn die linke Seite endlich ist, so ist es auch die rechte und beide sind gleich. Der mittlere Term zeigt, daß der Wert nur von $\widehat{w}\ |_{[\gamma,+\infty)}$ abhängt. Wenn die rechte Seite endlich ist, d.h. wenn

$$\lim_{\varepsilon\to 0, b\to\infty} \int\limits_{\gamma-\varepsilon}^b |\widehat{w}(\lambda)|\ d(E(\lambda)f,f)$$

für irgendeine stetige Fortsetzung $\widehat{w}$ der stetigen Funktion $w : [\gamma, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert, so existiert dieser Grenzwert für jede stetige Fortsetzung von w und es gilt obige Gleichung.

5.9.10 Folgerung

Sei $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert und nach unten beschränkt mit Schranke $\gamma \geq 0$. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Dann wird durch $w : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}, w(\lambda) = \lambda^\alpha$ eine stetige Funktion gegeben und es gilt für $f \in \mathcal{D}(A^\alpha) := \left\{ \widetilde{f} \in \mathcal{H} \mid \int\limits_0^\infty |\lambda|^{2\operatorname{Re}\alpha}\, d(E(\lambda)f,f) < \infty \right\} : A^\alpha f = \int\limits_0^\infty \lambda^\alpha\, dE(\lambda)f$. Für $\operatorname{Re}\beta \geq \operatorname{Re}\alpha > 0$ ist $\mathcal{D}(A^\alpha) \supset \mathcal{D}(A^\beta)$ und es gilt $A^\alpha A^\beta f = A^{\alpha+\beta} f = A^\beta A^\alpha f$ für $f \in \mathcal{D}(A^{\alpha+\beta})$.

<u>Beweis</u>:
Die Funktion $w(\lambda) = \lambda^\alpha$ ist in 0 stetig, also ist $w(0) = 0$. Ist $\gamma = 0$, so gilt nach Satz 5.9.9:

$$A^\alpha f = \int\limits_0^\infty w(\lambda)\, dE(\lambda)f + w(0)E(0)f = \int\limits_0^\infty w(\lambda)\, dE(\lambda)f.$$

Für $\gamma > 0$ folgt die Formel direkt aus dem Beweis von Satz 5.9.9
Sei nun $\operatorname{Re}\beta \geq \operatorname{Re}\alpha > 0$, sei $f \in \mathcal{D}(A^\beta)$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt ähnlich wie im Beweis von Folgerung 5.9.7 (mit den dortigen Bezeichnungen):

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{2\operatorname{Re}\alpha} \left(E(\Delta_j^{(m)})f,f\right) = \\
=\ & \sum_{j=1}^m \left(E(\Delta_j^{(m)})f,f\right)^{1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}} |\lambda_j|^{2\operatorname{Re}\alpha} \cdot \left(E(\Delta_j^{(m)})f,f\right)^{\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{2\operatorname{Re}\beta}} \leq \\
\overset{\text{Hölder}}{\leq}\ & \left(\sum_{j=1}^m \left(E(\Delta_j^{(m)})f,f\right)\right)^{1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}} \cdot \left(\sum_{j=1}^m |\lambda_j|^{2\operatorname{Re}\beta} \left(E(\Delta_j^{(m)})f,f\right)\right)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}}
\end{aligned}$$

und damit für $\max\limits_{1\leq j\leq m} |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$\int\limits_a^b |\lambda_j|^{2\operatorname{Re}\alpha}\, d(E(\lambda)f,f) \leq \|f\|^{1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}} \cdot \left(\int\limits_a^b |\lambda|^{2\operatorname{Re}\beta}\, d(E(\lambda)f,f)\right)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}}.$$

Für $a = 0$, $b \to \infty$ erhält man schließlich

$$\int\limits_0^b |\lambda_j|^{2\operatorname{Re}\alpha}\, d(E(\lambda)f,f) \leq \|f\|^{1-\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}} \cdot \left(\int\limits_0^\infty |\lambda|^{2\operatorname{Re}\beta}\, d(E(\lambda)f,f)\right)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\beta}} < \infty,$$

da $f \in \mathcal{D}(A^\beta)$. Also ist $\mathcal{D}(A^\beta) \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$. Ersetzt man in dieser Rechnung β durch $\alpha + \beta$, so ist wegen $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta > \operatorname{Re}\beta \geq \operatorname{Re}\alpha > 0$ dann $\mathcal{D}(A^{\alpha+\beta}) \subset \mathcal{D}(A^\beta) \subset \mathcal{D}(A^\alpha)$. Deshalb folgt nach Satz 5.9.6:

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta = A^\beta A^\alpha.$$

5.10 Einparametrige unitäre Gruppen

5.10.1 Definition (einparametrige Gruppe)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sei $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Schar von Operatoren mit $B(t) \in L(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese Schar heißt einparametrige Gruppe, wenn gilt:

1) $B(0) = I$ (Identität)

2) $B(s)B(t) = B(s+t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

5.10.2 Bemerkung

$(\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.

Beweis:
Die Verknüpfung ist nach 2) wohldefiniert. Die Gruppenaxiome und die Kommutativität rechnet man leicht nach, indem man die entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen ausnützt:

1) Assoziativität:

$$\begin{aligned} B(r) \circ (B(s) \circ B(t)) &\overset{2)}{=} B(r) \circ B(s+t) \overset{2)}{=} B(r + (s+t)) = B((r+s)+t) = \\ &= B(r+s) \circ B(t) = (B(r) \circ B(s)) \circ B(t). \end{aligned}$$

2) Kommutativität: $B(s) \circ B(t) \overset{2)}{=} B(s+t) = B(t+s) \overset{2)}{=} B(t) \circ B(s)$.

3) $B(0)$ ist neutrales Element: $B(s) \circ B(0) \overset{1)}{=} B(s) \circ I = B(s)$.

4) $B(-s)$ ist inverses zu $B(s)$: $B(s) \circ B(-s) \overset{2)}{=} B(s-s) = B(0)$.

5.10.3 Definition (stark stetig)

Die einparametrige Gruppe $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ heißt stark stetig, wenn für jedes $f \in \mathcal{H}$ und jedes $t_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{t \to t_0} B(t)f = B(t_0)f$$

(d.h. die Abbildung $B(.)f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H},\ t \longmapsto B(t)f$ ist für jedes feste $f \in \mathcal{H}$ stetig.)

5.10.4 Definition (infinitesimaler Generator)

Sei $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine einparametrige Gruppe. Sei $\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{H} \mid \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{1}{t}(B(t) - I)f \text{ existiert}\}$ und sei

$$Af := \lim_{t \to 0, t \neq 0} \frac{1}{t}(B(t) - I)f$$

für $f \in \mathcal{D}(A)$. Dann heißt A ein infinitesimaler Generator (oder infinitesimale Erzeugende) von $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

5.10.5 Bemerkung

Man kann zeigen, daß jede stark stetige einparametrige Gruppe einen dicht definierten infinitesimalen Generator besitzt.

5.10.6 Definition (unitäre Gruppe)

Es heißt $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (einparametrige) unitäre Gruppe, wenn $\{B(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine einparametrige Gruppe ist und wenn $B(t)$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator ist.

5.10.7 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer, separabler Hilbertraum und sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator mit Spektralschar $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Für $f \in \mathcal{H}$ und $t \in \mathbb{R}$ sei

$$U(t)f := e^{itT}f := \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)f.$$

Dann ist $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige (einparametrige) unitäre Gruppe mit dem infinitesimalen Generator iT. Für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $U(t)f \in \mathcal{D}(T)$.

<u>Beweis</u>:

1) $U(t)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein unitärer Operator mit $\mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{H}$:
Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathcal{H}$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{it\lambda}|^2 \; d(E(\lambda)f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\, \|E(\lambda)f\|^2 = \|f\|^2 < \infty,$$

also ist $\mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{H}$ nach Hilfssatz 5.9.1. Bemerkung 5.9.5 liefert wegen $|e^{it\lambda}| = 1$ zusätzlich noch $\|U(t)\| \leq 1$. Nach Satz 5.9.8 ist

$$U(t)^*f = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{it\lambda}}\, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, dE(\lambda)f = U(-t)f.$$

Mit Folgerung 5.9.7 erhält man

$$U(t)^{-1}f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{it\lambda}}\, dE(\lambda)f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, dE(\lambda)f,$$

also gilt

$$U(t)^{-1} = U(t)^* = U(-t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist $U(t)U(t)^* = U(t)^*U(t) = \mathrm{Id}$, d.h. $U(t)$ ist unitär nach Satz 1.6.7.

2) $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist einparametrige Gruppe:
Es gilt

$$U(0)f = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)f = f,$$

also ist $U(0) = I$. Weiter sei $w_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ und $w_s(\lambda) = e^{is\lambda}$. Dann ist $w_t(T) = U(t),\ w_s(T) = U(s)$ und $(w_t \cdot w_s)(T) = U(t+s)$. Nach Satz 5.9.6 gilt

$$U(t)U(s) = w_t(T)w_s(T) \subset (w_t \cdot w_s)(T) = U(t+s).$$

Wegen $\mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{D}(U(s)) = \mathcal{D}(U(t+s)) = \mathcal{H}$ (nach 1)) gilt sogar „=“, d.h. es ist

$$U(t)U(s) = U(t+s)$$

für alle $t,\ s \in \mathbb{R}$. Damit ist $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine einparametrige Gruppe.

3) $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist stark stetig:

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{iy} &= e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{y}{2}} \cdot e^{-i\frac{y}{2}} - e^{i\frac{x}{2}} \cdot e^{-i\frac{x}{2}} \cdot e^{i\frac{y}{2}} \cdot e^{i\frac{y}{2}} = \\ &= e^{i\frac{x}{2}} e^{i\frac{y}{2}} \left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{-i\frac{x-y}{2}} \right) = \\ &= e^{i\frac{x}{2}} e^{i\frac{y}{2}} \cdot 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \end{aligned}$$

also gilt

$$|e^{ix} - e^{iy}| = |e^{i\frac{x}{2}}| \cdot |e^{i\frac{y}{2}}| \cdot 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| = 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|.$$

Für $f \in \mathcal{H}$ und $t, t_0 \in \mathbb{R}$ ist daher

$$\begin{aligned} \|U(t)f - U(t_0)f\|^2 &= \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{it\lambda} - e^{it_0\lambda})\, dE(\lambda)f \right\|^2 = \\ &\overset{5.9.4}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{it\lambda} - e^{it_0\lambda}\right| d(E(\lambda)f, f) = \\ &= 4 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f). \end{aligned}$$

Nun gilt $\left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 \leq 1$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lim\limits_{t \to t_0} \sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2} = 0$. Wir zeigen nun, daß für jede Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{k \to \infty} t_k = t_0$ gilt:

$$\lim_{k \to \infty} \|U(t_k)f - U(t_0)f\| = 0.$$

Sei also eine solche Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegeben und sei weiter ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zunächst ist $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)f = 0$ und $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E(\lambda)f = f$, also gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, so daß

$$(f, f) - (E(\lambda)f, f) = (f - E(\lambda)f, f) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } \lambda > b \text{ und } (E(\lambda)f, f) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } \lambda < a.$$

Die Funktion $\lambda \longmapsto (E(\lambda)f, f)$ ist monoton steigend mit den Grenzwerten 0 für $\lambda \longrightarrow -\infty$ und $\|f\|^2$ für $\lambda \longrightarrow +\infty$ (Bemerkungen 5.2.10). Schreibt man nun die Riemannschen Summen für das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f),$$

so erhält man wegen $\left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 \leq 1$ sofort für alle $t, t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f) &= \int_{-\infty}^{a} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f) + \\ &+ \int_{a}^{b} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f) + \int_{b}^{\infty} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f) < \\ &< \frac{2}{3}\varepsilon + \int_{a}^{b} \left|\sin\frac{(t-t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f, f). \end{aligned}$$

Nun kann man N so groß wählen, daß für alle $k > N$ und für alle $\lambda \in [a,b]$ gilt:

$$\left|\sin\frac{(t_k - t_0)\lambda}{2}\right|^2 \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot \|f\|^2}.$$

Damit wird dann

$$\int_a^b \left|\sin\frac{(t_k - t_0)\lambda}{2}\right|^2 d(E(\lambda)f,f) \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot\|f\|^2}\int_a^b d(E(\lambda)f,f) \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot\|f\|^2}\cdot\|f\|^2 = \frac{\varepsilon}{3}$$

für $k > N$ und insgesamt folgt $\|U(t_k)f - U(t_0)f\|^2 \leq 4\varepsilon$ für $k > N$. Also gilt $\lim\limits_{t\to t_0} U(t)f = U(t_0)f$ für alle $f \in \mathcal{H}$ und alle $t_0 \in \mathbb{R}$, d.h., $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist stark stetig.

4) iT ist infinitesimaler Generator von $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$:
Sei $Af := \lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \frac{1}{t}(U(t) - U(0))f$ der infinitesimale Generator. Zunächst gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t\to 0,t\neq 0}\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1) = \left(\frac{d}{dt}e^{it\lambda}\right)\Big|_{t=0} = i\lambda.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es t_1^*, t_2^* zwischen 0 und t, so daß

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - e^{i\cdot 0\cdot\lambda}) &= \frac{1}{t}(\cos t\lambda - \cos 0) + \frac{i}{t}(\sin t\lambda - \sin 0) = \\ &= -\lambda\sin(t_1^*\cdot\lambda) + i\lambda\cos(t_2^*\lambda).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - e^{i\cdot 0\cdot\lambda})\right| = |\lambda|\cdot\sqrt{\sin^2(t_1^*\lambda) + \cos^2(t_2^*\lambda)} \leq |\lambda|\cdot\sqrt{2}.$$

Unter Verwendung dieser Rechnungen zeigen wir nun:

a) Es gilt $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$ und $Af = iTf$ für $f \in \mathcal{D}(T)$:
Sei $f \in \mathcal{D}(T) = \left\{f \in \mathcal{H} \mid \int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\, d(E(\lambda)f,f) < \infty\right\}$. Für $t \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{t}(U(t) - U(0))f - iTf\right\|^2 &= \left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right) dE(\lambda)f\right\|^2 = \\ &\overset{5.9.4}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f).\end{aligned}$$

Wegen

$$\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 \leq \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - 1)\right|^2 + |i\lambda|^2 \leq 3\,|\lambda|^2$$

und der Existenz von $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\, d(E(\lambda)f,f)$ können nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ (wie in 2)) zunächst $a, b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, so daß für alle $t \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f) &= \int_{-\infty}^{a}\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f) + \\ &+ \int_a^b\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f) + \int_b^{\infty}\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f) \leq \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \int_a^b\left|\frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda\right|^2 d(E(\lambda)f,f).\end{aligned}$$

Wählt man nun noch t so klein, daß für alle $\lambda \in [a,b]$ die Ungleichung

$$\left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda\right|^2 \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot \parallel f \parallel^2}$$

gilt (wendet man den Mittelwertsatz wie oben an, so sieht man, daß man die Ungleichung tatsächlich gleichmäßig für alle $\lambda \in [a,b]$ bekommen kann!), so erhält man auch

$$\int_a^b \left|\frac{e^{it\lambda}-1}{t} - i\lambda\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) \leq \frac{\varepsilon}{3\cdot \|f\|^2} \int_a^b \; d(E(\lambda)f,f) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

also folgt insgesamt:

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \left\| \frac{1}{t}(U(t)-U(0))f - iTf \right\|^2 = 0,$$

d.h. $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \frac{1}{t}(U(t)-U(0))f$ existiert für $f \in \mathcal{D}(T)$ (damit ist $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(A)$ gezeigt) und ist gleich iTf.

Für den infinitesimalen Generator A fehlt noch der Nachweis von

b) $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(T)$:
Sei $f \in \mathcal{D}(A)$, d.h. es existiere $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \frac{1}{t}(U(t)-I)f$. Dann ist

$$\left\| \frac{1}{t}\Big(U(t)-U(0)\Big)f \right\|^2 \overset{5.9.4}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) < \infty$$

für t nahe 0. Wie oben gesehen, gilt

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 = |\lambda|^2 .$$

Seien nun $-\infty < a < b < \infty$. Es gilt

$$\int_a^b \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) < \infty.$$

Da $\lim\limits_{t\to 0, t\neq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)|^2 \; d(E(\lambda)f,f)$ existiert, gibt es eine feste Zahl $K > 0$, so daß für alle t nahe 0 und für alle a,b mit $-\infty < a < b < \infty$ gilt:

$$(*) \qquad \int_a^b \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) < K < \infty.$$

Es gilt $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^b |\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)|^2 - |\lambda|^2 \; d(E(\lambda)f,f) = 0$, denn mit dem Mittelwertsatz erhält man wieder: Es gibt t_1^*, t_2^* zwischen 0 und t, so daß

$$\frac{1}{t}(e^{it\lambda} - e^{i\cdot 0\cdot\lambda}) = -\lambda\sin(t_1^*\lambda) + i\lambda\cos(t_2^*\lambda).$$

Also kann man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wählen, so daß für alle $|t| < \delta$ und für alle $\lambda \in [a,b]$ simultan gilt:

$$\left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 - |\lambda|^2 < \frac{\varepsilon}{\|f\|^2}.$$

Für diese t folgt nun

$$\int_a^b \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 - |\lambda|^2 \; d(E(\lambda)f,f) < \frac{\varepsilon}{\| f \|^2} \cdot \int_a^b d(E(\lambda)f,f) \le \varepsilon$$

und somit

$$\lim_{t\to\infty} \int_a^b \left|\frac{1}{t}(e^{it\lambda}-1)\right|^2 \; d(E(\lambda)f,f) = \int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)f,f).$$

Da für alle t nahe 0 und für alle a,b mit $-\infty < a < b < \infty$ die Ungleichung (*) gilt, hat man nun für alle a,b:

$$\int_a^b \lambda^2 \, d(E(\lambda)f,f) \le K.$$

Dies gilt für alle a,b, also ergibt sich schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f,f) \le K < \infty$$

und damit $f \in \mathcal{D}(T)$.

5) Für alle $f \in \mathcal{D}(T)$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $U(t)f \in \mathcal{D}(T)$:

Wie im Beweis des Spektralsatzes 5.6.3 zeigt man, daß für selbstadjungierte Operatoren B mit Spektralschar $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und für stetiges $w := \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$E(\lambda)w(B)f = w(B)E(\lambda)f \text{ für } f \in \mathcal{D}(w(B)).$$

Setzt man $w(\lambda) := e^{it\lambda}$ und $B := T$, so ergibt dies:

$$E(\lambda)U(t)f = U(t)E(\lambda)f \text{ für } f \in \mathcal{D}(U(t)) = \mathcal{H}.$$

Weiter ist U(t) als unitärer Operator isometrisch, d.h. es gilt $\| U(t)E(\lambda)f \| = \| E(\lambda)f \|$ für alle $f \in \mathcal{D}(T)$. Damit gilt für $f \in \mathcal{D}(T)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\Big(E(\lambda)U(t)f, U(t)f\Big) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d \, \| E(\lambda)U(t)f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d \, \| U(t)E(\lambda)f \|^2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d \, \| E(\lambda)f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda)f,f) < \infty. \end{aligned}$$

Also gilt $U(t)f \in \mathcal{D}(T)$ für alle $f \in \mathcal{D}(T), t \in \mathbb{R}$.

Ohne Beweis erwähnen wir noch, daß jede stark stetige, einparametrige unitäre Gruppe von dieser Form ist:

5.10.8 Satz (M. H. Stone[1])

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum, sei $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige, einparametrige unitäre Gruppe. Dann existiert genau ein selbstadjungierter Operator T in $\mathcal{H}$, so daß $U(t) = e^{itT}$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt.

[1] Marshall Harvey Stone (1903-1989)

ohne Beweis.

Als Anwendung betrachten wir nun das folgende Problem:
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator, $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$. Wir wollen untersuchen, ob es eine stetig differenzierbare Abbildung $\mathrm{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}(\mathrm{T})$ gibt, die folgendes Anfangswertproblem löst:

$$(\mathrm{AWP}) : \quad \begin{array}{rcl} \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{u(t)} &=& \mathrm{Tu(t)} \text{ für alle } \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{u(0)} &=& \mathrm{f}. \end{array}$$

Die Beantwortung gelingt nun leicht mit Satz 5.10.7. Es gilt:

5.10.9 Satz

Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer separabler Hilbertraum, $\mathrm{T} : \mathcal{D}(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator. Dann gibt es zu jedem $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ eine eindeutige Lösung des

$$(\mathrm{AWP}) : \quad \begin{array}{rcl} \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{u(t)} &=& \mathrm{Tu(t)} \text{ für alle } \mathrm{t} \in \mathbb{R}, \\ \mathrm{u(0)} &=& \mathrm{f}. \end{array}$$

Die Lösung ist: $\mathrm{u(t)} = \mathrm{U(t)f} := e^{\mathrm{itT}}\mathrm{f}$.

Beweis:

1) Existenz:
Für $\mathrm{f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ und $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{U(t)f} \in \mathcal{D}(\mathrm{T})$ und $\mathrm{u(t)} := \mathrm{U(t)f}$ ist eine Lösung von (AWP) nach Satz 5.10.7, denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{u(t)} - \mathrm{u(t_0)}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_0}} &= \frac{\mathrm{U(t)f} - \mathrm{U(t_0)f}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_0}} = \frac{\mathrm{U(t - t_0)} \circ \mathrm{U(t_0)f} - \mathrm{U(t_0)f}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_0}} = \\ &= \left(\frac{\mathrm{U(t - t_0)} - \mathrm{I}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_0}}\right)\mathrm{U(t_0)f} = \left(\frac{\mathrm{U(t - t_0)} - \mathrm{U(0)}}{\mathrm{t} - \mathrm{t_0}}\right)\mathrm{U(t_0)f}. \end{aligned}$$

Setzt man $\mathrm{z} := \mathrm{t} - \mathrm{t_0}$, so erhält man

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{u(t)}\,|_{\mathrm{t}=\mathrm{t_0}} = \lim_{\mathrm{z}\to 0, \mathrm{z}\neq 0}\left(\frac{\mathrm{U(z)} - \mathrm{U(0)}}{\mathrm{z}}\right)\mathrm{U(t_0)f} \overset{5.10.7}{=} \mathrm{iTU(t_0)f} = \mathrm{iTu(t_0)}.$$

2) Eindeutigkeit:
Seien u,v Lösungen von (AWP). Dann ist $\mathrm{u(0)} = \mathrm{v(0)} = \mathrm{f}$, also $\mathrm{u(0)} - \mathrm{v(0)} = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\|\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\|^2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\Big) = \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)})\right) = \\ &= 2\mathrm{Re}\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{iT}\big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\big)\Big) = \\ &= -2\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{T}\big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\big)\Big). \end{aligned}$$

Da T selbstadjungiert ist, gilt

$$\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{T(u(t)} - \mathrm{v(t)}\Big) = \Big(\mathrm{T}\big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\big), \mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\Big) = \overline{\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{T}\big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\big)\Big)},$$

also $\Big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}, \mathrm{T}\big(\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\big)\Big) := \mathrm{a} \in \mathbb{R}$. Damit ist aber $-2\mathrm{Re}\,(\mathrm{ia}) = 0$, d.h. es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\,\|\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\|^2 = 0$$

und daher

$$\|\mathrm{u(t)} - \mathrm{v(t)}\|^2 = \|\mathrm{u(0)} - \mathrm{v(0)}\|^2 = 0.$$

5.10.10 Beispiel (Schrödingergleichung[1])

Wir suchen eine Lösung $u \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ des folgenden

$$(\mathrm{AWP}): \quad \begin{aligned} \frac{1}{i} \cdot \frac{d}{dt} u(t,x) + c \cdot \Delta u(t,x) &= 0, \\ u(0,x) &= f(x). \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta u(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(t,x)$ und $f \in \mathcal{D}(\Delta) = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, $\underline{c \in \mathbb{R}}$. Die Lösung u soll bezüglich t stetig differenzierbar sein.
Unser Satz 5.10.9 sagt nun aus:

$$u(t,x) = u(t)(x) = (e^{-itc\Delta} f)(x)$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung des AWP. ($c\Delta$ ist selbstadjungiert nach Satz 5.8.5.) Setzt man $c := -\frac{\hbar}{2m}$, so ist obiges (AWP) die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen der Masse m.

5.10.11 Bemerkung

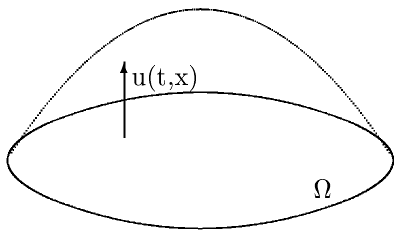
Das AWP von Beispiel 5.10.10 läßt sich, setzt man $A := c\Delta$, auch so schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} u'(t) + Au(t) &= 0, \\ u(0) &= f. \end{aligned}$$

Vergessen wir nun für den Moment, daß A ein Operator ist und lösen die Differentialgleichung wie in Analysis II, so erhalten wir als Lösung:

$$u(t) = e^{-itA} f$$

Dies ist genau die Lösung, die wir in Beispiel 5.10.10 gefunden haben, man muß nur e^{-itA} richtig auffassen! Diese Methode funktioniert aber nicht nur für eine Differentialgleichung. Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, daß sie z.B. bei der Wärmeleitungsgleichung (siehe Beginn von 5.9) oder dem Problem der schwingenden Membran genauso funktioniert: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2, u(t,x)$ bezeichne die Auslenkung der Membran an der Stelle x zur Zeit t. Am Rande $\partial\Omega$ ist die Membran fest eingespannt, d.h. es ist $u(t,x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ und alle $t \geq 0$.



Dieses Problem wird beschrieben durch

$$\frac{d^2}{dt^2} u - \Delta u = 0,$$

$$u(0,x) = u_0(x); \frac{d}{dt} u(0,x) = u_1(x).$$

Schreibt man nun A für $-\Delta$ und löst das Problem formal, so erhält man

[1] Erwin Schrödinger (1887-1961)

$$\mathrm{u(t)} = (\cos \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t})\mathrm{u}_0 + (\sin \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t})\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{u}_1.$$

Tatsächlich ist dies die Lösung, wenn man die Ausdrücke richtig interpretiert: Für die Definition von $\dfrac{\sin \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}\mathrm{f}$ zeigt man zunächst, daß $\mathrm{A} = -\Delta$ nach unten beschränkt ist: Es gibt ein $\gamma' > 0$, so daß

$$(-\Delta \mathrm{u}, \mathrm{u}) = \|\Delta \mathrm{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \geq \gamma' \cdot \|\mathrm{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} .$$

Wählt man nun ein γ mit $0 < \gamma < \gamma'$ und setzt

$$\begin{aligned} (\cos \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t})\mathrm{f} &:= \int_\gamma^\infty \cos \sqrt{\lambda}\mathrm{t}\, \mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{f} \\ \left(\frac{\sin \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{f} &:= \int_\gamma^\infty \frac{\sin \sqrt{\lambda}\mathrm{t}}{\sqrt{\lambda}}\, \mathrm{dE}(\lambda)\mathrm{f}, \end{aligned}$$

so sind diese Operatoren nach Satz 5.9.9 wohldefiniert. Für $\mathrm{u}_0 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}) = \mathrm{W}^{2,2}(\Omega) \subset \mathrm{W}_0^{1,2}(\Omega)$ und $\mathrm{u}_1 \in \mathcal{D}(\mathrm{A}^{-\frac{1}{2}})$ ergibt sich dann die Lösung:

$$\mathrm{u} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{H},\ \mathrm{u(t)} = (\cos \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t})\mathrm{u}_0 + \left(\frac{\sin \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{t}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}\right)\mathrm{u}_1,\ \mathrm{u(t,x)} = \mathrm{u(t)(x)}.$$

E&N&D&E

Anhang A

Das Lebesgue-Integral, die Räume $L^p(\Omega)$

In diesem Teil des Anhangs sollen noch einmal die Eigenschaften des Lebesgue[1]-Integrals und der L^p-Räume, die in der Funktionalanalysis ständig verwendet werden, zusammengestellt werden. Eigentlich sollte alles aus Analysis III bekannt sein – aber dort muß so viel Stoff behandelt werden, daß wohl kaum eine Vorlesung wirklich alles schafft. Deshalb werden die Sätze hier bewiesen, damit man nicht immer wieder an irgendeiner wichtigen Stelle der Vorlesung auf einen Satz zurückgreifen muß, dessen Beweis man noch nie gesehen hat. Trotzdem fehlen natürlich Sätze aus Analysis III, die im Hauptteil des Skriptes verwendet werden, z.B. der Satz von Fubini[2]-Tonelli[3] oder einige zum Integrieren nützliche Formeln. Das meiste davon findet man beispielsweise in: Otto Forster: „Analysis 3", Vieweg Braunschweig 1984. Meine Zusammenstellung folgt weitgehend der Analysis III-Vorlesung von Prof. Kerner.

A.1 Die Definition des Lebesgue-Integrals

A.1.1 Definition (Intervall im $\mathbb{R}^n$)

Seien $I^{(1)}, I^{(2)}, ..., I^{(n)} \subset \mathbb{R}$ Intervalle. $I := I^{(1)} \times ... \times I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ heißt Intervall im $\mathbb{R}^n$. Sind die $I^{(1)}, ..., I^{(n)}$ beschränkt, $I^{(j)} = [a_j, b_j]$, so setze $|I^{(j)}| = b_j - a_j$, $|I| := |I^{(1)}| \cdot ... \cdot |I^{(n)}|$. Analog für offene, halboffene Intervalle.

A.1.2 Definition (Treppenfunktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall. Eine Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es endlich viele Intervalle $I_1, I_2, ..., I_r \subset I$ und $c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ gibt mit $I_p \cap I_q = \emptyset$ für $p \neq q$ und

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_p, \; x \in I_p \\ 0, \;\; x \notin \bigcup\limits_{p=1}^{r} I_p . \end{cases} \quad T(I) := \{\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}.$$

Für $\varphi \in T(I)$ setzt man: $\int\limits_I \varphi \, dx := \sum\limits_{p=1}^{r} c_p \cdot |I_p|$.

[1] Henri Lebesgue (1875-1941)
[2] Guido Fubini (1879-1943)
[3] Leonida Tonelli (1885-1946)

A.1.3 Definition (Nullmenge)

Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von beschränkten Intervallen $I_n \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $N \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$.

A.1.4 Lemma

Die Vereinigung $N = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ abzählbar vieler Lebesgue-Nullmengen $N_n, n \in \mathbb{N}$, ist wieder eine Lebesgue-Nullmenge.

<u>Beweis</u>:
Sei $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Zu N_n existiert eine Folge von Intervallen $(I_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $N_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{n_k}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dann ist $N \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{n_k}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_{n_k}| \le \varepsilon \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon$.

A.1.5 Bemerkung

„fast überall“ bedeutet im folgenden: Überall außer in einer Lebesgue-Nullmenge.

A.1.6 Definition (Lebesgue-Integral)

Das Lebesgue-Integral wird in 3 Schritten definiert:

1) Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein Intervall. Für eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ schreibt man $f \in L^+(I)$, wenn es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n \in T(I)$, gibt mit folgenden Eigenschaften:
   a) Für alle $n \in \mathbb{N}: \ \varphi_n \le \varphi_{n+1}$,
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ fast überall,
   c) Es gibt ein $K>0$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}: \int\limits_I \varphi_n \, dx \le K$.
2) Für $f \in L^+(I)$ setzt man $\int\limits_I f\,dx := \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_I \varphi_n\,dx$. $\int\limits_I f\,dx$ heißt das Lebesgue-Integral von f.
3) Eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Lebesgue-integrierbar, wenn es $g, h \in L^+(I)$ gibt mit $f = g - h$. Man setzt dann $\int\limits_I f\,dx := \int\limits_I g\,dx - \int\limits_I h\,dx$. $\int\limits_I f\,dx$ heißt Lebesgue-Integral von f. $L(I) := \{f: \ I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}$.

(Die Wohldefiniertheit, d.h. die Unabhängigkeit von der Wahl der Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Wahl von g und h kann einfach gezeigt werden.)

A.1.7 Lemma

Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen, also $\varphi_n \in T(I)$. Es existiere ein $K>0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}: \int\limits_I \varphi_n\,dx \le K$. Dann gibt es eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^+(I)$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ fast überall.

<u>Beweis</u>:
Sei $N := \left\{x \in I \mid \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty\right\}$. Für $x \notin N$ ist dann $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Setze $f: \ I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x), & \text{falls } x \notin N \\ 0, & \text{falls } x \in N \end{cases}$. Wenn N eine Nullmenge ist, so gilt nach Definition: $f \in L^+(I)$.

N ist Nullmenge: O.E. seien alle $\varphi_n \geq 0$, sonst betrachte statt dessen $\varphi_n - \varphi_1$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $M_n(\varepsilon) := \left\{x \in I \mid \varphi_n(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}\right\}$. $M_n(\varepsilon)$ ist disjunkte Vereinigung endlich vieler beschränkter Intervalle, sei also $M_n(\varepsilon) = I_1 \cup ... \cup I_r$. Dann ist $\int\limits_{I_p} \varphi_n \, dx \geq \frac{K}{\varepsilon} \cdot |I_p|$, daher gilt:

$$\frac{K}{\varepsilon} \sum_{p=1}^{r} |I_p| \leq \sum_{p=1}^{r} \int\limits_{I_p} \varphi_n \, dx \leq \int\limits_{I} \varphi_n \, dx \leq K.$$

Für $|M_n(\varepsilon)| := |I_1| + ... + |I_r|$ ist dann $|M_n(\varepsilon)| \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ ist $M_n(\varepsilon) \subset M_{n+1}(\varepsilon)$. $M_{n+1}(\varepsilon) \backslash M_n(\varepsilon)$ ist ebenfalls Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle, also ist $M(\varepsilon) := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n(\varepsilon)$ Vereinigung abzählbar vieler disjunkter beschränkter Intervalle J_k, d.h. $M(\varepsilon) = M_1(\varepsilon) \cup (M_2(\varepsilon) \backslash M_1(\varepsilon)) \cup (M_3(\varepsilon) \backslash M_2(\varepsilon)) ... = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$. Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $J_1 \cup ... \cup J_m \subset M_n(\varepsilon)$. Daher ist $\sum\limits_{k=1}^{m} |J_k| \leq |M_n(\varepsilon)| \leq \varepsilon$ und damit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \varepsilon$. Für $x \notin M(\varepsilon)$ gilt also $\varphi_n(x) \leq \frac{K}{\varepsilon}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $x \notin N$. Also ist $N \subset M(\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} J_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |J_k| \leq \varepsilon$, d.h. N ist eine Nullmenge.

A.1.8 Hilfssatz

Zu $f \in L(I)$ und $\varepsilon > 0$ existieren $g, h \in L^+(I)$ mit $f = g - h$, $h \geq 0$, $\int\limits_I h \, dx < \varepsilon$.

<u>Beweis</u>:
Zu f gibt es $g_1, h_1 \in L^+(I)$ mit $f = g_1 - h_1$. Zu h_1 gibt es eine monoton wachsende Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen, die fast überall gegen h_1 konvergieren mit $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_I \psi_n \, dx = \int\limits_I h_1 \, dx$. Wähle ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $\int\limits_I h_1 \, dx - \int\limits_I \psi_m \, dx = \int\limits_I (h_1 - \psi_m) \, dx < \varepsilon$. Setze $h_2 := h_1 - \psi_m$, dann ist $\int\limits_I h_2 \, dx < \varepsilon$ und $h_2 \geq 0$ fast überall: Es gibt eine Nullmenge N, so daß für $x \in I \backslash N$: $\psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x)$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \psi_n(x) = h_1(x)$. Deshalb gilt fast überall: $\psi_n \leq h_1 \iff h_1 - \psi_n \geq 0$, also fast überall $h_2 \geq 0$. Setzt man nun $h(x) := h_2^+(x) = \max(h_2(x), 0)$, dann ist $h \geq 0$ überall und $h = h_2$ fast überall, daher $\int\limits_I h \, dx = \int\limits_I h_2 \, dx < \varepsilon$. Mit $g_2 := g_1 - \psi_m$ ist dann $f = g_1 - h_1 = (g_1 - \psi_m) - (h_1 - \psi_m) = g_2 - h_2$. Setzt man noch $g := g_2 + (h - h_2)$, so ist $g = g_2$ fast überall, also $g \in L^+(I)$ und $f = g_2 - h_2 = g_2 + (h - h_2) - h = g - h$.

A.2 Konvergenzsätze

A.2.1 Satz (Dini[1])

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, seien $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ und $f_\nu : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen mit $f_1 \leq ... \leq f_\nu \leq f_{\nu+1} \leq ...$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu(x) = f(x)$ für alle $x \in K$. Dann konvergiert die Folge $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f.

<u>Beweis</u>:
Setzt man $g_\nu := f - f_\nu$, so gilt $g_\nu \geq g_{\nu+1} \geq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{\nu \to \infty} g_\nu(x) = 0$ für alle $x \in K$. Sei jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem $x \in K$ existiert dann ein $N(x)$, so daß für alle $\nu \geq N(x)$ gilt: $g_\nu(x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Da die Funktion $g_{N(x)}$ im Punkt x stetig ist, gibt es ein $\delta(x) > 0$, so daß für alle $\xi \in K$ mit $\|\xi - x\| < \delta(x)$ gilt: $|g_{N(x)}(\xi) - g_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Daraus folgt für $\nu \geq N(x)$ und $\|\xi - x\| < \delta(x)$: $g_\nu(\xi) < \varepsilon$. Setzt man für $x \in K$: $U_x := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \|\xi - x\| < \delta(x)\}$, so wird K von den Kugeln U_x, $x \in K$

[1] Ulisses Dini (1845-1919)

überdeckt. Da K kompakt ist, genügen bereits endlich viele der Kugeln U_x, um K zu überdecken, sei etwa $K \subset U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_k}$. Setzt man $N := \max(N(x_1), ..., N(x_k))$, so gilt für $\nu \geq N$ und alle $\xi \in K: \ g_\nu(\xi) < \varepsilon$. Das bedeutet aber: Für alle $\xi \in K$ und alle $\nu \geq N$ ist $|f(\xi) - f_\nu(\xi)| < \varepsilon$, d.h. man hat die gleichmäßige Konvergenz.

A.2.2 Satz (Beppo Levi[1])

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_n \in L(I)$, $f_n \leq f_{n+1}$. Es existiere ein K>0, so daß für alle $n \in \mathbb{N}: |\int_I f_n\,dx| \leq K$. Dann gibt es ein $f \in L(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ fast überall und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx = \int_I f\,dx$.

<u>Beweis</u>:
Der Beweis erfolgt in 3 Schritten:

1) Für $f_n \in T(I)$ ist die Behauptung gerade Lemma A.1.7

2) Seien $f_n \in L^+(I)$ für alle n.
Dann gibt es $\varphi_{n_k} \in T(I)$ mit $\varphi_{n_k} \leq \varphi_{n_{k+1}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k} = f_n$ fast überall, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_I \varphi_{n_k}\,dx = \int_I f_n\,dx$. Setze $\varphi_n(x) := \max\{\varphi_{i_j}(x), 1 \leq i,j \leq n\}$, dann ist $\varphi_n \in T(I)$ und $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$. Weiter gilt für $j \leq n, k \in \mathbb{N}: \ \varphi_{j_k} \leq f_j \leq f_n$ fast überall, also ist $\varphi_n \leq f_n$ fast überall und $\int_I \varphi_n\,dx \leq \int_I f_n\,dx \leq K$. Die φ_n bilden demnach eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen mit beschränkter Integralfolge, nach 1) gibt es folglich ein $f \in L^+(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ fast überall und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\,dx = \int_I f\,dx$. Für j≤n ist $\varphi_{j_n} \leq \varphi_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{j_n} = f_j$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$, also $f_j \leq f$ fast überall. D.h. es gibt eine Nullmenge $N_j \subset I: \ f_j(x) \leq f(x)$ für $x \in I\backslash N_j$. Definiert man N durch $N := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} N_j$, so ist N eine Nullmenge und für alle $x \in I\backslash N$, alle $j \in \mathbb{N}$ gilt: $f_j(x) \leq f(x)$. Man hat also $\varphi_n \leq f_n \leq f$ fast überall, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$ fast überall und damit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ fast überall. Genauso folgt aus $\int_I \varphi_n\,dx \leq \int_I f_n\,dx \leq \int_I f\,dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I \varphi_n\,dx = \int_I f\,dx: \lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx = \int_I f\,dx$.

3) $f_n \in L(I)$:
O.E. seien alle $f_n \geq 0$, sonst betrachte $f_n - f_1$. Mit $f_0 = 0$ ist $f_m = \sum\limits_{n=1}^{m} (f_n - f_{n-1})$, $f_n - f_{n-1} \in L(I)$. Nach Hilfssatz A.1.8 gibt es nun $g_n, h_n \in L^+(I)$ mit $f_n - f_{n-1} = g_n - h_n$, $h_n \geq 0$, $\int_I h_n\,dx < \frac{1}{2^n}$. Dann ist $g_n = (f_n - f_{n-1}) + h_n \geq 0$. Setze jetzt $s_m := \sum\limits_{n=1}^{m} g_n$, $t_m := \sum\limits_{n=1}^{m} h_n$. Es gilt nun $s_m, t_m \in L^+(I)$, $s_m, t_m \geq 0$, $\int_I t_m\,dx = \sum\limits_{n=1}^{m} \int_I h_n\,dx \leq \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \leq 1$. Die Folge $\left(\int_I t_n\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt und wegen $\int_I s_n\,dx = \int_I f_n\,dx + \int_I t_n\,dx$ ist auch $\left(\int_I s_n\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Demnach sind $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen in $L^+(I)$ mit beschränkter Integralfolge, nach 2) gibt es also $s, t \in L^+(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$ fast überall und $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I s_n\,dx = \int_I s\,dx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I t_n\,dx = \int_I t\,dx$. Setze $f := s - t$. Dann ist $f \in L(I)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n - \lim\limits_{n\to\infty} t_n = s - t = f$ fast überall und

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \int_I s_n\,dx - \lim_{n\to\infty} \int_I t_n\,dx = \int_I s\,dx - \int_I t\,dx =$$

[1] Beppo Levi (1875-1961)

$$= \int_I (s-t)\,dx = \int_I f\,dx.$$

A.2.3 Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue[1])

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in L(I)$, konvergiere fast überall gegen eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$. Es existiere ein $g \in L(I)$ mit $|f_n| < g$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in L(I)$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx = \int_I f\,dx$.

<u>Beweis</u>:

1) Übergang zu monotonen Folgen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
   Nach Voraussetzung gibt es eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset I$, so daß für $x \in I\backslash N$ gilt:
   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$
   Also ist für $x \in I\backslash N$ die Menge $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Definiere nun
   $$g_n(x) := \inf\Big(f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), ...\Big) \text{ für } x \in I\backslash N,\ g_n(x) = 0 \text{ sonst.}$$
   Weiter setze
   $$h_n(x) := \sup\Big(f_n(x), f_{n+1}(x), f_{n+2}(x), ...\Big) \text{ für } x \in I\backslash N,\ h_n(x) = 0 \text{ für } x \in N.$$
   Dann ist $g_n \le g_{n+1}$ und $h_n \ge h_{n+1}$. Und für $x \in I\backslash N$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$; $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$, denn zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß für $n > N(\varepsilon)$: $f(x) - \varepsilon \le f_n(x) \le f(x) + \varepsilon$ und daher $f(x) - \varepsilon \le g_n(x) \le f(x) + \varepsilon$, analog für h_n.

2) $g_n, h_n \in L(I)$:
   Für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ sei $\mu_{n,k}(x) := \min\Big(f_n(x), f_{n+1}(x), ..., f_{n+k}(x)\Big)$. Dann ist $\mu_{n,k} \in L(I)$ und es gilt $\mu_{n,k} \ge \mu_{n,k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n,k} = g_n$. Nach Voraussetzung ist $-g \le f_n \le g$, daher auch $-g \le \mu_{n,k} \le g$, also hat man $-\int_I g\,dx \le \int_I \mu_{n,k}\,dx \le \int_I g\,dx$. Demnach ist die Folge $\left(\int_I \mu_{n,k}\,dx\right)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Nun kann man den Satz von Beppo Levi A.2.2 anwenden und erhält: $g_n \in L(I)$. $h_n \in L(I)$ zeigt man analog.

3) g_n, h_n haben beschränkte Integralfolge:
   Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$: $g_1 \le g_n \le h_n \le h_1$, also auch $\int_I g_1\,dx \le \int_I g_n\,dx \le \int_I h_n\,dx \le \int_I h_1\,dx$.
   Mit dem Satz von Beppo Levi A.2.2 folgt $f \in L(I)$ und $\int_I f\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I g_n\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I h_n\,dx$.
   Weil $g_n \le f_n \le h_n$ fast überall gilt, ist auch $\int_I g_n\,dx \le \int_I f\,dx \le \int_I h_n\,dx$. Damit bekommt man $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx = \int_I f\,dx$.

Man kann auch f majorisieren:

[1] Henri Lebesgue (1875-1941)

A.2.4 Satz (Lebesgue)

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in L(I)$ konvergiere fast überall gegen eine Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, es existiere ein $g \in L(I)$ mit $|f| \leq g$. Dann ist $f \in L(I)$.

Beweis:
Definiere $\tilde{f}_n : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} -g(x), & \text{falls } f_n(x) < -g(x) \\ f_n(x), & \text{falls } -g(x) \leq f_n(x) \leq g(x) \\ g(x), & \text{falls } g(x) < f_n(x) \end{cases}$. Dann gilt $|\tilde{f}_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast überall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n = f$. Aus A.2.3 folgt: $f \in L(I)$.

A.2.5 Lemma von Fatou[1]

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_n \in L(I)$ und $f_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge konvergiere fast überall gegen ein $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ und es existiere ein $K > 0$ mit $\int_I f_n\,dx \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in L(I)$ und $\int_I f\,dx \leq K$.

Beweis:
Seien $g_n, \mu_{n,k}$ wie im Beweis von A.2.3. Dann ist $0 \leq \mu_{n,k} \leq f_n$ und daher auch

$$0 \leq \int_I \mu_{n,k}\,dx \leq \int_I f_n\,dx \leq K,$$

also bilden die $(\mu_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit beschränkter Integralfolge. Da $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_{n,k} = g_n$ folgt nach Beppo Levi A.2.2: $g_n \in L(I)$. Weiter gilt natürlich auch $0 \leq \int_I g_n\,dx \leq \int_I f_n\,dx \leq K$, also bilden auch die $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Folge mit beschränkter Integralfolge und es ist $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$. Also ist – wieder nach Beppo Levi A.2.2 – auch $f \in L(I)$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I g_n\,dx = \int_I f\,dx$, d.h. $0 \leq \int_I f\,dx \leq K$.
Über $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n\,dx$ weiß man nichts.

A.2.6 Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$, $a \in U$ und $f : \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $t \longmapsto f(x,t)$ stetig im Punkt a.
2) Für jedes feste $t \in U$ ist die Funktion $x \longmapsto f(x,t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.
3) Es gibt eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $F \in L(\mathbb{R}^n)$, so daß für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times U$ gilt: $|f(x,t)| \leq F(x)$.

Dann ist die Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{R},\ g(t) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dx$ im Punkt a stetig.

Beweis:
Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $t_k \in U$ eine Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = a$. Setze $f_k(x) := f(x,t_k)$ und $f_*(x) := f(x,a)$. Nach Bedingung 1) gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f_*(x)$. Wegen Bedingung 2) und 3) sind die Voraussetzungen des Satzes von der majorisierten Konvergenz A.2.3 erfüllt. Es gilt deshalb:

$$\lim_{k\to\infty} g(t_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_*(x)\,dx = g(a).$$

[1] Pierre Fatou (1878-1929)

A.2.7 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $t \longmapsto f(x,t)$ differenzierbar auf I.

2) Für jedes feste $t \in I$ ist die Funktion $x \longmapsto f(x,t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar.

3) Es gibt eine integrierbare Funktion $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mit $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq F(x)$ für alle $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I$.

Dann ist die durch $g: I \longrightarrow \mathbb{R},\ g(t) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dx$ definierte Funktion differenzierbar. Für jedes $t \in I$ ist die Funktion $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ über $\mathbb{R}^n$ integrierbar und es gilt $g'(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

Beweis:
Sei $t \in I$ und $h \neq 0$ eine reelle Zahl derart, daß $t + h \in I$. Setze

$$f_h(x) := \frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h}.$$

Dann ist $\lim\limits_{h \to 0} f_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es außerdem ein $\vartheta = \vartheta(x,h) \in [0,1]$ mit

$$f_h(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \vartheta h).$$

Deshalb gilt nach 3): $|f_h(x)| \leq F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Nun folgt aus dem Satz der majorisierten Konvergenz A.2.3: $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ ist integrierbar und es gilt

$$g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_h(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt.$$

A.3 Meßbarkeit

A.3.1 Definition (meßbare Funktion)

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Intervall. Eine Funktion f: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt meßbar, wenn es eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, die fast überall gegen f konvergiert. $M(I) := \{f: I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ meßbar}\}$. Es gilt natürlich: $L(I) \subset M(I)$.

A.3.2 Bemerkung

Sei $f \in M(I),\ g \in L(I)$ und $|f| \leq g$. Dann ist $f \in L(I)$.

Beweis:
Sei $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T(I)$ eine Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n = f$ fast überall. Wegen $|f| \leq g$ folgt nach dem Satz von Lebesgue A.2.3: $f \in L(I)$.

A.3.3 Satz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit $f_n \in M(I)$, die fast überall gegen ein $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $f \in M(I)$.

Beweis:
Wähle ein $g \in L(I)$ mit $g > 0$. Setze $h_n := \dfrac{g \cdot f_n}{g + |f_n|}$ und $h := \dfrac{g \cdot f}{g + |f|}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$ fast überall. Weiter ist

$$|h_n| = \left|\frac{f_n}{g + |f_n|}\right| \cdot |g| \leq \left|\frac{f_n}{|f_n|}\right| \cdot |g| \leq |g|,$$

also gilt nach A.3.2: $h_n \in L(I)$. Wegen $h_n \in L(I)$ und $|h_n| \leq g$ folgt nach dem Satz von Lebesgue A.2.3: $h \in L(I)$. Da $|f| \cdot h = f \cdot |h|$, ist $f = \dfrac{gh}{g - |h|}$. (Es ist $|h| = |g| \cdot \left|\dfrac{f}{g + |f|}\right| < |g|$.) Nun sind aber g, h, $|h| \in M(I)$ und damit sind auch gh, $g - |h| \in M(I)$ und schließlich sind Quotienten meßbarer Funktionen wieder meßbar, wenn der Nenner nicht 0 wird. Also ist $f \in M(I)$.

A.3.4 Satz

Sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Intervall. Dann ist jede stetige Funktion $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar.

Beweis:
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Intervallen mit $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Setze $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in I_n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, die f_n sind auf I_n Riemann-integrierbar, also gilt $f_n \in L(I) \subset M(I)$. Nach A.3.3 ist dann auch $f \in L(I)$.

A.3.5 Hilfssatz

Sei $f \in M(I)$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $g \circ f \in M(I)$.

Beweis:
Seien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = f$. Dann sind auch die $g \circ \varphi_n$ Treppenfunktionen und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} g \circ \varphi_n = g \circ f$.

A.3.6 Folgerung

Sei $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Wenn $f \in M(I)$, dann ist auch $|f|^p \in M(I)$.

Beweis:
Wende Hilfssatz A.3.5 mit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^p$ an.

A.3.7 Definition (charakteristische Funktion, meßbare Menge)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge.

1) Die Funktion $\chi_\Omega : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1, & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \end{cases}$ heißt charakteristische Funktion der Menge Ω.

2) Ω heißt meßbar, wenn die Funktion χ_Ω meßbar ist.

A.4 Definition der L^p–Räume

A.4.1 Lemma

Seien $a, b \geq 0$, $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt: $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Beweis:
Zunächst gilt für $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff p + q = pq \iff (q-1)(p-1) = 1 \iff q = p \cdot (q-1) \iff p = q \cdot (p-1)$. Für $b = a^{p-1}$ ist $a \cdot b = a^p$ und $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{(a^{p-1})^q}{q} = a^p \cdot (\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}) = a^p$, d.h. in der Behauptung gilt das Gleichheitszeichen. Sei nun $a \geq 0$ fest. Wir bestimmen das Minimum der Funktion $b \longmapsto \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$ für $b \geq 0$: $\frac{d}{db}(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab) = b^{q-1} - a$. Die Ableitung verschwindet also genau für $b^{q-1} = a \iff (b^{q-1})^{p-1} = a^{p-1} \iff b = a^{p-1}$. Die Ableitung wechselt ihr Vorzeichen von $-$ nach $+$, also hat sie dort ihr absolutes Minimum. Der Funktionswert an der Stelle ist 0, also gilt: $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab \geq 0$.

A.4.2 Definition

Für $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$ sei $\mathcal{L}^p(I) := \{f \in M(I) \mid |f|^p \in L(I)\}$, $\mathcal{L}^\infty(I) := \{f \in M(I) \mid$ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x)| \leq c$ fast überall$\}$.

A.4.3 Lemma

$\mathcal{L}^p(I)$ ist ein reeller Vektorraum.

Beweis:
Mit $f \in \mathcal{L}^p(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist natürlich auch $\lambda f \in \mathcal{L}^p(I)$. Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$. Die Funktion f+g ist meßbar und es gilt: $|f+g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \sup(|f|, |g|))^p = 2^p \cdot \sup(|f|^p, |g|^p)$. Nach Voraussetzung sind $|f|^p, |g|^p \in L(I)$, also ist auch $2^p \cdot \sup(|f|^p, |g|^p) \in L(I)$. Da $|f+g|$ meßbar ist, gilt nach Bemerkung A.3.2: $|f+g|^p \in L(I)$.

A.4.4 Definition der Norm

Für $f \in \mathcal{L}^p(I)$ sei $\|f\|_p := \left(\int\limits_I |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ und $\|f\|_\infty := \inf\{c \in \mathbb{R} \big| \ |f(x)| < c$ fast überall$\}$.
Achtung: $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ fast überall. Es wird dadurch also <u>keine</u> Norm auf $\mathcal{L}^p(I)$ gegeben.

A.4.5 Satz (Höldersche[1] Ungleichung)

Seien p, $q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p=1, $q = \infty$ ist also zugelassen). Sei $f \in \mathcal{L}^p(I)$, $g \in \mathcal{L}^q(I)$. Dann gilt: $f \cdot g \in L(I)$ und $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Beweis:
Für $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$ ist die Ungleichung trivial. Sei also $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Wegen Lemma A.4.1 gilt fast überall

$$(*) \qquad \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

Nach Voraussetzung ist die Funktion rechts Lebesgue-integrierbar und die links meßbar. Nach Bemerkung A.3.2 ist also die linke Funktion Lebesgue-integrierbar. Weiter gilt $f \cdot g \leq |f \cdot g|$, wobei $f \cdot g$

[1] Otto Hölder (1859-1937)

meßbar ist und $|f \cdot g|$ wie eben festgestellt Lebesgue-integrierbar. Also ist – wieder nach Bemerkung A.3.2 – auch $f \cdot g$ Lebesgue-integrierbar. Durch Integration von (*) erhält man jetzt:

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_I |fg| \; dx \le \frac{1}{p} \cdot \frac{\int_I |f|^p \; dx}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{\int_I |g|^q \; dx}{\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

A.4.6 Satz (Minkowskische[2] Ungleichung)

Sei $p \ge 1,\; f, g \in \mathcal{L}^p(I)$. Dann gilt: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$.

Beweis:
Für $p = 1$ hat man $\|f+g\|_1 = \int_I |f+g| \; dx \le \int_I (|f| + |g|)\, dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$.
Sei nun $p > 1$. Dann ist $|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\, (|f+g|) \le |f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|$ und all diese Funktionen sind meßbar. Sei q>1 mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weil (siehe Lemma A.4.1) $(p-1)q = p$, gilt: $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(I)$, denn $|f+g|^{(p-1)\cdot q} = |f+g|^p$, und das ist ja nach Voraussetzung Lebesgue-integrierbar. Daher kann man die Höldersche Ungleichung A.4.5 in dieser Zeile anwenden und erhält:

$$\begin{aligned} \int_I |f+g|^p \; dx \quad &= \quad \| |f+g|^p \|_1 \le \| |f+g|^{p-1} \cdot |f| \|_1 + \| |f+g|^{p-1} \cdot |g| \|_1 \le \\ &\overset{A.4.5}{\le} \quad \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \| |f| \|_p + \| |f+g|^{p-1} \|_q \cdot \| |g| \|_p = \\ &= \quad \left(\int_I |f+g|^p \; dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left[\left(\int_I |f|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

Ist $|f+g| = 0$ fast überall, so ist die Behauptung klar. Sonst dividiere durch $\left(\int_I |f+g|^p \; dx \right)^{\frac{1}{q}}$ und es ergibt sich:

$$\left(\int_I |f+g|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_I |f|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_I |g|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

also die behauptete Ungleichung.

A.4.7 Definition der Räume $L^p(I)$

Für $p \ge 1$ oder $p = \infty$ sei $N := \{f \in \mathcal{L}^p(I) \mid f = 0 \text{ fast überall}\}$. Dann sei $L^p(I)$ der Quotientenraum: $L^p(I) := \mathcal{L}^p(I)/N$. Wenn $f = g$ fast überall, dann gilt $\int_I |f|^p \; dx = \int_I |g|^p \; dx$. Deswegen ist $\|\,.\,\|_p$ auch auf $L^p(I)$ erklärt. Im folgenden wird zwischen der Funktion $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ und der Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(I)$ nicht mehr unterschieden.

A.4.8 Satz

Für $p \ge 1$ oder $p = \infty$ ist der Vektorraum $(L^p(I), \|\,.\,\|_p)$ ein reeller normierter Raum.

Beweis:
Die ersten beiden Axiome der Norm sind klar, die Dreiecksungleichung ist gerade die Minkowskische Ungleichung A.4.6.

[2]Hermann Minkowski (1864-1909)

A.4.9 Hilfssatz

Sei $p \geq 1$, seien $g_n \in L^p(I)$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \| g_n \|_p$ in $\mathbb{R}$, so gibt es eine Funktion $s \in L^p(I)$, gegen die die Reihe punktweise fast überall konvergiert und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \left\| s - \sum\limits_{n=1}^{k} g_n \right\|_p = 0$

Beweis:

1) punktweise Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$:

   Setze $\sigma := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_p$ und $h_n := \sum\limits_{i=1}^{n} |g_i|$. Dann ist $h_n \in L^p(I)$ und $0 \leq h_n \leq h_{n+1}$. Also ist auch $h_n^p = |h_n|^p \in L(I)$ und $0 \leq h_n^p \leq h_{n+1}^p$. Wegen $\|h_n\|_p \leq \sigma$ ist $\|h_n^p\|_1 \leq \sigma^p$, d.h. $\int\limits_I h_n^p dx \leq \sigma^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Beppo Levi A.2.2 gibt es also ein $u \in L(I), u \geq 0$, so daß fast überall gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} h_n^p = u$. Setzt man jetzt $v := u^{\frac{1}{p}}$, so gilt fast überall $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = v$. Da $h_n \in M(I)$, ist auch $v \in M(I)$ und wegen $|v|^p = v^p = u \in L(I)$ ist $v \in L^p(I)$. Es gibt also eine Nullmenge $N \subset I$ und ein $v \in L^p(I)$, so daß für alle $x \in I\backslash N$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| = v(x).$$

2) Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$:

   Für $x \in I\backslash N$ konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ absolut, d.h. $s(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ existiert für $x \in I\backslash N$. Mit $s(x) := 0$ für $x \in N$ erhält man eine Funktion $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $|s| \leq v$. Wegen $g_n \in L^p(I) \subset M(I)$ ist $s \in M(I)$, also auch $|s|^p \in M(I)$. Da $|s|^p \leq v^p = u \in L(I)$, gilt nach Satz A.3.2: $|s|^p \in L(I)$, also $s \in L^p(I)$.

   Setze jetzt $s_n := \sum\limits_{i=1}^{n} g_i$, dann ist $s_n - s \in L^p(I)$, d.h. man hat $|s_n - s|^p \in L(I)$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |s_n(x) - s(x)|^p = 0$ fast überall. Es ist $|s_n - s| \leq |s_n| + |s| \leq |h_n| + v \leq 2v$, also gilt $|s_n - s|^p \leq 2^p \cdot v^p = 2^p \cdot u$. Nun kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz A.2.3 anwenden und es ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_I |s_n - s|^p \, dx = \int\limits_I \lim_{n\to\infty} |s_n - s|^p \, dx = \int\limits_I 0 \, dx = 0,$$

   folglich hat man $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - s\|_p^p = 0$, d.h. auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|s_n - s\|_p = 0$. Also konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ gegen s in $L^p(I)$.

A.4.10 Satz (Fischer[1]-Riesz[2])

Sei $p \geq 1$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(I)$. Dann gilt:

1) Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ fast überall.

2) Es gilt $f \in L^p(I)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

[1]Ernst Fischer (1875-1956)
[2]Friedrich Riesz (1880-1956)

Beweis:
Nach Definition der Cauchy-Folge gibt es eine Indexfolge $n_0 < n_1 < n_2 < ...$, so daß $\| f_{n_k} - f_{n_{k+1}} \| \leq \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Auf die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ kann jetzt der obige Hilfssatz A.4.9 angewendet werden. Im Beweis wurde die Existenz einer Funktion $f \in L^p(I)$ bewiesen mit $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$ fast überall und $\lim\limits_{k\to\infty} \| f_{n_k} - f \|_p = 0$. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(I)$ ist, folgt daraus auch $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0$.

A.4.11 Folgerung

Der normierte Raum $(L^p(I), \| \,.\, \|_p)$ ist vollständig für alle $p \geq 1$ und $p = \infty$, d.h. $L^p(I)$ ist ein Banachraum.

Beweis:
Die Konvergenz einer Cauchy-Folge in $L^p(I)$ für $p \geq 1$ wurde im Satz von Fischer-Riesz A.4.10 bewiesen.
$p = \infty$ ist klar: Die Konvergenz im Sinne von $\| \,.\, \|_\infty$ ist nämlich die übliche gleichmäßige Konvergenz und der Limes einer Cauchy-Folge beschränkter, meßbarer Funktionen ist beschränkt und meßbar.

A.4.12 Satz

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar. Dann ist für $1 \leq p \leq \infty$ der normierte Raum $L^p(E)$ vollständig.

Beweis:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(E)$. Setze

$$f_n^*(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Dann sind die $f_n^*(x)$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\mathbb{R}^n)$, konvergieren also in der L^p-Norm gegen ein f^*. Darüberhinaus gibt es nach dem Satz von Fischer-Riesz A.4.10 eine Teilfolge $(f_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen f^* konvergiert. Es gibt also eine Nullmenge N, so daß $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash N : \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}^*(x) = f^*(x)$. Demnach gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash E \backslash N : f^*(x) = 0$. Setzt man also $f : E \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = f^*(x)$, so ist $f \in L^p(E)$ und es gilt $f_n \longrightarrow f$ in $L^p(E)$.

A.4.13 Satz

1) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und beschränkt, seien $p, q \geq 1$ mit $p \leq q$, sei $f \in L^q(E)$. Dann ist $f \in L^p(E)$ und es gilt:
$$|E|^{-\frac{1}{p}} \cdot \| f \|_p \leq |E|^{-\frac{1}{q}} \cdot \| f \|_q$$
Also für $p \leq q$ ist $L^q(E) \subset L^p(E)$. Die Einbettung ist stetig.

2) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, seien $r, p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Seien $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$. Dann ist $f \cdot g \in L^r(E)$ und es gilt
$$\| f \cdot g \|_r \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q$$

3) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, seien $r, p, q \geq 1$ mit $p \leq q \leq r$. Sei $f \in L^p(E) \cap L^r(E)$. Dann ist $f \in L^q(E)$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$, so ist $\lambda \in [0, 1]$ und $\| f \|_q \leq \| f \|_p^\lambda \cdot \| f \|_r^{1-\lambda}$

Beweis:

1) Für $p = q$ ist die Aussage trivial, sei also $p < q$. Wegen $f \in L^q(E)$ ist $|f|^p \in L^{\frac{q}{p}}(E)$. Setze $\widetilde{q} := \frac{q}{p} > 1$. Der konjugierte Exponent zu $\widetilde{q}$ ist:

$$1 = \frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} \Longrightarrow \frac{1}{\widetilde{p}} = 1 - \frac{1}{\widetilde{q}} = \frac{\widetilde{q}-1}{\widetilde{q}} \Longrightarrow \widetilde{p} = \frac{\widetilde{q}}{\widetilde{q}-1} = \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}-1} = \frac{q}{q-p}.$$

Da E meßbar und beschränkt ist, ist die Funktion $\chi_E(x)$ integrierbar, also ist $\chi_E(x) \in L^{\frac{q}{q-p}}(E)$. Nach der Hölderschen Ungleichung A.4.5 ist $|f|^p = |f|^p \cdot \chi_E(x) \in L^1(E)$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \| |f|^p \cdot \chi_E \|_1 &\leq \| |f|^p \|_{\frac{q}{p}} \cdot \| \chi_E \|_{\frac{q}{q-p}} = \\ &= \left(\int_E |f|^{p \cdot \frac{q}{p}} \, dx \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\int_E \chi_E(x)^{\frac{q}{q-p}} \, dx \right)^{\frac{q-p}{q}} = \\ &= \|f\|_q^p \cdot |E|^{1-\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

Es ist $\left\| \, |f|^p \cdot \chi_E(x) \right\|_1 = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p} \cdot p} = \|f\|_p^p$, also ergibt sich insgesamt:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Longleftrightarrow |E|^{-\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_p \leq |E|^{-\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q \, .$$

Die Inklusion $i : L^q(E) \hookrightarrow L^p(E)$ ist stetig, d.h. sind $f_n, f \in L^q(E)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_q = 0$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, denn es ist ja $\|f_n - f\|_p \leq |E|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot \|f_n - f\|_q$.

2) Es ist $\frac{1}{p} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, also $p > r$ und entsprechend $q > r$. Wegen $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$ hat man $|f|^r \in L^{\frac{p}{r}}(E)$, $|g|^r \in L^{\frac{q}{r}}(E)$. Es ist

$$\frac{1}{\frac{p}{r}} + \frac{1}{\frac{q}{r}} = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = r \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = r \cdot \frac{1}{r} = 1.$$

Deshalb kann man die Höldersche Ungleichung A.4.5 auf $|f|^r$ und $|g|^r$ anwenden und erhält: $|f|^r \cdot |g|^r \in L^1(E)$, d.h. $f \cdot g \in L^r(E)$ und $\left\| \, |f|^r \cdot |g|^r \, \right\|_1 \leq \left\| \, |f|^r \, \right\|_{\frac{p}{r}} \cdot \left\| \, |g|^r \, \right\|_{\frac{q}{r}}$. Wegen $\left\| \, |f|^r \cdot |g|^r \, \right\| = \int_E |f(x)|^r \cdot |g(x)|^r \, dx = \|f \cdot g\|_r^r$ und

$$\left\| \, |f|^r \, \right\|_{\frac{p}{r}} \cdot \left\| \, |g|^r \, \right\|_{\frac{q}{r}} = \left(\int_E |f|^{r \cdot \frac{p}{r}} \, dx \right)^{\frac{r}{p}} \cdot \left(\int_E |g|^{r \cdot \frac{q}{r}} \, dx \right)^{\frac{r}{q}} = \|f\|_p^r \cdot \|g\|_q^r$$

folgt schließlich:

$$\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

3) Existenz eines $\lambda \in [0,1]$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$: Es ist $\frac{1}{q} \in [\frac{1}{r}, \frac{1}{p}]$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$, so setze $f(\lambda) := \lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b$. Dann gilt: $f([0,1]) = [a,b]$: f ist stetig und $f(0) = b, f(1) = a$, also wird nach dem Zwischenwertsatz jeder Wert in [a,b] angenommen. Wegen $\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b \leq \lambda \cdot b + (1-\lambda) \cdot b = b$ und $\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b \geq \lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot a = a$ ist auch $f([0,1]) \subset [a,b]$, also insgesamt $f([0,1]) = [a,b]$. Es gibt also ein λ wie im Satz.

Es ist $|f|^q = |f|^{\lambda \cdot q} \cdot |f|^{(1-\lambda) \cdot q}$, $|f|^{\lambda q} \in L^{\frac{p}{\lambda q}}(E)$, $|f|^{(1-\lambda) q} \in L^{\frac{r}{(1-\lambda) q}}(E)$. Wegen $\frac{\lambda q}{r} + \frac{(1-\lambda) q}{r} = q \cdot \frac{1}{q} = 1$ ist $|f|^q = |f|^{\lambda q} \cdot |f|^{(1-\lambda) q} \in L^1(E)$ (nach der Hölderschen Ungleichung A.4.5), also $f \in L^q(E)$. Nach A.4.5 gilt weiter

$$\|f\|_q^q = \left\| \, |f|^q \, \right\|_1 \leq \left\| \, |f|^{\lambda q} \, \right\|_{\frac{p}{\lambda q}} \cdot \left\| \, |f|^{(1-\lambda) q} \, \right\|_{\frac{r}{(1-\lambda) q}} \leq \|f\|_p^{\lambda q} \cdot \|f\|_r^{(1-\lambda) q},$$

also erhält man die Ungleichung aus dem Satz.

A.5 Approximation

In diesem Abschnitt soll bewiesen werden, daß $C_0^\infty(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ dicht liegt, falls $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Obwohl man zu $f \in L^p(\Omega)$ eine Folge von C_0^∞-Funktionen angeben kann, die in der L^p-Norm gegen f konvergiert, kann man dies nicht direkt zeigen. Zum Beweis muß man den Umweg über die stetigen Funktionen gehen: Zuerst zeigt man die Dichtheit der C^0-Funktionen. Wir gehen so vor: Die Funktion wird „oben, unten und weit draußen abgeschnitten". Die so verstümmelte Funktion wird dann zunächst durch Treppenfunktionen, dann durch stetige und schließlich durch beliebig oft differenzierbare Funktionen approximiert. Die Approximation durch Treppenfunktionen wird durch unsere Definition des Lebesgue-Integrals notwendig: Es gibt andere Möglichkeiten, das Lebesgue-Integral zu definieren, bei denen die Dichtheit der stetigen Funktionen sofort durch die Definition geliefert wird, siehe z.B. Forster 3. Bei uns ergibt sich die Dichtheit der Treppenfunktionen aus der Definition.
Die Glättung einer Funktion f mit Hilfe eines Glättungskernes ρ wie in Definition A.5.3 ist ein wichtiges Verfahren, das in der Funktionalanalysis häufig angewendet wird.

A.5.1 Hilfssatz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ endliche Vereinigung von Quadern, $k > 0$, $f \in L^p(Q)$ mit $0 \le f \le k$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ mit $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon, \varphi \ge 0$.
Beweis:
Da Q beschränkt ist, ist $f \in L^1(Q)$ nach Satz A.4.13. Nach Hilfssatz A.1.8 gibt es zu $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in L^+(I)$ mit $f = g - h, h \ge 0, \int_Q h\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $f \ge 0,\ h \ge 0$ ist auch $g \ge 0$ und es gilt

$$\|f - g\|_1 = \int_Q |f - g|\ dx = \int_Q |-h|\ dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$g \in L^+(Q)$ heißt: Es gibt eine Folge von Treppenfunktionen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = g$ fast überall und es gibt ein $K > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$: $\int_Q \varphi_n\,dx \le K$. Wegen $g \ge 0$ kann o.E. $\varphi_n \ge 0$ gelten.
Nach Definition ist $\int_Q g\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_Q \varphi_n\,dx$. Wegen $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = g$ fast überall ist $g - \varphi_n \ge 0$ fast überall, also gibt es ein $\varphi \in (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|g - \varphi\|_1 = \int_Q |g - \varphi|\ dx = \int_Q g - \varphi\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nun ist

$$\|f - \varphi\|_1 = \int_Q |f - g + g - \varphi|\ dx \le \int_Q |f - g|\ dx + \int_Q |g - \varphi|\ dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nach Voraussetzung ist f beschränkt, φ ist als Treppenfnktion ebenfalls beschränkt, also gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so daß $|f(x) - \varphi(x)| \le c$ für alle $x \in Q$. Damit ist $\|f - \varphi\|_\infty \le c$. Interpolation nach A.4.13 liefert nun für alle p mit $1 < p < \infty$: Es ist

$$\|f - \varphi\|_p \le \|f - \varphi\|_1^\lambda \cdot \|f - \varphi\|_\infty^{1-\lambda} \le c^{1-\lambda} \cdot \|f - \varphi\|_1^\lambda$$

mit $\lambda := \frac{1}{p}$. Wählt man also $\varphi \in T(I)$ so, daß $\|f - \varphi\|_1 < \left(\frac{\varepsilon}{c^{1-\lambda}}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$, so ist $\|f - \varphi\|_p \le \varepsilon$.

A.5.2 Hilfssatz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ endliche Vereinigung von Quadern, $f \in L^p(Q)$ mit $0 \le f \le k$. Dann gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $g \in C^0(\overline{Q})$ mit $g\,|_{\partial Q} = 0$, so daß $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Beweis:
Nach A.5.1 gibt es eine Treppenfunktion $\varphi \in T(Q), \varphi \geq 0$, mit $\| f - \varphi \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Konstruiere nun eine Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset C^0(Q)$, die in der L^p-Norm gegen φ konvergiert:
φ ist Treppenfunktion, also gibt es endlich viele disjunkte Intervalle $I^{(1)}, ..., I^{(r)} \subset Q$, so daß

$$\varphi(x) = \begin{cases} c_p, x \in I^{(p)} \\ 0, \quad x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{r} I^{(i)}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt $h = \frac{1}{m}$ und

$$g_m(x) := \begin{cases} \max\left(c_p, \frac{c_p}{h} \cdot \mathrm{dist}(x, \partial I^{(p)})\right) & \text{für } x \in I^{(p)} \\ 0 & \text{für } x \notin \bigcup\limits_{i=n}^{r} I^{(i)}, \end{cases}$$

so sind die g_m stetig und konvergieren in der L_p-Norm gegen φ : Die g_m sind als Maximum zweier stetiger Funktionen in $I^{(p)}$ stetig und damit sogar in ganz $\overline{Q}$. Definitionsgemäß ist $g_m|_{\partial Q} = 0$.
Weiter ist $0 \leq g_m \leq \varphi$ und es gilt $\lim\limits_{m \to \infty} g_m(x) = \varphi(x)$ fast überall: Die Menge $N := \bigcup\limits_{i=1}^{r} \partial I^{(i)}$ bildet eine Nullmenge und für $x \in Q \backslash N$ ist $\lim\limits_{m \to \infty} g_m(x) = \varphi(x)$, denn für $x \in I^{(p)}$ und alle $m > \dfrac{1}{\mathrm{dist}\,(x, \partial I^{(p)})}$ gilt schon $g_m(x) = \varphi(x)$. Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz A.2.3 folgt:

$$\lim_{m \to \infty} \int_Q g_m \, dx = \int_Q \varphi \, dx, \text{ also}$$

$$\lim_{m \to \infty} \| \varphi - g_m \|_1 = \lim_{m \to \infty} \int_Q |\varphi - g_m| \, dx = 0.$$

Wie in A.5.1 folgt der Rest durch Interpolation: φ ist als Treppenfunktion beschränkt, $0 \leq g_m \leq \varphi$, also gibt es ein $c > 0$, so daß $|\varphi(x) - g_m(x)| \leq c$ für alle $x \in Q$. Folglich ist auch $\| \varphi - g_m \|_\infty \leq c$. Nach A.4.13 erhält man nun für alle p mit $1 < p < \infty$ mit $\lambda := \frac{1}{p}$:

$$\| \varphi - g_m \|_p \leq \| \varphi - g_m \|_1^\lambda \cdot \| \varphi - g_m \|_\infty^{1-\lambda} \leq c^{1-\lambda} \cdot \| \varphi - g_m \|_1^\lambda .$$

Wegen $\lim\limits_{m \to \infty} \| \varphi - g_m \|_1 = 0$ folgt also auch $\lim\limits_{m \to \infty} \| \varphi - g_m \|_p = 0$ für $1 < p < \infty$.
Wählt man nun ein $g \in (g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ so, daß $\| \varphi - g_m \|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, so erhält man mit der Dreiecksungleichung (= Minkowskische Ungleichung):

$$\| f - g \|_p = \| f - \varphi + \varphi - g \|_p \leq \| f - \varphi \|_p + \| \varphi - g \|_p \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

A.5.3 Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in L^p(\Omega)$. Sei

$$\rho(x) := \begin{cases} c \cdot \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei c so gewählt sei, daß $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho \, dx = 1$. Definiere für $h > 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f_h(x) := h^{-n} \int_\Omega \rho\left(\frac{x - y}{h}\right) f(y) \, dy$$

A.5.4 Hilfssatz

$f_h(x)$ ist beliebig oft differenzierbar.

Beweis:
$\rho(x)$ ist bekanntlich unendlich oft differenzierbar. Die Ableitungen $D^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)\right)$ nach x haben die Form $f(y)\cdot\dfrac{p_\alpha(x_1,...,x_n)}{(|x|^2-1)^m\cdot h^{|\alpha|}}\cdot\rho\left(\dfrac{x-y}{h}\right)$, wobei $p_\alpha(x_1,...,x_n)$ ein Polynom in n Veränderlichen und $m\in\mathbb{N}$ ist. Sei zur Abkürzung $g_\alpha(x):=\dfrac{p_\alpha(x_1,...,x_n)}{(|x|^2-1)^m\cdot h^{|\alpha|}}$. Zeige nun mit Satz A.2.7: Die Funktion $x\longmapsto h^{-n}\int\limits_Q D^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)\right)dy$ ist nach x_i differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$x\longmapsto h^{-n}\int\limits_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha\left(\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)\right)dy.$$

Für jedes feste $y\in\overline{\Omega}$ ist die Funktion $x\longmapsto f(y)g_\alpha(x)\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)$ nach x_i differenzierbar. Die Funktion $(x,y)\longmapsto g_\alpha(x)\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)$ ist beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante $C_\alpha>0$ mit $|g_\alpha(x)\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)|\leq C_\alpha$ für alle $x\in\mathbb{R}^n, y\in\overline{\Omega}$. Deshalb ist für jedes feste $x\in\mathbb{R}^n$ die Funktion $y\longmapsto\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)$ integrierbar. Schließlich gibt es auch eine Konstante $\widetilde{C}_\alpha$ so daß $|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(g_\alpha(x)\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)\right)|\leq\widetilde{C}_\alpha$. Folglich ist $|\frac{\partial}{\partial x_i}(f(y)g_\alpha(x)\rho(\frac{x-y}{h})|\leq\widetilde{C}_\alpha\,|f(y)|$, und die Funktion rechts ist integrierbar, denn nach A.4.13 gilt für beschränktes $\Omega: L^p(\Omega)\subset L^1(\Omega)$.
Nach Satz A.2.7 ist damit die Funktion $x\longmapsto h^{-n}\int\limits_\Omega D^\alpha(\rho(\frac{x-y}{h})f(y))\,dy$ nach x_i differenzierbar und ihre Ableitung ist $x\longmapsto h^{-n}\int\limits_Q\frac{\partial}{\partial x_i}D^\alpha(\rho(\frac{x-y}{h})f(y))\,dy$. Die Behauptung folgt daraus induktiv.

A.5.5 Hilfssatz

Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $f\in C^0(\overline{\Omega})$ mit $f(x)=0$ für $x\in\partial\Omega$. Dann konvergiert f_h für $h\longrightarrow 0$ gleichmäßig gegen f.

Beweis:
f kann durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ stetig fortgesetzt werden. Wegen $\rho(x)=0$ für $|x|>1$ ist

$$\begin{aligned}f_h(x) &= h^{-n}\int\limits_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)\,dy = h^{-n}\int\limits_{|x-y|\leq h}\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)f(y)\,dy = \\ &= \int\limits_{|z|\leq 1}\rho(z)f(x-hz)\,dz,\end{aligned}$$

wobei $z=\frac{x-y}{h}$ gesetzt ist. Unter Verwendung von $\int\limits_{|z|\leq 1}\rho(z)\,dz=1$ folgt

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\Omega}|f(x)-f_h(x)| &= \sup_{x\in\Omega}\left|\int\limits_{|z|\leq 1}f(x)\rho(z)\,dz-\int\limits_{|z|\leq 1}\rho(z)f(x-hz)\,dz\right|\leq \\ &\leq \sup_{x\in\Omega}\int\limits_{|z|\leq 1}\rho(z)\,|f(x)-f(x-hz)|\,dz\leq \\ &\leq \sup_{x\in\Omega}\sup_{|z|\leq 1}|f(x)-f(x-hz)|\cdot\int\limits_{|z|\leq 1}\rho(z)\,dz= \\ &= \sup_{x\in\Omega}\sup_{|z|\leq 1}|f(x)-f(x-hz)|\,.\end{aligned}$$

Da $f \in C^0(\overline{\Omega})$ und $f(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, ist f sogar in $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig stetig, d.h., zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h_0 > 0$, so daß $\sup\limits_{x\in\Omega} \sup\limits_{|z|\leq 1} |f(x) - f(x - hz)| < \varepsilon$ für $h < h_0$. Also konvergiert f_h gleichmäßig gegen f.

A.5.6 Hilfssatz

Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ Vereinigung endlich vieler Quader, sei $f \in L^p(Q)$ mit $0 \leq f \leq k$. Dann gilt $f_h \in L^p(Q)$ und $\lim\limits_{h\to\infty} \|f - f_h\|_p = 0$.

Beweis:
Sei f wieder durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Zunächst ist $f_h \in L^p(Q)$: Es gilt

$$\begin{aligned}
|f_h(x)|^p &= \left| \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)^{1-\frac{1}{p}} \left(\rho(z)^{\frac{1}{p}} f(x - hz)\right) dz \right|^p \leq \\
&\leq \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \left|\rho(z)^{1-\frac{1}{p}} \left(\rho(z)^{\frac{1}{p}} f(x - hz)\right)\right| dz \right)^p \leq \\
&\overset{A.4.5}{\leq} \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \left|\rho(z)^{1-\frac{1}{p}}\right|^{\frac{p}{p-1}} dz \right)^{p-1} \cdot \left(\int\limits_{|z|\leq 1} \left|\rho(z)^{\frac{1}{p}} \cdot f(x - hz)\right|^p dx \right) = \\
&= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)\, |f(x - hz)|^p \, dx
\end{aligned}$$

Setzt man $B_h(Q) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, Q) < h\}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_Q |f_h(x)|^p \, dx &\leq \int\limits_Q \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)\, |f(x - hz)|^p \, dz\, dx = \\
&= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) \int\limits_Q |f(x - hz)|^p \, dx\, dz \leq \\
&\overset{y=x-hz}{\leq} \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z) \int\limits_{B_h(Q)} |f(y)|^p \, dy\, dz = \\
&= \int\limits_{|z|\leq 1} \rho(z)\, dz \int\limits_Q |f(y)|^p \, dy = \int\limits_Q |f(y)|^p \, dy = \\
&= \|f\|^p_{L^p(Q)}
\end{aligned}$$

Folglich gilt $f_h \in L^p(Q)$ und $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$. Nach Hilfssatz A.5.2 gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $g \in C^0(\overline{Q})$ mit $g|_{\partial Q} = 0$, so daß $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Mit der eben bewiesenen Abschätzung folgt dann auch $\|(f - g)_h\|_p = \|f_h - g_h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Nach A.5.5 konvergiert g_h gleichmäßig gegen g, also kann man h so klein wählen, daß $\|g - g_h\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Insgesamt folgt nun die Behauptung:

$$\|f - f_h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|g_h - f_h\|_p < \varepsilon.$$

A.5.7 Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$, d.h. zu $f \in L^p(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$.

Beweis:
Sei f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Aus $f \in L^p(\Omega)$ folgt $f_+, f_- \in L^p(\Omega)$, also genügt es, den Satz für $f \geq 0$ zu beweisen. Setze $Q_k := [-k, k]^n \cap \overline{\Omega}_{\frac{1}{k}}$ und

$$f_k(x) := \begin{cases} \min(f(x), k) & \text{für } x \in Q_k, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\Omega_{\frac{1}{k}} := \{x \in \overline{\Omega} \mid \operatorname{dist}(x, \partial\overline{\Omega}) < \frac{1}{k}\}$. Die f_k sind beschränkte Funktionen, die außerhalb eines beschränkten Gebietes 0 sind, also folgt mit Bemerkung A.3.2: $f_k \in L^p(\Omega)$. Offensichtlich gilt $|f - f_k|^p \leq |f|^p$ und f_k konvergiert fast überall punktweise gegen f, d.h. $|f - f_k|^p$ konvergiert fast überall gegen 0. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz A.2.3 folgt: $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - f_k\|_p^p = 0$. Wähle K so groß, daß $\|f - f_K\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Die Menge Q_K ist abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt. Aus einer Überdeckung von Q_K mit offenen Quadern $(\widetilde{Q}_i)_{i\in I}$ der Kantenlänge $\leq \frac{1}{2K\sqrt{n}}$ kann man daher eine endliche Überdeckung auswählen. Sei Q die Vereinigung dieser endlich vielen Quader. O.E. gelte $\widetilde{Q}_i \cap Q_K \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Dann ist $Q \subset \overline{\Omega}$, Q beschränkt und $\operatorname{dist}(Q, \partial\overline{\Omega}) > \frac{1}{2K}$: Für einen Quader $\widetilde{Q}$ der Kantenlänge $\frac{1}{2K\sqrt{n}}$ ist $\operatorname{diam} \widetilde{Q} \leq \frac{1}{2K\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{2K}$, wegen $Q_K \subset \overline{\Omega}_{\frac{1}{K}}$ und $\widetilde{Q}_i \cap Q_K \neq \emptyset$ folgt daher: $\operatorname{dist}(Q, \partial\overline{\Omega}) > \frac{1}{2K}$. Nach A.5.6 hat man $\lim\limits_{h\to 0} \|f_K - (f_K)_h\|_p = 0$ in $L^p(Q)$, also auch in $L^p(\Omega)$. Nach Definition von f_h ist $(f_K)_h(x) = 0$ für $x \notin B_h(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, Q) > h\}$. Wählt man also h so klein, daß $h < \frac{1}{4K}$ und zugleich $\|f_K - (f_K)_h\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt

$$\|f - (f_K)_h\|_p \leq \|f - f_K\|_p + \|f_K - (f_K)_h\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und $(f_K)_h \in C_0^\infty(\Omega)$, da $(f_K)_h(x) = 0$ für $x \in \Omega$ mit $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{4K}$.

A.5.8 Folgerung

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $E \subset \Omega$. Dann liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(E)$.

Beweis:
Offensichtlich gilt $C_0^\infty(\Omega) \subset L^p(E)$. Sei $f \in L^p(E)$, g die Fortsetzung von f auf Ω durch 0. Dann ist $g \in L^p(\Omega)$, nach Satz A.5.7 gibt es also zu $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|g - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$. Wegen $|g - \varphi| \leq 0$ und $|E| \leq |\Omega|$ ist $\|g - \varphi\|_{L^p(E)} \leq \|g - \varphi\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$, also folgt die Behauptung.

A.6 Der Satz von Ascoli-Arzelà

A.6.1 Hilfssatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Auf $\overline{\Omega}$ sei eine unendliche Familie von Funktionen $H = \{f_i(x) \mid i \in I\}$, I unendliche Indexmenge, gegeben. Wenn alle Funktonen der Familie durch ein und dieselbe Zahl beschränkt sind:

$$|f_i(x)| \leq K \text{ für alle } i \in I,$$

so kann man zu jeder abzählbaren Menge $E \subset \overline{\Omega}$ aus der Familie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, die in jedem Punkt der Menge E konvergiert.

Beweis:
Sei $E = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Menge $\{f_i(x_1) \mid i \in I\}$ der Funktionswerte, die die Funktionen der Familie H im Punkt x_1 annehmen. Nach Voraussetzung ist diese Menge beschränkt, deshalb

kann man nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus ihr eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^{(1)}(x_1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) = A_1$ auswählen.
Jetzt betrachten wir die Folge $\left(f_n^{(1)}(x_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionswerte, die von den Funktionen der Menge $\left\{f_n^{(1)}(x) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ im Punkt x_2 angenommen werden.
Diese Folge ist ebenfalls beschränkt, Anwendung von Bolzano-Weierstraß liefert eine konvergente Teilfolge $\left(f_n^{(2)}(x_2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) = A_2$. Setzen wir dieses Verfahren unbegrenzt fort, so konstruieren wir eine abzählbare Menge konvergenter Folgen

$$\begin{array}{ll}
f_1^{(1)}(x_1),\quad f_2^{(1)}(x_1),\quad f_3^{(1)}(x_1),\dots,\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x_1) & = A_1\\
f_1^{(2)}(x_2),\quad f_2^{(2)}(x_2),\quad f_3^{(2)}(x_2),\dots,\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x_2) & = A_2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
f_1^{(k)}(x_k),\quad f_2^{(k)}(x_k),\quad f_3^{(k)}(x_k),\dots,\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(k)}(x_k) & = A_k\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

wobei jede Funktionenfolge (ohne die Reihenfolge der Elemente zu ändern) aus der vorhergehenden gewählt wurde. Die Diagonalfolge $\left(f_n^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nun eine verlangte, d.h., in jedem Punkt der Menge E konvergierende Folge. Für beliebiges, aber festes k ist nämlich die Folge $\left(f_n^{(n)}(x_k)\right)_{n\geq k}$ eine Teilfolge von $\left(f_n^{(k)}(x_k)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und konvergiert deshalb gegen A_k.

A.6.2 Satz (Ascoli[1]-Arzelà[2])

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $A = \{f_i \mid i \in I\} \subset C^0(\overline{\Omega})$, I unendliche Indexmenge, eine vorgegebene Familie stetiger Funktionen. Wenn

1) die Familie gleichartig beschränkt ist, d.h. wenn es eine Zahl M gibt, so daß $|f_i(x)| \leq M$ für alle $i \in I$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt,

2) diese Funktionen gleichgradig stetig sind, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon)$ gibt, so daß $|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon$ für $\|x_1 - x_2\| < \delta(\varepsilon)$ und alle $i \in I$,

so läßt sich aus A eine gleichmäßig konvergente Folge auswählen.

Beweis:

1) Konstruktion der Grenzfunktion $\varphi(x)$:
Sei E die Menge aller rationalen Punkte in $\overline{\Omega}$. Diese Menge ist abzählbar. Nach Hilfssatz A.6.1 kann man aus A eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auswählen, so daß $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in E$ konvergiert. Wir zeigen, daß diese Folge sogar auf ganz $\overline{\Omega}$ konvergiert. Sei x ein irrationaler Punkt in $\overline{\Omega}$. Zu gegebenen $\varepsilon > 0$ wählen wir einen rationalen Punkt $r \in \overline{\Omega}$, so daß für alle Funktionen der Familie A gilt:
$$|f_i(x) - f_i(r)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Die Existenz eines solchen r ist wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionen aus A gesichert. Da die Zahlenfolge $(f_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es zu unserem ε ein N derart, daß für $n > N$ und $m > N$ gilt:
$$|f_n(r) - f_m(r)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[1]Giulio Ascoli (1843-1896)
[2]Cesare Arzelà (1847-1912)

Dann besteht aber für diese n und m die Abschätzung

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(r)| \ + \ |f_n(r) - f_m(r)| \ + \ |f_m(r) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge und besitzt daher einen endlichen Grenzwert,

$$\varphi(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

2) Stetigkeit von $\varphi(x)$:

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir ein $\delta > 0$ derart, daß aus der Ungleichung $\| x'' - x' \| < \delta$ für alle Funktionen der Familie die Ungleichung $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ folgt. Dann halten wir zwei Punkte x' und x'' mit $\|x' - x''\| < \delta$ fest und führen in der Ungleichung

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$$

den Grenzübergang aus. Es ergibt sich die Ungleichung

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq \varepsilon$$

für die Grenzfunktion.

3) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen φ :

Zunächst bemerken wir, daß die Differenzen $f_n(x) - \varphi(x)$ ebenso wie die Funktionen $f_n(x)$ gleichgradig stetig sind. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir daher ein $\delta > 0$ finden, so daß für $\|x'' - x'\| < \delta$ und für jedes n die folgende Ungleichung gilt:

$$\Big|\Big(f_n(x'') - \varphi(x'')\Big) - \Big(f_n(x') - \varphi(x')\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiter ist $\overline{\Omega}$ abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt. Die Menge aller Kugeln mit Radius δ um Punkte aus $\overline{\Omega}$ bildet eine offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$, aus der wir wegen der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung auswählen können. Seien $z_1, \dots, z_s$ die Mittelpunkte dieser endlich vielen δ-Kugeln. In jedem Punkte z_i ist

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z_i) = \varphi(z_i).$$

Es läßt sich demnach ein N_i finden, so daß für $n > N_i$ gilt:

$$|f_n(z_i) - \varphi(z_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei $N = \max\{N_0, N_1, \dots, N_s\}$. Da die δ-Kugeln um z_i eine Überdeckung von $\overline{\Omega}$ bilden, können wir zu jedem $x \in \overline{\Omega}$ ein i bestimmen, so daß $\|z_i - x\| < \delta$ ist. Nun gilt aber für $n > N$ und alle $x \in \overline{\Omega}$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - \varphi(x)| \quad &= \quad \Big|\Big(f_n(x) - \varphi(x)\Big) - \Big(f_n(z_i) - \varphi(z_i)\Big) + \Big(f_n(z_i) - \varphi(z_i)\Big)\Big| \leq \\
&\leq \quad \Big|\Big(f_n(x) - \varphi(x)\Big) - \Big(f_n(z_i) - \varphi(z_i)\Big)\Big| + \Big|f_n(z_i) - \varphi(z_i)\Big| < \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da N von der Wahl von x nicht abhängt, haben wir damit die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gegen φ gezeigt.

Ohne Beweis erwähnen wir noch den Satz von Kolmogorow:

A.6.3 Satz (Kolmogorow[1])

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $1 \leq p < \infty$. Sei $M \subset L^p(\Omega)$. M ist genau dann präkompakt in $L^p(\Omega)$, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) Es gibt ein $C = C(M) > 0$, so daß für alle $f \in M$ gilt: $\| f \|_p \leq C$.

2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\| y \| \leq \delta$ und für alle $f \in M$ gilt: $\int_\Omega | f(x+y) - f(x) |^p \, dx \leq \varepsilon$.

Oder anders formuliert: Genau dann, wenn die obigen Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind, kann man aus jeder Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ eine in $L^p(\Omega)$ konvergente Teilfolge auswählen.

[1] Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow (1903-1987)

Anhang B

Normierte Räume

In diesem Kapitel werden die Grundlagen über normierte Räume zusammengestellt. Einige Aussagen im Hauptteil des Skriptes gelten ganz allgemein für normierte Räume und werden deshalb hier bewiesen. Häufig angewendet wird auch das Prinzip der offenen Abbildung, das am Ende des Kapitels bewiesen wird.
Dieser Anhang stammt aus dem bei der Fachschaft erhältlichen Topologie-Skript, das Michael Neudert und ich zusammen schrieben. Für diesen Teil stützten wir uns im wesentlichen auf folgende Bücher:

1. Hirzebruch, Friedrich & Scharlau, Winfried: Einführung in die Funktionalanalysis,
   Bibl. Inst. Mannheim 1971 (Nachdruck 1991)
2. von Mangoldt & Knopp: Einführung in die höhere Mathematik,
   Leipzig 1989, 4. Auflage

Zunächst noch ein paar Sätze und Definitionen aus der Topologie:

B.1 Topologische Grundlagen

B.1.1 Definition

Sei X eine Menge, $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ die Potenzmenge, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$. Das Paar $(\mathrm{X}, \mathcal{O})$ ist ein topologischer Raum, wenn die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

O1) Beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{O}$ sind wieder Elemente von $\mathcal{O}$:

$$\forall \mathrm{k} \in \mathrm{I} : \mathrm{B_k} \in \mathcal{O} \Longrightarrow \bigcup_{\mathrm{k} \in \mathrm{I}} \mathrm{B_k} \in \mathcal{O} \text{ (I beliebige Indexmenge).}$$

O2) Der Durchschnitt von je zwei Elementen aus $\mathcal{O}$ ist wieder ein Element aus $\mathcal{O}$:

$$\mathrm{B_1}, \mathrm{B_2} \in \mathcal{O} \Longrightarrow \mathrm{B_1} \cap \mathrm{B_2} \in \mathcal{O}.$$

O3) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $\mathrm{X} \in \mathcal{O}$.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen offene Mengen.

B.1.2 Definition (Metrik, metrischer Raum)

Sei X eine Menge. Eine Abbildung d: $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1) $\forall x, y \in X : (d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$,

2) $\forall x, y \in X : d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie),

3) $\forall x, y, z \in X : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (X,d) heißt dann metrischer Raum. Ein metrischer Raum ist also eine mit einer Metrik versehene Menge.

B.1.3 Definition (Cauchy[1]-Folge, Vollständigkeit)

Sei (X,d) ein metrischer Raum.

1) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $m,n \geq n_0$ gilt: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

2) X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

B.1.4 Bemerkung

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt für jede Teilmenge A von X:

$$A \text{ abgeschlossen} \iff A \text{ vollständig}.$$

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in A. Dann ist (a_n) Cauchy-Folge in X, besitzt also in X einen Grenzwert a. Es ist $a \in \overline{A} = A$, also ist A vollständig.

„$\Leftarrow$" Sei $x_0 \in \overline{A}$. Für jede Umgebung U von x_0 gilt: $U \cap A \neq \emptyset$, d.h. für alle $n>0$ gibt es ein $a_n \in A$ mit $d(x_0, a_n) < \frac{1}{n}$. Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A, die gegen x_0 konvergiert. Wegen der Vollständigkeit von A gilt $x_0 \in A$, d.h. $\overline{A} \subset A$, also ist A abgeschlossen.

B.1.5 Lemma

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Kugeln $K_n = \overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ und $K_1 \supset K_2 \supset$ ... Dann gibt es genau ein $x \in X$ mit $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n = \{x\}$.
Beweis:
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge, denn für $m \geq n$ gilt $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$ und (ε_n) ist Nullfolge. Sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Es gilt $x \in \bigcap\limits_n K_n$, denn aus $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon_n$ folgt wegen der Stetigkeit von d, daß $d(x_n, x) \leq \varepsilon_n$. Ist $y \in \bigcap\limits_n K_n$, so gilt $d(x,y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq 2\varepsilon_n$, also $x = y$.

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

B.1.6 Satz (Baire[1])

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. $A_1, A_2, ...$ seien abgeschlossene Teilmengen von X. Es enthalte $\bigcup\limits_i A_i$ eine offene Kugel. Dann gibt es ein i, so daß A_i eine offene Kugel enthält.

Beweis:
Sei $U_0 = U_{\varepsilon_0}(x_0)$ enthalten in $\bigcup A_i$.
Annahme: Für alle $\varepsilon > 0$, für alle $x \in X$ und für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $(X \backslash A_i) \cap U_\varepsilon(x) \neq \emptyset$.
$(X\backslash A_1) \cap U_0$ ist offen und nach Annahme nicht leer. Also gibt es eine abgeschlossene Kugel $K_1 = \overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)}, 0 < \varepsilon_1 < 1$ mit $K_1 \subset (X\backslash A_1) \cap U_0$. Dann ist $(X\backslash A_2) \cap U_{\varepsilon_1}(x_1)$ offen und nach Annahme nicht leer. Also gibt es eine abgeschlossene Kugel $K_2 = \overline{U_{\varepsilon_2}(x_2)}, 0 < \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$ mit $K_2 \subset (X\backslash A_2) \cap U_{\varepsilon_1}(x_1)$, also $K_2 \subset K_1$. Dieses Verfahren wird nun induktiv fortgesetzt:
Es gibt eine abgeschlossene Kugel $K_i = \overline{U_{\varepsilon_i}(x_i)}, 0 < \varepsilon_i < \frac{1}{i}$ mit $K_i \subset (X\backslash A_i) \cap U_{\varepsilon_{i-1}}(x_{i-1})$, also $K_i \subset K_{i-1}$. Die Folge $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen des obigen Lemmas B.1.5, also gibt es ein $x \in X$ mit $\bigcap\limits_i K_i = \{x\}$. Dann gilt: $x \in \bigcap\limits_i (X\backslash A_i) = X \backslash \bigcup\limits_i A_i$, also $x \notin \bigcup\limits_i A_i$. Andererseits war aber $x \in K_1 \subset U_0 \subset \bigcup\limits_i A_i$, Widerspruch.

Aus dem Satz von Baire folgt ein Prinzip über gleichmäßige Beschränktheit:

B.1.7 Definition

Sei X eine Menge und F eine Menge von Funktionen $X \longrightarrow \mathbb{R}$. F heißt punktweise gleichmäßig beschränkt, wenn es für alle $x \in X$ eine Konstante K_x gibt, so daß für alle $f \in F$ gilt: $f(x) \leq K_x$.

B.1.8 Satz

Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum, sei $F \subset C(X, \mathbb{R})$ punktweise gleichmäßig beschränkt. Dann gibt es eine offene Kugel U in X und eine Konstante C, so daß für alle $x \in U$ und alle $f \in F$ gilt: $f(x) \leq C$.

Beweis:
Setze $A_n := \{x \in X \mid f(x) \leq n \text{ für alle } f \in F\}$. Dann ist $A_n = \bigcap\limits_{f\in F} f^{-1}((-\infty, n])$, d.h. A_n ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Da F punktweise gleichmäßig beschränkt ist, gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Nach dem Satz von Baire B.1.6 gibt es also ein $m \in \mathbb{N}$ und eine offene Kugel U in X mit $U \subset A_m$, also $f(x) \leq m$ für alle $x \in U$ und $f \in F$.

B.1.9 Definition (Vervollständigung metrischer Räume)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Vervollständigung von (X,d) ist ein metrischer Raum $(\widehat{X}, \widehat{d})$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $X \subset \widehat{X}$,

2) $d = \widehat{d}\,|_{X\times X}$,

3) $(\widehat{X}, \widehat{d})$ ist vollständig,

4) X liegt dicht in $\widehat{X}$.

[1] René-Louis Baire (1874-1932)

B.1.10 Satz (Eindeutigkeit der Vervollständigung)

Seien $(\widehat{X}, \widehat{d})$ und $(\tilde{X}, \tilde{d})$ Vervollständigungen eines metrischen Raumes (X,d). Dann gibt es genau eine Isometrie $f : \widehat{X} \longrightarrow \tilde{X}$, die auf X die Identität ist.

Beweis:

1) Es gibt eine solche Isometrie f:

   Sei $\widehat{x} \in \widehat{X} \backslash X$. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ mit $\widehat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ in $\widehat{X}$. Setze $f(\widehat{x}) := \tilde{x}$, wobei $\tilde{x}$ der Limes von (x_n) in $\tilde{X}$ sein soll. (Für $x \in X$ setze natürlich $f(x) = x$.) f ist dann wohldefiniert: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\widehat{X}$. Seien $\widehat{y} = \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\widehat{X}$ und $\tilde{y} = \lim_{n\to\infty} y_n$ in $\tilde{X}$, entsprechend für $\widehat{x}, \tilde{x}$. Wegen $\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y})$ folgt aus $\widehat{x} = \widehat{y}$ auch $\tilde{x} = \tilde{y}$.

   f ist Isometrie: Seien $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}, (x_n), (y_n)$ wie oben. Dann ist $\tilde{d}(f(\widehat{x}), f(\widehat{y})) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y})$.

2) Es gibt höchstens eine solche Isometrie f:

   Sei $x \in \widehat{X} \backslash X$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Die Folge x_n konvergiert auch in $\tilde{X}$, da $\tilde{X}$ vollständig ist. Sei y der Grenzwert von (x_n) in $\tilde{X}$. Wegen $\tilde{d}(f(x), x_n) = \widehat{d}(x, x_n)$ gilt auch $\lim_{n\to\infty} \tilde{d}(f(x), x_n) = \lim_{n\to\infty} \widehat{d}(x, x_n) = 0$, also $y = f(x)$.

B.1.11 Satz (Existenz der Vervollständigung)

Zu jedem metrischen Raum (X,d) gibt es eine Vervollständigung $(\widehat{X}, \widehat{d})$.

Beweis:

1) Sei $X^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen aus X. Wir definieren auf $X^{\mathbb{N}}$ folgende Äquivalenzrelation: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} :\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Offenbar ist jede zu einer Cauchy-Folge äquivalente Folge wieder eine Cauchy-Folge.

2) Wir definieren $\widehat{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen auf X bezüglich obiger Äquivalenzrelation. Also:

   $\widehat{x} \in \widehat{X} :\Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0, \widehat{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$

3) Wir definieren nun auf $\widehat{X}$ folgende Metrik $\widehat{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} \longrightarrow \mathbb{R}, \widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

   a) $\widehat{d}$ ist wohldefiniert:

      α) Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, existiert $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$: Wegen $d(x_n, y_n) \geq d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) + d(x_m, y_n)$ gilt auch: $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$, d.h. unter obigen Voraussetzungen ist $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und damit konvergent.

      β) Seien $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{X}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen aus $X^{\mathbb{N}}$ mit $\widehat{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [(u_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ und $\widehat{y} = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim = [(v_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$. Dann gilt nach der Dreiecksungleichung $| d(x_n, y_n) - d(u_n, v_n) | \leq d(x_n, u_n) + d(y_n, v_n)$ und damit nach α) auch $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n)$.

   b) $\widehat{d}$ ist Metrik:

      α) $\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \Longleftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \widehat{x} = \widehat{y}$

$\beta)$ $\widehat{d}(\widehat{x},\widehat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \widehat{d}(\widehat{y},\widehat{x})$

$\gamma)$ Zu zeigen bleibt noch die Dreiecksungleichung $\widehat{d}(\widehat{x},\widehat{y}) \leq \widehat{d}(\widehat{x},\widehat{z}) + \widehat{d}(\widehat{z},\widehat{y})$:
Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, $\widehat{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, entsprechend für $\widehat{y},\widehat{z}$. Wegen $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n)$ gilt dann auch $\widehat{d}(\widehat{x},\widehat{y}) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, z_n) + \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, y_n) = \widehat{d}(\widehat{x},\widehat{z}) + \widehat{d}(\widehat{z},\widehat{y})$.

4) Es gilt nun, X in $\widehat{X}$ „einzubetten“, d.h. X isometrisch mit einer Teilmenge X' von $\widehat{X}$ zu identifizieren.

Sei $X' = \{\widehat{x} \in \widehat{X} \mid \exists x \in X : \widehat{x} = [(x)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim\}$. Jedes Element aus X' ist eine Äquivalenzklasse mit der Eigenschaft, daß alle Elemente dieser Äquivalenzklasse äquivalent zu einer stationären Folge sind. $j : X \longrightarrow X', x \longmapsto [(x)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ ist offenbar eine Isometrie, wenn wir X mit der Metrik d, X' mit der Metrik $\widehat{d}$ versehen. Außerdem ist j offensichtlich bijektiv.

Es ist nun zu zeigen, daß X' dicht in $\widehat{X}$ liegt. Sei $\widehat{x} \in \widehat{X}$, sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit $\widehat{x} = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$. Sei $i \in \mathbb{N}$. Sei $y_n^{(i)} := x_i$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist für $i \in \mathbb{N} : \widehat{y}^{(i)} := \left[\left(y_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right] \in X'$.
Wegen $\widehat{d}\left(\widehat{x},\widehat{y}^{(i)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n, y_n^{(i)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_i)$ gilt: $\lim\limits_{i\to\infty} \widehat{d}\left(\widehat{x},\widehat{y}^{(i)}\right) = 0$, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

5) Jetzt muß nur noch der Beweis für die Vollständigkeit von $\widehat{X}$ erbracht werden.

Sei $\left(\widehat{x}^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\widehat{X}$. Es gibt Cauchy-Folgen $\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$\widehat{x}^{(i)} = \left[\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]_\sim .$$

Weil $\left(\widehat{x}^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gilt: $\lim\limits_{i,k\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n^{(i)}, x_n^{(k)}\right)\right) = 0$. Aus der Cauchy-Folge $\left(\widehat{x}^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ wählen wir eine Teilfolge $\left(\widehat{x}^{(i_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ so aus, daß

$$\alpha) \quad \lim_{j\to\infty} d\left(x_j^{(i_n)}, x_j^{(i_m)}\right) < \frac{1}{2n} \qquad \text{für} \qquad m \geq n.$$

Zu der Cauchy-Folge $\left(x_j^{(i_n)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ wählen wir einen Index $k_n \in \mathbb{N}$, so daß

$$\beta) \quad d\left(x_{k_n}^{(i_n)}, x_l^{(i_n)}\right) < \frac{1}{n} \qquad \text{für} \qquad l \geq k_n.$$

Wegen $\alpha)$ gibt es zu $n, m \in \mathbb{N}$ ein $j_0(n,m) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß

$$\gamma) \quad d\left(x_j^{(i_n)}, x_j^{(i_m)}\right) < \frac{1}{n} \qquad \text{für} \qquad j \geq j_0(n,m).$$

Dann ist $\left(x_{k_n}^{(i_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, denn für gegebene $m, n \in \mathbb{N}$ können wir stets ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k_n, l \geq k_m$ und $l \geq j_0(n,m)$ wählen, mit dem dann gilt:

$$d\left(x_{k_n}^{(i_n)}, x_{k_m}^{(i_m)}\right) \leq d\left(x_{k_n}^{(i_n)}, x_l^{(i_n)}\right) + d\left(x_l^{(i_n)}, x_l^{(i_m)}\right) + d\left(x_l^{(i_m)}, x_{k_m}^{(i_m)}\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3N}$$

für $n, m \geq N$. Sei im folgenden $x_n := x_{k_n}^{(i_n)}$. Wir zeigen jetzt, daß $\left(\widehat{x}_n^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{X}$ gegen $\widehat{x} := [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]_\sim$ konvergiert.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\lim\limits_{l\to\infty} d\left(x_l^{(i)}, x_l^{(j)}\right) < \frac{\varepsilon}{4}$ für $i, j > i_0(\varepsilon)$. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{l\to\infty} d(x_l^{(i)}, x_l^{(i_n)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i > i_0$. Wähle i außerdem so, daß $i > \frac{4}{\varepsilon}$. Für gegebenes $i \in \mathbb{N}, i > i_0(\varepsilon)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $d\left(x_n^{(i)}, x_l^{(i)}\right) < \frac{1}{i}$ für $n, l > n_0$. Wähle n außerdem so, daß $n > \frac{4}{\varepsilon}$. Für festes $i \in \mathbb{N}$ und festes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $l \in \mathbb{N}$ folgendermaßen:

(a) $l > n_0$, damit $d\left(x_n^{(i)}, x_l^{(i)}\right) < \frac{1}{i}$ und

(b) $l > k_n$, damit $d\left(x_l^{(i_n)}, x_{k_n}^{(i_n)}\right) < \frac{1}{n}$ und

(c) l so groß, daß $d\left(x_l^{(i)}, x_l^{(i_n)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann gilt

$$d\left(x_n^{(i)}, x_n\right) = d\left(x_n^{(i)}, x_{k_n}^{(i_n)}\right) \leq d\left(x_n^{(i)}, x_l^{(i)}\right) + d\left(x_l^{(i)}, x_l^{(i_n)}\right) + d\left(x_l^{(i_n)}, x_{k_n}^{(i_n)}\right) < \frac{1}{i} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Also gilt $0 = \lim\limits_{i\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty} d\left(x_n^{(i)}, x_n\right)\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \widehat{d}\left(\widehat{x}^{(i)}, \hat{x}\right)$. Damit ist die Vollständigkeit von $\widehat{X}$ gezeigt.

Im Rest des Kapitels sei $\mathbb{K}$ der Körper $\mathbb{R}$ der reellen oder $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. $\mathbb{K}$ wird mit $d(x,y) = |x - y|$ zu einem vollständigem metrischen Raum.

B.1.12 Definition (topologischer Vektorraum)

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und außerdem ein topologischer Raum. Dann heißt X topologischer $\mathbb{K}$-Vektorraum, wenn Addition und Multiplikation mit Skalaren stetig sind, d.h. die Abbildungen

$$X \times X \longrightarrow X, (x,y) \longmapsto x + y$$
$$\mathbb{K} \times X \longrightarrow X, (a,x) \longmapsto ax$$

sind stetig.
($X\times X$ und $\mathbb{K}\times X$ sind ja wieder topologische Räume.)

B.1.13 Lemma

Seien X und Y topologische Vektorräume. Die Abbildung $T\colon X \longrightarrow Y$ sei linear. Dann sind äquivalent:

1) T ist stetig,

2) T ist stetig in 0,

3) T ist stetig in einem beliebigen Punkt $x \in X$.

Beweis:
1)$\Longrightarrow$ 2) ist klar.
Wir zeigen jetzt allgemein: Seien $x, y \in X$, T stetig in x. Dann ist T stetig in y.
Sei V_y eine Umgebung von $T(y)$. Dann ist $V_x := \{z \in Y \mid z = v + \left(T(x) - T(y)\right), v \in V_y\}$ eine Umgebung von $T(x)$, weil die Abbildung $L_{T(x)-T(y)} : Y \longrightarrow Y, v \longmapsto v + \left(T(x) - T(y)\right)$ ein Homöomorphismus ist. T ist stetig in x, also gibt es eine Umgebung U_x von x mit $T(U_x) \subset V_x$. Setze $U_y := \{z \in X \mid z = u + (y-x), u \in U_x\}$. U_y ist Umgebung von y, da $\tilde{L}_{y-x} : X \longrightarrow X, u \longmapsto u + (y-x)$ ein Homöomorphismus ist. Nun ist für $z = u + (y-x) \in U_y : T(z) = T(u+y-x) = T(u) + T(y) - T(x)$. Da $T(u) \in V_x$, gibt es ein $v \in V_y$ mit $T(u) = v + \left(T(x) - T(y)\right)$, also ist $T(z) = \left(v + T(x) - T(y)\right) + T(y) - T(x) = v \in V_y$. Demnach ist $T(U_y) \subset V_y$, d.h. T ist stetig in y.
Damit hat man sofort 2)$\Longleftrightarrow$ 3). 2)$\Longrightarrow$ 1) folgt, denn aus der Stetigkeit in 0 folgt mit obiger Behauptung sofort: T ist stetig in jedem $x \in X$.

B.1.14 Bezeichnung

Sind X, Y topologische Vektorräume, so bezeichne L(X,Y) die Menge der stetigen linearen Abbildungen von X in Y. Dann ist L(X,Y) selbst ein Vektorraum. Insbesondere ist X' := L(X,$\mathbb{K}$) der sogenannte Dualraum von X.

B.2 Normierte Räume – Banachräume

B.2.1 Definition (Norm)

Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\,\|: X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, falls

1) $\forall x \in X\backslash\{0\} : \|x\| > 0$,

2) $\forall a \in \mathbb{K}, x \in X : \|ax\| \quad = \quad |a| \cdot \|x\|$,

3) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \quad \leq \quad \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung).

Ein Paar $(X,\|\,\|)$ bestehend aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum und einer Norm heißt normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum oder einfach normierter Raum.

B.2.2 Beispiele

1) Für $X = \mathbb{R}^n$ ist für $p \in [1,\infty)$ die p-Norm:

   $\|x\|_p := \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ und die ∞-Norm:

   $\|x\|_\infty := \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

   Die Dreiecksungleichung für die p-Normen ist die Minkowskische Ungleichung, siehe Forster, Analysis 1. Die 2-Norm heißt auch euklidische Norm, die ∞-Norm auch Maximumsnorm.

2) Auf $C[a,b] := \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ definiert man auch die ∞- und die p-Normen für $p \in [1,\infty)$:

   $\|f\|_\infty := \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$,

   $\|f\|_p := \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

   Dreiecksungleichung ist diesmal die Minkowski-Ungleichung für Integrale, siehe A.4.6.

B.2.3 Satz

Ist $(X,\|\,\|)$ ein normierter Raum, so wird X durch $d(x,y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum. Die durch die Metrik definierte Topologie macht X zu einem topologischen Vektorraum.

Beweis:
d ist eine Metrik: $d(z,x) = \|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\| = d(z,y) + d(y,x)$, die anderen beiden Punkte sind klar.
Die Addition ist gleichmäßig stetig:
Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta_\varepsilon := \varepsilon$, dann ist für

$$d_{X\times X}\Big((x,y),(x',y')\Big) = d_X(x,x') + d_X(y,y') = \|x - x'\| + \|y - y'\| < \varepsilon$$

auch

$$d_X(x + y, x' + y') = \|x - x' + y - y'\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| < \varepsilon.$$

Die Skalarmultiplikation ist stetig (nicht gleichmäßig!) in (a,x):
Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \min\left(\dfrac{\varepsilon}{\max(|2a| + 1, \|x\|)}, |a| + 1\right)$. Dann gilt für

$$d_{\mathbb{K}\times X}\Big((a,x),(a',x')\Big) = d_{\mathbb{K}}(a,a') + d_X(x,x') = |a - a'| + \|x - x'\| < \delta$$

insbesondere auch $|a'| - |a| \leq |a - a'| < |a| + 1$, d.h. $|a'| \leq |2a| + 1$. Damit ist dann

$$\begin{aligned} d_X(a'x', ax) &= \|a'x' - ax\| = \|a'(x' - x) + (a' - a)x\| \leq |a'| \cdot \|x' - x\| + |a' - a| \cdot \|x\| \leq \\ &\leq \max(|a'|, \|x\|) \cdot (\|x' - x\| + |a' - a|) \leq \\ &\leq \max(|2a| + 1, \|x\|) \cdot (\|x' - x\| + |a' - a|) < \varepsilon. \end{aligned}$$

B.2.4 Definition (Banachraum[1])

Ein vollständiger normierter Raum heißt Banachraum (vollständig bezüglich der durch die Norm gegebenen Metrik).

Beispiele für Banachräume: l^2 oder die L^p-Räume.

B.2.5 Definition (äquivalente Normen)

Seien $n_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}, n_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ Normen. n_1 und n_2 heißen äquivalent, wenn es $m, M \in \mathbb{R}$, $0 < m \leq M$, gibt, so daß für alle $x \in X : mn_2(x) \leq n_1(x) \leq Mn_2(x)$.
Offensichtlich gilt: Äquivalente Normen induzieren äquivalente Metriken.

B.2.6 Satz

1) Jede Norm ist gleichmäßig stetig.
2) Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

Beweis:

1) Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta_\varepsilon := \varepsilon$. Seien $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) = \|x - y\| < \varepsilon$. Dann ist $d_{\mathbb{R}}(\|x\|, \|y\|) = \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| < \varepsilon$.
2) Sei $n_1 : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Norm. Wir zeigen die Äquivalenz zur euklidischen Norm: $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. n_1 ist stetig, nimmt also nach dem Maximumprinzip auf der kompakten Menge S sein Maximum und sein Minimum an. Setze $m := \min_{x \in S} n_1(x)$; $M := \max_{x \in S} n_1(x)$. Da $0 \notin S$ ist $m > 0$. Für $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ist $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$, also gilt $m \leq n_1\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) = \frac{n_1(x)}{\|x\|_2} \leq M$, d.h. $m \cdot \|x\|_2 \leq n_1(x) \leq M \cdot \|x\|_2$.

Bemerkung: Daraus folgt also: Alle von Normen induzierten Topologien auf $\mathbb{K}^n$ sind gleich, d.h. die Begriffe offen, abgeschlossen, Umgebung, Stetigkeit, Konvergenz, Kompaktheit usw. hängen nicht von der verwendeten Norm ab.

B.2.7 Lemma

Seien X, Y normierte Räume, T: $X \longrightarrow Y$ linear. Es gilt:
T ist stetig in 0 $\Longleftrightarrow$ Es gibt eine reelle Zahl $C \geq 0$, so daß für alle $x \in X$ gilt: $\|T(x)\| \leq C \cdot \|x\|$.
Ist diese Bedingung erfüllt, so heißt T auch beschränkt.
Beweis:

„$\Leftarrow$" ist klar

„$\Rightarrow$" Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für $\|x\| < \delta$ gilt: $\|T(x)\| < 1$. Damit hat man für $x \neq 0$:

$$1 \geq \left\| T\left(\frac{1}{2}\delta \frac{1}{\|x\|} \cdot x\right) \right\| = \frac{1}{2\,\|x\|}\delta\, \|T(x)\| \Longleftrightarrow \|T(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \cdot \|x\| .$$

Die Abschätzung gilt natürlich auch für x=0, also ist mit $C = \frac{2}{\delta}$ die Konstante gefunden.

Dieses Lemma rechtfertigt die folgende sehr wichtige Definition:

[1] Stefan Banach (1892-1945)

B.2.8 Definition

Die reele Zahl $\| T \| = \sup_{x \neq 0} \frac{1}{\| x \|} \| T(x) \|$ heißt Norm der stetigen linearen Abbildung T.
Wegen der Linearität von T gilt: $\| T \| = \sup_{\| x \| = 1} \| T(x) \| = \sup_{\| x \| \leq 1} \| T(x) \|$.

Aus der Definition liest man sofort ab:

B.2.9 Bemerkung

Sei T: $X \longrightarrow Y$ eine lineare beschränkte Abbildung. Dann gilt für alle $x \in X : \| T(x) \| \leq \| T \| \cdot \| x \|$.

Der folgende Satz zeigt die Berechtigung des Wortes „Norm“ in der Definition B.2.8:

B.2.10 Satz

Seien X, Y normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume. Der $\mathbb{K}$-Vektorraum L(X,Y) ist zusammen mit der in B.2.8 definierten Norm $\| T \| = \sup_{\| x \| = 1} \| T(x) \|$ ein normierter Raum.

Beweis:
Die Bedingung B.2.1, 1), ist offensichtlich erfüllt.
Nach B.2.9 gilt $\| (aT)(x) \| = \| T(ax) \| \leq \| T \| \cdot \| ax \| = |a| \cdot \| T \| \cdot \| x \|$, d.h. also $\| aT \| \leq |a| \cdot \| T \|$.
Für $a \neq 0$ gilt wegen $T = a^{-1}(aT)$ dann auch $\| T \| \leq |a^{-1}| \cdot \| aT \|$, also $\| aT \| \geq |a| \cdot \| T \|$ und damit $\| aT \| = |a| \cdot \| T \|$.
Die Dreiecksungleichung folgt ebenfalls mit B.2.9 aus

$$\| (T_1 + T_2)x \| = \| T_1 x + T_2 x \| \leq \| T_1 x \| + \| T_2 x \| \leq (\| T_1 \| + \| T_2 \|) \| x \|,$$

also $\| T_1 + T_2 \| \leq \| T_1 \| + \| T_2 \|$.

B.2.11 Satz

Seien X, Y normierte Räume, Y sei vollständig. Dann ist auch L(X,Y) vollständig.

Beweis:
Sei $\{A_n : X \longrightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge stetiger linearer Abbildungen, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß für $n, m \geq N$ gilt: $\| A_n - A_m \| < \varepsilon$. Für alle $x \in X$ gilt dann auch

$$\| (A_n - A_m)x \| \leq \| A_n - A_m \| \cdot \| x \| \leq \varepsilon \| x \| .$$

Also ist für jedes feste $x \in X$ die Folge $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und hat wegen der Vollständigkeit von Y einen Limes. Definiere A: $X \longrightarrow Y$, $Ax := \lim_{n \to \infty} A_n x$.

1) A ist linear, da die A_n linear sind.

2) Stetigkeit: $\{A_n\}$ ist Cauchy-Folge, also auch $(\| A_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$. Daher gibt es ein $M \in \mathbb{R}$ mit $\| A_n \| \leq M$ für alle n, also $\| A_n x \| \leq \| A_n \| \cdot \| x \| \leq M \| x \|$. Folglich hat man $\| Ax \| \leq M \| x \|$, d.h. A ist beschränkt, also nach Lemma B.2.7 stetig.

3) $\{A_n\}$ konvergiert in L(X,Y) gegen A: Für alle $x \in X$ und $n, m \geq N$ gilt: $\| (A_n - A_m)x \| \leq \varepsilon \| x \|$, also gilt auch $\| (A_n - A)x \| \leq \varepsilon \| x \|$, d.h. $\| A_n - A \| \leq \varepsilon$.

B.2.12 Folgerung

Der Dualraum X' eines normierten Raumes X ist vollständig.
Beweis: $\mathbb{K}$ ist vollständig.

B.2.13 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)

Sei X ein Banach-Raum und Y ein normierter Raum. Sei $\mathcal{T}$ eine Menge linearer stetiger Abbildungen $X \longrightarrow Y$, so daß die Menge von Funktionen $\{x \mapsto \|Tx\| \mid T \in \mathcal{T}\}$ punktweise gleichmäßig beschränkt ist. Dann gibt es eine Konstante N, so daß für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt: $\|T\| \leq N$.

Beweis:
Nach dem Satz von Baire (B.1.6) gibt es eine offene Kugel $U = U_{2d}(x_0)$ und eine Konstante c, so daß $\|Tx\| \leq c$ für $x \in U$, $T \in \mathcal{T}$. Sei $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gilt:

$$\|T(x)\| = \frac{1}{d}\cdot \|T(dx)\| = \frac{1}{d}\cdot \|T(dx + x_0 - x_0)\| \leq \frac{1}{d}\|T(dx + x_0)\| + \frac{1}{d}\|T(x_0)\| \leq \frac{c}{d} + \frac{c}{d}.$$

Also gilt $\|T\| \leq \frac{2c}{d}$ für alle $T \in \mathcal{T}$.

B.2.14 Satz (Prinzip der offenen Abbildung)

Seien X, Y Banach-Räume und $T\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige lineare surjektive Abbildung. Dann ist T offen, d.h. das Bild jeder offenen Menge ist offen.
Beweis:
Zunächst sei für Mengen $A, B \subset X$ bzw. $Y, n \in \mathbb{N}$ definiert: $nA := \{nx \mid x \in A\}; A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Der Beweis erfolgt nun in 4 Schritten:

1) Sei $G \subset X$ offen, $0 \in G$. Dann hat $\overline{T(G)}$ wenigstens einen inneren Punkt, d.h. es gibt eine nicht leere offene Menge $V \subset Y$ mit $V \subset \overline{T(G)}$:

   Nach Voraussetzung enthält G eine offene ε-Umgebung $\overline{U_\varepsilon(0)}$ des Nullpunktes. Also gilt $X = \bigcup_n nG$. Da T surjektiv ist, folgt $\bigcup_n nT(G) = Y$, also auch $\bigcup_n \overline{nT(G)} = Y$. Nach dem Satz von Baire (B.1.6) gibt es ein n, so daß $\overline{nT(G)}$ eine nicht leere offene Menge enthält. Die Multiplikation mit n ist ein Homöomorphismus, also enthält $\overline{T(G)}$ eine nicht leere offene Menge.

2) Es gilt sogar: 0 ist innerer Punkt von $\overline{T(G)}$:

   Sei $m : X \times X \longrightarrow X, (x_1, x_2) \longmapsto x_1 - x_2$ und $\tilde{m} : Y \times Y \longrightarrow Y, (y_1, y_2) \longmapsto y_1 - y_2$. Beide Abbildungen sind offensichtlich stetig. Da G offen ist, ist also auch $m^{-1}(G)$ offen in $X \times X$. Da $0 \in G$ ist auch $(0, 0) \in m^{-1}(G)$. Daher gibt es eine beschränkte Umgebung M von 0 in X, so daß $m(M \times M) \subset G$. Weil M beschränkt ist, ist nach B.2.7 auch T(M) beschränkt. Nach 1) gibt es eine nicht leere offene Menge V mit $V \subset \overline{T(M)}$. Man hat jetzt

$$\begin{aligned}\tilde{m}(V \times V) &\subset \tilde{m}(\overline{T(M)} \times \overline{T(M)}) = \tilde{m}(\overline{T(M) \times T(M)}) = \\ &= \overline{\tilde{m}(T(M) \times T(M))} = \overline{T(m(M \times M))} \subset \overline{T(G)},\end{aligned}$$

   wobei zwei bekannte Tatsachen verwendet wurden: Es ist $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ und in kompakten metrischen Räumen gilt für eine stetige Funktion f: $f(\overline{U}) = \overline{f(U)}$. $\overline{T(M) \times T(M)}$ kann als beschränkte Menge in einen kompakten metrischen Raum eingebettet werden.

   Nun ist $\tilde{m}(V \times V) = \bigcup_{a \in V} \{a - v \mid v \in V\}$, d.h. $\tilde{m}(V \times V)$ ist als Vereinigung offener Mengen offen. Da $0 \in \tilde{m}(V \times V)$, ist also 0 innerer Punkt von $\overline{T(G)}$.

3) Das Bild jeder Umgebung $U \subset X$ des Nullpunktes enthält eine Umgebung $V \subset Y$ des Nullpunktes: $V \subset T(U)$.

   Sei $\varepsilon_0 > 0$ vorgegeben. Wähle $\varepsilon_i > 0$ so, daß $\varepsilon_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$. Auf die offenen Vollkugeln $U_{\varepsilon_i}(0)$ in X wird nun 2) angewendet:

$\overline{T(U_{\varepsilon_i}(0))}$ enthält eine offene Kugel $V_{\eta_i}(0)$ für $i = 1,2,\ldots$ Die η_i können so gewählt werden, daß $\lim\limits_{i\to\infty} \eta_i = 0$. Sei nun $y \in V_{\eta_0}(0)$ beliebig vorgegeben. Zu y wird jetzt rekursiv eine Folge $(x_i)_{i\in N}$ definiert: Es ist $y \in V_{\eta_0}(0)$, also $y \in \overline{T(U_{\varepsilon_0}(0))}$. Daher gibt es ein $x_0 \in U_{\varepsilon_0}(0)$ mit $\| y - T(x_0) \| < \eta_1$, also $y - Tx_0 \in \overline{T(U_{\varepsilon_1}(0))}$. Deshalb gibt es ein $x_1 \in U_{\varepsilon_1}(0)$ mit $\| y - T(x_0) - T(x_1) \| < \eta_2$ usw. Allgemein: Ist $y - \sum\limits_{i=0}^{n-1} T(x_i) \in V_{\eta_n}(0) \subset \overline{T(U_{\varepsilon_n}(0))}$, so gibt es ein $x_n \in U_{\varepsilon_n}(0)$ mit $\left\| y - \sum\limits_{i=0}^{n} T(x_i) \right\| < \eta_{n+1}$. Da $\| x_i \| < \varepsilon_i$ und $\sum \varepsilon_i$ konvergent ist, d.h. $\lim\limits_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$, bildet die Folge der Partialsummen von $\sum x_i$ eine Cauchy-Folge, d.h. die Reihe konvergiert. Für $x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$ hat man jetzt $\|x\| \leq \sum\limits_{i=0}^{\infty} \| x_i \| < \varepsilon_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i = 2\varepsilon_0$ und $y = T(x)$. Also gibt es für alle $\varepsilon_0 > 0$ ein $\eta_0 > 0$ mit $V_{\eta_0}(0) \subset T(U_{2\varepsilon_0}(0))$. Das ist gleichwertig mit der Behauptung.

4) Sei $M \subset X$ offen. Dann ist $T(M)$ offen:

Zu $x \in M$ gibt es eine Umgebung U von 0, so daß $x+U \subset M$. Also ist $T(x)+T(U) \subset T(M)$. Nach 3) gibt es eine offene Menge V mit $V \subset T(U)$. Dann ist $T(x) + V \subset T(M)$. Weil die Translation um $T(x)$ ein Homöomorphismus ist, vervollständigt das den Beweis.

B.2.15 Folgerung (Satz vom inversen Operator)

Seien X, Y Banach-Räume, $T: X \longrightarrow Y$ eine bijektive, stetige lineare Abbildung. Dann ist T^{-1} stetig, also T ein Homöomorphismus.
Beweis: T ist nach B.2.14 offen.

Eine Anwendung davon ist

B.2.16 Folgerung (Satz vom abgeschlossenen Graphen)

Seien X, Y Banach-Räume, $T: X \longrightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Es gilt:
T ist stetig $\Longleftrightarrow$ Der Graph $G(T) = \{(x, T(x)) \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.
Beweis:

„$\Rightarrow$ " gilt, da Y ein Hausdorff-Raum[1] ist.

„$\Leftarrow$ " Ist $G(T)$ abgeschlossener Unterraum von $X \times Y$, so ist $G(T)$ ein Banach-Raum ($X \times Y$ ist mit der Norm $\| (x, y) \| := \|x\| + \|y\|$ ein Banach-Raum, abgeschlossene Teilräume von Banach-Räumen sind wieder Banach-Räume nach B.1.4). Die Abbildung $\pi : G(T) \longrightarrow X, (x, T(x)) \longmapsto x$ ist bijektiv, linear und stetig, nach B.2.15 ist also auch π^{-1} stetig. Die Projektion $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ ist auch stetig, also ist $T = p_Y \circ \pi^{-1}$ stetig.

[1] Felix Hausdorff (1868-1942)

Anhang C

Sobolevräume

In diesem Anhang sollen einmal die wichtigsten Definitionen und Sätze über Sobolevräume zusammengestellt werden. Dieser Teil soll gewissermaßen als Nachschlagwerk dienen. Auf Beweise wird dabei verzichtet – einige finden sich jedoch in diesem Skript, sonst wird auf Gilbarg & Trudinger: „Elliptic Partial Differential Equations of second order“ verwiesen.
In diesem Kapitel sei Ω – wenn nichts anderes gesagt ist – ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, d.h. Ω ist beschränkt, offen und zusammenhängend. Wir unterscheiden nicht zwischen einer Funktion und ihrer Äquivalenzklasse, d.h. mit „f hat die Eigenschaft X“ ist gemeint: In der Äquivalenzklasse von f gibt es eine Funktion mit der Eigenschaft X.

C.1 Die L^p-Räume

C.1.1 Definition (C^m-Räume)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $m \in \mathbb{N}_0$. Man setzt

$$C^m(\overline{\Omega}) := \{f \in C^m(\Omega) \mid \text{ Jedes } D^\alpha f,\ |\alpha| \le m, \text{ läßt sich stetig nach } \overline{\Omega} \text{ fortsetzen}\}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{C^m} = \|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\le m} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|$$

wird $C^m(\overline{\Omega})$ zu einem Banachraum.

C.1.2 Definition (L^p-Räume)

Sei $1 \le p < \infty$.
$L^p(\Omega) := \{f \mid f \text{ meßbar}, |f|^p \text{ Lebesgue-integrierbar in } \Omega\}$
$L^\infty(\Omega) := \{f \mid f \text{ ist beschränkt in } \Omega\}$.
Mit der Norm
$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ bzw.
$\|u\|_\infty = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c \in \mathbb{R} \mid |f(x)| < c \text{ fast überall}\}$
wird $L^p(\Omega)$ (bzw. $L^\infty(\Omega)$) zu einem Banachraum.

C.1.3 Die Hölder–Ungleichung

Seien $p, q \ge 1$ (auch ∞ ist zugelassen) mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Weiter seien $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$. Dann ist $u \cdot v \in L^1(\Omega)$ und es gilt die Höldersche Ungleichung:

$$\int_\Omega |u \cdot v| \, dx = \|u \cdot v\|_1 \le \|u\|_p \cdot \|v\|_q$$

C.1.4 Verallgemeinerte Hölder–Ungleichung

Die Hölder–Ungleichung läßt sich induktiv auf m Funktionen erweitern: Gilt $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ und sind $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, so gilt

$$\int_\Omega |u_1 \cdot ... \cdot u_m| \, dx \le \|u_1\|_{p_1} \cdot ... \cdot \|u_m\|_{p_m} .$$

C.1.5 Weitere Eigenschaften der L^p-Räume

1) $L^2(\Omega)$ ist mit dem Skalarprodukt $(u,v) = \int_\Omega uv \, dx$ ein Hilbertraum.

2) $L^p(\Omega)$ ist separabel für $p < \infty$.

3) $C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$.

4) Der Dualraum von $L^p(\Omega)$ ist isomorph zu $L^q(\Omega)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p < \infty$. Das bedeutet: Für $1 \le p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ist die kanonische Abbildung $L^q \longrightarrow (L^p)'$, $f \longmapsto \int_\Omega f(x) \cdot . \, dx$ ein isometrischer Isomorphismus.

5) Für $p \le q$ ist $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ und die Einbettung ist stetig, denn für $u \in L^q(\Omega)$ und $p \le q$ gilt: $|\Omega|^{-\frac{1}{p}} \cdot \|u\|_p \le |\Omega|^{-\frac{1}{q}} \cdot \|u\|_q$. Hier ist die Beschränktheit von Ω wesentlich!

C.1.6 Weitere Ungleichungen

1) Ist $p \le q \le r$ und $\lambda \in [0,1]$ mit $\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{(1-\lambda)}{r}$, so gilt für $u \in L^r(\Omega)$: $\|u\|_q \le \|u\|_p^\lambda \cdot \|u\|_r^{1-\lambda}$.

2) Sei $\varepsilon > 0$ und $\mu = \dfrac{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}$ für $1 \le p \le q \le r \le \infty$, sei $u \in L^r(\Omega)$. Dann gilt folgende Interpolationsungleichung für L^p-Normen:

$$\|u\|_q \le \varepsilon \, \|u\|_r + \varepsilon^{-\mu} \, \|u\|_p .$$

Setzt man $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ voraus, so gilt auch für unbeschränktes Ω : $f \in L^q(\Omega)$ und die beiden Ungleichungen gelten.

C.1.7 Definition (L^p_{loc}-Raum)

Für $1 \le p \le \infty$ sei
$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar | Für alle $\Omega' \subset \Omega$ mit Ω' offen, $\overline{\Omega'}$ kompakt und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ gilt:
$f|_{\Omega'} \in L^p(\Omega')\}$.
Für unbeschränktes Ω ist noch folgender Raum bedeutend:
$L^p_{loc}(\overline{\Omega}) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar | Für jede kompakte Menge $K \subset \overline{\Omega}$ gilt: $f|_{K \cap \Omega} \in L^p(K \cap \Omega)\}$

C.1.8 Satz

Es gelten die folgenden Inklusionen:

1) $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$; $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\overline{\Omega})$.

2) $L^p_{loc}(\overline{\Omega}) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

3) $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, falls $p \le q$.

C.1.9 Definition

Die oben definierten Räume $L^p_{loc}(\Omega)$ sind nicht normiert, sie tragen aber eine Topologie: Eine Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$ konvergiert in $L^p_{loc}(\Omega)$ gegen $u \in L^p_{loc}(\Omega)$, wenn für alle $\Omega' \subset \Omega$ mit Ω' offen, $\overline{\Omega'}$ kompakt und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ gilt: Die Folge $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $L^p(\Omega')$ gegen u.

C.1.10 Satz

$C_0^\infty(\Omega)$ liegt dicht in $L^p_{loc}(\Omega)$.

C.2 Die Sobolevräume $W^{k,p}(\Omega)$

C.2.1 Definition (schwache Ableitung)

Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex. Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache D^α-Ableitung (oder Distributionsableitung) von f, wenn für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \varphi g \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f D^\alpha \varphi \, dx.$$

Man schreibt dann $g = D^\alpha f$. Eine Funktion heißt schwach differenzierbar, wenn alle schwachen D^α-Ableitungen für $|\alpha| = 1$ existieren, sie heißt k-mal schwach differenzierbar, wenn alle schwachen D^α-Ableitungen für $|\alpha| \leq k$ existieren.
Die Menge der k-mal schwach differenzierbaren Funktionen wird mit $W^k(\Omega)$ bezeichnet.

C.2.2 Eigenschaften der schwachen Ableitung

1) Die schwache Ableitung ist bis auf Nullmengen eindeutig bestimmt.

2) Für differenzierbare Funktionen stimmt die schwache Ableitung mit der üblichen Ableitung überein.

3) Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dann gilt:
   $g = D^\alpha f \Longleftrightarrow$ Es existiert eine Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$, die in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen f konvergiert und deren Ableitungen $D^\alpha f_m$ in $L^1_{loc}(\Omega)$ gegen g konvergieren.

4) Die Produktregel gilt immer, wenn die Formulierung sinnvoll ist, z.B.: Seien $u, v \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Dann ist $u \cdot v$ schwach differenzierbar und es gilt: $D(u \cdot v) = uDv + vDu$.

5) Ist $f \in C^1(\mathbb{R}), f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ und $u \in W^1(\Omega)$, so ist die Komposition $f \circ u \in W^1(\Omega)$ und es gilt die Kettenregel:
$$D(f \circ u) = f'(u) \cdot Du.$$

C.2.3 Definition $(W^{k,p}(\Omega))$

Für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ sei
$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid$ Für jedes $|\alpha| \leq k$ existiert die schwache D^α-Ableitung von f und es gilt $D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}$.
Die $W^{k,p}$-Räume heißen auch Sobolevräume[1]. Durch

$$\|f\|_{k,p} = \|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_\infty$$

[1]Sergei Lvovič Sobolev (1908-1989)

wird eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ gegeben. Eine äquivalente Norm ist

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p .$$

Für $p = 2$ wird durch

$$(f,g)_k = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u D^\alpha v \, dx$$

ein Skalarprodukt auf $W^{k,2}(\Omega)$ gegeben.

C.2.4 Definition ($W_0^{k,p}(\Omega), W_{loc}^{k,p}(\Omega)$)

Man setzt $W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$, d.h. $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluß von $C_0^k(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich der $\| \, . \, \|_{k,p}$-Norm. Wie bei den L^p-Räumen definiert man noch:
$W_{loc}^{k,p}(\Omega) := \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ meßbar | Für alle $\Omega' \subset \Omega$ mit Ω' offen, $\overline{\Omega'}$ kompakt und $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ gilt: $f|_{\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega)\}$

C.2.5 Satz

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ und $W_0^{k,p}(\Omega)$ bilden mit der in C.2.3 definierten $\| \, . \, \|_{k,p}$-Norm einen Banachraum. Die Räume $W^{k,2}(\Omega)$ und $W_0^{k,2}(\Omega)$ bilden mit dem dort definierten Skalarprodukt einen Hilbertraum.

Früher unterschied man noch:

C.2.6 Definition ($H^{k,p}(\Omega)$)

Sei $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$. Sei

$$C_{k,p}^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Man setzt $H^{k,p}(\Omega) := \overline{C_{k,p}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$, d.h. $H^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluß von $C_{k,p}^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich der $\| \, . \, \|_{k,p}$-Norm.

N.G.Meyers und J.Serrin bewiesen jedoch in ihrer in Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964), p. 1055/1056 erschienenen Arbeit mit dem schönen Titel H = W:

C.2.7 Satz (H = W)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$H^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega),$$

oder anders ausgedrückt: Der Teilraum $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ liegt dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.
$W^{k,p}(\Omega)$ und $H^{k,p}(\Omega)$ bezeichnen also genau dasselbe. Man findet aber in der Literatur nach wie vor beide Bezeichnungen. Auch in diesem Skript wurden zur allgemeinen Verwirrung beide verwendet.

C.2.8 Satz

Im ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ gilt: $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$.

C.2.9 Einbettungssätze

Es gelten folgende Inklusionen

1) $W_0^{k,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ für $kp < n, q \leq \frac{np}{n-kp}$.

2) $W_0^{k,p}(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ für $0 \leq m < k - \frac{n}{p}$ (d.h. insbesondere: $kp > n$).

Die Einbettungen in 1) sind für $q < \frac{np}{n-kp}$ kompakt, d.h. der Einbettungsoperator $I : W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ bzw. $I : W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$ ist kompakt oder anders ausgedrückt: Die Bilder beschränkter Mengen in $W_0^{k,p}(\Omega)$ unter I sind präkompakt in $L^q(\Omega)$ bzw. $C^m(\overline{\Omega})$. Die Einbettungen aus 2) sind stets kompakt. Hierbei kann $W_0^{k,p}(\Omega)$ im allgemeinen nicht durch $W^{k,p}(\Omega)$ ersetzt werden. Unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen an das Gebiet Ω ist das aber möglich.

C.2.10 Abschätzungen

Es gibt eine Konstante $C = C(n,p)$, so daß für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ folgende Abschätzungen gelten:

1) $\| u \|_{\frac{np}{n-p}} \leq C \cdot \| Du \|_p$ für $p < n$.

2) $\sup\limits_{x\in\Omega} | u(x) | \leq C \cdot |\Omega|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}} \cdot \| Du \|_p$ für $p > n$.

Weiter gibt es eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq m$ und alle $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$ gilt:

3) $\| D^\alpha u \|_{L^2}^2 \leq C \cdot \left(\sum\limits_{|\beta|=m} \| D^\beta u \|_{L^2}^2 \right)$.

Die Ungleichung 3) heißt Poincaré-Ungleichung[1]. Die Voraussetzung von Null-Randwerten ist dabei essentiell.

C.2.11 Definition

Man kann $W^{k,p}(\Omega)$ auch für $k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0, k > 0$ definieren: Wie üblich bezeichne $[k]$ diejenige natürliche Zahl mit $[k] \leq k < [k] + 1$. Für $1 \leq p < \infty$ setzt man dann
$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in W^{[k],p}(\Omega) \mid$ Für alle α mit $|\alpha| = [k]$ gilt:

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\cdot(k-[k])}} \, dxdy < \infty\}.$$

Durch

$$\| u \|_{k,p} := \left(\| u \|_{[k],p}^p + \sum_{|\alpha|=k} \iint\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{n+p\cdot(k-[k])}} \, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird eine Norm auf $W^{k,p}(\Omega)$ gegeben.

C.2.12 Eigenschaften von $W^{k,p}(\Omega)$

Sei $k > 0$ mit $k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$. Für den in C.2.11 definierten Raum $W^{k,p}(\Omega)$ gilt:

1) $W^{k,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.

2) $W^{k,p}(\Omega) \subset W^{[k],p}(\Omega)$.

Ähnlich definiert man Teilräume von $C^0(\overline{\Omega})$:

[1] Jules Henri Poincaré (1854-1912)

C.2.13 Definition ($C^{0,\alpha}$-Räume)

Sei $0 < \beta < 1, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Man setzt

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{f \in C^0(\overline{\Omega}) \mid \sup_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}.$$

Durch

$$\|f\|_{0,\alpha} := \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

wird eine Norm auf $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ gegeben, die $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ zu einem Banachraum macht.

C.2.14 Satz

Für $p \geq 1, 0 < k < \alpha \leq 1$ gilt: $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

C.2.15 Definition ($C^{m,\alpha}$-Räume)

Seien α, Ω wie in Definition C.2.13. Man definiert

$$C^{m,\alpha} := \{f \in C^m(\overline{\Omega}) \mid D^\gamma f \in C^{0,\alpha}(\Omega) \text{ für alle Multiindizes } \gamma \text{ mit } |\gamma| = m\}.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}} := \|f\|_{C^m} + \sum_{|\gamma|=m} \|D^\gamma f\|_{0,\alpha}$$

wird $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ zu einem Banachraum. Dieser ist für $\alpha \neq 0$ nicht separabel.

Literaturverzeichnis

Zunächst ein paar Bücher, in denen man die in der Vorlesung verwendeten Resultate aus anderen Teilgebieten der Mathematik findet:

1. Fischer, Gerd: „Lineare Algebra“,

   Vieweg, Braunschweig (1986)

2. Forster, Otto: „Analysis 3“,

   Vieweg, Braunschweig (1984)

   Hier findet man fast alle Grundlagen zum Lebesgue-Integral, die für die Vorlesung benötigt werden, Integralformeln usw.

3. Gilbarg, David & Trudinger, Neil S.: „Elliptic Partial Differential Equations of second order“,

   Springer-Verlag 1983 (2. Auflage)

   Die kurze Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Sobolevräume in Anhang C wurde anhand dieses Buches erstellt. Die Beweise kann man größtenteils hier nachlesen.

4. Hirzebruch, Friedrich & Scharlau, Winfried: „Einführung in die Funktionalanalysis“,

   Bibl. Inst. Mannheim 1971 (Nachdruck 1991)

   Dieses Buch steht hier, weil es in den ersten Kapiteln die Grundlagen bereitstellt: Es enthält je ein Kapitel über metrische Räume, normierte Räume und über die L^p-Räume. Diese Kapitel sind natürlich auf die Funktionalanalysis zugeschnitten: Das Prinzip der offenen Abbildung, das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und der Satz von Ascoli-Arzelà werden bewiesen, die Einführung des Lebesgue-Integrals muß allerdings knapp bleiben. Der Zugang zur Funktionalanalysis ist algebraisch, es gibt kaum Überschneidungen mit dem Stoff der Vorlesung. Als Fazit kann man sagen: Will man ein paar Seiten der Funktionalanalysis kennenlernen, die in der Vorlesung nicht behandelt werden, so hat man in diesem Buch eine gut lesbare Einführung. Möchte man aber den Stoff der Vorlesung noch einmal mit einem Buch nacharbeiten, so ist Hirzebruch/Scharlau dazu ungeeignet.

5. von Mangoldt & Knopp: „Einführung in die höhere Mathematik“,

   Leipzig (1989), 4. Auflage

   Die im Anhang B behandelte Vervollständigung metrischer Räume wurde hieraus übernommen.

6. Natanson, Isidor P.: „Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen“,

   Verlag Harri Deutsch, Thun (1981)

   In diesem Buch werden das Lebesgue- und das Stieltjes-Integral ausführlich besprochen, die Maßtheorie wird behandelt – wie der Titel schon sagt, alles in einer reellen Veränderlichen. Die Hellyschen Sätze und der Satz von Ascoli-Arzelà werden hier bewiesen.

Interessiert man sich für biographische Angaben über die beteiligten Mathematiker, so kann man in folgenden Werken etwas dazu finden:

1. Meschkowski, Herbert: „Mathematiker-Lexikon“,

   BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim (1980), 3.Auflage

2. „Vieweg Mathematik-Lexikon“,

   Vieweg Braunschweig (1988)

3. „Lexikon bedeutender Mathematiker“,

   Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (1990)

4. Reid, Constance: „Hilbert“,
   Springer New York (1978), 3. Auflage
5. Reid, Constance: „Richard Courant 1888-1972, Der Mathematiker als Zeitgenosse“,
   Springer New York (1979)

Die letzten beiden Bücher sind lesenswerte Biographien der beiden Mathematiker. Dabei wird man erstaunt sein, wie viele der in diesem Skript genannten Mathematiker Schüler von Hilbert waren.

Als Bücher für seine Vorlesung gibt Herr von Wahl an:

1. Achieser, Naum I. & Glasmann, Izrail M.: „Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum“,
   Verlag Harri Deutsch, Thun (1981) (8. Auflage)
2. Dunford & Schwartz: „Linear Operators 1-3“,
   Wiley-Interscience, New York (1958)
3. Pflaumann & Unger: „Funktionalanalysis 1“,
   BI Hochschultaschenbücher Nr. 82/82a
4. Riesz, Friedrich & Sz.-Nagy, Béla: „Vorlesungen über Funktionalanalysis“,
   Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin (1956)
5. Yosida: „Functional Analysis“,
   Springer-Verlag (1978)
6. Jörgens: „Integralgleichungen“,
   B. G. Teubner, Stuttgart
7. Hirzebruch, Friedrich & Scharlau, Winfried: „Einführung in die Funktionalanalysis“,
   Bibl. Inst. Mannheim (1971) (Nachdruck 1991) – siehe oben

Namensverzeichnis

Arzelá, Cesare (1847-1912)
Ascoli, Giulio (1843-1896)

Baire, René-Louis (1874-1932)
Banach, Stefan (1892-1945)
Bessel, Friedrich Wilhelm (1784-1846)
Bolzano, Bernhard (1781-1848)

Cauchy, Augustin Louis (1789-1857)
Courant, Richard (1888-1972)

Dini, Ulisses (1845-1918)
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805-1859)

Fatou, Pierre Joseph Louis (1878-1929)
Fischer, Ernst (1875-1956)
Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830)
Fréchet, Maurice René (1878-1973)
Fredholm, Erik Ivar (1866-1927)
Friedrichs, Kurt Otto (1901-31.12.1982)
Fubini, Guido (1879-1943)

Green, George (1793-1841)

Hahn, Hans (1879-1934)
Hamilton, Sir William Rowan (1805-1865)
Hausdorff, Felix (1868-1942)
Hellinger, Ernst (1883-1950)
Helly, Eduard (1884-1943)
Hermite, Charles (1822-1901)
Hilbert, David (1862-1943)
Hölder, Otto (1859-1937)

Kolmogorow, Andrej Nikolajewitsch (1903-1987)

Laplace, Pierre Simon (1749-1827)
Lax, Peter D. (*1926)
Lebesgue, Henri Léon (1875-1941)
Levi, Beppo (1875-1961)
Liouville, Joseph (1809-1882)

Milgram, Arthur Norton (1912-1961)
Minkowski, Hermann (1864-1909)
Morera, Giacinto (1856-1909)

von Neumann, John (1903-1957)

Parseval, Marc-Antoine (1755-1836)
Plancherel, Michel (1885-1967)
Poincaré, (Jules) Henri (1854-1912)

Rellich, Franz (1906-1955)
Riemann, (Georg Friedrich) Bernhard (1826-1866)
Riesz, Friedrich (1880-1956)

Schmidt, Erhard (1876-1959)
Schrödinger, Erwin (1887-1961)
Schur, Issai (1875-1941)
Schwarz, Hermann Amandus (1843-1921)
Sobolev, Sergei Lvovič (1908-1989)
Steinhaus, Hugo (1887-1972)
Stieltjes, Thomas Jean (1856-1894)
Stone, Marshall Harvey (1903-1989)
Sturm, Jacques Charles François (1803-1855)

Toeplitz, Otto (1881-1940)
Tonelli, Leonida (1885-1946)

Weierstraß, Karl Theodor Wilhelm (1815-1897)
Weyl, Hermann (1885-1955)

Zorn, Max August (1906-1993)

Index